MEMOIRS OF THE COLLEGE OF SCIENCE, UNIVERSITY OF KYOTO, SERIES A,
Vol. XXVII, Mathematics No. 1, 1952.

Über die Ausnahmewerte der meromorphen Funktionen.

Von

Ken'iti KOSEKI

(Eingegangen am 30. September, 1950)

Als Borelscher[1] Satz ist es wohl bekannt, dass, wenn $f(z)$ eine ganze transzendente Funktion auf z-Ebene ist, die Ordnung von $f(z)$ und der Grenzexponent der a-Stellen von $f(z)$, abgesehen von höchstens einem einzigen endlichen Wert, für jeden endlichen Wert a übereinstimmen.

In dieser Arbeit will ich den Ausnahmewerte-Satz im Falle, dass, $f(z)$ in einem Gebiet der z-Ebene meromorph ist, behandeln.

Satz I. Es sei $\mathfrak{G}$ ein Gebiet[2] der z-Ebene, und R sei die Begrenzung von $\mathfrak{G}$, und z_0 sei ein Punkt auf R, der folgenden Bedingungen genügt.

1. Es gibt eine offene Menge U von der Art, dass U den Punkt z_0 enthält und $\bar{U}\cdot R$[3] aus einem Bogen l besteht.

2. Der Bogen l hat Tangente am Punkte z_0.

K sei ein Kreisbogen mit dem Zentrum z_0 und mit dem genügend kleinen Radius, und K sei Querschnitt von $\mathfrak{G}\cdot K$ bestimmt in $\mathfrak{G}$ genau die beiden Gebiete $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$, eines von denen, etwa $\mathfrak{H}$, den Punkt z_0 als Grenzpunkt hat.

Wir bilden $\mathfrak{H}$ konform auf die halb-Ebene $\Re(w)>0$[4] derart ab, dass z_0 auf den unendlich fernen Punkt sich abbilden lässt, und wir bezeichnen diese Abbildungsfunktion mit $z=z(w)$.

Es sei $z=z_1(w_1)$ eine andere Abbildungsfunktion von der Art, dass durch $z=z_1(w_1)$ das Gebiet $\mathfrak{H}$ auf die halb-Ebene $\Re(w_1)>0$ sich abbilden lässt und $z_1(\infty)=z_0$ ist. Wenn für jedes $\theta(<\pi)$

---

1) Vgl. Biebrbach. Lehrbuch der Funktionentheorie II. S. 224.

2) Wir nehmen im folgenden an, dass das Gebiet $\mathfrak{G}$ immer einfachzusammenhängend ist.

3) $\bar{U}$ bedeutet die abgeschlossene Hülle von U.

4) $\Re(w)$ bezw. $\Im(w)$ bedeutet den reellen bezw. imaginären Teil von w.

$\lim\limits_{\substack{w\to\infty \\ |\arg w|<\theta/2}} \arg \dfrac{dz}{d\left(\dfrac{1}{w}\right)}$ existiert, so existiert auch $\lim\limits_{\substack{w_1\to\infty \\ |\arg w_1|<\theta/2}} \arg \dfrac{dz}{d\left(\dfrac{1}{w_1}\right)}$ für jedes $\theta(<\pi)$.

Beweis. Die Umkehrfunktion von $z(w)$ bezeichnen wir mit $w=w(z)$. Wegen $w=w(z)$ und $z=z_1(w_1)$ folgt $w=w(z_1(w_1))$. Durch diese Funktion wird die halb-Ebene $\Re(w_1)>0$ auf $\Re(w)>0$ abgebildet, und der unendlich ferne Punkt $w_1=\infty$ wird auf $w=\infty$ übergeführt. Daher nimmt die Funktion $w=w(z_1(w_1))$ die Gestalt

$$w=\alpha w_1+\beta,\quad (\alpha\gtrless 0) \tag{1}$$

an. Wegen (I) folgt

$$\frac{dz}{d\left(\dfrac{1}{w}\right)}=\frac{dz}{d\left(\dfrac{1}{w_1}\right)}\cdot\frac{d\left(\dfrac{1}{w_1}\right)}{d\left(\dfrac{1}{w}\right)}=\frac{dz}{d\left(\dfrac{1}{w_1}\right)}\cdot\frac{w^2}{w_1^2}\cdot\frac{1}{\alpha}$$

$$=\left(\alpha+\frac{\beta}{w_1}\right)^2\cdot\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{dz}{d\left(\dfrac{1}{w_1}\right)} \tag{2}$$

Somit ist $\arg \dfrac{dz}{d\left(\dfrac{1}{w}\right)}=\arg\left(\alpha+\dfrac{\beta}{w_1}\right)^2+\arg\dfrac{dz}{d\left(\dfrac{1}{w_1}\right)}$. Folglich ist

$$\lim_{\substack{w\to\infty \\ |\arg w|<\theta/2}} \arg \frac{dz}{d\left(\dfrac{1}{w}\right)}=\arg\alpha+\lim_{\substack{w_1\to\infty \\ |\arg w|<\theta/2}} \arg \frac{dz}{d\left(\dfrac{1}{w_1}\right)},$$ w. z. b. w.

Satz II. Angenommen, dass $\mathfrak{G}$, R und z_0 denselben Bedingungen des Satzes I genügen. K bezw. K_1 sei ein Querschnitt von $\mathfrak{G}$ und Kreisbogen mit dem Zentrum z_0 und dem Radius r bezw. r_0, und $\mathfrak{H}$ bezw. $\mathfrak{H}_1$ sei dasjenige Teilgebiet von $\mathfrak{G}$, das durch K bezw. K_1 bestimmt wird, und das den Punkt z_0 als Grenzpunkt hat.

Wir bilden $\mathfrak{H}$ bezw. $\mathfrak{H}_1$ konform auf die halb-Ebene $\Re(w)>0$ bezw. $\Re(w_1)>0$ derart ab, dass z_0 auf unendlich fernen Punkt sich abbilden lässt, und wir bezeichnen diese Abbildungsfunktion mit $z=z(w)$ bezw. $z=z_1(w_1)$. Wenn für jedes $\theta(<\pi)$ $\lim\limits_{\substack{w\to\infty \\ |\arg w|<\theta/2}} \arg \dfrac{dz}{d\left(\dfrac{1}{w}\right)}$

existiert, so existiert auch $\lim\limits_{\substack{w_1 \to \infty \\ |\arg w_1| < \frac{\theta}{2}}} \arg \dfrac{dz}{d\left(\dfrac{1}{w_1}\right)}$

Beweis. Es ist leicht einzusehen, dass entweder $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{H}_1$ enthalten ist oder $\mathfrak{H}_1$ in $\mathfrak{H}$ enthalten ist. Ohne Einscnränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $\mathfrak{H}_1$ in $\mathfrak{H}$ enthalten ist. Durch die Funktion $z=z(w)$ wird $\mathfrak{H}_1$ auf ein Teilgebiet $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{R}(w)>0$ abgebildet. Es ist leicht einzusehen, dass für genügend grossen positiven Wert a und genügend kleinen negativen Wert b die Hàlbgeraden $(\mathfrak{R}(w)=0,\ \mathfrak{J}(w)>a)$ und $(\mathfrak{R}(w)=0,\ \mathfrak{J}(w)<b)$ in der Begrenzung von $\mathfrak{K}$ enthalten ist.

Die Umkehrfunktion von $z=z(w)$ bezeichnen wir mit $w=w(z)$. Durch die Funktion $w=w(z)=w(z_1(w_1))$ wird die Halbebene $\mathfrak{R}(w_1)>0$ auf $\mathfrak{K}$ abgebildet, und $w_1=\infty$ wird auf $w=\infty$ übergeführt.

Nach dem Carathéodoryschen Satz entsprechen bei der Abbildung $w=w(z_1(w_1))$ die Begrenzung von $\mathfrak{R}(w_1)>0$ und die Begrenzung von $\mathfrak{K}$ einander eineindeutig und stetig. Das Urbild von $w=ia$ bezw. $w=ib$ bei der Abbildung $w=w(z_1(w_1))$ bezeichnen wir mit $w_1=ic$ bezw. $w_1=id$. Die Halbgerade $(\mathfrak{R}(w_1)=0,\ \mathfrak{J}(w_1)>c)$ bezw. $(\mathfrak{R}(w_1)=0,\ \mathfrak{J}(w_1)<d)$ wird durch $w=w(z_1(w_1))$ auf die Halbgerade $(\mathfrak{R}(w)=0.\ \mathfrak{J}(w)>a)$ bezw. $(\mathfrak{R}(w)=0, \mathfrak{J}(w)<b)$ abgebildet. Daher können wir nach dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip eine reguläre Funktion $g(w_1)$ auf $|w_1|<\infty$, bis auf $\mathfrak{R}(w_1)=0,\ d \leqq \mathfrak{J}(w_1) \leqq c$, definieren, die auf $\mathfrak{R}(w_1)>0$ mit $w(z_1(w_1))$ identisch ist. Folglich kann man $g(w_1)$ in einer Umgebung von $w_1=\infty$ in Laurentsche Reihe entwickeln. Da $g(\infty)=\infty$ ist, haben wir die folgende Entwicklung

$$g(w_1)=a_n w_1^n + a_{n-1} w_1^{n-1} + \cdots\cdots + a_1 w_1 + a_0 + \frac{b_1}{w_1} + \frac{b_2}{w_1^2} + \cdots\cdots$$

Anderseits ist $g(w_1)$ eine schlichte Funktion, so muss

$$g(w_1)=a_1 w_1 + a_0 + \frac{b_1}{w_1} + \frac{b_2}{w_1^2} + \cdots\cdots (a_1 \neq 0) \tag{1}$$

sein. Aus (I) folgt

$$\frac{dz}{d\left(\dfrac{1}{w}\right)} = \frac{dz}{d\left(\dfrac{1}{w_1}\right)} \cdot \frac{d\left(\dfrac{1}{w_1}\right)}{d\left(\dfrac{1}{w}\right)} = \frac{dz}{d\left(\dfrac{1}{w_1}\right)} \cdot \frac{w^2}{w_1^2} \cdot \frac{dw_1}{dw}$$

$$=\frac{dz}{d\left(\frac{1}{w_1}\right)}\cdot\left\{a_1+o(w_1)\right\}^2\cdot\left\{\frac{1}{a_1}+o(w_1)\right\}\ (2)$$

wo $o(w_1)$ mit $\frac{1}{w_1}$ gegen 0 strebt. Aber die Abbildung $w=g(w_1)$ ist konform am Punkte $w_1=\infty$, so wird jeder Punkt des Bildes von $|\arg w_1|<\frac{\theta}{2}$, für genügend grossen $|w_1|$, in $|\arg w|<\frac{\theta}{2}+\varepsilon,(\varepsilon>o)$ enthalten. Daher ist $\lim\limits_{\substack{w\to\infty\\|\arg w|<\theta/2+\varepsilon}}\arg\frac{dz}{d\left(\frac{1}{w}\right)}$

$$=\arg a_1+\lim_{\substack{w_1\to\infty\\|\arg w|<\theta/2+\varepsilon}}\arg\frac{dz}{d\left(\frac{1}{w_1}\right)},\qquad \text{w. z. b. w.}$$

Satz III. Es sei $\mathfrak{G}$ ein Gebiet der z-Ebene, und R sei die Begrenzung von $\mathfrak{G}$, und z_0 sei ein Punkt auf R, der folgenden Bedingungen genügt.

1. Es gibt eine offene Menge $\overline{U}$ von der Art, dass U den Punkt z_0 enthält und $\overline{U}\cdot R$ aus den beiden einfachen Bögen l und l' mit der Eigenschaft $l\cdot l'=z_0$ besteht.
2. Die beiden Bögen l und l' schliessen am Punkte z_0 einen Winkel $\theta(\neq o,\ 2\pi)$ ein.

K bezw. K_1 sei ein Querschnitt von $\mathfrak{G}$ und Kreisbogen mit dem Zentrum z_0 und dem Radius r bezw. r_1, und $\mathfrak{H}$ bezw. $\mathfrak{H}_1$ sei dasjenige Teilgebiet, das durch K bezw. K_1 bestimmt wird, und das den Punkt z_0 als Grenzpunkt hat.

Wir bilden $\mathfrak{H}$ bezw. $\mathfrak{H}_1$ konform auf den Winkelraum $|\arg w|<\frac{\theta}{2}$ bezw. $|\arg w_1|<\frac{\theta}{2}$ derart ab, dass z_0 auf unendlich fernen Punkt sich abbilden lässt, und wir bezeichnen diese Abbildungsfunktion mit $z=z(w)$ bezw. $z=z_1(w_1)$. Wenn für jedes $\theta'<\theta$ $\lim\limits_{\substack{w\to\infty\\|\arg w|<\theta'/2}}\arg\frac{dz}{d\left(\frac{1}{w}\right)}$ existiert, dann existiert auch $\lim\limits_{\substack{w_1\to\infty\\|\arg w_1|<\theta'/2}}\arg\frac{dz}{d\left(\frac{1}{w_1}\right)}$ für jedes $\theta'<\theta$.

