MEMORIRS OF THE COLLEGE OF SCIENCE UNIVERSITY OF KYOTO, SERIES, A
Vol. XXVIII, Mathematics No. 1, 1953.

Sur la fonction definissant le loi de composition des transformations d'un groupe de Lie.

Par

Jōyō KANITANI

(Recu le 28 April 1953)

1. Envisageons un groupe de Lie G des transformations

$$x'^i = f^i(x^1, \cdots, x^n, a^1, \cdots, a^r) \qquad (i=1, \cdots, n).$$

Supposons que le loi de composition de ces transformations soit defini par

$$c^p = \varphi^p(a^1, \cdots, a^r, b^1, \cdots, b^r) \qquad (p=1, \cdots, r).$$

Dans cet article nous développons ces fonctions $\varphi(a, b)$ en séries suivant les puissances entiers de $a^1, \cdots, a^r, b^1 \cdots, b^r$ en choisissant convenablement les paramètres, et en exprimant les coefficients dans le développement en polynómes des constantes de structures c_{ij}^h du groupe G.

Nous avons

$$(1\cdot 1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} c_{jk}^p + c_{kj}^p = 0, \\ c_{ij}^s c_{sk}^p + c_{jk}^s c_{si}^p + c_{ki}^s c_{sj}^p = 0, \\ (p, i, j, k = 1, \cdots, r;\ s: 1 \rightarrow r). \end{array} \right.$$

Posons

$$c_{i_1 i_2 \cdots i_n q}^p = c_{i_1 s_1}^p c_{i_2 s_2}^{s_1} \cdots c_{i_n q}^{s_{n-1}}$$

Il vient alors d'après $(1\cdot 1)$

$$\begin{aligned} & c_{h k_1 \cdots k_a}^i c_{l_1 \cdots l_b j}^h u^{l_1} u^{l_2} \cdots u^{l_b} \\ & = \Big(c_{l_1 \cdots l_b j\, k_1 \cdots k_a}^i - \binom{b}{1} c_{l_1 \cdots l_{b-1} j l_b\, k_1 \cdots k_a}^i + \cdots \\ & \quad + (-1)^\lambda \binom{b}{\lambda} c_{l_1 \cdots l_{b-\lambda} j l_{b-\lambda+1} \cdots l_b\, k_1 \cdots k_a}^i \\ & \quad + \cdots + (-1)^b c_{j\, l_1 \cdots l_b\, k_1 \cdots k_a}^i \Big) u^{l_1} \cdots u^{l_b} \\ & \qquad (a \geq 1,\ b \geq 1). \end{aligned}$$

En effet, faisons d'abord $b=1$. Nous avons

$$\begin{aligned} c_{h k_1 \cdots k_a}^i c_{lj}^h &= c_{hs}^i c_{k_1 \cdots k_a}^s c_{lj}^h = c_{k_1 \cdots k_a}^s c_{lj}^h c_{hs}^i \\ &= - c_{k_1 \cdots k_a}^s (c_{js}^h c_{hl}^i + c_{sl}^h c_{hj}^i) \end{aligned}$$

$$=c^i_{ljk_1\cdots k_a}-c^i_{jlk_1\cdots k_a}.$$

Supposons, ensuite, que la proposition soit vraie pour $b-1$ $(b\geq 2)$. Nous avons

$$c^i_{hk_1\cdots k_a}\ c^h_{l_1\cdots l_b j}\ u^{l_1}\cdots u^{l_b}$$

$$=c^i_{hk_1\cdots k_a}\ c^h_{l_1\cdots l_{b-1}t}\ c^t_{l_b j}u^{l_1}\cdots u^{l_b}$$

$$=\Big(c^i_{l_1\cdots l_{b-1}tk_1\cdots k_a}-\binom{b-1}{1}c^i_{l_1\cdots l_{b-2}tl_{b-1}k_1\cdots k_a}+\cdots$$

$$+(-1)^{\lambda-1}\binom{b-1}{\lambda-1}c^i_{l_1\cdots l_{b-\lambda}tl_{b-\lambda+1}\cdots l_{b-1}k_1\cdots k_a}$$

$$+(-1)^{\lambda}\binom{b-1}{\lambda}c^i_{l_1\cdots l_{b-1-\lambda}tl_{b-\lambda}\cdots l_{b-1}k_1\cdots k_a}$$

