MEMOIRS OF THE COLLEGE OF SCIENCF, UNIVERSITY OF KYOTO, SERIES, A
Vol. XXVII, Mathematics No. 2, 1952.

Sur les fonctions de deux variables satisfaisant une formule d'addition algébrique.

Par

Akira KUWAGAKI

(Reçu le 22 Mars 1952.)

§ 1. Introduction

Par une formule d'addition algébrique de la fonction de deux variables $f(x, u)$, nous signifierons une relation algébrique entre $f(x+x, u+v)$, $f(x, u)$, $f(x, v)$, $f(y, u)$ et $f(y, v)$.

Nombreuses recherches sont connues au cas des fonctions d'une variable. De même nous considérons les relations suivantes au cas des fonctions de deux variables.

1. $$f(x+y, u+v)=f(x, u)+f(x, v)+f(y, u)+f(y, v) \tag{1}$$

comme l'extension de l'équation fonctionnelle de Cauchy:

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

2. $$f(x+y, u+v)=R\{f(x, u), f(x, v), f(y, u), f(y, v)\} \tag{2}$$

comme l'extension de

$$f(x+y)=R\{f(x), f(y)\}$$ [1]

(R est une fonction rationnelle.)

3. $$P\{f(x+y, u+v), f(x, u), f(x, v), f(y, u), f(y, v)\}=0 \tag{3}$$

comme l'extention de

$$P\{f(x+y), f(x), f(y)\}=0$$

(P est un polynôme.)

Considérons en particulier l'équation (3). C'est montré par le théorème de Briot-Bouquet[2] et de Köbe[3] que si $f(x)$ est une fouction analytique et non infiniment multivalente, elle appartient à une des trois classes suivantes:

$$\left.\begin{array}{l}\text{1) Fonctions algébriques de } x.\\ \text{2) Fonctions algébriques de } e^{cx}\ (c\text{: const.}).\\ \text{3) Fonctions algébriques de fonction elliptiques de } x.\end{array}\right\}\quad (A)$$

Dans cette note, nous examinerons le cas des fonctions de deux variables.

§ 2. Détermination de $f(x, u)$ satisfaisant (3)

Soit la fonction inconnue $f(x, u)$ analytique et non infiniment multivalente par rapport à x et u respectivement, et soit

$$P\{f(x+y, u+v), f(x, u), f(x,v), f(y, u), f(y,v)\} = 0 \qquad (B)$$

où P est un polynôme, dont le coefficient du terme du plus haut degré en $f(x+y, u+v)$ est égal à $a\{f(x, u), f(x, v), f(y, u), f(y, v)\}$. Nous n'employons pas ici la symétrie en x et y et en u et v, mais posons quelques hypothèse (C) suivantes qui ne perdront pas la généralité.

$$\left.\begin{array}{l}\text{1) } P \neq 0 \text{ pour } x=y=0 \text{ et pour } u=v=0\\ \text{2) } a\{f(x,u), f(0,0), f(y,u), f(0,0)\} \neq 0\\ \quad (\text{ou } a\{f(0,0), f(x,v), f(0,0), f(y,v)\} \neq 0)\\ \text{et } a\{f(x,u), f(x,v), f(0,0), f(0,0)\} \neq 0\\ \quad (\text{ou } a\{f(0,0), f(0,0), f(y,u), f(y,v)\} \neq 0)\\ \text{3) } P\{t, t, f(x,0), f(0,u), f(0,0)\} \neq 0\\ \quad (\text{ou bien } P\{t, f(x,0), t, f(0,0), f(0,v)\} \neq 0,\\ \quad \text{ou bien autres relations semblables})\end{array}\right\}\quad (C)$$

Sous les conditions (C), nous pouvons déterminer successivement la fonction inconnue $f(x, u)$ de l'équation fonctionnelle (B).

1°. Posons $x=y=u=v=0$ dans l'équation (B), nous aurons une équation algébrique de $X=f(0,0)$:

$$P_1(X) = 0$$

P_1 étant un polynôme.

Si $P_1 \neq 0$, on aura racines de nombre fini, c'est-à-dire

$$X = f(0,0) = c_1,\ c_2, \dots, c_{n-1} \text{ ou } c_n$$

Si $P_1 \equiv 0$, $f(0,0)$ est indéterminée;

En ces deux cas, nous prendrons un nombre c comme la valeur de $f(0,0)$:

$$f(0,0)=c \tag{4}$$

2°. Posons $u=v=0$ dans l'équation (B), nous aurons

$$P\{f(x+y,0),\ f(x,0),\ f(x,0),\ f(y,0),\ f(y,0)\}=0$$

($\not\equiv 0$ par la troisième condition de (C))

Comme c'est une formule d'addition algébrique de $f(x,0)$, nons aurons, par le théorème (A),

$$f(x,0)=\text{const.}=c$$

ou
$$f(x,0)=F(x)$$

où $F(x)$ appartient à une des classe (A).

