MEMOIRS OF THE COLLEGE OF SCIENCE, UNIVERSITY OF KYOTO, SERIES, A
Vol. XXVII, Mathematics No. 2, 1952.

Über die hinreichenden Bedingungen dafür, dass eine Riemannsche Fläche nullberandet ist.

Von

Yukio KUSUNOKI

(Eingegangen am 15. März 1952)

§ 1.

Es sei F eine offene Riemannsche Fläche. Wir betrachten auf F eine ausschöpfende Folge kompakter Teilgebiete, die von je endlich vielen analytischen Bogen Γ_n berandet sind, d. h. $\bar{F}_n(=F_n+\Gamma_n)\subset F_{n+1}(n=0,1,\ldots)$, $\bigcup_{n=0}^{\infty} F_n=F$.[1]

Konstruieren wir das harmonische Mass $\omega_n=\omega_n(\Gamma_n, P, G_n)$ des Gebiets $G_n=F_n-\bar{F}_0$ $(n=1,2,\ldots)$, dann strebt ω_n gegen eine wohlbestimmte Grenzfunktion, die entweder Null oder nichtkonstante harmonische Funktion ist. Im ersten bzw. zweiten Fall sagen wir, dass F einen *Nullrand* bzw. *positiven Rand* besitzt. Diese Fallunterscheidung ist unabhängig von der Wahl der ausschöpfenden Folge $\{F_n\}$. Nun betrachten wir das über G_n erstreckte Dirichletsche Integral von ω_n.

$$D_{G_n}[\omega_n]=\iint_{G_n}\Big[\Big(\frac{\partial\omega_n}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial\omega_n}{\partial y}\Big)^2\Big]dxdy=\int_{\Gamma_0}\frac{\partial\omega_n}{\partial n}ds\equiv d_n, \qquad (1)$$

wobei $\frac{\partial}{\partial n}$ die Ableitung nach der äusseren Normale von F_0 ist. Nach R. Nevanlinna[2] gilt es, dass d_n mit wachsendem n monoton abnimmt und *die Riemannsche Fläche F dann und nur dann einen Nullrand hat, wenn* $\lim_{n\to\infty} d_n=O$.

Maximumprinzip. Es sei G eine beliebige Teilfläche einer null-

---

1) Es genügt anzunehmen, dass F_0 aus der abgeschlossenen Punktmenge besteht. Aber hier nehmen wir an, dass $\bar{F}_0$ der von endlich vielen analytischen Kurvenbogen Γ_0 begrenzte oder gebildete Bereich ist.

2) R. Nevanlinna; Quadratisch integrierbare Differentiale auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit. Annales. Acad. Sci. Fenn. A. I. 1 (1941).

berandeten Riemannschen Fläche F und die relative Berandung γ von G sei eine kompakte oder nichtkompakte Punktmenge auf F. Es sei noch $u(P)$ eine eindeutige beschränkte ($|u| \leqq M$) harmonische Funktion auf G. Dann gilt es

$$\varliminf_{\gamma} u \leqq u(P) \leqq \varlimsup_{\gamma} u \qquad (P \in G). \tag{2}$$

Der Vollständigkeit halber wollen wir dieses Maximumprinzip für nichtkompakte Fläche G beweisen. Auf $F-G$ wählen wir einen Anfangsbereich $\bar{F}_0$. Nach dem Maximumprinzip für kompakte Fläche folgt, dass

$$u(P) \leqq [1-\omega_n(\Gamma'_n, P, G_n)] \varlimsup_{\gamma} u + M \cdot \omega_n(\Gamma'_n, P, G_n)$$

$$u(P) \geqq [1-\omega_n(\Gamma'_n, P, G_n)] \varliminf_{\gamma} u - M \cdot \omega_n(\Gamma'_n, P, G_n)$$

$$G_n = F_n - F_0, \ P \in F_n \cdot G \qquad (M \geqq |\varlimsup_{\gamma} u|, \ |\varliminf_{\gamma} u|).$$

