MEMOIRS OF THE COLLEGE OF SCIENCE, UNIVERSITY OF KYOTO, SERIES, A
Vol. XXVII, Mathematics No. 1, 1952.

Une remarque sur les fonctions multivalentes

Par

Akira KOBORI

A mon maître, M. le professeur Toshizô Matsumoto,
à l'occasion de sa soixantème fête de naissance.

(Reçu le 10 Sept., 1950)

---

1. Dans les pages suivantes nous ne considérons qu'une famille $\mathfrak{F}$ de fonctions $\zeta(z)$ de la forme

$$\zeta(z)=z^{-p}(a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n+\cdots),\ a_0\neq o,$$

qui sont p-valentes dans le cercle-unité $|z|<1$, où q désigne un entier positif.

Commençons par quelques lemmes.

Lemme 1.[1] Si $\zeta(z)\in\mathfrak{F}$ et si $\{z^p\zeta(z)\}^{\frac{\lambda}{2p}}$, $\lambda>o$, est holomorphe sur le domaine $|z|<1$ qui sè développer sous la forme $b_0+b_1z+\cdots\cdots+b_nz^n+\cdots$, on a

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(2\nu-\lambda)\ |b_\nu|^2\leqq\lambda\,|b_0|^2.$$

Lemme 2. Si $\zeta(z)\in\mathfrak{F}$, on a $|a_1|\leqq 2p\ |a_0|$.

Si l'on pose $\lambda=1$ dans le lemme précédent, on a

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(2\nu-1)\,|b_\nu|^2\leqq|b_0|^2,$$

d'ou l'on déduit $|b_1|\leqq|b_0|$. Etant $b_0=a_0^{\frac{1}{2p}}$ et $b_1=\dfrac{1}{2p}a_0^{\frac{1}{2p}}\cdot a_1$, on en obtient l'inégalite à prouver.

Lemme 3. Si l'on pose $\lambda=3$ dans lemme 1, on a

$$\sum_{\nu=2}^{\infty}(2\nu-3)\,|b^\nu|^2\leqq 12\,|b_0|^2.$$

De l'inégalité du lemme 1, on déduit, en posant $\lambda=3$,

---

1) Cf. pour la démonstration mon article "Zur Theorie der mehrwertigen Funktionen. Japanese Jour. of Math. **19**, 1947.

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(2\nu-3)\,|\,b_\nu\,|^2 \leqq 3\,|\,b_0\,|^2,$$

d'où

$$\sum_{\nu=2}^{\infty}(2\nu-3)\,|\,b_\nu\,|^2 \leqq 3\,|\,b_0\,|^2+|\,b_1\,|^2.$$

Des relations $a_0=b_0^{\frac{2p}{3}}$, et $a_1=\frac{2p}{3}b_0^{\frac{2p}{3}}\,b_1$ on déduit, a l'aide de lemme 2

(1) $$|\,b_1\,| \leqq 3\,|\,b_0\,|.$$

Ainsi

$$\sum_{\nu=2}^{\infty}(2\nu-3)\,|\,b_\nu\,|^2 \leqq 3\,|\,b_0\,|^2+9|\,b_0\,|^2=12|b_0|^2$$

2. Si $|\,z\,|=r<1$, on a

$$|\{z^p\zeta(z)\}^{\frac{3}{2p}}| \leqq \sum_{\nu=0}^{\infty}|\,b_\nu\,|\,r^\nu$$
$$=|\,b_0\,|+|\,b_1\,|\,r+r^2(\sum_{\nu=2}^{\infty}|\,b_\nu\,|\,r^{\nu-2}).$$

En tenant compte de (1) et de lemme précédent, on obtient

$$|\,\zeta(z)\,|^{\frac{3}{2p}} \leqq r^{-\frac{3}{2p}}\left(1+3r+2\sqrt{3}\,r\sqrt{\frac{r}{2}\log\frac{1+r}{1-r}}\right)\cdot|b_0|$$

Si l'on pose maintenant

$$M(r)\equiv r^{-\frac{3}{2}}\left(1+3r+2\sqrt{3}\,r\sqrt{\frac{r}{2}\log\frac{1+r}{1-r}}\right)$$

on voit facilement que $M(r)$ n'a qu'un maximum dans l'intervalle $o<r<1$, et que $M(r)$ l'est pour $r=r_0=0.80458\cdots$, c'est-à-dire $M(r) \leqq M(r_0)$ pour tout $0<r<1$. Par suite on a, pour $|\,z\,|=r_0$

$$|\zeta(z)| \leqq |b_0|^{\frac{2p}{3}}\{M(r_0)\}^{\frac{2p}{3}}.$$

De la relation $a_0=b_0^{\frac{2p}{3}}$, on peut écrire, pour $|\,z\,|=r_0$

$$|\zeta(z)| \leqq |a_0|\cdot\{M(r_0)\}^{\frac{2p}{3}}$$
$$=\left(\frac{6.04787\cdots}{0.71269\cdots}\right)^{\frac{2p}{3}}\cdot|\,a_0\,|$$
$$=(4k)^p\cdot|a_0|$$

où $k=1.03142\cdots\cdots$

Il parait vraisemblable que la valeur exacte de k soit 1.