$$+\cdots(-1)^{b-1}c^i_{tl_1\cdots l_{b-1}k_1\cdots k_a}\Big)c^t_{l_b j}u^{l_1}\cdots u^{l_b}$$

$$=\big(c^i_{l_1\cdots l_{b-1}l_b jk_1\cdots k_a}-c^i_{l_1\cdots l_{b-1}jl_bk_1\cdots k_a}$$

$$-\binom{b-1}{1}\big(c^i_{l_1\cdots l_{b-2}l_bjl_{b-1}k_1\cdots k_a}-c^i_{l_1\cdots l_{b-2}jl_bl_{b-1}k_1\cdots k_a}\big)+\cdots$$

$$+(-1)^{\lambda}\binom{b-1}{\lambda}\big(c^i_{l_1\cdots l_{b-1-\lambda}l_bjl_{b-\lambda}\cdots l_{b-1}k_1\cdots k_a}$$

$$-c^i_{l_1\cdots l_{b-1-\lambda}jl_bl_{b-\lambda}\cdots l_{b-1}k_1\cdots k_a}\big)$$

$$+\cdots+(-1)^{b-1}\big(c^i_{l_bjl_1\cdots l_{b-1}k_1\cdots k_a}-c^i_{jl_bl_1\cdots l_{b-1}k_1\cdots k_a}\big)u^{l_1}\cdots u^{l_b}$$

$$=\Big(c^i_{l_1\cdots l_bjk_1\cdots k_a}-\binom{b}{1}c^i_{l_1\cdots l_{b-1}jl_bk_1\cdots k_a}+\cdots$$

$$+(-1)^{\lambda}\binom{b}{\lambda}c^i_{l_1\cdots l_{b-\lambda}jl_{b-\lambda+1}\cdots l_bk_1\cdots k_a}$$

$$+\cdots+(-1)c^i_{jl_1\cdots l_bk_1\cdots k_a}\Big)u^{l_1}\cdots u^{l_b}.$$

C'est á dire que la proposition s'étend aussi pour b. La démonstration est ainsi complétée.

2. Posons

$$B_0=1$$

$$(2\cdot1)\qquad B_n=\sum_{b=1}^{n}\sum_{t_1=1}^{n+1-b}\sum_{t_2=1}^{n+2-b-t_1}\cdots\sum_{t_{b-1}=1}^{n-1-t_1-\cdots-t_{b-2}}\frac{(-1)^b}{(t_1+1)!\cdots(t_{b-1}+1)!(n+1-t)!}$$

$$(t=t_1+t_2+\cdots+t_{b-1})$$

Nous avons

$$B_n+\frac{1}{2!}B_{n-1}+\frac{1}{3!}B_{n-1}+\cdots+\frac{1}{(n+1)!}B_0$$

$$=B_n+\frac{1}{(n+1)!}+\sum_{\rho=1}^{n-1}\frac{1}{(\rho+1)!}\sum_{b=1}^{n-\rho}\sum_{t_1=1}^{n+1-\rho-b}\cdots\cdots\sum_{t_{b-1}=1}^{n-\rho-1-t_1\cdots\cdots t_{b-2}}$$

$$\frac{(-1)^b}{(t_1+1)!\cdots(t_{b-1}+1)!(n+1-\rho-t)!}\cdot$$

$$=B_n+\frac{1}{(n+1)!}+\sum_{s=1}^{n-1}\sum_{\rho=1}^{n-b}\sum_{t_1=1}^{n+1-\rho-b}\cdots\sum_{t_{b-1}=1}^{n-\rho-1-t_1\cdots\cdots-t_{b-2}}$$

$$\frac{(-1)^p}{(\rho+1)!(t_1+1)!\cdots(t_{b-1}+1)!(n+1-\rho-t)!}.$$

Ecrivons maintenant t_1, $t_2,\cdots t_b$ à la place de ρ, $t_1,\cdots$, t_{b-1} et puis, posons $b+1=b'$. Il vient alors

$$(2\cdot 2)\qquad B_n+\frac{1}{2!}B_{n-1}+\frac{1}{3!}B_{n-2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)!}B_0.$$

$$=B_n+\frac{1}{(n+1)!}+\sum_{b'=2}^{n}\sum_{t_1=1}^{n+1-b'}\cdots\sum_{t_{b'-1}=1}^{n-1-t_1-\cdots\cdots-t_{b'-2}}$$

$$\frac{-(-1)^{b'}}{(t_1+1)!\cdots(t_{b'-1}+1)!(n+1-t_1-\cdots-t_{b'-1})!}$$

$$=B_n+\frac{1}{(n+1)!}+\sum_{b'=1}^{n}\sum_{t_1=1}^{n+1-b'}\cdots\sum_{t_{b'-1}=1}^{n-1-t_1-\cdots\cdots-t_{b-2}}(,,)-\frac{1}{(n+1)!}$$

$$=B_n-B_n=0$$

Nous voyons ainsi que $B_n/n!$ $(n=0, 1, 2,\cdots)$ sont les nombre de Bernoulli.