Hieraus für $n \to \infty$, erhalten wir die Beziehung (2). Nun ersieht man sofort, dass *auf der nullberandeten Fläche keine Funktion existiert, die nichtkonstant, beschränkt und harmonisch ist.*[3)] Denn, entgegengesetztenfalls, in der Umgebung eines beliebigen Punktes P_0 auf F existiert immer ein Bogenstück γ, auf dem die beschränkte harmonische Funktion $v(P) \equiv u(P) - u(P_0)$ verschwindet. Aus dem obigen Maximumprinzip, $v(P) \equiv 0$, $P \in G = F - \gamma$, d. h. $u(P) \equiv$ Konst.. Somit auch gilt es, dass *keine nichtkonstante auf der nullberandeten Fläche eindeutige beschränkte analytische Funktion existiert* (vgl. § 3.3). Hier bezeichnen wir mit (N) die Klasse von nullberandeten Flächen und mit (AB) diejenige Klasse Riemannscher Flächen, auf welchen keine eindeutige nichtkonstante beschränkte analytische Funktion existiert. Aus obigem Satz folgt, dass

$$(N) \subset (AB).$$

Einerseits haben wir gewusst, dass (N) zwar die wesentliche

3) (a) P. J. Myrberg; Über die Existenz der Greenschen Funktionen auf einer gegebenen Riemannschen Flächen. Acta Math. 61 (1933).

(b) T. Kuroda; Some Remarks on an open Riemannn surface with nullboundary. Tôhoku Math. Journ. vol. 3 No. 2 (1951).

Teilklasse von (AB) ist.[4] Im folgenden wollen wir die hinreichenden Bedingungen dafür herleiten, dass eine zur Klasse (AB) gehörige Riemannsche Fläche noch zur Klasse (N) gehört.

§ 2.

1. Wir ziehen die berandete Fläche F_n in Betracht, die von endlich vielen analytischen Kurven berandet ist. *Sei μ_n die Anzahl der zugehörigen Randkurven sei $\nu_n$und das Geschlecht von $\bar{F}_n$.* Im folgenden nehmen wir als der Anfangsbereich $\bar{F}_0$ immer denjenigen mit analytischer Randkurve, welcher einen beliebigen Punkt $P_0 \epsilon F_n$ enthaltet und in einem z-Kreis (z : Ortsuniformisierende zu P_0) liegt. Ein System der Rückkehrschnittspaare (α_k, β_k) $(k=1, 2, \ldots, \nu_n)$, die so gewählt sind, dass sie je nicht dem Bereich $\bar{F}_0$ und Γ_n treffen und sie sich einander, bis auf einzigen Punkt, nicht schneiden, verändert F_n zur schlichlartigen (μ_n+1)-fach zusammenhängenden Fläche $\tilde{F}_n$. Nun können wir die Fläche $\tilde{F}_n$ konform auf das Gebiet Φ_n mit den (μ_n+1) einfach geschlossenen Randkurven abbilden[5]. Nach dem klassischen Bieberbach-Grunskyschen Satz lassen sich Φ_n ferner konform auf die den Einheitskreis $(|w|<1)$ genau (μ_n+1)-fach gedeckte Fläche G^n abbilden, so dass P_0 zu Mittelpunkt übergeht. Die zusammengesetzte Abbildungsfunktion $w=B_n(P)$ (oder $P=B_n^{-1}(w)$), welche $\tilde{F}_n$ konform auf G^n abbildet, bildet die Fläche F_0 auf G_0(mit einer analytischen Randkurve γ_0) einer G^n ab. Wir setzen

$$r_n = \sup_{P \epsilon R[F_0]} |B_n(P)| < 1^{6)} \tag{3}$$

---

4) (a) P. J. Myrberg; Über die analytische Fortsetzung von beschränkten Funktionen. Ann. Acad. Sci. Fenn. A. I. 58 (1949)

(b) vgl. das Ahlforssche Beispiel, das ich erfahren habe bei der Mitteilung von K. I. Virtanen; Über die Existenz von beschränkten harmonischen Funktionen auf offenen Riemannschen Flächen. Ann. Acad. Sci. Fenn. A. I. 75 (1950).

5) (a) vgl. P. Koebe; Das allgemeine Uniformisierungsprinzip. Crelles Journ. Bd. 138 (1910)

(b) A. Hurwitz und R. Courant; Lehrbuch der Funktionentheorie. Aufl. 3 Berlin 1929.