Beweis. Wir setzen $Z=(z-z_0)^{\frac{\pi}{\theta}}, W=w^{\frac{\pi}{\theta}}$. Durch $Z=(z-z_0)^{\frac{\pi}{\theta}}$ wird $\mathfrak{H}$ auf ein Gebiet $\mathfrak{K}$ der z-Ebene abgebildet, und der Punkt

z_0 wird auf $z=0$ übergeführt. Durch $W=w^{\frac{\pi}{\theta}}$ wird der Winkelraum $|\arg w|<\frac{\theta}{2}$ auf die Halbebene $\mathfrak{R}(W)>0$ abgebildet. Wir setzen $Z=Z(W)=(z(W^{\frac{\theta}{\pi}})-z_0)^{\frac{\pi}{\theta}}$, so ist

$$\frac{dZ}{d\left(\frac{1}{W}\right)}=\frac{dZ}{dz}\cdot\frac{dz}{d\left(\frac{1}{w}\right)}\cdot\frac{d\left(\frac{1}{w}\right)}{d\left(\frac{1}{W}\right)} \tag{1}$$

Aus $Z=(z-z_0)^{\frac{\pi}{\theta}}$ und $W=w^{\frac{\pi}{\theta}}$ folgt aber

$$\frac{dZ}{dz}\cdot\frac{d\left(\frac{1}{w}\right)}{d\left(\frac{1}{W}\right)}=\left(\frac{Z}{\frac{1}{W}}\right)^{1-\frac{\theta}{\pi}} \tag{2}$$

Wir bilden $\mathfrak{R}$ konform auf $|\zeta|<1$ derart ab, dass $Z=0$ auf $\zeta=1$ übergeführt wird, und wir bezeichnen diese Abbildungsfunktion mit $Z=Z_1(\zeta)$. Nach dem berühmten Carathéodoryschen Satz existiert $\lim\limits_{\zeta\to 1}\arg\frac{z_1(\zeta)}{\zeta-1}\cdots(3)$, wenn ζ sich innerhalb eines beliebigen von zwei aus $\zeta=1$ ausgehenden Sehnen von $|\zeta|<1$ gebildeten Winkels bewegt. Die Umkehrfunktion von $Z=Z_1(\zeta)$ bezeichnen wir mit $\zeta=\zeta(Z)$, und wir setzen $\mu=\frac{1}{W}$. Durch $\zeta=\zeta\left(Z\left(\frac{1}{\mu}\right)\right)=\zeta(\mu)$ wird der Winkelraum $\Re(\mu)>0$ auf $|\zeta|<1$ abgebildet, und der Punkt $\mu=0$ wird auf $\zeta=1$ übergeführt. Dann existiert für jedes $\theta'(<\pi)$ $\lim\limits_{\substack{\mu\to 0\\ |\arg\mu|<\theta'/2}}\arg\frac{\zeta(\mu)-1}{\mu}$ (4)

Nach (3) und (4) existiert $\lim\limits_{\substack{W\to\infty\\ |\arg W|<\theta''/2}}\arg\frac{Z}{\left(\frac{1}{W}\right)}$ für jedes $\theta''(<\pi)$. Aus

(I) folgt

$$\arg\frac{dZ}{d\left(\frac{1}{W}\right)}=\left(1-\frac{\theta}{\pi}\right)\arg\frac{Z}{\frac{1}{W}}+\arg\frac{dz}{d\left(\frac{1}{w}\right)} \tag{5}$$

Aus (5) folgt ohne weiteres, dass, wenn $\lim\limits_{\substack{w\to\infty\\|\arg w|<\theta'/2}} \arg \dfrac{dz}{d\left(\dfrac{1}{w}\right)}$ für jedes $\theta'(<\theta)$ existiert, so auch $\lim\limits_{\substack{W\to\infty\\|\arg W|<\theta''/2}} \arg \dfrac{dZ}{d\left(\dfrac{1}{W}\right)}$ für jedes θ'' $(<\pi)$ existiert, und umgekert. Aus dieser Tatsache und dem Satz II können wir schliessen, dass der Satz III richtig ist. W. z.b.w.

Satz IV. Angenommen, dass $\mathfrak{G}$, R und z_0 denselben Bedingungen wie im Satze III genügen. K sei Kreisbogen mit dem Zentrum z_0 und dem genügend kleinen Radius r, und $\mathfrak{H}$ sei dasjenige Teilgebiet von $\mathfrak{G}$, das durch K besimmt wird, und das den Punkt z_0 als Grenzpunkt hat. Wir bilden $\mathfrak{H}$ konform auf den Winkelraum $|\arg w| < \dfrac{\theta}{2}$ bezw. $|\arg w_1| < \dfrac{\theta}{2}$ derart ab, dass z_0 auf den unendlich fernen Punkt übergeführt wird, und wir bezeichnen diese Abbildungsfunktion mit $z=z(w)$ bezw. $z=z_1(w_1)$. Wenn $\lim\limits_{\substack{w\to\infty\\|\arg w|<\theta'/2}} \arg \dfrac{dz}{d\left(\dfrac{1}{w}\right)}$ für jedes $\theta'(<\theta)$ existiert, so existiert auch $\lim\limits_{\substack{w_1\to\infty\\|\arg w_1|<\theta'/2}} \arg \dfrac{dz}{d\left(\dfrac{1}{w_1}\right)}$ für jedes $\theta'(<\theta)$.

Beweis. Dieser Satz folgt ohne weiters aus dem Satz I und der Beziehung (5) im Beweise des Satzes III.

Aus den Sätzen III und IV können wir schliessen, dass die Existenz von $\lim \arg \dfrac{dz}{d\left(\dfrac{1}{w}\right)}$ nur von dem Verhalten von R am Punkte z_0 abhängt.

Definition I. Angenommen, dass $\mathfrak{G}$, R, z_0, $\mathfrak{H}$ und $z=z(w)$ denselben Bedingungen wie im Satz IV genügen. Wenn für jedes $\theta'(<\theta)$ $\lim\limits_{\substack{w\to\infty\\|\arg w|<\theta'/2}} \arg \dfrac{dz}{d\left(\dfrac{1}{w}\right)}$ existiert, so sagen wir, dass R am Punkte z_0 Eigenschaft (A) hat.

Satz V. Angenommen, dass, $\mathfrak{G}$, R, z_0, $\mathfrak{H}$ und $z=z(w)$ densel-

1. Vgl. den Beweis des Satzes III.

ben Bedingungen wie im Satz IV genügen, und dass R am Punkte z_0 die Eigenschaft (A) hat. Dann existiert immer $\lim\limits_{\substack{w\to\infty \\ |\arg w|<\theta'/2}} \arg \dfrac{z-z_0}{\frac{1}{w}}$ für jedes $\theta'(<\theta)$, und es besteht $\lim\limits_{\substack{w\to\infty \\ |\arg w|<\theta'/2}} \arg \dfrac{z-z_0}{\frac{1}{w}} = \lim\limits_{\substack{w\to\infty \\ |\arg w|<\theta'/2}} \arg \dfrac{dz}{d\left(\frac{1}{w}\right)}$

Beweis. Wir setzen $Z=(z-z_0)^{\pi/\theta}$, $W=w^{\pi/\theta}$. Dann existiert[1] $\lim\limits_{\substack{W\to\infty \\ |\arg W|<\theta''/2}} \arg \dfrac{Z}{\frac{1}{W}}$ für jedes $\theta''(<\pi)$. Aber $\dfrac{Z}{\frac{1}{W}} = \left(\dfrac{z-z_0}{\frac{1}{w}}\right)^{\pi/\theta}$. Daher ist $\arg \dfrac{Z}{\frac{1}{W}} = \dfrac{\pi}{\theta} \arg \dfrac{z-z_0}{\frac{1}{w}}$ und $\lim\limits_{\substack{w\to\infty \\ |\arg w|<\theta'/2}} \arg \dfrac{z-z_0}{\frac{1}{w}}$ existiert. Wir setzen $w=\dfrac{1}{s}$ so wird durch $w=\dfrac{1}{s}$ der Winkelraum $|\arg w|<\dfrac{\theta}{2}$ auf $|\arg s|<\dfrac{\theta}{2}$ abgebildet, und der Punkt $w=\infty$ wird auf $s=0$ übergeführt.

Wir setzen $s=u+iv$, $z=P(u,v)+iQ(u,v)$. Dann ist

$$\arg (z-z_0) = \tan^{-1} \frac{Q(u,v)-Q(o,o)}{P(u,v)-P(o,o)}, \quad \arg s = \tan^{-1} \frac{v}{u} \tag{1}$$

Auf der reellen Achse von s-Ebene ist $\arg (z-z_0) = \tan^{-1} \dfrac{Q(u,o)-Q(o,o)}{P(u,o)-P(o,o)}$. Nach dem Mittelwertsatze ist aber

$$\arg (z-z_0) = \tan^{-1} \frac{Q(u,0)-Q(0,0)}{P(u,0)-P(0,0)} = \tan^{-1} \frac{\dfrac{\partial Q(u_1,0)}{\partial u}}{\dfrac{\partial P(u_1,0)}{\partial u}} \tag{2}$$

wo $0<u_1<u$ ist. Aber $\arg \dfrac{dz}{ds} = \tan^{-1} \dfrac{\partial Q}{\partial u} \Big/ \dfrac{\partial P}{\partial u}$. Daher ist wegen (2) $\arg (z(u+i0)-z_0) = \arg \dfrac{dz(u_1+i0)}{ds}$ und $\lim\limits_{s\to 0} \arg \dfrac{z-z_0}{s} = \lim\limits_{s\to 0} \arg \dfrac{dz}{ds}$ auf der reellen Achse von s-Ebene. Da nach der Annahme $\lim\limits_{\substack{w\to\infty \\ |\arg w|<\theta'/2}} \arg \dfrac{dz}{d\left(\frac{1}{w}\right)}$ existiert, so ist wegen $s=\dfrac{1}{w}$, $\lim\limits_{\substack{w\to\infty \\ |\arg w|<\theta'/2}} \arg \dfrac{z-z_0}{\frac{1}{w}} = \lim\limits_{\substack{w\to\infty \\ |\arg w|<\theta'/2}}$

$$\arg \frac{dz}{d\left(\frac{1}{w}\right)}, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Definition 2. Es sei $\mathfrak{G}$ ein Gebiet auf z-Ebene, und R sei die Begrenzung von $\mathfrak{G}$, und z_0 sei ein Punkt auf R mit den folgenden Eigenschaften.

I. Es gibt eine offene Menge U von der Art, dass U den Punkt z_0 enthält und $\overline{U}\cdot R$ aus den beiden einfachen Bögen l und l', mit der Eigenschaft $l\cdot l'=z_0$, besteht.

2. Die beiden Bögen l und l' schliessen am Punkte z_0 einen Winkel $\theta(\neq o, \neq 2\pi)$ ein.

3. R hat die Eigenschaft (A) am Punkte z_0.

K sei ein Kreisbogen mit dem Zentrum z_0 und mit dem genügend kleinen Radius r, und K sei ein Querschnitt von $\mathfrak{G}$. K bestimmt in $\mathfrak{G}$ genau die beiden Gebiete $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$, eines von denen, etwa $\mathfrak{H}$, den Punkt z_0 als Grenzpunkt hat. Es seien $\{l_n\}$ und $\{l'_n\}$ ($n=1,2,\cdots\cdots$ad infinitum.) die Folgen der einfachen Bögen auf $\mathfrak{H}$ mit den folgenden Eigenschaften.

I. Der Bogen l_n bezw. l'_n verbindet den Punkt z_0 und einen auf K liegenden Punkt α_n bezw. β_n.

2. Sowohl l_n und l_m, für voneinander verschiedene Nummern m und n, als auch l_n und l'_m, für beliebige Nummern m und n, haben, bis auf z_0, keine Punkte gemeinsam.

3. Sowohl l_n' und l' als auch l_n und l schliessen einen Winkel $\frac{\pi_n}{2}(\neq 0)$ ein, und π_n strebt mit $\frac{1}{n}$ monoton gegen Null.

Wir bezeichnen das Teilgebiet von $\mathfrak{H}$, das als Begrenzung die Vereinigungsmenge $l_n+l_n'+(\alpha_n\,\beta_n)$ hat, mit $\mathfrak{H}_n$, wo $(\alpha_n\,\beta_n)$ den die Punkte α_n und β_n verbindenden und in $\mathfrak{G}$ enthaltenen Teilbogen von K bedeutet.

H sei ein Kreis mit dem Zentrum z_0 und dem Radius $s(<r)$. Unter den Komponenten des Durchnittes $\mathfrak{H}_n\cdot$(das Äussere von H) gibt es einzige Komponente $\mathfrak{K}$ von der Art, dass $\mathfrak{K}$ die Punkte α_n und β_n als Grenzpunkt hat.