3. Posons

$$\mu^p_q(u^1,\cdots,u^r)=\delta^p_q-\frac{1}{2!}c^p_{i,q}u^{i_1}+\cdots+\frac{(-1)^n}{(n+1)!}c^p_{i_1\cdots i_nq}u^{i_1}_{\cdots}u^{i_n}+\cdots$$

$$(p,\ q=1,\cdots,r;\ i_1,\cdots,i_n:\ 1\to r).$$

Alors les $\theta^p_q=t\mu^p_q(tu^1,\cdots, tu^r)$ se font des solutions des équations différentielles

$$(3\cdot 1)\qquad \frac{d\theta^p_q}{dt}=\delta^p_q-u^ic^p_{ij}\,\theta^j_q,$$

satisfaisant à la condition initiale: $\theta^p_q=0$ pour $t=0$.

Le déterminant $|\mu^p_q(u)|$ ne s'annule pas dans le voisinage de $u^i=0$. L'inverse $\lambda^p_q(u)$ de l'élément $\mu^q_p(u)$ dans ce determinant s'ecrit

$$\lambda^p_q(u)=\delta^p_q-B_1c^p_{i,q}u^{i_1}+\cdots+(-1)^nB_nc^p_{i_1\cdots i_nq}u^{i_1}_{\cdots}u^{i_n}+\cdots$$

En effet, naus avons d'après (2·2)

$$\mu^p_s\lambda^s_q=\delta^p_q+\cdots+(-1)^n\left(B_n+\frac{1}{2!}B_{n-1}+\cdots+\frac{1}{(n+1)!}B_0\right)c^p_{i_1\cdots i_n q}+\cdots$$
$$=\delta^p_q.$$

Introduisons maintenant les opérateurs

$$X_i=\lambda^l_i(u^1,\cdots,u^r)\frac{\partial}{\partial u^l}\qquad(i=1,\cdots,r).$$

Il vient d'après (1·1), (3·1)

$$[X_i,\ X_j]=c^p_{ij}\,X_p.$$

Cela revient à dire que ces opérateurs engendrent le premier groupe des paramètres.

Considérons les équations différentielles

$$\text{(3·2)}\qquad \frac{du'^p}{dt}=\lambda^p_s(u'^1,\cdots u'^r)\alpha^s.$$

Les solutions u'^i de ces équations, qui se réduisent à u^i pour $t=0$ sont de la forme

$$u'^i=\varphi^i(u^1,\cdots,u^r,\ t\alpha^1,\cdots,t\alpha^r).$$

En y faisant $t=1$ nous obtenons les fonctions chérchées $\varphi^i(u,\alpha)$

4. En faisant

$$\binom{h}{\alpha}=\frac{h(h-1)\cdots(h-\alpha+1)}{\alpha!}$$

pour $h=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots;\ \alpha=1,\ 2,\cdots$ nous définissons la valeur de $\binom{h}{\alpha}$ pour $\alpha=0,\ -1,\ -2,\cdots$ de telle sorte que la relation

$$\binom{h}{\alpha}+\binom{h}{\alpha-1}=\binom{h+1}{\alpha}$$

soit vérifiée toujours. Nous avons alors

$$\binom{h}{0}=1\quad(h=0,\ \pm1,\ \pm2\cdots),$$

$$\text{(4·1)}\qquad \binom{h}{\alpha}=0\quad(h=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots;\ \alpha=-1,\ -2,\cdots),$$

$$\text{(4·2)}\qquad \binom{h}{\alpha}=0\quad(0\leq h<\alpha).$$

Pour $h=0,\ 1,\ 2,\cdots;\ \alpha=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots$ nous avons

$$\binom{h}{\alpha}=\binom{h}{h-\alpha},$$

en particulier, la valeur des deux membres est nulle lorsque $a<0$.