6) Im folgenden mit $R[G]$ i. a. bezeichnet man die Berandung von G. Aus dem Maximumprinzip folgt, dass

$$\sup_{P \epsilon R[F_0]} |B_n(P)| = \sup_{P \epsilon \bar{F}_0} |B_n(P)| < 1.$$

Wir bezeichnen die Gesamtheit der bei $\bar{G}_0(=G_0+\gamma_0)$ zusammenhängenden Kreise $|w|\leqq r$ mit $G_r(r_n<r<1)$. So besteht $G_r(\supset \bar{G}_0)$ aus höchstens (μ_n+1)-blättrigen zusammenhängenden Kreisen $|w|\leqq r$. Da der Ausdruck $|\operatorname{grad}\omega_n|\,ds$ gegenüber analytischen Transformationen der Veränderlichen invariant ist, gilt es für die harmonische Funktion $\omega'_n(w)\equiv\omega_n(B_n^{-1}(w), G^n-\bar{G}_0)$ auf $G^n-\bar{G}_0$

$$d_n=D_{F_n-\bar{F}_0}[\omega_n]=D_{\bar{F}_n-\bar{F}_0}[\omega_n]=D_{G^n-\bar{G}_0}[\omega'_n]=\int_{\Gamma_0}\frac{\partial\omega_n}{\partial n}ds=\int_{\gamma_0}\frac{\partial\omega'_n}{\partial n_w}ds_w, \tag{4}$$

wegen $\dfrac{\partial\omega_n}{\partial n}=|\operatorname{grad}\omega_n|$ auf Γ_0. Ferner mit Hilfe der Gaussschen Formel, erhalten wir, bis auf höchstens endlich viele Werte r, für welche $|z|=r$ die Windungspunkte von G^n enthält,

$$\int_{\gamma_0}\frac{\partial\omega'_n}{\partial n}ds=\int_{R[G_r]}\frac{\partial\omega'_n}{\partial r}rd\theta, \tag{5}$$

wobei das Integral längs positiver Richtung in bezug auf $G_r-\bar{G}_0$ genommen wird. Wir bezeichnen mit K_r die Gesamtheit der in G^n enthaltenden Kreise $|w|\leqq r$. Aus Verwendung der Schwarzschen Ungleichung ergibt sich dann

$$d_n^2\leqq\int_{R[G_r]}rd\theta\int_{R[G_r]}\left(\frac{\partial\omega'_n}{\partial r}\right)^2 rd\theta\leqq\int_{R[K_r]}rd\theta\int_{R[K_r]}\left(\frac{\partial\omega'_n}{\partial r}\right)^2 rd\theta \quad (r_n<r<1).$$

Weil $\int_{R[K_r]}rd\theta=2\pi r(\mu_n+1)$, wenn man beide Seiten durch $2\pi r(\mu_n+1)$ dividiert und von r_n nach 1 integriert, findet man

$$\frac{d_n^2}{2\pi(\mu_n+1)}\log\frac{1}{r_n}\leqq\int_{r_n}^1\int_{R[K_r]}\left(\frac{\partial\omega'_n}{\partial r}\right)^2 rdrd\theta\leqq\iint_{G^n-\bar{G}_0}\left(\frac{\partial\omega'_n}{\partial r}\right)^2 rdrd\theta$$
$$\leqq\iint_{G^n-\bar{G}_0}\left[\left(\frac{\partial\omega_n'}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\omega_n'}{\partial\theta}\right)^2\right]rdrd\theta=D_{G^n-\bar{G}_0}[\omega']=d_n \tag{6}$$

d. h.

$$\frac{1}{2\pi(\mu_n+1)}\log\frac{1}{r_n}\leqq\frac{1}{d_n}.$$

Hieraus ergibt sich der folgende

Satz 1. *Wenn für $n \to \infty$ der Ausdruck $\frac{1}{\mu_n} \log \frac{1}{r_n}$ divergiert, so hat die Fläche F einen Nullrand.*