Es sei gegeben eine reguläre Funktion $f(z)$ auf $\mathfrak{G}$. Wir bezeichnen das Maximum von $|f(z)|$ auf $\overline{\mathfrak{K}}$ mit $M_n(s)$, und wir setzen

$\overline{\lim\limits_{s\to 0}} \dfrac{\log\log M_n(s)}{\log \dfrac{1}{s}} = \lambda_n$. Es ist leicht einzusehen, dass $\{\lambda_n\}$ eine monoton zunehmende Folge ist, so existiert unendliche oder endliche Grenze $\lim \lambda_n$, die wir mit λ bezeichnen.

Der Wert λ offenbar hängt nicht von der Auswahlweise der Folge $\{l_n\}$, $\{l_n'\}$ und des Bogens K ab. Wir bezeichnen λ von jetzt an als die Ordnung von $f(z)$ im Hadamard-Borelschen Sinne am Punkte z_0. Wenn $z_0=\infty$ ist, so setzen wir $z=\dfrac{1}{\zeta}$. Wir definieren die Ordnung von $f(z)$ im Hadamard-Borelschen Sinne am Punkte $z_0=\infty$ als die Ordnung von $f\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)$ im Hadamard-Borelschen Sinne am Punkte $\zeta=0$.

3. Definition 3. Angenommen, dass $\mathfrak{G}$, R, z_0, K, $\mathfrak{H}$, $\{l_n\}$, $\{l_n'\}$, $\mathfrak{H}_n$ und $\mathfrak{K}$ denselben Bedingungen wie im Defintition 2 genügen.

Es sei gegeben eine meromorphe Funktion $f(z)$ auf $\mathfrak{G}$. Wir setzen

$$A(s)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathfrak{K}}\frac{|f'(z)|^2}{(1+|f(z)|^2)^2}\,dx\,dy \quad \text{und} \quad \overline{\lim_{s\to 0}}\frac{\log\displaystyle\int_r^s \frac{A(t)}{\frac{1}{t}}\,d\left(\frac{1}{t}\right)}{\log\dfrac{1}{s}}=\mu_n$$

wo $z=x+iy$ ist. So ist $\{\mu_n\}$ eine zunehmende Folge, daher existiert unendliche oder endliche Grenze $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n$, die wir mit μ bezeichnen und als Ordnung von $f(z)$ im Nevanlinnaschen Sinne[1] am Punkte z_0 bezeichnen.

Satz VI. Angenommen, dass $\mathfrak{G}$, R, z_0, K und $\mathfrak{H}$ denselben Bedingungen wie in der Definition 2 genügen.

Wir bilden $\mathfrak{H}$ konform auf den Winkelraum $|\arg w|<\dfrac{\theta}{2}$ derart ab, dass z_0 auf den unendlich fernen Punkt und ein Punkt von K auf $w=0$ sich abbilden lässt, und wir bezeichnen diese Abbildungsfunktion mit $z=z(w)$.

$f(z)$ sei eine meromorphe Funktion auf $\mathfrak{G}$, und λ sei die Ordnung von $f(z)$ im Nevanlinnaschen Sinne am Punkte z_0, und λ' sei die Ordnung von $f(z(w))=\varphi(w)$ im Nevanlinnaschen Sinne am Punkte

1) Vgl. R. Nevanlinna, Eindeutige Analytische Funktionen. S. 163—166

$w=\infty$. Dann besteht immer die Beziehung $\lambda=\lambda'$.

Bevor wir Satz VI beweisen, schicken wir den folgenden Hilfssatz voraus.

Hilfssatz. Es seien l und l' die beiden einfachen Bögen auf der z-Ebene, die den Punkt $z=0$ mit $z=\infty$ verbinden, und l und l' haben, ausser den beiden Punkten $z=0$ und $z=\infty$, keine Punkte gemeinsam. Die Vereinigungsmenge $l+l'$ bestimmt dann auf z-Ebene die beiden Gebiete $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$.

Es sei gegeben eine reguläre Funktion $f(z)$ auf $\mathfrak{K}$, und $f(z)$ sei stetig, bis auf $z=\infty$, auf $l+l'$. K sei ein Kreis mit dem Zentrum $z=0$ und dem Radius r. Angenommen nun, dass für jedes $r>0$ der Durchschnitt $K\cdot\overline{\mathfrak{K}}$ aus einem einfachen Bogen $p(r)$ besteht.

$\mathfrak{P}(r_1, r_2)$ sei das Teilgebiet von $\mathfrak{K}$, das durch die Vereinigungsmenge $p(r_1)+p(r_2)+$eine Teilmenge von $(l+l')$ begrenzt wird, wo $r_2>r_1>0$ ist. Wir bezeichnen das Maximum von $|f(z)|$ auf $p(r)$ mit $M(r)$. Wenn $0<r_1<r_2<r_3$ ist und das Maximum von $|f(z)|$ auf $\overline{\mathfrak{P}(r_1,r_3)}=\text{Max.}\ (M(r_1),\ M(r_3))$ ist, so besteht immer die Beziehung

$$M(r_2)\leqq M(r_1)^{\frac{\log r_3-\log r_2}{\log r_3-\log r_1}}\,M(r_3)^{\frac{\log r_2-\log r_1}{\log r_3-\log r_1}}$$

d.h. log $M(r)$ ist eine konvexe Funktion von log r.

Beweis des Hilfssatzes. Der Beweis verläuft ganz analog zu dem Beweise des Hadamardschen Dreikreissatzes. Wir setzen nämlich $F(z)=z^a f(z)$, wo $a=\dfrac{\log M(r_1)-\log M(r_3)}{\log r_3-\log r_1}$ ist.

Nach den Voraussetzungen des Hilfssatzes ist das Maximum von $|f(z)|$ auf $\overline{\mathfrak{P}(r_1,r_3)}=\text{Max.}\ (M(r_1),\ M(r_3))$, so ist das Maximum von $|F(z)|$ auf $\overline{\mathfrak{P}(r_1,\ r_3)}=r_3^a M(r_3)=r_1^a M(r_1)$. Da $p(r_2)$ in $\overline{\mathfrak{P}(r_1,\ r_3)}$ enthalten ist, so ist

$$r_2^a M(r_2)\leqq r_1^a M(r_1)$$

Damit ist $M(r_2)\leqq\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^a M(r_1)=M(r_1)^{\frac{\log r_3-\log r_2}{\log r_3-\log r_1}}\,M(r_3)^{\frac{\log r_2-\log r_1}{\log r_3-\log r_1}}$,

w. z. b. w.

Beweis des Satzes VI. I. Schritt. Es sei $\{\theta_n\}$ eine monoton zunehmende Folge von positiven Zahlen von der Art, dass θ_n für

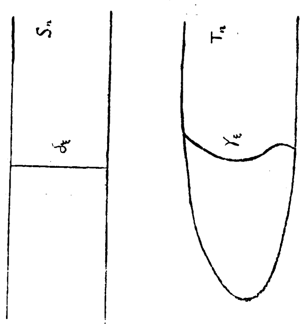
$n\to\infty$ gegen θ strebt. Wir setzen $A(r)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\iint\limits_{\substack{|z|<r\\|\arg z|<\theta_n/2}}\dfrac{|f'(z(w))|^2\,du\,dv}{(1+|f(z(w))|^2)^2}$ und

$\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\dfrac{\log\int_0^r\frac{A(r)}{r}dr}{\log r}=\mu'_n$ wo $w=u+iv$ ist. Wir können leicht beweisen, dass $\lim\limits_{n\to\infty}\mu'_n$ die Nevanlinnasche Ordnung von $f(z(w))$ am Punkte $w=\infty$ ist.

Wir wollen erstens zeigen, dass $\lambda\leq\lambda'$ ist. Wir setzen

$$s=\log\frac{1}{z(w)-z_0}=\log\frac{1}{z(e^\sigma)-z_0}=s(\sigma),\ s=x+iy,\ \sigma=\xi+i\eta \quad (1)$$

$$w=e^\sigma,\ \log w=\sigma \quad (2)$$



Durch die Funktion $w=e^\sigma$ lässt sich der Winkelraum $|\arg w|<\frac{\theta_n}{2}$ auf das Gebiet $S_n(-\infty<\xi<\infty, -\frac{\theta_n}{2}<\eta<\frac{\theta_n}{2})$ abbilden. Das Bild von $|\arg w|<\frac{\theta_n}{2}$ durch die Funktion $z=z(w)$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{H}_n$, und der Punkt α sei das Bild von $w=0$ durch $z=z(w)$. Durch die Funktion $s=\log\dfrac{1}{z(w)-z_0}$ lässt sich das Gebiet $\mathfrak{H}_n$ auf ein gürtelformiges Gebiet T_n abbilden.

Da $z(\infty)=z_0$ ist, folgt aus (I), dass durch $s=s(\sigma)$ der unendlich ferne Punkt von s-Ebene auf den unendlich fernen Punkt von σ-Ebene übergeführt wird.

Durch die Abbildung $s=s(\sigma)$ lässt sich die Strecke ($\xi=$konst., $-\frac{\theta_n}{2}\leq\eta\leq\frac{\theta_n}{2}$) δ_ξ auf einen einfachen Bogen γ_ξ abbilden.

Wir bezeichnen die Länge von γ_ξ mit L, so lässt L sich folgendermassen darstellen.

$$L=\int\limits_{\delta_\xi}|s'(\sigma)|\,d\eta=\int\limits_{-\theta_n/2}^{\theta_n/2}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\eta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\eta}\right)^2}\,d\eta \quad (3)$$

Daraus folgt

$$\left.\begin{aligned} \int_{-\theta_n/2}^{\theta_n/2} \left| \frac{dx}{d\eta} \right| d\eta \leqq L \\ \int_{-\theta_n/2}^{\theta_n/2} \left| \frac{dy}{d\eta} \right| d\eta \leqq L \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Das Integral $\int_{-\theta_n/2}^{\theta_n/2} \left| \frac{dx}{d\eta} \right| d\eta$ stellt[1] bekanntlich die totale Variation von $x(\eta)$ auf $-\frac{\theta}{2} \leqq \eta \leqq \frac{\theta}{2}$ dar.

Wir bezeichnen das Bild von $\eta = \theta_n'/2$ durch $s = s(\sigma)$ mit a und das Bild von $\eta = -\theta_n'/2$ mit b. Dann besteht die Begrenzung von T_n aus der Vereinigung $a+b$, und der Durchschnitt $a \cdot b$ besteht aus einem einzigen Punkt. Wenn beliebig kleines ε gegeben ist, so existiert es zwei reelle Zahlen c und d von der Art, dass der imaginäre Teil y jedes Punktes s auf a bezw. b, für genügend grosses $|s|$, der Ungleichung $y > c$ bezw. $y < d$ genügt und $c - d > \theta_n - \varepsilon$ ist. Für genügend grosses ξ ist daher

$$c - d \leqq \int_{-\theta_n/2}^{\theta_n/2} \left| \frac{dy}{d\eta} \right| d\eta \tag{5}$$

Wir bezeichnen die Differenz des Maximum und des Minimum von reellen Teilen der Punkte auf γ_ξ mit $\omega(\xi)$, so folgt aus (4)

$$\omega(\xi) \leqq \int_{-\theta_n/2}^{\theta_n/2} \left| \frac{dx}{d\eta} \right| d\eta \tag{6}$$

Aus (5) und (6) folgt

$$(c-d)^2 + \{\omega(\xi)\}^2 \leqq \left(\int_{-\theta_n/2}^{\theta_n/2} \left| \frac{dy}{d\eta} \right| d\eta \right)^2 + \left(\int_{-\theta_n/2}^{\theta_n/2} \left| \frac{dx}{d\eta} \right| d\eta \right)^2 \tag{7}$$

Anderseits ist gemäss der Schwarzschen Ungleichung

1) Vgl. S. Saks. Theory of the Integral. S. 127.

$$\Big(\int_{-\theta_n/2}^{\theta_n/2}\Big|\frac{dy}{d\eta}\Big|d\eta\Big)^2+\Big(\int_{-\theta_n/2}^{\theta_n/2}\Big|\frac{dx}{d\eta}\Big|d\eta\Big)^2\leqq\int_{-\theta_n/2}^{\theta_n/2}d\eta\int_{-\theta_n/2}^{\theta_n/2}\Big(\frac{dy}{d\eta}\Big)^2d\eta$$

$$+\int_{-\theta_n/2}^{\theta_n/2}d\eta\int_{-\theta_n/2}^{\theta_n/2}\Big(\frac{dx}{d\eta}\Big)^2d\eta=\theta_n\Big(\int_{-\theta_n/2}^{\theta_n/2}\Big(\frac{dy}{d\eta}\Big)^2d\eta+\int_{-\theta_n/2}^{\theta_n/2}\Big(\frac{dx}{d\eta}\Big)^2d\eta\Big) \tag{8}$$

Somit folgt aus (3), (7) und (8)

$$(c-d)^2+\{\omega(\xi)\}^2\leqq\theta_n\int_{-\theta_n/2}^{\theta_n/2}\Big\{\Big(\frac{dx}{d\eta}\Big)^2+\Big(\frac{dy}{d\eta}\Big)^2\Big\}d\eta=\theta_n\int_{-\theta_n/2}^{\theta_n/2}|s'(\sigma)|^2d\eta \tag{9}$$

Integrieren[1] wir die beiden Ausdrücke von (9) in bezug auf ξ zwischen ξ_0 und ξ_1, so erhalten wir

$$(c-d)^2\int_{\xi_0}^{\xi_1}d\xi+\int_{\xi_0}^{\xi_1}\omega^2(\xi)d\xi=\theta_n\iint|s'(\sigma)|^2d\xi\,d\eta \tag{10}$$

Nun stellt $\iint|s'(\sigma)|^2d\xi\,d\eta$ den Flächeninhalt desjenigen Gebietes dar, welches der Bogen γ_ξ beschreibt, wenn ξ von ξ_0 bis ξ_1 wächst. Wir bezeichnen das Minimum der reellen Teile der Punkte auf γ_ξ mit $x(\xi)$ und das Maximum von $\omega(\xi)$ mit $\omega_1(\xi)$, wenn ξ von ξ_0 bis ξ_1 wächst.