Lorsque $h=-1$, $a=0, 1, 2, \cdots$, il vient

$$\binom{-1}{a}=(-1)^{a}, \quad \binom{-1}{-1-a}=0.$$

Posons

$$\begin{bmatrix} h \\ a \end{bmatrix}=(-1)^{h+a}\binom{h}{a}.$$

Il vient alors

$$\begin{bmatrix} h \\ h-a \end{bmatrix}=(-1)^{a}\binom{h}{a}=(-1)^{h}\begin{bmatrix} h \\ a \end{bmatrix} \quad (h=0, 1, \cdots, a=0, \pm 1, \pm 2 \cdots), \tag{4·3}$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ a \end{bmatrix}=-1 \quad (a \geqq 0), \quad \begin{bmatrix} -1 \\ -1-a \end{bmatrix}=0 \quad (a \geqq 0). \tag{4·4}$$

5. Nous avons d'après (3·2)

$$\frac{du'^{p}}{dt}=a^{p}-B_{1}c^{p}_{i,j}\,u'^{i_1}a^{j}+\cdots+(-1)^{n}B_{n}c^{p}_{i_1\cdots i_n j}\,u'^{i_1}\cdots u'^{i_n}a^{j}+\cdots,$$

$$\frac{d^2u'^{p}}{dt^2}=\frac{\partial\lambda^{p}_{j_1}(u')}{\partial u'^{h}}\,\lambda^{h}_{j_2}(u')\,a^{j_1}a^{j_2}$$

$$=\{-B_1c^{p}_{hj_1}+\cdots+(-1)^{n}B_{n}(c^{p}_{hi_1\cdots i_{n-1}j_1}+\cdots+c^{i}_{i_1\cdots i_{n-1}hj_1})u'^{i_1}\cdots u'^{i_{n-1}}+\cdots\}$$

$$\times\{\delta^{h}_{j_2}+\cdots+(-1)^{n}\,c^{p}_{k_1\cdots k_n j_2}u'^{k_1}\cdots u'^{k_n}+\cdots\}\,a^{j_1}\,a^{j_2}$$

$$=(B_2-B_1B_1)\,c^{p}_{j_1i_1j_2}\,u'^{i_1}a^{j_1}a^{j_2}+\cdots$$

$$+(-1)^{n+1}\,B_{n+1}(c^{p}_{j_1i_1\cdots i_nj_2}+\cdots+c^{p}_{i_1\cdots i_{n-1}j_1i_nj_2})\,u'^{i_1}\cdots u'^{i_n}a^{j_1}a^{j_2}$$

$$+(-1)^{n+1}\sum_{\rho=1}^{n}B_{\rho}B_{n+1-\rho}(c^{p}_{hi_1\cdots i_{\rho-1}j_1}+\cdots+c^{p}_{i_1\cdots i_{\rho-1}hj_1})$$

$$\times c^{h}_{i_\rho\cdots i_n}\,u'^{i_1}\cdots u'^{i_n}\,a^{j_1}a^{i_2}$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Or, nous avons grace (1·1)

$$c^{p}_{hi_1\cdots i_{\rho-1}j_1}c^{h}_{i_\rho\cdots i_nj_2}u'^{i_1}\cdots u'^{i_n}\,a^{j_1}a^{j_2}$$

$$=\sum_{\mu=0}^{n+1-\rho}(-1)^{\mu}\binom{n+1-\rho}{\mu}c^{p}_{\underbrace{\quad}_{n+1-\rho-\mu}j_2\underbrace{\quad}_{\mu}j_1}u'a$$

$$=\sum_{\mu'=0}^{n+1-\rho}(-1)^{n+1-\rho-\mu'}\binom{n+1-\rho}{\mu'}c^{p}_{\underbrace{\quad}_{\mu'}j_1\underbrace{\quad}_{n-\mu'}j_2}u'a$$

$$(n+1-\rho-\mu=\mu')$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$c^{p}_{i_1\cdots i_{\rho-1}hj_1}\;c^{h}_{i_\rho\cdots i_nj_2}u'^{i_1}\cdots u'^{i_n}a^{j_1}a^{j_2}$$

$$=\sum_{\mu=0}^{n+1-\rho}(-1)^{\mu}\binom{n+1-\rho}{\mu}c^{p}_{\underbrace{}_{\rho-1}\underbrace{}_{n+1-\rho-\mu}j_2\underbrace{}_{\mu}j_1}u'a$$
$$=\sum_{u'=\rho-1}^{n}(-1)^{n-\mu'}\binom{n+1-\rho}{\mu'+1-\rho}c^{i}_{\underbrace{}_{u'}j_1\underbrace{}_{n-\mu'}j_2}u'a$$
$$(n-\mu=\mu'),$$

où $c^{p}_{\underbrace{}_{n}j}$, par excmple, désigne $c^{p}_{i_1\cdots i_\mu j_1}$.