2. Hier benutzen wir, statt der Abbildung $w = B_n(P)$, den folgenden von Ahlfors erweiterten Bieberbach-Grunskyschen Satz[7]: derartige Fläche lässt sich konform auf eine den Einheitskreis höchstens λ_n-fach gedeckte Fläche abbilden, wobei

$$\lambda_n = \mu_n + 2\nu_n. \tag{7}$$

Bei dieser Abbildung $w = A_n(P)$ nehmen wir an, dass Punkt P_0 zum Mittelpunkt übergeht. Setzt man

$$\bar{r}_n = \sup_{P \in R[F_0]} |A_n(P)| \; (= \sup_{P \in \bar{F}_0} |A_n(P)|), \tag{8}$$

so wird nach dem Maximumprinzip, $\bar{r}_n < 1$. Dann in analoger Weise wie obig, erhalten wir die Beziehung

$$\frac{1}{2\pi\lambda_n} \log \frac{1}{\bar{r}_n} \leq \frac{1}{d_n}. \tag{9}$$

Damit ist bewiesen der

Satz 2. Wenn für $n \to \infty$ der Ausdruck $\frac{1}{\lambda_n} \log \frac{1}{\bar{r}_n}$ divergiert, so gehört die Fläche F zur Klasse(N).

§ 3.

1.[8] Es sei Ω ein fester *Bereich* auf $\bar{F}_0$. Nun betrachten wir nur die nichtleere konform invariante Klasse $M(G)$ (oder Kurz M) von denjenigen eindeutigen regulären Funktionen auf einem Gebiet $G(\supset \Omega)$ der Riemannschen Fläche F, welche unter einer konform invarianten Eigenschaft (z. B. uber den Wert der Funktionen auf G oder des Dirichletschen Integral) umgefassen sind.

---

7) Nach der Mitteilung von Z. Nehari: Conformal mapping of open Riemann surfaces. Trans. Amer. Math. Soc. vol. 65 (1950) erfuhr ich diesen Satz. Vgl. Ahlforsschen Arbeit: Material presented in a Colloquim lecture at Harvard University in Spring 1948. Aber, leider, ich habe keine Gelegenheit gehabt, die Arbeit Ahlfors' zu lesen.

8) vgl. L. V. Ahlfors and A. Beurling: Conformal invariants and Function-theoretic null-sets. Acta Math. 83 (1950).

Für diesen M, Ω definieren wir nun die folgenden Ausdrücke

$$(10)\quad M^{(0)}(\Omega_z, G)=\sup_{\substack{z\in\Omega_z\\ f\in M(G)}}|f(z)|$$

$$(11)\quad M^{(1)}(\Omega_z, G)=\sup_{\substack{z\in\Omega_z\\ f\in M(G)}}|f'(z)|$$

(z: Ortsuniformisierende zu $P_0\in\Omega(\in\bar{F}_0)$)

wobei Ω_z das Abbild von Ω auf die z-komplexe Ebene bedeutet. Falls für $G'\supset G$ die Ungleichung $M(G')\subset M(G)$ gilt, so sagen wir, dass die Klasse M monoton ist. Dann ergibt sich aus (10), (11)

$$M^{(i)}(\Omega_z, G')\leqq M^{(i)}(\Omega_z, G)\quad (i=0, 1). \tag{12}$$

Der Ausdruck $M^{(0)}$ bleibt invariant bei den konformen Abbildungen der Ortsuniformierenden, aber es existiert für $M^{(1)}$ immer ein punkt z^* auf $R[\Omega_z]$, so dass

$$M^{(1)}(\Omega_z, G)=M^{(1)}(\Omega_{z_1}, G)\left|\frac{dz_1}{dz}\right|_{z=z^*}, \tag{13}$$

wo Ω_{z_1} nicht anders als der in z_1-Ebene liegende Bildbereich von Ω_z bei einander konformer Abbildung $z\longleftrightarrow z_1$ ist. Nämlich

$$M^{(1)}(\Omega_{z_1}, G)\inf_{z\in R[\Omega_z]}\left|\frac{dz_1}{dz}\right|\leqq M^{(1)}(\Omega_z, G)\leqq M^{(1)}(\Omega_{z_1}, G)\sup_{z\in R[\Omega_z]}\left|\frac{dz_1}{dz}\right|.$$

Da einerseits $z_1(z)$ auf Ω_z regulär ist, so gibt es der Beziehung (13) genügender Punkt $z^*\in R[\Omega_z]$.