Wenn $\varepsilon>0$ beliebig gegeben ist, existieren es zwei reelle Zahlen c' und d' von der Art, dass Imaginärteil y jedes Punktes auf γ_ξ, für genügend grosses ξ, der Ungleichung $d'<y<c'$ genügt und $c'-d'<\theta_n+\varepsilon$ ist.

Wir zeigen nun, dass $\omega(\xi)$ eine beschränkte Funktion ist. Es ist $\dfrac{ds}{d\sigma}=\dfrac{ds}{dz}\cdot\dfrac{dz}{dw}\cdot\dfrac{dw}{d\sigma}=-\dfrac{w}{z-z_0}\dfrac{dz}{dw}=-\dfrac{1}{(z-z_0)w}\cdot w^2\cdot\dfrac{dz}{dw}$.
Daher ist

$$\arg\frac{ds}{d\sigma}=\arg\frac{1}{(z-z_0)w}+\arg\frac{dz}{d(1/w)} \tag{11}$$

Aus (11) und nach dem Satz V folgt

1) Wir können leicht einsehen, dass $\omega(\xi)$ eine stetige Funktion von ξ ist.

$$\lim_{\sigma\to\infty} \arg \frac{ds}{d\sigma} = \lim_{w\to\infty}\left(-\arg \frac{z-z_0}{1/w}\right) + \lim_{w\to\infty} \frac{dz}{d(1/w)} = 0 \quad (12)$$

Daher werden die zu reeller Achse parallelen Geraden auf σ-Ebene durch $s=s(\sigma)$ auf diejenigen Kurven abgebildet, die Tangenten von denen für genügend grossen $|s|$ beinahe parallel zu der reellen Achse von s-Ebene sind. Wir bezeichnen die Familie dieser Bild-Kurven mit $\mathfrak{F}_1$.

Die zu imaginärer Achse parallelen Strecken, deren Punkten die imaginären Koordinaten haben, die von $-(\theta_n/2)$ bis $\theta_n/2$ wachsen, werden auf diejenigen Kurven abgebildet, die gesamt die orthogonalen Trajektorien von $\mathfrak{F}_1$ machen. Wir bezeichnen die orthogonalen Trajektorien von $\mathfrak{F}_1$ mit $\mathfrak{F}_2$.

Es sei C eine zu $\mathfrak{F}_2$ gehörende Kurve, so lässt sich C derart darstellen, dass $x=x(\eta)$ und $y=y(\eta)\left(-\frac{\theta_n}{2} \leqq \eta \leqq \frac{\theta_n}{2}\right)$. Die Funktion $y(\eta)$ ist dann für genügend grosses $|\sigma|$ eine monoton zunehmende Funktion von η. Denn, wenn $y(\eta)$ keine monotone Funktion von η wäre, so würde es mindestens einen Punkt η_1 auf $-(\theta_n/2) \leqq \eta \leqq (\theta^n/2)$ geben von der Art, dass $dy/d\eta = 0$ am Punkte η_1 ist; dies widerspricht aber der Eigenschaft von $\mathfrak{F}_2$. Es ist auch leicht zu sehen, dass $y(\eta)$ zunehmend in bezug auf η ist.

Wir bezeichnen mit δ den Winkel zwischen einer Tangente von C und der reellen Achse von s-Ebene, so ist $\frac{dy}{d\eta} \Big/ \frac{dx}{d\eta} = \tan\delta$. Daher ist $\left|\frac{dx}{d\eta}\right| = \left|\frac{1}{\tan\delta}\right| \cdot \left|\frac{dy}{d\eta}\right| = \left|\frac{1}{\tan\delta}\right| \cdot \frac{dy}{d\eta}$. Für genügend grosses $|\sigma|$ wird $\left|\frac{1}{\tan\delta}\right| < \varepsilon$. Somit ist $\omega(\xi) \leqq \int \left|\frac{dx}{d\eta}\right| d\eta < \int \varepsilon \frac{dy}{d\eta} d\eta \leqq \varepsilon(c'-d')$. Also ist $\omega(\xi)$ eine beschränkte Funktion von ξ.

Daraus, dass jede Kurve von $\mathfrak{F}_1$, für genügend grosses x, beinahe parallel zu der reellen Achse von s-Ebene ist, folgt ohne weiteres, dass $x(\xi)$ ist eine monoton zunehmende Funktion von ξ ist. Daher wird, für genügend grosses ξ_0, das durch γ_ξ beschriebene Gebiet im Rechtecke $(d' \leqq y \leqq c',\ x(\xi_0) \leqq x \leqq x(\xi_1) + \omega_1(\xi_1))$ enthalten. Folglich ist aus (10) $(c-d)^2 \int_{\xi_0}^{\xi_1} d\xi + \int_{\xi_0}^{\xi_1} \omega^2(\xi) d\xi \leqq \theta_n (c'-d')$ $\{x(\xi_1) + \omega_1(\xi_1) - x(\xi_0)\}$, und es wird

$$x(\xi_1) \geqq \frac{(c-d)^2(\xi_1-\xi_0)}{\theta_n(c'-d')} + \frac{1}{\theta_n(c'-d')}\int_{\xi_0}^{\xi_1} \omega^2(\xi)d\xi - \omega_1(\xi_1) + x(\xi_0) \tag{13}$$

Da $\omega(\xi)$ eine beschränkte Funktion ist, so folgt aus (13) $\varliminf_{\xi_1\to\infty} \frac{x(\xi_1)}{\xi_1-\xi_0} \geqq \frac{(c-d)^2}{\theta_n(c'-d')} \geqq \frac{(\theta_n-\varepsilon)^2}{\theta_n(\theta_n+\varepsilon)}$; da ε beliebig klein ist, so ist

$$\varliminf_{\xi_1\to\infty} \frac{x(\xi_1)}{\xi_1-\xi_0} \geqq 1-\varepsilon' \tag{14}$$

Wir setzen $|w|=t$ und[1] $\underset{\xi=\log t}{x(\xi)}=\log 1/t_1$. H sei ein Kreis mit dem Zentrum z_0 und dem Radius t_1. Unter den Komponenten des Durchschnittes $\mathfrak{H}_n\cdot$(das Äussere von H) gibt es genau eine einzige Komponente $\mathfrak{K}(t_1)$ von der Art, dass $\mathfrak{K}(t_1)$ den Punkt a als Grenzpunkt hat.

Nun wird die Strecke $\left(\xi=\text{konst.}, -\frac{\theta_n}{2} \leqq \eta \leqq \frac{\theta_n}{2}\right)$ durch die Funktion $w=e^\sigma$ auf den Kreisbogen $(|w|=e^\xi=\text{konst.}, |\arg w| < \theta_n/2)$ übergeführt.

Wir bezeichnen das Gebiet $(t<|w|<t', |\arg w|<\theta_n/2)$ mit $\wp(t, t')$, und wir bezeichnen das Maximum von $|z(w)-z_0|$ auf $\overline{\wp(t, t')}$ mit $M(t, t')$. Das Maximum von $|z(w)-z_0|$ auf dem Kreisbogen $(|w|=t=\text{konst.}, |\arg w| \leqq \theta_n/2)$ bezeichnen wir mit $M(t)$, so können wir beweisen, dass für genügend grosses t $M(t, t')=\text{Max.}\,(M(t), M(t'))$ ist.

Angenommen in der Tat, dass dies nicht der Fall ist. So muss $|z(w)-z_0|$ an einem Punkt auf der Strecke $(t<|w|<t', \arg w =\theta_n/2)$ oder auf der Strecke $(t<|w|<t', \arg w=-\theta_n/2)$, etwa auf der Strecke $(t<|w|<t', \arg w=\theta_n/2)$, das Maximum annehmen. Dann muss Realteil x von $s(\sigma)$ an einem Punkt P auf der Strecke $(\eta=\theta_n/2, \log t<\xi<\log t')$ das Maximum annehmen. Daher besteht am Punkte P die Beziehung $dx/d\xi=0$. Dies aber widerspricht der Tatsache, dass die zur reellen Achse parallelen Geraden der σ-Ebene durch $s=s(\sigma)$ auf diejenigen Kurven abgebildet, deren Tangenten für genügend grosses $|s|$ beinahe parallel zu der reellen

1) $\underset{\xi=\log t}{x(\xi)}$ bedeutet den Wert, den die Funktion $x(\xi)$ für $\xi=\log t$ annimmt.

Achse von s-Ebene sind. Damit muss für genügend grosses t $M(t, t') = \text{Max.}\ (M(t), M(t'))$ sein.

Da $M(t, t') = \text{Max.}\ (M(t), M(t'))$ ist, so ist nach dem Hilfssatz $\log t_1$, für genügend grosses t, eine konvexe Funktion von $\log t$. Damit ist $\log 1/t_1$, für genügend grosses t, eine konkave Funktion von $\log t$. Daher besteht immer

$$\frac{\log 1/t_1^2 - \log 1/t_1^1}{\log t^2 - \log t^1} \geqq \frac{\log 1/t_1^3 - \log 1/t_1^2}{\log t^3 - \log t^2}$$

wenn $t^1 < t^2 < t^3$ ist[1]. Daher ist

$$J \geqq \frac{\log 1/t_1^2 - \log 1/t_1^1}{\log t^2 - \log t'} \geqq \frac{\log 1/t_1^3 - \log 1/t_1^2}{\log t^3 - \log t^2} \tag{15}$$

wo $J \ \lim\limits_{t^2 \to t^1 + 0} \dfrac{\log 1/t_1^2 - \log 1/t_1^1}{\log t^2 - \log t^1}$ bedeutet.

Wir setzen nun $A(t_1) = \iint\limits_{\mathfrak{R}(t_1)} \dfrac{|f'(z)|^2}{(1+|f(z)|^2)^2} r dr d\theta$ und $A(t) = \iint\limits_{\substack{|w| \leqq t \\ |\arg w| < \theta_n/2}} \dfrac{|f'(z(w))|^2}{(1+|f(z(w))|^2)^2} R dR d\Theta$, wo $z = re^{i\theta}$ und $w = Re^{i\Theta}$ ist. Es ist dann offenbar

$$A(t_1) \leqq A(t) \tag{16}$$

Anderseits ist

$$\int^{t_1} \frac{A(t_1)}{1/t_1} d\left(\frac{1}{t_1}\right) = \int^{t_1} A(t_1)\, d\left(\log \frac{1}{t_1}\right), \tag{17}$$

wo das rechtstehende Integral im Stieltjesschen Sinne zu verstehen ist.

Aus (15), (16) und (17) folgt

$$\int^{t_1} \frac{A(t_1)}{1/t_1} d\left(\frac{1}{t_1}\right) = \int^{t_1} A(t_1)\, d\left(\log \frac{1}{t_1}\right) \leqq \int^{t} A(t) d(J \log t)$$
$$= J \int^{t} A(t) d(\log t) = J \int^{t} \frac{A(t)}{t} dt.$$

1) $\log 1/t_1^2$ bedeutet den Wert von $x(\xi)$ für $\xi = \log t^2$.