En tenant compte de (4·1), (4·2) nous pouvons écrire

$$\sum_{\mu=0}^{n+1-\rho}(-1)^{n+1-\rho-\mu}\binom{n+1-\rho}{\mu}+\sum_{\mu=1}^{n+2-\rho}(-1)^{n+2-\rho-\mu}\binom{n+1-\rho}{\mu-1}$$
$$+\cdots\sum_{\mu=\rho-1}^{n}(-1)^{n-\mu}\binom{n+1-\rho}{\mu+1-\rho}$$
$$=\sum_{\mu=0}^{n}(-1)^{n+1-\rho-\mu}\left\{\binom{n+1-\rho}{\mu}-\binom{n+1-\rho}{\mu}+\cdots\right.$$
$$\left.+(-1)^{\rho-1}\binom{n+1-\rho}{\mu+1-\rho}\right\}$$
$$=\sum_{\mu=0}^{n}(-1)^{n+1-\rho-\mu}\left[\binom{n-\rho}{\mu}+\binom{n-\rho}{\mu-1}-\left\{\binom{n-\rho}{\mu-1}+\binom{n-\rho}{\mu-\rho}\right\}+\cdots\right.$$
$$\left.+(-1)^{\rho-1}\left\{\binom{n-\rho}{\mu+1-\mu}+\binom{n-\rho}{\mu-\rho}\right\}\right]$$
$$=\sum_{\mu=0}^{n}\left\{(-1)^{n+1-\rho-\mu}\binom{n-\rho}{\mu}+(-1)^{n-\mu}\binom{n-\rho}{\mu-\rho}\right\}.$$

Il vient donc

$$\sum_{\rho=1}^{n}B_\rho B_{n+1-\rho}(c^{p}_{hl_1\cdots i_{\rho-1}j_1}+\cdots+c^{p}_{i_1\cdots i_{\rho-1}hj_1})c^{h}_{i_\rho\cdots i_n}u'a$$
$$=\sum_{\rho=1}^{n}\sum_{\mu=0}^{n}B_\rho B_{n+1-\rho}\left((-1)^{n+1-\rho-\mu}\binom{n-\rho}{\mu}+(-1)^{n-\mu}\binom{n-\rho}{\mu-\rho}\right)$$
$$\times c^{p}_{\underbrace{}_{u}j_1\underbrace{}_{n-\mu}j_2}u'a$$
$$=\sum_{\mu=0}^{n}\sum_{\rho=1}^{n}\ ,,$$
$$=\sum_{\mu=0}^{n}\sum_{\rho'=1}^{n}B_{\rho'}B_{n+1-\rho'}\left((-1)^{\rho'+\mu}\binom{\rho'-1}{\mu}+(-1)^{n+\mu}\binom{\rho'-1}{\rho'-1-n+\mu}\right)$$
$$\times c^{p}_{\underbrace{}_{n}j_1\underbrace{}_{n-\mu}j_2}u'a.$$

Or,

$$\sum_{\rho=1}^{n}B_\rho B_{n+1-\rho}\left\{(-1)^{\rho+\mu}\binom{\rho-1}{\mu}+(-1)^{n+\mu}\binom{\rho-1}{\rho-1-n+\mu}\right\}$$
$$=\sum_{\rho=1}^{n}\sum_{a=1}^{\rho}\sum_{s_1=1}^{\rho+1-a}\cdots\sum_{s_{a-1}=1}^{\rho-1-s_1-\cdots-s_{a-2}}\sum_{b=1}^{n+1-\rho}\sum_{t_1=1}^{n+2-\rho-b}\cdots\sum_{t_{b-1}=1}^{n-\rho-t_1-\cdots-t_{b-2}}$$
$$\frac{(-1)^{a+b+\rho+\mu}\binom{\rho-1}{\mu}+(-1)^{a+b+n+\mu}\binom{\rho-1}{\rho-1-n+\mu}}{(s+1)!\cdots(s_{a-1}+1)!(t_1+1)!\cdots(t_{b-1}+1)!(\rho+1-s)!(n+2-\rho-t)!}$$