Hier sagen wir, dass die Klasse M bzw. (A)-*kompakt* oder (B)-*kompakt* ist, je nachdem für die wachsenden Flächen $G_n(G_n\subset G_{n+1};\ G_n\to G)$ und $f_n\in M(G_n)$ können wir eine Teilfolge $\{f_{n_k}\}$ so wählen, dass $\{f_{n_k}\}$ auf dem beliebigen kompakten Teilgebiet von G gleichmässig gegen entweder immer die reguläre Funktion $\in M(G)$ oder diejenige Grenzfunktion konvergiert, welche die zu $M(G)$ gehörige Funktion oder eine (endliche oder unendliche) Konstante $(\notin M(G))$ ist.

Jetzt für die ausschöpfende Folge $F_n\to F$ aus der Monotonie von M existiert der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} M^{(i)}(\Omega_z, F_n)\geqq M^{(i)}(\Omega_z, F)\geqq 0\quad (i=0, 1). \tag{14}$$

Hilfssatz 1. *Falls für monotone (B)-kompakte Klasse M und eine Nummer n $M^{(0)}(\Omega_z, F_n)<\infty$ ist, dann ist*

$$\lim_{n\to\infty} M^{(1)}(\Omega_z, F_n) = M^{(1)}(\Omega_z, F). \tag{15}$$

Beweis. Wenn $M^{(0)}(\Omega_z, F_n) < \infty$, so wird es leicht $M^{(1)}(\Omega_z, F_n) < \infty$. Es sei $|{}^nf_i'(z_i)|({}^nf_i(z) \in M(F_n),\ z_i \in \Omega_z;\ i=1,2,\ldots)$ die zu $M^{(1)}(\Omega_z, F_n)$ $(<\infty)$ konvergente Folge. Dann konvergiert eine Teilfolge $\{{}^nf_{i_k}(z)\}$ gleichmässig gegen eine Grenzfunktion ${}^nf(z)$, die entweder zu $M(F_n)$ gehörige reguläre Funktion oder eine Konstante $(\notin M(F_n)) \leqq M^{(0)}(\Omega_z, F_n) < \infty$ ist. Es sei $z^n \in \Omega_z$ der Grenzpunkt von $z_i \in \Omega_z (i=1,2,\ldots)$. Dann $|{}^nf_i'(z_i) - {}^nf'(z_i)| < \varepsilon$, $i \geqq i_0$ und so $|{}^nf'(z^n)| = M^{(1)}(\Omega_z, F_n)$. Nun, falls für eine Nummer n ${}^nf(z) \equiv$ Konst. ist, so wird $M^{(1)}(\Omega_z, F_n) = 0$, also aus (14), $\lim_{n\to\infty} M^{(1)}(\Omega_z, F_n) = M^{(1)}(\Omega_z, F) = 0$. Die Teilfolge von für jedes n nichtkonstanten Extremalfunktionen ${}^nf(z) \in M(F_n)(n=1,2,\ldots)$ konvergiert gleichmässig gegen die Grenzfunktion $f(z)(f(z) \in M(F))$ oder $f \equiv$ Konst. $(\notin M(F)) \leqq M^{(0)}(\Omega_z, F_n)$. Dann gilt es jedenfalls

$$\lim_{n\to\infty} |{}^nf'(z)| = |f'(z)| \leqq M^{(1)}(\Omega_z, F),\quad z \in \Omega_z,$$

und, wegen der gleichmässig Konvergenz von $\{{}^nf\}$

$$|{}^nf'(z)| \leqq M^{(1)}(\Omega_z, F) + \varepsilon,\quad n \geqq n_0,\quad z \in \Omega_z.$$

Da für $z = z^n \in \Omega_z$ die linke Seite gleich $M^{(1)}(\Omega_z, F_n)$ ist, so erhalten wir für $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} M^{(1)}(\Omega_z, F_n) \leqq M^{(1)}(\Omega_z, F)$$

und schliesslich zusammen mit (14) den Hilfssatz.

Bemerkung. Für monotone (A)-kompakte Klasse M wird es immer $M^{(0)}(\Omega_z, F_n) < \infty$, also jedenfalls haben wir die Beziehung(15).