Daher ist

$$\frac{\log \int^{t_1} \frac{A(t_1)}{1/t_1} d\left(\frac{1}{t_1}\right)}{\log 1/t_1} \leqq \frac{\log J + \log \int^{t} \frac{A(t)}{t} dt}{\log t} \cdot \frac{\log t}{\log 1/t_1} \tag{18}$$

Es ist nun aus (14) für genügend grosses $|\xi|$

$$\frac{\log t}{\log 1/t_1} = \frac{\xi}{x(\xi)} < \frac{\xi}{(\xi - \xi_0)(1-2\varepsilon')} < 1 + \varepsilon'$$

Damit folgt

$$\frac{\log \int^{t_1} \frac{A(t_1)}{1/t_1} d\left(\frac{1}{t_1}\right)}{\log 1/t_1} \leqq \frac{\log J + \log \int^{t} \frac{A(t)}{t} dt}{\log t} \cdot \frac{\log t}{\log 1/t_1}$$

$$\leqq (1+\varepsilon') \frac{\log J + \log \int^{t} \frac{A(t)}{t} dt}{\log t}$$

Da t_1 eine monoton abnehmende und stetige Funktion von t ist, so ist $\overline{\lim\limits_{t_1 \to 0}} \dfrac{\log \int^{t_1} \frac{A(t_1)}{1/t_1} d\left(\frac{1}{t_1}\right)}{\log 1/t_1} \leqq (1+\varepsilon') \overline{\lim\limits_{t \to \infty}} \dfrac{\log \int^{t} \frac{A(t)}{t} dt}{\log t}$. Wenn wir $\overline{\lim\limits_{t_1 \to 0}} \dfrac{\log \int^{t_1} \frac{A(t_1)}{1/t_1} d\left(\frac{1}{t_1}\right)}{\log 1/t_1} = \mu_n$ setzen, so ist $\mu_n \leqq (1+\varepsilon')\mu_n'$. Für $n \to \infty$ ist[1] $\lambda \leqq (1+\varepsilon')\lambda'$. Da ε' beliebig klein ist, so wird

$$\lambda \leqq \lambda' \tag{19}$$

2. Schritt. Wir haben das Bild von $\eta = \theta_n'/2$ durch $s = s(\sigma)$ mit a und das Bild von $\eta = -\theta_n'/2$ mit b bezeichnet. Wie im 1. Schritte gezeigt worden ist, sind die Tangenten von a und b für genügend grosses $|s|$ beinahe parallel zu der reellen Achse von s–Ebene. Daher besteht für genügend grosses $|s|$ der Durchsch-

1) Wir können leicht einsehen, dass $\lim\limits_{n \to \infty} \mu_n$ die Nevanlinnasche Ordnung von $f(z)$ am Punkte $z = z_0$ ist.

nitt von einer Gerade $x=$konst. und dem Gebiete T_n aus einer Strecke, die wir mit θ_x und deren Länge mit $\theta(x)$ bezeichnen.

Durch die Funktion $s=s(\sigma)$ wird θ_x auf eine Kurve δ_x auf S_n abgebildet. Wir bezeichnen das Minimum der reellen Teile der Punkte auf δ_x mit $\xi(x)$, so besteht nach dem Ahlforsschen[1] Satz, für genügend grossen Wert x_0,

$$\xi(x) > \theta_n \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\theta(x)} \tag{20}$$

Anderseits ist für genügend grosses x $\theta(x) < \theta_n + \varepsilon$, wo ε beliebig klein ist. Daher folgt aus (20)

$$\xi(x) > \frac{x-x_0}{\theta_n+\varepsilon}\theta_n \tag{21}$$

Wir bezeichnen $\xi(x)$ mit $\log t$ und x mit $\log 1/t_1$, so ist $\log t$ eine konkave Funktion von $\log 1/t_1$. Daher ist $\dfrac{\log t^2-\log t^1}{\log 1/t_1^2-\log 1/t_1^1}$ $\geqq 0$ beschränkt nach oben. d. h. existiert es eine positive Zahl J_1 von der Art, dass für genügend grosse $t^2>t^1>t$

$$\frac{\log t^2-\log t^1}{\log 1/t_1^2-\log 1/t_1^1} \leqq J_1$$

Wir setzen nun $A(t_1)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\iint_{\mathfrak{R}(t_1)} \frac{|f'(z)|^2}{(1+|f(z)|^2)^2} r dr d\theta$ und $A(t)$ $=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\iint_{\substack{|w|\leqq t \\ |\arg w|<\theta_n/2}} \frac{|f'(z(w))|^2}{(1+|f(z(w))|^2)^2} R dR d\theta$. Es ist offenbar

$$A(t_1) \geqq A(t) \tag{23}$$

Aus (22) und (23) folgt

$$\int^{t} \frac{A(t)}{t}dt = \int^{t} A d(\log t) \leqq J_1 \int^{t_1} A(t_1) d\log\left(\frac{1}{t_1}\right) = J_1 \int^{t_1} \frac{A(t_1)}{1/t_1} d\left(\frac{1}{t_1}\right)$$

Daher ist

1) Vgl. R. Nevanlinna. Eindeutige Analytische Funktionen. S. 87.

$$\frac{\log \int^{t} \frac{A(t)}{t}\,dt}{\log t} \leqq \frac{\log J_1 + \log \int^{t_1} \frac{A(t_1)}{1/t_1}\,d\left(\frac{1}{t_1}\right)}{\log 1/t_1} \cdot \frac{\log 1/t_1}{\log t} \tag{24}$$

$\frac{\log 1/t_1}{\log t}$ ist aber für genügend grosses t kleiner als $1+\varepsilon$.

Anderseits ist es leicht einzusehen, dass t eine monoton abnehmende und stetige Funktion von t_1 ist. Daher ist

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\log \int^{t} \frac{A(t)}{t}\,dt}{\log t} \leqq (1+\varepsilon) \overline{\lim_{t_1\to 0}} \frac{\log \int^{t_1} \frac{A(t_1)}{1/t_1}\,d\left(\frac{1}{t_1}\right)}{\log 1/t_1}$$

d. h. $\mu_n' \leqq (1+\varepsilon)\mu_n$

Da ε beliebig klein ist, $\mu_n' \leqq \mu_n$. Wenn θ_n gegen θ strebt, erhalten wir

$$\lambda \geqq \lambda' \tag{25}$$

Aus (19) und (25) können wir schliessen, dass $\lambda = \lambda'$ ist. W. z. b. w.

Satz VI′. Angenommen, dass $\mathfrak{G}$, R, z_0, K und $\mathfrak{H}$, $z = z(w)$ denselben Bedingungen wie im Satz VI genügen. $f(z)$ sei eine reguläre Funktion auf $\mathfrak{G}$, und λ sei die Ordnung von $f(z)$ im Hadamard-Borelschen Sinne am Punkte z_0, und λ' sei die Ordnung von $f(z(w)) = \varphi(w)$ im Hadamard-Borelschen Sinne am Punkte $w = \infty$. Dann besteht immer die Beziehung $\lambda = \lambda'$.

Der Beweis verläuft analog zu dem Beweise des Satzes VI. So lassen wir den Beweis weg.

Satz VII. Es sei $f(z)$ eine meromorphe Funktion auf einem Winkelraum $|\arg z| < \theta/2$. Wir bilden diesen Winkelraum auf das Innere des Einheitskreises von w-Ebene $|w| < 1$ derart ab, dass $z = \infty$ auf $w = 1$ und $z = 0$ auf $w = -1$ sich abbilden lässt, und wir bezeichnen diese Abbildungsfunktion mit $z = z(w)$.

$\iint\limits_{\substack{|z| \leqq r \\ |\arg z| < \theta/2}} \frac{|f'(z)|^2}{(1+|f(z)|^2)^2}\,dxdy$, $(z = x+iy)$, sei beschränkt für genügend kleines r, und μ sei die Nevanlinnasche Ordnung von $f(z)$ am Punkte $z = \infty$ und μ' sei die Ordnung von $f(z(w)) = \varphi(w)$ im Nevanlinnaschen Sinne, so besteht immer die Beziehung $(\theta/\pi)\mu \leqq \mu' + 1$.

Beweis. I. Schritt. Durch $\zeta = z^{\pi/\theta}$ wird der Winkelraum $|\arg z| < \theta/2$ auf das Gebiet $\Re(\zeta) > 0$ derart abgebildet, dass $z = \infty$ auf $\zeta = \infty$ und $z = 0$ auf $\zeta = 0$ sich abbilden lässt. Wir bezeichnen die Nevanlinnasche Ordnung von $f(\zeta^{\theta/\pi})$ am Punkte $\zeta = \infty$ mit λ.

Es sei $\{\theta_n\}$ eine monoton zunehmende Folge von positiven Zahlen von der Art, dasr $\lim\limits_{n\to\infty} \theta_n = \theta$ ist. Durch $\zeta = z^{\pi/\theta}$ wird der Winkelraum $|\arg z| < \theta_n/2$ auf den Winkelraum $|\arg \zeta| < \theta_n/2 \cdot \pi/\theta$ argebildet.

Wir setzen $A(r) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\iint\limits_{\substack{|z| \leq r \\ |\arg z| < \theta_n/2}} \dfrac{|f'(z)|^2}{(1+|f(z)|^2)^2} dxdy$, $A_1(r) = \dfrac{1}{\pi}$ $\displaystyle\iint\limits_{\substack{|\zeta| \leq r^{\frac{\pi}{\theta}} \\ |\arg \zeta| < \theta_n/2 \cdot \pi/\theta}} \dfrac{|f'(\zeta^{\theta/\pi})|^2}{(1+|f(\zeta^{\theta/\pi})|^2)^2} d\xi d\eta$, $(\zeta = \xi + i\eta)$. Es ist offenbar $A(r) = A_1(r)$. Daher ist $\displaystyle\int_0^r \frac{A(r)}{r} dr = \int_0^s \frac{A_1(s)}{s} \cdot \frac{s}{r} \cdot \frac{dr}{ds} ds$, wo $r = s^{\theta/\pi}$ ist. Aus $r = s^{\theta/\pi}$ folgt ohne weiteres $\dfrac{s}{r} \cdot \dfrac{dr}{ds} = 1$. Daher ist $\displaystyle\int_0^r \frac{A(r)}{r} dr = \int_0^s \frac{A_1(s)}{s} ds$. Daraus folgt

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\log \displaystyle\int_0^r \frac{A(r)}{r} dr}{\log r} = \varlimsup_{s\to\infty} \frac{\log \displaystyle\int_0^s \frac{A_1(s)}{s} ds}{\log s} \cdot \frac{\log s}{\log r}$$

$$= \frac{\pi}{\theta} \varlimsup_{s\to\infty} \frac{\log \displaystyle\int_0^s \frac{A_1(s)}{s} ds}{\log s}$$

Daraus folgt, dass, wenn n unendlich wächst, $\mu = (\pi/\theta)\lambda$. Folglich, um das einzusehen, dass der Satz richtig ist, haben wir nur zu zeigen, dass $\lambda < \mu' + 1$.

2. Schritt. Nach dem I. Schritte können wir, ohne Einschränkung der Allgemeinheit, annehmen, dass $\theta = \pi$ ist.

Durch die Funktion

$$w=w(z)=\frac{z-1}{z+1} \tag{1}$$

wird die Halbebene $\Re(z)>0$ auf $|w|<1$ abgebildet, und $w(\infty)=1$, $w(0)=-1$. Wir setzen $w=\xi+i\eta$ und $z=x+iy$.

Ein Kreis $|w|=c$ wird durch die Abbildung (I) auf den Kreis

$$\left(x+\frac{c^2+1}{c^2-1}\right)^2+y^2=\left(\frac{c^2+1}{c^2-1}\right)^2-1 \tag{2}$$

abgebildet. Das Zentrum dieses Kreises ist $(c^2+1/1-c^2,\ 0)$ und der Radius ist gleich $2c/1-c^2$..

Der Schnittpunkt von der Halbgerade $\arg z=\alpha$ und dem Kreis $|z|=r$ hat die Koordinaten $(r\cos\alpha,\ r\sin\alpha)$. Die Entfernung zwischen den beiden Punkten $(r\cos\alpha,\ r\sin\alpha)$ und $(1+c^2/1-c^2,\ 0)$ ist gleich

$$\left\{r^2+\left(\frac{1+c^2}{1-c^2}\right)^2-2r\frac{1+c^2}{1-c^2}\cos\alpha\right\}^{1/2}$$

Wir nehmen vorläufig an, dass r fest ist, und wir wählen $c>0$ derart, dass c der folgenden Gleichung genügt

$$r^2+\left(\frac{1+c^2}{1-c^2}\right)^2-2r\frac{1+c^2}{1-c^2}\cos\alpha=\left(\frac{2c}{1-c^2}\right)^2, \tag{3}$$

d. h.

$$\frac{r^2+1}{2r}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{1+c^2}{1-c^2}. \tag{3'}$$

Wir nehmen c diesen Wert auf, und wir ziehen einen Kreis mit dem Zentrum $(c^2+1/1-c^2,\ 0)$ und dem Radius $2c/1-c^2$. Dieser Kreis wird durch die Abbildung (I) auf $|w|=c$ abgebildet.