$$(s=s_1+\cdots+s_{a-1},\ t=t_1+\cdots+t_{b-1})$$

$$=\sum_{a=1}^{n}\sum_{s_1=1}^{n+1-a}\cdots\sum_{s_{a-1}=1}^{n-1-s_1-\cdots-s_{a-2}}\sum_{b=1}^{n-s}\sum_{t_1=1}^{n+1-s-b}\cdots\sum_{t_{b-1}=1}^{u-1-s-t_1-\cdots-t_{b-2}}\frac{(-1)^{a+b}}{(s_1+1)!\cdots(s_{a-1}+1)!(t_1+1)!\cdots(t_{b-1}+1)!}$$

$$\times\sum_{\rho=s+1}^{n-t}\frac{(-1)^{\rho+\mu}\binom{\rho-1}{\mu}+(-1)^{n+\mu}\binom{\rho-1}{\rho-1-n+\mu}}{(\rho+1-s)!(n+2-\rho-t)!}.$$

La dernière somme peut s'écrire, si l'on y fais $\rho+1-s=\alpha$,

$$\sum_{\alpha=2}^{n+1-s-t}\frac{1}{\alpha!(n+3-s-t-\alpha)!}\left\{(-1)^{\alpha+s-1+\mu}\binom{\alpha+s-2}{\mu}\right.$$
$$\left.(-1)^{n+\mu}\binom{\alpha+s-2}{\alpha+s-2-n+\mu}\right\}$$

6. Posons maintenant

$$(6\cdot1)\qquad B_{\,;n}=\sum_{a=1}^{n+1}\sum_{s_1=1}^{n+2-a}\cdots\sum_{s_{a-1}=1}^{n-s_1-\cdots-s_{a-2}}\sum_{b=1}^{n+1-s}\sum_{t_1=1}^{n+2-s-b}\cdots\sum_{t_{b-1}=1}^{n-s-t_1-\cdots-t_{b-2}}$$

$$\frac{(-1)^{a+b}\left(\begin{bmatrix}s-1\\ \lambda\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}s-1\\ s-1-n+\lambda\end{bmatrix}\right)}{(s_1+1)!\cdots(s_{a-1}+1)!(t_1+1)!\cdots(t_{b-1}+1)!(n+2-s-t)!}$$

$$(s=s_1+\cdots+s_{a-1};\ t=t_1+\cdots+t_{b-1}).$$

Partageons le second membre de cette équation en deux partie:

$$(6\cdot2)\qquad (a=1)+\sum_{a=2}^{n+1}\sum_{s_1=1}^{n+2-a}\cdots$$

Supposons d'abord que $\lambda=0,1,\cdots n-1$. D'après (4·3), (4·4), (4·5) la première partie devient, s étant nul lorsque $a=1$,

$$\sum_{b=1}^{n+1}\sum_{t_1=1}^{n+2-b}\cdots\sum_{t_{b-1}=1}^{n-t_1-\cdots-t_{b-2}}\frac{(-1)^{b+1}\left(\begin{bmatrix}-1\\ \lambda\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1\\ -1-n+\lambda\end{bmatrix}\right)}{(t_1+1)!\cdots(t_{b-1}+1)!(n+2-t)!}$$

$$=\sum_{b=1}^{n+1}\cdots\sum_{t_{b-1}=1}^{n-t_1-\cdots-t_{b-2}}\frac{(-1)^{b}}{(t_1+1)!\cdots(n+2-t)!}=B_{n+1}.$$

La deuxième partie devient, si l'on y fait $a-1=a'$

$$\sum_{a'=1}^{n}\sum_{s_1=1}^{n+1-a'}\cdots\sum_{s_{a'-1}=1}^{n-1-s_1-\cdots-s_{a'-2}}\sum_{s_{a'}=1}^{n-s_1-\cdots-s_{a'-1}}\sum_{b=1}^{n+1-s-s_{a'}}\sum_{t_1=1}^{n+2-s-s_{a'}-b}\cdots\sum_{t_{b-1}=1}^{n-s-s_{a'}-t_1-\cdots-t_{b-2}}$$

$$\frac{(-1)^{a'+b+1}\left\{(-1)^{s+s_{a'}-1+\lambda}\binom{s+s_{a'}+1}{\lambda}-(-1)^{n-\lambda}\binom{s+s_{a'}-1}{s+s_{a'}-1-n+\lambda}\right\}}{(s_1+1)!\cdots(s_{a'-1}+1)!(s_{a'}+1)!(t_1+1)!\cdots(t_{b-1}+1)!(n+2-s-s_{a'}-t)!}$$