In der Tat, aus der Annahme, dass $M^{(0)}(\Omega_z, F_n) = \infty$, lässt sich ein Widerspruch in folgender Weise herleiten. Es seien $|{}^nf_i(z_i)|$ $({}^nf_i(z) \in M(F_n),\ z_i \in \Omega_z)$ die gegen ∞ wachsende Folge. Wegen der Kompaktheit von M konvergiert ${}^nf_i(z)$ gleichmässig gegen die zu $M(F_n)$ gehörige reguläre Funktion ${}^nf(z)$. Setzt man $M_1 = \sup_{z \in \Omega_z} |{}^nf(z)| < \infty$, also ergibt $|{}^nf_i(z)| \leqq M_1 + \varepsilon$ für $z \in \Omega_z$, $n \geqq n_0$. w.z.b.w.

Wir denken die beliebige Folge von wachsenden Zahlen

$$m_1 < m_2 < \ldots < m_j < \ldots \to \infty,$$

und die entsprechenden Ausdrücke

$$M_{m_j}^{(1)}(\Omega_z, F_n) = \sup_{\substack{z \in \Omega_z \\ f \in M_{m_j}(F_n)}} |f'(z)| \quad (j=1, 2, \ldots),$$

wo $M_{m_j}(F_n)\,(n=1, 2, \ldots)$, $M_{m_j}(F)$ je die Teilklassen von $M(F_n)$, $M(F)$ bedeuten, so dass für $z \in \Omega_z$, $|f(z)| \leqq m_j$.

Hilfssatz 2. *Für monotone* (B)-*kompakte Klasse* M *jedenfalls gilt es*

$$\lim_{j\to\infty}(\lim_{n\to\infty} M_{m_j}^{(1)}(\Omega_z, F_n)) = M^{(1)}(\Omega_z, F). \tag{16}$$

Beweis. Aus dem Beweis des Hilfssatzes 1, folgt $\lim_{n\to\infty} M_{m_j}^{(1)}(\Omega_z, F_n) = M_{m_j}^{(1)}(\Omega_z, F)$. Zunächst beweisen wir $\lim_{j\to\infty} M_{m_j}^{(1)}(\Omega_z, F) = M^{(1)}(\Omega_z, F)$. In der Tat,

$$M_{m_j}^{(1)}(\Omega_z, F) \leqq \cdot M_{m_{j+1}}^{(1)}(\Omega_z, F) \leqq \cdots \leqq \lim_{j\to\infty} M_{m_j}^{(1)}(\Omega_z, F) \leqq M^{(1)}(\Omega_z, F). \tag{17}$$

Wenn $f(z)$ einerseits eine beliebige reguläre Funktion von $M(F)$ und $\bar{M} = \sup_{z \in \Omega z} |f(z)| < \infty$ ist, dann wird für $m_j > \bar{M}(j \geqq j_0)$, $z \in \Omega_z$

$$|f'(z)| \leqq M_{m_j}^{(1)}(\Omega_z, F) \leqq \lim_{j\to\infty} M^{(1)}(\Omega_z, F).$$

Daher folgt

$$M^{(1)}(\Omega_z, F) \leqq \lim_{j\to\infty} M_{m_j}^{(1)}(\Omega_z, F)$$

w. z. b. w.

Bezeichnen wir nun mit $((AM))$ die Klasse von Riemannschen Flächen, auf den keine nichtkonstante zur $M(F)$gehörige eindeutige reguläre Funktion existiert, dann haben wir den

Satz 3. *Die Riemannsche Fläche F gehört dann und nur dann zur Klasse* $((AM))$, *wenn für monotone* (B)-*kompakte Klasse M,* $\lim_{j\to\infty}(\lim_{n\to\infty} M_{m_j}^{(1)}(\Omega_z, F_n)) = 0$.

Falls für eine Nummer n $M^{(0)}(\Omega_z, F_n) < \infty$ *ist, gilt dieselbe Behauptung, wenn* $\lim_{n\to\infty} M^{(1)}(\Omega_z, F_n) = 0$.

Satz 4 *Wenn für dieselbe Klasse M* $\lim_{n\to\infty} M^{(i)}(\Omega_z, F_n) = 0$ $(i= 0$ *oder* $1)$, *so gehört die Fläche zur* $((AM))$.