Wir setzen $A(r)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\iint\limits_{\substack{|z|\leqq r\\ |\arg z|<\alpha}}\frac{|f'(z)|^2}{(1+|f(z)|^2)^2}dxdy$ und $A(c)=\dfrac{1}{\pi}$ $\displaystyle\iint\limits_{|w|\leqq c}\frac{|f'(z(w))|^2}{(1+|f(z(w))|^2)^2}d\xi d\eta$. Da $A(r)$ in einer Umgebung von $z=0$ beschränkt ist, so ist, für geeignete positive Konstante K, $A(c)+K\geqq A(r)$. Daher besteht

$$\int^{r}\frac{A(r)}{r}dr\leqq\int^{c}\frac{A(c)+K}{c}\cdot\frac{c}{r}\frac{dr}{dc}dc \tag{4}$$

Anderseits folgt aus (3′), dass $\frac{c}{r}\frac{dr}{dc}=\frac{c}{r}\frac{8r^2c\cos\alpha}{(r^2-1)(1-c^2)^2}$ ist. Damit ist, wenn ε beliebig klein gegeben ist, für genügend grosses r, $\frac{c}{r}\frac{dr}{dc}<(1+\varepsilon)\frac{1}{1-c}$. Daraus und aus (4) folgt, dass

$$\int^{r}\frac{A(r)}{r}dr\leqq\int^{c}\frac{A(c)(1+\varepsilon)^2}{c(1-c)}dc=\frac{(1+\varepsilon)^2}{1-c}\int^{c}\frac{A(c)}{c}dc \tag{5}$$

Aus (5) folgt

$$\frac{\log\int^{r}\frac{A(r)}{r}dr}{\log r}\leqq\frac{\log\frac{(1+\varepsilon)^2}{1-c}}{\log 1/1-c}+\frac{\log\int^{c}\frac{A(c)}{c}dc}{\log 1/1-c}\cdot\frac{\log\frac{1}{1-c}}{\log r} \tag{6}$$

Aus (3′) ist $c=\sqrt{\frac{k-1}{1+k}}$, wo $k=\frac{r^2+1}{2r}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}$ ist. Da $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{\log 1/1-c}{\log r}$ eine unbestimmte Form ist, ist es

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log 1/1-c}{\log r}=\lim_{r\to\infty}\frac{1}{2}r\left\{\frac{1}{1+k}+\frac{1}{\sqrt{k^2-1}}\right\}\frac{dk}{dr}.$$

Wir können leicht einsehen, dass $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{1}{2}r\left\{\frac{1}{1+k}+\frac{1}{\sqrt{k^2-1}}\right\}=2\cos\alpha$. Daher ist

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log 1/1-c}{\log r}=1 \tag{7}$$

Aus (6) und (7) folgt ohne weiteres

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log\int^{r}\frac{A(r)}{r}dr}{\log r}\leqq 1+\varlimsup_{c\to 1}\frac{\log\int^{c}\frac{A(c)}{c}dc^{1)}}{\log 1/1-c} \tag{8}$$

Da die Ungleichung (8) für jedes $\alpha(<\pi/2)$ richtig ist, können wir schliessen aus (8), dass $\mu\leqq 1+\mu'$ ist.

1) $\varlimsup\limits_{c\to 1}\frac{\log\int^{c}\frac{A(c)}{c}dc}{\log 1/1-c}$ ist gleich die Nevanlinnasche Ordnung von $f(z(w))$ in $|w|<1$. Vgl. Nevanlinna. a. a. O. S. 166.

3. Schritt. Es sei $z=z_1(w_1)$ irgendeine Funktion von der Art, dass $|\arg z|<\pi/2$ durch $z=z_1(w_1)$ auf $|w_1|<1$ konform abgebildet wird, und dass $z_1(1)=\infty$ und $z_1(-1)=0$ ist. Wir bezeichnen die Ordnung von $f(z_1(w_1))$ im Nevanlinnaschen Sinne mit μ'', und wir wollen zeigen, dass $\mu''=\mu'$ ist.

Durch die Funktion $w(z_1(w_1))=z_1(w_1)-1/z_1(w_1)+1$ wird $|w_1|<1$ auf $|w|<1$ abgebildet, und der Punkt $w_1=1$ bezw. $w_1=-1$ wird auf den Punkt $w=1$ bezw. $w=-1$ übergeführt. Daher lässt sich $w(z_1(w_1))$ folgendermassen darstellen

$$w=\frac{aw_1-b}{a-bw_1} \tag{9}$$

wo a und b reelle Zahlen bedeuten.

Wenn $b=0$ ist, so nimmt die Funktion $w(z_1(w_1))$ die Form $w=w_1$ an. Dann ist offenbar $\mu'=\mu''$.

Wenn $b\neq 0$ ist, so setzen wir $a/b=\delta$. Dann nimmt die Funktion $w(z_1(w_1))$ die Form

$$w=\frac{\delta w_1-1}{\delta-w_1} \tag{10}$$

an.

Der Punkt $w_1=0$ wird durch (10) auf den Punkt $w=-1/\delta$ übergeführt, damit ist $|\delta|>1$. Wir setzen $w_1=x+iy$ und $w=\xi+i\eta$.

Ein Kreis $|w|=r(<1)$ wird durch (10) auf den Kreis

$$\left\{x-\frac{\delta(1-r^2)}{\delta^2-r^2}\right\}^2+y^2=\frac{r^2(\delta^2-1)^2}{(\delta^2-r^2)^2} \tag{11}$$

abgebildet. Das Zentrum dieses Kreises ist $(\delta(1-r^2)/\delta^2-r^2,\ 0)$, und der Radius ist gleich $r(\delta^2-1)/\delta^2-r^2$.

Der Kreis (11) ist im Innern des Kreises $|w_1|=r_1$ enthalten, wo $r_1=\dfrac{1+\delta r}{\delta+r}$. Wir setzen $A_1(r_1)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\iint\limits_{|w_1|\leqq r_1}\frac{|f'(z_1(w_1))|^2}{(1+|f(z_1(w_1))|^2)^2}dxdy$ und $A(r)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\iint\limits_{|w|\leqq r}\frac{|f'(z(w))|^2}{(1+|f(z(w))|^2)^2}d\xi d\eta$, so ist $A(r)\leqq A_1(r_1)$.

Daher ist $\displaystyle\int^r\frac{A(r)}{r}dr\leqq\int^{r_1}\frac{A_1(r_1)}{r_1}\frac{r_1}{r}\frac{dr}{dr_1}dr_1$. Aus $r_1=\dfrac{1+\delta r}{\delta+r}$ folgt, dass $\frac{r_1}{r}\frac{dr}{dr_1}=\frac{1+\delta r}{r(\delta+r)}\cdot\frac{1-\delta^2}{(r_1\delta-1)^2}$ gegen $\frac{1+\delta}{\delta-1}$ strebt für $r\to 1$. Damit ist

$$\frac{\log\int^r\frac{A(r)}{r}dr}{\log 1/1-r}\leqq\frac{\log\frac{2(1+\delta)}{\delta-1}+\log\int^{r_1}\frac{A_1(r_1)}{r_1}dr_1}{\log 1/1-r_1}\cdot\frac{\log 1/1-r_1}{\log 1/1-r} \tag{12}$$

Nach der kurzen Berechnung können wir uns bestätigen, dass $\lim\limits_{r\to 1}\frac{\log 1/1-r_1}{\log 1/1-r}=1$ ist. Daraus und aus (12) folgt

$$\overline{\lim_{r\to 1}}\frac{\log\int^r\frac{A(r)}{r}dr}{\log 1/1-r}\leqq\overline{\lim_{r_1\to 1}}\frac{\log\int^{r_1}\frac{A_1(r_1)}{r_1}dr_1}{\log 1/1-r_1}\quad \text{d. h.}$$

$$\mu'\leqq\mu'' \tag{13}$$

Aus (9) ist $w_1=wa+b/a+bw$. Auf ganz analoge Weise wie oben, können wir zeigen, dass

$$\mu'\geqq\mu'' \tag{14}$$

ist. Aus (13) und (14) folgt

$$\mu'=\mu''$$

Folglich ist $\mu<\mu''+1$. W. z. b. w.

Satz VII'. Es sei $f(z)$ eine reguläre Funktion auf einem Winkelraum $|\arg z|<\theta/2$. Wir bilden diesen Winkelraum auf das Innere des Einheitskreises von w—Ebene $|w|<1$ derart ab, dass $z=\infty$ auf $w=1$ und $z=0$ auf $w=-1$ sich abbilden lässt, und wir bezeichnen diese Abbildungsfunktion mit $z=z(w)$.

$f(z)$ sei beschränkt in einer Umgebung von $z=0$, und λ sei die Ordnung von $f(z)$ im Hadamard-Borelschen Sinne am Punkte $z=\infty$ und λ' sei die Ordnung[1] von $f(z(w))=\varphi(w)$ im Hadamard-Borelschen Sinne, so besteht immer die Beziehung $\lambda'\geqq(\theta/\pi)\lambda$.

---

1) Es sei $\varphi(w)$ eine reguläre Funktion auf $|w|<1$. $M(r)$ sei das Maximum von $|\varphi(w)|$ auf $|w|=r(<1)$ $\lim\limits_{r\to 1}\frac{\log\log M(r)}{\log 1/1-r}$ heisst die Ordnung von $\varphi(w)$ im Hadamard-Borelschen Sinne.

Der Beweis verläuft analog zu dem Beweise des Satzes VII. So lassen wir den Beweis weg.

Satz VIII. Es sei $\mathfrak{G}$ ein Gebiet auf z–Ebene, und R sei die Begrenzung von $\mathfrak{G}$, und z_0 sei ein Punkt auf R, der den folgenden Bedingungen genügt.

1. Es gibt eine offene Menge U von der Art, dass U den Punkt z_0 enthält und $\bar{U}\cdot R$ aus den beiden Bögen l und l', mit der Eigenschaft $l\cdot l'=z_0$, besteht.

2. Die beiden Bögen l und l' schliessen an Punkte z_0 einen Winkel $\theta(\neq 0, \neq 2\pi)$ ein.

3. R hat die Eigenschaft (A) am Punkte z_0.

K sei Kreisbogen mit dem Zentrum z_0 und dem Radius r und ein Querschnitt von $\mathfrak{G}$. K bestimmt in $\mathfrak{G}$ genau die beiden Gebiete $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$, eines von denen, etwa $\mathfrak{H}$, den Punkt z_0 als Grenzpunkt hat. Es seien $\{l_n\}$ und $\{l_n'\}$ $(n=1, 2, 3,\cdots$ ad. infinitum) die Folgen der einfachen Bogen auf $\mathfrak{H}$ mit den folgenden Eigenschaften.

1. Der Bogen l_n bezw. l_n' verbindet den Punkt z_0 und einen auf K liegenden Punkt α_n bezw. β_n.

2. Sowohl l_n und l_m, für voneinander verschiedene Nummern m und n, als auch l_n und l_m', für beliebige Nummern m und n, haben, bis auf z_0, keine Punkte gemeinsam.

3. Sowohl l_n' und l' als auch l_n nnd l schliessen einen Winkel $\pi_n/2(\neq 0)$ ein, und π_n strebt mit $1/n$ monoton gegen Null.

Wir bezeichnen das Teilgebiet von $\mathfrak{H}$, das als Begrenzung die Vereinigungsmenge $l_n+l_n'+(\alpha_n\beta_n)$ hat, mit $\mathfrak{H}_n$, wo $(\alpha_n\beta_n)$ den α_n und β_n verbindenden Teilbogen von K bedeutet.

Es sei gegeben eine meromorphe Funktion $f(z)$ auf $\mathfrak{G}$, und die Nevanlinnasche Ordnung von $f(z)$ am Punkte z_0 sei gleich λ, und λ sei endlich und grösser als π/θ.

Wir bezeichnen die Menge aller auf $\mathfrak{H}_n$ liegenden a–Stellen von $f(z)$ mit $M_n(a)$ und die Vereinigungsmenge $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n(a)$ mit $M(a)$. Dann bestehen die folgenden zwei Tatsachen.

1. Für alle Werte a, ausser höchstens nur zwei Werten, ist der Grenzexponent[1] von $M(a)$ nicht kleiner als λ.

---

1) $M(a)$ bestehe aus $\{\pi_n(a)\}$ $(n=1, 2,\ldots\ldots)$. Unter dem Grenzexponent von $M(a)$ verstehen wir die untere Grenze ρ_1 derjenigen Zahlen k, für die $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\pi_n(a)-z_0|^k$ konvergiert.

2. Für alle Werte a, ist der Grenzexponent von $M_n(a)$, für jede Nummer n, nicht grösser als $\lambda+(\pi/\theta)$.

Beweis. I. Schritt. Wir zeigen erstens, dass wir zu einem Widerspruch kommen, unter der Annahme, dass $M(a)$, $M(b)$ und $M(c)$ als Grenzexponent die Werte haben, die kleiner als λ sind.