De même, posons $x=y=0$, nous aurons

$$f(0,u)=\text{const.}=c$$

ou
$$f(0,u)=G(u)$$

où $G(u)$ appartient à une des classes (A).

3° $f(x,0)=c$, posons $v=0$ dans l'équation (B), nous aurons

$$P\{f(x+y,u),\ f(x,u),\ c, f(y,u),\ c\}=0$$

($\not\equiv 0$ (C))

Donc, par le théorème (A) nous aurons pour chaque valeur de u

$$f(x,u)=f_1\{g(u)\cdot x\}$$

où $g(u)$ est une fonction arbitraire de u, et f_1 est une fonction d'une classe de (A).

De là nous trouverons tout de suite,

$$f(0,u)=f_1(0)=\text{const.}=c=f(x,0)$$

c'est-à-dire, $f(x,0)$ et $f(0,u)$ sont égaux à une seule constante c en même temps.

4° Cela posé, nous n'aurons que deux cas suivants:

i) $f(x,0)\equiv f(0,u)\equiv c.$

ii) $f(x,0)\not\equiv$ const. et $f(0,u)\not\equiv$ const.

i) De la même façon que 3°, après avoir la relatidn $f(0,u)=c$, nous aurons pour chaque valeur de x

$$f(x,u)=f_2\{h(x)\cdot u\}$$

où $h(x)$ est une fonction arbitraire de x, et f_2 est une fonction d'une classe de (A).

Combinant ces deux représentations de $f(x, u)$, on a

$$f(x, u) \equiv f_2\{g(u) \cdot x\} \equiv f_2\{h(x) \cdot u\}$$

d'où, en posant $u=1$, $h(x)$ sera trouvé, en même temps $f(x, u)$ sera aussi déterminé ; ce $f(x, u)$ est exprimé conventionnellement sous la forme :

$$A_3 [u \cdot A_2^{-1}\{A_1(x)\}] \tag{5}$$

où A_1, A_2 et A_3 sont fonctions de (A) et A_2 fonction inverse de A_2.

ii) Comme $f(x, 0) = F(x)$ et $f(0, u) = G(u)$ sont déjà connus, posons par exemple $y=v=0$ dans l'équation (B), nous aurons

$$P\{f(x, u), f(x, u), F(x), G(u), c\} = 0$$

(Par les conditions (C), ce polynôme P contient $f(x, u)$ clairement.) qui sera une équation algébrique par rapport à $f(x. u)$, et nous aurons

$$f(x, u) = H\{F(x), G(u)\} \tag{6}$$

où H est une fonction algébrique.

5° Finalement solutions de l'équation (B) sont les fonctions exprimées par les formes (5) ou (6).

§ 3. Exemples

Comme exemple prenons l'équation fouctionnelle :

$$f(x+y, u+v) = k\{f(x, u) + f(x, v) + f(y, u) + f(y, v)\} \tag{7}$$

k étant une constante.

Employant la méthode à résoudre expliquée au dessus et par la seule condtion que la fonction $f(x, u)$ est continnue au lieu analytique, nous pouvons résoudre cette équation complètement.

Toutes solutions de (7) sont

1) Si $k=1$, $f(x, u) = cxu$

2) Si $k=\frac{1}{2}$, $f(x, u) = c_1 x + c_2 u$

3) Si $k=\frac{1}{4}$, $f(x, u) = c$.

4) Pour autres valeurs de k, $f(x, u) = 0$
où c, c_1 et c_2 sont constantes arbitraires respectivement.

En terminant, l'auteur veut exprimer ses remerciement sincére à *M.* le Professeur T. Matsumoto pour ses conseils précieux qu'il lui a donné pendent la recherche.

Références

(1) A. Kuwagaki; " Sur l'équation fonctionnelle: $f(x+y) = R\{f(x), f(y)\}$." (Memoirs of the College of Science, University of Kyoto, Series A Vol. XXVI, Mathematics, No. 2, 1951.)

(2) Briot-Bouquet; " Théorie des fonctions doublement périodiques ", 1859.

(3) Köbe; Schwarz-Festschrift ", 1914