Bemerkung. Bezeichnen wir mit B_1 die Familie von eindeutigen gleichmässig beschränkten Funktionen (*z. B.* $|f| \leqq 1$), so ist B_1

monoton (A)-kompakt und es gilt offenbar

$$((AB_1)) = (AB). \quad \text{(vgl. § 1).}$$

2. Wenn der Integrationsweg auf $(\bar{F}_0)_z$ genommen wird, so hat man aus $|A_n(z)| \leq \int_0^z |A'_n(z)|\,|dz| \quad (z \in (\bar{F}_0)_z)$

$$\bar{r}_n = \sup_{z \in (\bar{F}_0)_z} |A_n(z)| \leqq \mathrm{K} \cdot \sup_{z \in (\bar{F}_0)_z} |A'_n(z)| (\leqq \mathrm{K} \cdot B_1^{(1)}((\bar{F}_0)_z, F_n)), \quad (18)$$

wobei $B_1^{(i)}((\bar{F}_0)_z, \bar{F}_n) = \sup_{\substack{z \in (\bar{F}_0)_z \\ |f| \leq 1}} |f^{(i)}(z)| \quad (i=0, 1), \quad \mathrm{K} = \text{Konst. } ((\bar{F}_0)_z).$

Aus den Sätze 3,4 und den Beziehungen (9), (18), erhalten wir den

Satz 2'. Wenn für $n \to \infty$ der Ausdruck $1/B_1^{(0)}((\bar{F}_0)_z, F_n)$ *divergiert, so gehört die Fläche F zur $(AB) = ((AB_1))$. Falls ferner* $\frac{1}{\lambda_n}\log 1/B_1^{(0)}((\bar{F}_0)_z, F_n)$ *divergiert, so gehört F zur Klasse (N).*

Satz 2''. Wenn für $n \to \infty$ der Ausdruck $1/B_1^{(1)}((\bar{F}_0)_z, F_n)$ *divergiert, so gehört F zur Klasse (AB) und vice versa. Divergiert ferner* $\frac{1}{\lambda_n}\log 1/B_1^{(1)}((\bar{F}_0)_z, F_n)$ *für $n \to \infty$, so gehört die Fläche zur Klasse (N); D. h., bei der zur (AB) gehörigen Riemannschen Fläche mit positivem Rand divergiert der Ausdruck* $1/B_1^{(1)}((\bar{F}_0)_z, F_n)$, *aber* $\frac{1}{\lambda_n}\log 1/B_1^{(1)}((\bar{F}_0)_z, F_n)$ *konvergiert für $n \to \infty$.*

3. Mit Hilfe des Maximumprinzip in § 1, können wir leicht beweisen, dass *diejenige eindeutige reguläre Funktion auf der null berandeten Fläche, welche die Wertmenge vom positiven harmonischen Mass auslässt, sich auf eine Konstante reduziert.*[9]

Bezeichnen wir mit $C(G)$ bzw. $Z(G)$ die Familie von regulären Funktionen auf G, die je die Wertmenge E vom positiven harmonischen Mass bezw. zwei Werte auslassen, so bilden C oder Z je die (B)-kompakte normale Familie und es gilt

$$(N) \subset ((AC)) \subset (AB), \qquad ((AZ)) \subset ((AC)).$$

9) Vgl. Satz 3. von R. Nevanlinna: Eindeutige analytische Funktionen. (1936), S. 135.

Wenn, für eine Riemannsche Fläche F von $((AC))$, $\frac{1}{\lambda_n}\overset{+}{\log}$ $1/C^{(1)}((\bar{F}_0)_z, F_n)$ (falls $E \subset |w| > 1$) für $n \to \infty$ divergent ist, so kann man behaupten, dass F zur (N) gehört.

März 1952.

Mathematisches Institute,
Universität zu Kyoto.

Während der korrektur habe ich von Herrn Prof. L. Ahlfors brieflich angezeigt worden, dass man den Beweis des Satzes (über die schon zitierte Abbildung $w=A_n(P)$) auch in seiner Arbeit finden kann: "Open Riemann surfaces and Extremal Problems on Compact Subregions." Comm. Math. Helv. 24. 2 (1950). Hierbei möchte ich mich Herrn Professor Ahlfors meinen herzlichen Dank für seine Freundlichkeit ausdrücken.