Angenommen in det Tat, dass der Grenzexponent von $M(a)=\mu_1$, der von $M(b)=\mu_2$ und der von $M(c)=\mu_3$ ist, und dass sowohl μ_1, μ_2 als μ_3 kleiner als λ ist.

H sei ein Kreis mit dem Zentrum z_0 und dem Radius $s(<r)$. Unter den Komponenten des Durchschnittes $\mathfrak{H}_n\cdot$(das Äussere von H) gibt es genau eine einzige Komponente $\mathfrak{K}$ von der Art, dass $\mathfrak{K}$ die Punkte α_n und β_n als Grenzpunkt hat.

Wir setzen $A(s)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\iint_{\mathfrak{K}}\frac{|f'(z)|^2}{(1+|f(z)|^2)^2}dxdy$, wo $z=x+iy$,

$\overline{\lim\limits_{s\to 0}}\dfrac{\log\displaystyle\int^{s}\frac{A(s)}{1/s}d\left(\frac{1}{s}\right)}{\log 1/s}=\lambda_n$. Nach Definition 3 ist $\lambda=\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n$. Wenn μ_1, μ_2 als auch μ_3 kleiner als λ ist, so sind für genügend grosses n μ_1, μ_2 und μ_3 kleiner als λ_n.

Wir bezeichnen die Nevanlinnasche Ordnung von $f(z)$ am Punkte z_0 in bezug auf $\mathfrak{H}_n$ mit ν_n, so ist nach der Definition 3 $\nu_m>\lambda_n$ fur $m>n$.

Wir setzen $\theta_m=\theta-\pi_m$ und bilden $\mathfrak{H}_m$ auf einen Winkelraum $|\arg\zeta|<\theta_m/2$ derart ab, dass durch diese Abbildung der Punkt z_0 auf den Punkt $\zeta=\infty$ sich abbilden lässt. Wir bezeichnen diese Abbildungsfunktion mit $z=z(\zeta)$. Nach dem Satz VI ist die Nevanlinnasche Ordnung von $f(z(\zeta))$ am Punkte $\zeta=\infty$ gleich ν_m.

Durch die Funktion $\zeta=\zeta(u)=u^{\theta_m/\pi}$ wird der Winkelraum $|\arg\zeta|<\theta_m/2$ auf die Halbebene $\Re(u)>0$ abgebildet. Nach dem I. Schritte des Satzes VII ist die Ordnung von $f(z(\zeta(u)))$ am Punkte $\zeta=\infty$ gleich $(\theta_m/\pi)\nu_m$.

Durch die Funktion $w=w(u)=(u-1/u+1)$ wird die Halbebene $\Re(u)>0$ auf $|w|<1$ abgebildet, und $w(\infty)=1$, $w(0)=-1$. Wir bezeichnen die Umkehrfunktion von $w(u)$ mit $u(w)$ und die Ordnung von $f(z(\zeta(u(w))))$ im Nevanlinnaschen Sinne mit λ', so ist nach dem Satz VII $(\theta_m/\pi)\nu_m\leqq\lambda'+1$. Da $\lambda>\pi/\theta$ ist, so ist für genügend grosse Nummer n $(\theta_n/\pi)\lambda_n>1$. Wir wählen die Nummer n derart, dass $(\theta_n/\pi)\lambda_n>1$ ist, so ist auch $(\theta_m/\pi)\nu_m>1$, da $\nu_m>\lambda_n$ ist.

$\{a_n\}$ sei alle Punkte von $M_m(a)$, $\{b_n\}$ sei alle Punkte von $M_m(b)$ und $\{c_n\}$ sei alle Punkte von $M_m(c)$. Nach der Annahme ist der Grenzexponent von $M_m(a)$, $M_m(b)$ als der von $M_m(c)$ kleiner als λ_n. Da $\lambda_n < \nu_m$ ist, konvergiert sowohl $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i - z_0|^k$ als auch $\sum_{i=1}^{\infty} |b_i - z_0|^k$ für eine gewisse $k=\mu$ $(<\nu_m)$.

Durch die Abbildung $z=z(\zeta)$ werden die $a-$Stellen von $f(z)$ auf die $a-$Stellen von $f(z(\zeta))$ abgebildet. Wir setzen $a_i=z(d_i)$ und $b_i=z(e_i)$, $c_i=z(f_i)$ $(i=1, 2, \cdots\cdots)$.

Wir haben bereits im 2. Schritte des Satzes VI bewiesen, dass für genügend grosse Nummer i

$$\frac{\log |d_j|}{\log |1/a_i - z_0|} < 1+\varepsilon \tag{1}$$

ist. Daher ist $\log|d_i| < \log|1/a_i - z_0|^{1+\varepsilon}$, d. h. $|d_i| < |1/a_i - z_0|^{1+\varepsilon}$ Somit ist für fast alle i

$$\left|\frac{1}{d_i}\right|^k > |a_i - z_0|^{k(1+\varepsilon)} \tag{2}$$

Anderseits ist $\dfrac{\log|d_i|}{\log|1/a_i - z_0|} > \dfrac{1}{1+\varepsilon}$. Daher ist $\log|d_i| > \log|1/a_i - z_0|^{1/1+\varepsilon}$, d. h. $|d_i| > |1/a_i - z_0|^{1/1+\varepsilon}$. Somit ist für fast alle i

$$\left|\frac{1}{d_i}\right|^{k(1+\varepsilon)} < |a_i - z_0|^k \tag{3}$$

Da ε beliebig klein ist, können wir schliessen aus (2) und (3), dass $\sum |1/d_i|^k$ und $\sum |a_i - z_0|^k$ denselben Grenzexponenten haben.

Ebenfalls haben $\sum |1/e_i|^k$ und $\sum |b_i - z_0|^k$ denselben Grenzexponenten. $\sum |1/f_i|^k$ und $\sum |c_i - z_0|^k$ auch haben denselben Grenzexponenten.

Durch die Abbildung $\zeta=\zeta(u)$ wird d_i auf $d_i' = d_i^{\pi/\theta_m}$ abgebildet. Wenn wir den Grenzexponenten von $\sum |1/d_i|^k$ mit h_1 bezeichnen, so ist der Grenzexponent von $\sum |1/d_i'|^k$ gleich $(\theta_m/\pi) h_1$.

Aus $w=w(u)=(u-1/u+1)$ folgt

$$|1-w| = \frac{2}{|1+u|} \tag{4}$$

Wir setzen $a_i' = w(d_i')$. Da $\sum |1/d_i'|^k$ und $\sum |1/1+d_i'|^k$ offenbar dieselben Grenzexponenten haben, folgt aus (4), dass der Grenzexponent von $\sum |1-a_i'|^k$ gleich $(\theta_m/\pi) h_1$ ist.

Anderseits ist $1-|a_i'| \leqq |1-a_i'|$. Daher ist der Grenzexponent von $\sum(1-|a_i'|)^k$ nicht grösser als $(\theta_m/\pi)h_1$. Aber $(\theta_m/\pi)h_1$ ist kleiner als $(\theta_m/\pi)\nu_m$. Daher ist der Grenzexponent von $\sum(1-|a_i'|)^k$ kleiner als $(\theta_m/\pi)\nu_m$.

Wir setzen $b_i'=w(e_i')$ und $c_i'=w(f_i')$, wo $e_i'=e_i^{\pi/\theta_m}$ und $f_i'=f_i^{\pi/\theta_m}$ ist. Wir können ebenfalls zeigen, dass der Grenzexponent von $\sum(1-|b_i'|^k)$ bezw. $\sum(1-|c_i'|)^k$ kleiner als $(\theta_m/\pi)\nu_m$ ist.

Aber der Wert $(\theta_m/\pi)\nu_m$ ist nach dem Satz VII nicht grösser als $\lambda'+1$.

Nach dem Nevanlinnaschen[1] Satz kann es nicht sich ergeben, dass sowohl $\sum(1-|a_i'|)^k$, $\sum(1-|b_i'|)^k$ als auch $\sum(1-|c_i'|)^k$ als Grenzexponent einen Wert hat, der kleiner als $\lambda'+1$ ist. Also sind wir zu einem Widerspruch geführt worden, unter der Annahme, dass sowohl der Grenzexponent von $M(a)$, der von $M(b)$, als auch der von $M(c)$ kleiner als λ ist.

2. Schritt. Es sei $g(z)$ eine meromorphe Funktion auf die abgeschlossene Halbebene $\Re(z)\geqq 0$.

Durch die Funktion $w=w(z)=(z-1/z+1)$ wird $\Re(z)>0$ auf $|w|<1$ abgebildet, und $w(\infty)=1$, $w(0)=-1$. $z=z(w)=(1+w/1-w)$ ist die Umkehrfunktion von $w(z)$.

Wir setzen $A(r)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\iint\limits_{\substack{|z|\leqq r\\ \Re(z)\geqq 0}}\frac{|g'(z)|^2}{(1+|g(z)|^2)^2}\,dxdy$, wo $z=x+iy$, und $\displaystyle\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log\int^r\frac{A(r)}{r}dr}{\log r}=\mu$. Wir bezeichnen die Ordnung von $g(z(w))$ im Nevanlinnaschen Sinne mit ν, und wir wollen beweisen, dass $\mu\geqq\nu$ ist.

Wir setzen $w=\xi+i\eta$. Durch die Funktion $w(z)$ wird der Kreis $|z|=r$ auf den Kreis

$$\left(\xi-\frac{r^2+1}{r^2-1}\right)^2+\eta^2=\left(\frac{r^2+1}{r^2-1}\right)^2-1 \qquad (5)$$

abgebildet. Das Zentrum dieses Kreises ist $(r^2+1/r^2-1,\ 0)$ und der Radius ist gleich $\sqrt{\left(\dfrac{r^2+1}{r^2-1}\right)^2-1}=\dfrac{2r}{r^2-1}$ $(r>1)$.

1) R. Nevanlinna. a. a. O. S. 209.

Das Gebiet $|z|<r$ $(r>1)$ wird durch die Funktion $w=w(z)$ auf den Durchschnitt $(|w|<1)\cdot$(das Äussere des Kreises (5)) abgebildet. Den Durchschnitt $(|w|<1)\cdot$(das Äussere des Kreises (5)) bezeichnen wir mit $\mathfrak{K}$.

Die Entfernung zwischen dem Punkt $w=0$ und dem Kreise (5) ist gleich

$$\frac{r^2+1}{r^2-1}-\frac{2r}{r^2-1}=\frac{(r-1)^2}{r^2-1}=\frac{r-1}{r+1}, \text{ für } r>1 \tag{6}$$

Der Kreis $|w|=R=r-1/r+1$ ist in dem Gebiet $\mathfrak{K}$ enthalten. Daher, wenn wir $A_1(R)=\iint\limits_{|w|\leqq R}\frac{|g'(z(w))|^2}{(1+|g(z(w))|^2)^2}d\xi d\eta$ setzen, so ist immer $A_1(R)\leqq A(r)$. Folglich ist

$$\int^{R}\frac{A_1(R)}{R}dR\leqq\int^{r}\frac{A(r)}{r}\cdot\frac{r}{R}\cdot\frac{dR}{dr}dr \tag{7}$$

Aus $R=\dfrac{r-1}{r+1}$ folgt ohne weiteres, dass $\dfrac{r}{R}\dfrac{dR}{dr}=\dfrac{2r}{r^2-1}$. Daraus und aus (7) wird $\displaystyle\int^{R}\frac{A_1(R)}{R}dR\leqq\int^{r}\frac{A(r)}{r}dr$. Folglich ist

$$\frac{\log\displaystyle\int^{R}\frac{A_1(R)}{R}dR}{\log 1/1-R}\leqq\frac{\log\displaystyle\int^{r}\frac{A(r)}{r}dr}{\log r}\cdot\frac{\log r}{\log 1/1-R} \tag{8}$$

Anderseits, wenn R gegen 1 strebt, so strebt $\dfrac{\log r}{\log 1/1-R}=\dfrac{\log 1+R/1-R}{\log 1/1-R}$ auch gegen 1. Damit wird aus (8)

$$\varlimsup_{R\to 1}\frac{\log\displaystyle\int^{R}\frac{A_1(R)}{R}dR}{\log 1/1-R}\leqq\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log\displaystyle\int^{r}\frac{A(r)}{r}dr}{\log r} \tag{9}$$

Also haben wir die Behauptung im 2. Schritte bewiesen.

3. Schritt. $\{a_i\}$ $(i=1,2,\cdots\cdots)$ sei die Menge aller Punkte von $M_n(a)$.

Wir bilden $\mathfrak{H}_m$, für eine gewisse $m>n$, auf einen Winkelraum $|\arg\zeta|<\theta_m/2$ derart ab, dass durch diese Abbildung der Punkt z_0 auf $\zeta=\infty$ und ein auf $K\cdot\bar{\mathfrak{H}}_m$ liegender Punkt auf $\zeta=0$ abbilden lässt. Wir bezeichnen diese Abbildungsfunktion mit $z=z(\zeta)$, und wir setzen $a_i=z(b_i)$.