$$(s=s_1+\cdots+s_{a'-1})$$

$$=\sum_{a'=1}^{n}\sum_{s_1=1}^{n+1-a'}\cdots\sum_{s_{a'-1}=1}^{n-1-s_1-\cdots-s_{a'-2}}\sum_{b=1}^{n-s}\sum_{t_1=1}^{n+1-s-b}\cdots\sum_{t_{b-1}=1}^{n-1-s-t_1-\cdots-t_{b-2}}$$

$$\frac{(-1)^{a'+b}}{(s_1+1)!\cdots(s_{a'-1}+1)!(t_1+1)!\cdots(t_{b-1}+1)!}$$

$$\times\sum_{s_{a'}=1}^{n-s-t}\frac{(-1)^{s+s_{a'}+\lambda}\binom{s+s_{a'}-1}{\lambda}+(-1)^{n-\lambda}\binom{s+s_{a'}-1}{s+s_{a'}-1-n+\lambda}}{(s_{a'}+1)!(n+2-s-t-s_{a'})!}$$

La dernière somme peut s'écrire, si l'on y fait $s_{a'}+1=a$

$$\sum_{a=2}^{n+1-s-t}\frac{1}{a(n+3-s-t-a)}\left\{(-1)^{a+s-1+\lambda}\binom{a+s-2}{\lambda}\right.$$
$$\left.+(-1)^{n-\lambda}\binom{a+s-2}{a+s-2-n+\lambda}\right\}.$$

On a d'ailleurs,

$$c^p_{i_1\cdots i_n j_1 j_2}u'^{i_1}\cdots u'^{i_n}u^{j_1}u^{j_2}=0.$$

Il vient donc

$$\frac{d^2u'^p}{dt^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\lambda=0}^{n-1}(-1)^{n+1}B_{\lambda;n}c^p_{i_1\cdots i_\lambda j_1 i_{\lambda-1}\cdots i_n j_2}u'^{i_1}\cdots u'^{i}u^{j_1}u^{j_2}.$$

7. Supposons maintenant que $\lambda<0$. Nous avons d'aprèe (4·1)

$$\binom{s-1}{\lambda}=0\quad(\lambda=-1,-2,\cdots)$$

Puisque, par rapport à s_{a-1} l'addition est faite jusqu'à $n-s_1-\cdots-s_{a-2}$ on a

$$n-s_1-\cdots-s_{a-2}\geq s_{a-1}\quad\text{i.e.}\quad n-s\geq 0$$

et, à fortiori, $s-n-1+\lambda<0$ lorsque $\lambda<0$. Il vient donc

$$\binom{s-1}{s-1-n+\lambda}=0\quad(\lambda=-1,\ -2,\cdots).$$

Nous avrns ainsi

$$(7\cdot1)\qquad B_{\lambda;n}=0.\quad(\lambda=-1,\ -2,\cdots).$$

Faisons, ensuite, $\lambda=n+1$. Partageons $B_{n+1;\,n}$ sous la forme (6·2). Pour la premiére partie, s étant nul, on a

$$\begin{bmatrix}s-1\\\lambda\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}s-1\\s-1-n+\lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\n+1\end{bmatrix}-(-)\binom{-1}{0}=-1+1=0.$$

Pour la deuxième partie, on a $n>s-1\geq 0$ et, par suite,

$$\begin{bmatrix} s-1 \\ n+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s-1 \\ s \end{bmatrix} = 0.$$

Il vient donc

$$B_{n+1;\,n} = 0.$$

Supposons, enfin que $\lambda > n+1$. Pour la première partie on a

$$\begin{bmatrix} -1 \\ \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ \lambda - n - 1 \end{bmatrix} = -1 + 1 = 0.$$

D'après l'inégalité $n > s-1 \geq 0$ on a pour la deuxième partie

$$\begin{bmatrix} s-1 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s-1 \\ s-1+\lambda-n \end{bmatrix} = 0.$$