3. La fonction $z^p\zeta(z)$ étant holomorphe sur le domaine $|z|\leqq r_0<1$, d'après le principe du maximum, si l'on pose $\max\limits_{|z|=r}|\zeta(z)|=\mathfrak{M}(r)$, on a, pour $|z|=r<r_0$

$$\begin{aligned} r^p\mathfrak{M}(r)&=\max_{|z|=r}|z^p\zeta(z)| \\ &\leqq\max_{|z|=r_0}|z^p\zeta(z)| \\ &=r_0^p\max_{|z|=r_0}|\zeta(z)| \\ &=r_0^p\mathfrak{M}(r_0)<\mathfrak{M}(r_0)\leqq(4k)^p\cdot|a_0|. \end{aligned}$$

Donc, pour tout $r\leqq r_0$, on a.

$$\mathfrak{M}(r)\leqq\left(\frac{4k}{r}\right)^p\cdot|a_0|$$

D'autre part, sur le cercle $|z|=r_1>r_0$, $\zeta(z)$ ne peut prendre la valeur ζ_0 de module supérieure à $(4k)^p\cdot|a_0|$. Car, s'il y aurait un tel point z_0, on aurait sur la circonférence $|z|=r_0<r_1$

$$\left|\frac{\zeta(z)}{\zeta(z_0)}\right|=\frac{|\zeta(z)|}{|\zeta_0|}\leqq\frac{\mathfrak{M}(r_0)}{|\zeta_0|}<\frac{(4k)^p\cdot|a_0|}{(4k)^p\cdot|a_0|}=1.$$

Donc, la difference entre nombre de zéros et celui des pôles de la fonction $\zeta(z)-\zeta(z_0)$ dans $|z|<r_0$ serait de même que celle de la constante $\zeta(z_0)$, c'est-a-dire égal à zéro. D'autre part, $\zeta(z)-\zeta(z_0)$ aurait au plus $p-1$ zéros dans $|z|\leqq r_0$, puisque nous avons déja supposé qu'un zéro z_0 n'existait pas dans $|z|<r_0$. D'ailleurs, étant $z=0$ un pôle d'ordre p de la fonction $\zeta(z)-\zeta(z_0)$, et étant cette fonction p-valente dans ce cercle, elle a précisément p pôles dans ce cercle. La différence, donc, serait $p-1-p=-1\neq 0$, cela est incompatible avec ce que l'on vient d'énoncer. Par suite on a, si $r<r_0$, pour $|z|=r$

$$|\zeta(z)|\leqq(4k)^p\cdot|a_0|,$$

d'où l'on déduit, pour $|z|=r>r_0$

$$|z^p\zeta(z)|=r^p|\zeta(z)|\leqq|\zeta(z)|\leqq(4k)^p\cdot|a_0|.$$

Ainsi: *Si la fonction* $\zeta(z)\in\mathfrak{F}$, *en tout point* z *de cercle-unité* $|z|<1$, *on a*

$$|\zeta(z)|\leqq\left(\frac{4k}{|z|}\right)^{p}\cdot|a_0|.$$

4. On peut écrire

$$\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu=\frac{\sum_{\nu=0}^{n}(n-\nu+1)a_\nu}{n+1}+\frac{\sum_{\nu=1}^{n}\nu a_\nu}{n+1}. \tag{2}$$

Or, comme nous avons déja démontré, si $\zeta(z)\in\mathfrak{F}$, $z^p\zeta(z)$ est borné dans $|z|\leqq1$ et $<(4k)^p\cdot|a_0|$ en valeur absolue, on a, d'après le théorème de Landau

$$\left|\frac{\sum_{\nu=0}^{n}(n-\nu+1)a_\nu}{n+1}\right|\leqq(4k)^p\cdot|a_0|. \tag{3}$$

D'autre part, si l'on considère le lemme 2 dans le cas particulier où $\lambda=2p$, on en déduit le

Lemme 4. Si $\zeta(z)\in\mathfrak{F}$, on a

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(\nu-p)\ |a_\nu|^2\leqq p\ |a_0|^2.$$

On en déduit

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu|a_\nu|^2\leqq p\ \left(\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_\nu|^2\right).$$

D'après le théorème de Gutzmer, on a

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_\nu|^2\leqq(4k)^{2p}\cdot|a_0|^2.$$

Par suite

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu\,|a_\nu|^2\leqq(4k)^{2p}\cdot p\cdot|a_0|^2. \tag{4}$$

D'autre part, en tenant compte de l'inégalité de Schwarz, on a

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n}\nu a_\nu\right|\leqq\left(\sum_{\nu=1}^{n}\nu\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sum_{\nu=1}^{n}\nu\,|a_\nu|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

De sorte que si l'on tient compte de l'inégalité (4) on a

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n}\nu\,a_\nu\right|\leqq\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}\cdot\sqrt{p}\,(4k)^p\cdot|a_0|. \tag{5}$$

Des relations (2), (3) et (5) on déduit une limite pour $a_0+a_1+\cdots\cdots+a_n$. Ainsi

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \right| \leqq (4k)^p \cdot |a_0| + \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}} \cdot \sqrt{p} \cdot (4k)^p \cdot |a_0|.$$

Donc :

Si $\zeta(z) \in \mathfrak{F}$, *on a pour tout* n

$$\left| \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \right| \leqq \left(1 + \sqrt{\frac{p}{2}}\right)(4k)^p \cdot |a_0|.$$

Ce résultat est une généralisation du théorème de M. K. Noshiro qui s'applique aux fonctions univalentes de la forme

$$\zeta(z) = \frac{a_{-1}}{z} + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots\cdots$$ [1)]

---

1) K. Noshiro: On the theory of schlicht functions. Journal of the Faculty of Science, Hokkaido Imp. Univ., 2, 1934.