$\sum\limits_{i=1}^{\infty}|a_i-z_0|^k$ und $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|1/b_i|^k$ haben denselben Grenzexponenten.

Daher, wenn der Grenzexponent von $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|1/b_i|^k$ nicht grösser als $\lambda+(\pi/\theta_m)$ ist, so gilt dasselbe für $\sum|a_i-z_0|^k$.

Durch die Funktion $u=u(\zeta)=\zeta^{\pi/\theta_m}$ wird der Winkelraum $|\arg\zeta|<\theta_m/2$ auf die Halbebene $\Re(u)>0$ abgebildet. Wir setzen $\zeta=\zeta(u)=u^{\theta_m/\pi}$ und $c_i=u(b_i)$. Wie im 1. Schritte gezeigt worden ist, ist der Grenzexponent von $\sum|1/c_i|^k=\theta_m/\pi\times$ der Grenzexponent von $\sum|1/b_i|^k$. Daher, wenn der Grenzexponent von $\sum|1/c_i|^k$ nicht grösser als $(\theta_m/\pi)\lambda+1$ ist, so ist der Grenzexponent von $\sum|1/b_i|^k$ nicht grösser als $\lambda+(\pi/\theta_m)$.

Durch die Funktion $w=w(u)=u-1/u+1$ wird die Halbebene $\Re(u)>0$ auf $|w|<1$ derart abgebildet, dass $w(\infty)=1$ und $w(0)=-1$ ist. Wir setzen $d_i=w(c_i)$ und bezeichnen die Umkehrfunktion von $w(u)$ mit $u(w)$.

Die Ordnung von $f(z(\zeta(u(w))))$ im Nevanlinnaschen Sinne bezeichnen wir mit $\varkappa$. Dann ist nach dem Nevanlinnaschen[1] Satz der Grenzexponent von $\sum(1-|d_i|)^k$ nicht grösser als $\varkappa+1$, wenn $\varkappa>0$ ist.

Nun ist es, wenn $|w|<1$ ist,

$$1-|w|^2=(1-|w|)(1+|w|)\leqq 2(1-|w|) \tag{10}$$

$$1-|w|=\frac{1-|w|^2}{1+|w|}\leqq 1-|w|^2 \tag{11}$$

Aus (10) und (11) schliessen wir ohne weiteres, dass $\sum(1-|d_i|)^k$ und $\sum(1-|d_i|^2)^k$ denselben Grenzexponenten haben.

Wir setzen $w=\xi+i\eta$ und $u=x+iy$. Durch die Funktion $w=w(u)$ wird der Kreis $|u|=r_i$ auf

$$\left(\xi-\frac{r_i^2+1}{r_i^2-1}\right)^2+\eta^2=\left(\frac{r_i^2+1}{r_i^2-1}\right)^2-1 \tag{12}$$

1) R. Nevanlinna. a. a. O. S. 253.

abgebildet. Daher, wenn c_i auf $|u|=r_i$ liegt, so liegt d_i auf dem Kreis (12). Da d_i auf dem Kreis (12) liegt, so ist, wenn wir $d_i=\xi_i+i\eta_i$ setzen,

$$\sqrt{\left(\xi_i-\frac{r_i^2+1}{r_i^2-1}\right)^2+\eta_i^2}=\sqrt{\left(\frac{r_i^2+1}{r_i^2-1}\right)^2-1}=\frac{2r_i}{r_i^2-1}\,(r_i>1) \tag{13}$$

Es gibt eine Zahl α von der Art, dass $0<\alpha<\pi/2$ ist und fast alle Punkte von $u=c_i$ $(i=1, 2,\cdots\cdots)$ in dem Gebiete $|\arg u|<\alpha$ enthalten sind.

Die Halbgerade $\arg u=\alpha$ bezw. $\arg u=-\alpha$ wird auf den Kreis

$$\xi^2+\left(\eta+\frac{1}{\tan\alpha}\right)^2=\frac{1}{\sin^2\alpha} \tag{14}$$

bezw.

$$\xi^2+\left(\eta-\frac{1}{\tan\alpha}\right)^2=\frac{1}{\sin^2\alpha} \tag{15}$$

abgebildet.

Der Schnittpunkt von den beiden Kreisen (14) und (12) sei mit S bezeichnet und (e, f) sei die Koordinaten von S, so ist

$$1-(\xi_i^2+\eta_i^2)\geqq 1-(e^2+f^2) \tag{16}$$

Wir bezeichnen das Zentrum des Kreises (12) mit T und den Punkt $w=0$ mit O. Dann ist es

$$e^2+f^2=\left(\frac{r_i^2+1}{r_i^2-1}\right)^2+\left(\frac{2r_i}{r_i^2-1}\right)^2-2\frac{r_i^2+1}{r_i^2-1}\cdot\frac{2r_i}{r_i^2-1}\cos\gamma, \tag{17}$$

wo γ den Winkel zwischen den beiden Strecken $\overrightarrow{TS}$ und $\overrightarrow{TO}$ bedeutet.

Wir können leicht einsehen, dass $\gamma<\alpha$ ist, so ist $\cos\gamma>\cos\alpha$. Daher folgt aus (17)

$$e^2+f^2<\left(\frac{r_i^2+1}{r_i^2-1}\right)^2+\left(\frac{2r_i}{r_i^2-1}\right)^2-2\frac{r_i^2+1}{r_i^2-1}\cdot\frac{2r_i}{r_i^2-1}\cos\alpha$$

Damit ist

$$1-(e^2+f^2)>1-\left(\frac{r_i^2+1}{r_i^2-1}\right)^2-\left(\frac{2r_i}{r_i^2-1}\right)^2+2\frac{r_i^2+1}{r_i^2-1}\cdot\frac{2r_i}{r_i^2-1}\cos\alpha$$

$$=-2\left(\frac{2r_i}{r_i^2-1}\right)^2+2\frac{r_i^2+1}{r_i^2-1}\cdot\frac{2r_i}{r_i^2-1}\cos\alpha \tag{18}$$

Aber $-2\left(\frac{2r_i}{r_i^2-1}\right)^2+2\frac{r_i^2+1}{r_i^2-1}\cdot\frac{2r_i}{r_i^2-1}\cos\alpha$ ist positiv für genügend grosses r_i. Daher folgt aus (13) (16) und (18), dass für genügend grosses r_i

$$\frac{\sqrt{\left(\xi_i-\frac{r_i^2+1}{r_i^2-1}\right)^2+\eta_i^2}}{1-(\xi_i^2+\eta_i^2)}\leqq\frac{\frac{2r_i}{r_i^2-1}}{-2\left(\frac{2r_i}{r_i^2-1}\right)^2+2\frac{r_i^2+1}{r_i^2-1}\cdot\frac{2r_i}{r_i^2-1}\cdot\cos\alpha}$$

$$=\frac{1}{-2\frac{2r_i}{r_i^2-1}+2\frac{r_i^2+1}{r_i^2-1}\cos\alpha}<\frac{1}{\cos\alpha}\tag{19}$$

Aus (13) und (19) folgt

$$\frac{2r_i}{r_i^2-1}\leqq\{1-(\xi_i^2+\eta_i^2)\}\frac{1}{\cos\alpha}\tag{20}$$

Anderseits ist $2r_i/r_i^2-1>2/r_i$, so ist nach (20)

$$\frac{2}{r_i}<\{1-(\xi_i^2+\eta_i^2)\}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}$$

Daher ist der Grenzexponent von $\sum|1/c_i|^k$ nicht grösser als $\varkappa+1$. Somit ist der Grenzexponent von

$$\sum\left|\frac{1}{b_i}\right|^k=\frac{\pi}{\theta_m}(\varkappa+1)\tag{21}$$

Wir bilden $\mathfrak{H}$ auf den Winkelraum $|\arg\zeta|<\theta/2$ derart ab, dass durch diese Abbildung der Punkt z_0 auf $\zeta=\infty$ und ein auf dem Kreis K liegender Punkt auf $\zeta=0$ übergeführt wird. Wir bezeichnen diese Abbildungsfunktion mit $z=z_1(\zeta)$.

Wir bezeichnen das Bild von dem Gebiet $|\arg\zeta|<\theta_m/2$ mit $\mathfrak{H}_m'$. Fast alle Punkte von $M_n(a)$ müssen dann in $\mathfrak{H}_m'$ enthalten sein. Daher können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $\mathfrak{H}_m'$ mit $\mathfrak{H}_m$ übereinstimmen, und dass $z(\zeta)$ mit $z_1(\zeta)$ identisch ist.

Wir setzen $A(r)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\substack{|\zeta|\leqq r\\|\arg\zeta|\leqq\theta_m/2}}\frac{|f'(z(\zeta))|^2}{(1+|f(z(\zeta))|^2)^2}dt_1dt_2$, wo $\zeta=t_1+it_2$, und $\lambda_m' = \overline{\lim_{r\to\infty}} \dfrac{\log \int^r \frac{A(r)}{r}\, dr}{\log r}$. Wie im Satze VI gezeigt worden ist, ist immer $\lambda_m' = \lambda_m$.

Nach dem 2. Schritt des Beweises dieses Satzes ist $\varkappa \leqq (\theta_m/\pi)\lambda_m'$, damit ist $\varkappa \leqq (\theta_m/\pi)\lambda_m$. Daher ist nach (21) der Grenzexponent von $\sum |1/b_i|^k$ kleiner als $\lambda + (\pi/\theta_m)$.

Da m beliebig grosse Nummer ist, so ist der Grenzexponent von $\sum |1/b_i|^k$ nicht grösser als $\lambda + (\pi/\theta)$. Da der Grenzexponent von $\sum |1/b_i|^k$ und der von $\sum |a_i - z_0|^k$ gleich sind, so ist der Grenzexponent von $\sum |a_i - z_0|^k$ nicht grösser als $\lambda + (\pi/\theta)$. W. z. b. w.

Satz VIII′. Angenommen, dass $\mathfrak{G}$, R, z_0, K, $\mathfrak{H}$, $\{l_n\}$, $\{l_n'\}$, $\mathfrak{H}_n$ denselben Bedingungen wie im Satze VIII genügen.

Es sei gegeben eine reguläre Funktion $f(z)$ auf $\mathfrak{G}$, und die Hadamard-Borelsche Ordnung von $f(z)$ am Punkte z_0 sei gleich λ, und λ sei endlich und grösser als π/θ.

Wir bezeichnen die Menge aller auf $\mathfrak{H}_n$ liegenden a—Stellen von $f(z)$ mit $M_n(a)$ und die Vereinigungsmenge $\sum_{n=1}^{\infty} M_n(a)$ mit $M(a)$. Dann bestehen die folgenden zwei Tatsachen.

1. Für alle endlichen Werte a, ausser höchstens nur einem einzigen Wert, ist der Grenzexponent von $M(a)$ nicht kleiner als λ.

2. Für alle endlichen Werte a, ist der Grenzexponent von $M_n(a)$, für jede Nummer n, nicht grösser als $\lambda + (\pi/\theta)$.

Der Beweis verläuft analog zu dem Beweise des Satzes VIII. Wir haben nur zu beweisen, statt dem 2. Schritt, den folgenden 2′. Schritt.

2′. Schritt. Es sei $g(z)$ eine reguläre Funktion auf die abgeschlossene Halbebene $\Re(z) \geqq 0$. Durch die Funktion $w = w(z) = z - 1/z + 1$ wird $\Re(z) > 0$ auf $|w| < 1$ abgebildet, und $w(\infty) = 1$, $w(0) = -1$. $z = z(w) = 1 + w/1 - w$ ist die Umkehrfunktion von $w(z)$.

Wir bezeichnen das Maximum von $|g(z)|$ auf dem Gebiete $(\Re(z) \geqq 0,\ |z| \leqq r)$ mit $M(r)$. Wir bezeichnen $\overline{\lim_{r\to\infty}} \dfrac{\log\log M(r)}{\log r}$ mit μ und die Ordnung von $g(z(w))$ im Hadamard-Borelschen Sinne mit ν. Dann besteht $\mu \geqq \nu$.

Der Beweis des 2′. Schrittes verläuft auch analog zu dem Beweise des 2. Schrittes, so lassen wir ihn weg.

Aus dem Satz VIII und dem Valironschen Satz[1] folgt ohne weiteres

Satz IX. Wenn wir den Grenzexponenten von $M_n(a)$ mit $\rho_n(a)$ und $\lim_{n\to\infty}\rho_n(a)$ mit $\rho(a)$ bezeichnen, so ist für alle Werte a, ausser höchstens zwei Werten, $\rho(a)$ identisch mit einem für alle a gemeinsamen Wert, der nicht kleiner als λ und nicht grösser als $\lambda+(\pi/\theta)$ ist. $(\lambda>\pi/\theta)$

---

1) G. Valiron. Sur les directions de Borel des fonctions mérmorphes d'ordre fini. Jour. de. Math. IX. (1931).