Nous avons ainsi

$$B_{\lambda;n} = 0 \quad (\lambda = n+1,\ n+2, \cdots) \tag{7·2}$$

Nous définissons $B_{\lambda_1,\ldots,\lambda_m;n}$ par

$$\begin{aligned} B_{\lambda_1,\ldots,\lambda_m;n} &= \sum_{a=1}^{n+1} \sum_{s_1=1}^{n+2-a} \cdots \sum_{s_{a-1}=1}^{n-s_1-\cdots-s_{a-2}} \frac{(-1)^a}{(s_1+1)!\cdots(s_{a-1}+1)!} \\ &\times \left\{ B_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{m-1};\,n+1+s} \left(\begin{bmatrix} s-1 \\ \lambda_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s-1 \\ s-1-\mu \end{bmatrix} \right) \right. \\ &+ B_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{m-2},\lambda_{m-1}+\lambda_m+1-s;\,n+1-s} \left(\begin{bmatrix} s-1 \\ \lambda_{m-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s-1 \\ s-1-\lambda_m \end{bmatrix} \right) \\ &+ B_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{m-3},\lambda_{m-2}+\lambda_{m-1}+1-s,\lambda_m;\,n+1-s} \left(\begin{bmatrix} s-1 \\ \lambda_{m-2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s-1 \\ s-1-\lambda_{m-1} \end{bmatrix} \right) \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\left. + B_{\lambda_1+\lambda_2+1-s,\lambda_3,\ldots,\lambda_m;\,n+1-s} \left(\begin{bmatrix} s-1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s-1 \\ s-1-\lambda_2 \end{bmatrix} \right) \right\} \\ &(m,\ n = 1,\ 2, \cdots;\ \lambda_1 \cdots,\ \lambda_m = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \cdots), \end{aligned} \tag{7·3}$$

où $s = s_1 + \cdots + s_{a-1}$; $\mu = n - \lambda_1 - \cdots - \lambda_m$.

Nous démontrons maintonant que

$$B_{\lambda_1,\ldots,\lambda_m;n} = 0, \text{ si } \lambda_1 + \cdots + \lambda_m > n. \tag{7·4}$$

D'après (7·2) cette proposition est vraie pour $m=1$. Si elle est vraie pour $m-1$, et si $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m > n$, il vient

$$B_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{m-2},\lambda_{m-1}+\lambda_m+1-s;\,n+1-s} = 0.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$B_{\lambda_1+\lambda_2+1-s,\lambda_3,\ldots,\lambda_m;\,n+1-s} = 0.$$

Si, de plus $\lambda_1 + \cdots + \lambda_{m-1} > n+1-s$, on a

$$B_{\lambda_1,\dots,\lambda_{m-1};\, n+1-s}=0.$$

et, par suite, $B_{\lambda_1,\dots,\lambda_m;\, n}=0$.

Supposons, ensuite, que $\lambda_1+\cdots+\lambda_{m-1}\leq n+1-s$. Alors d'après l'hypothèse que $\lambda_1+\cdots+\lambda_m>n$ on a $\lambda_m>s-1$. Il vient donc

$$\begin{bmatrix} s-1 \\ \lambda_m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s-1 \\ s-1-\mu \end{bmatrix}=0 \quad (s\geq 1)$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ \lambda_m \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -1 \\ -\mu-1 \end{bmatrix}=-1+1=0.$$

et, par suite, $B_{\lambda_1,\dots,\lambda_m;\, n}=0$.

Nous démontrons ensuite que

(7·5) $$B_{\lambda_1,\dots,\lambda_m;n}=0, \text{ si } \lambda_m<0.$$

D'après (7·1) cette proposition est vraie pour $m=1$. Si elle est vraie pour $m-1$ et si $\lambda_m<0$, il vient

$$B_{\lambda_1,\dots,\lambda_{m-3},\, \lambda_{m-2}+\lambda_{m-1}+1-s,\, \lambda_m;\, n+1-s}=0.$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$B_{\lambda_1+\lambda_2+1-s,\, \lambda_3,\dots,\lambda_m;\, n+1-s}=0.$$

Si, de plus, $\lambda_{m-1}+\lambda_m+1-s<0$, on a

$$B_{\lambda_1,\dots,\lambda_{m-2},\, \lambda_{m-1}+\lambda_m+1-s;\, n+1-s}=0.$$

Si $\lambda_{m-1}+\lambda_m+1-s\geq 0$, $\lambda_m<0$, on a $\lambda_{m-1}\geq s-1-\lambda_m>s-1$ et, par suite,

$$\begin{bmatrix} s-1 \\ \lambda_{m-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s-1 \\ s-1-\lambda_m \end{bmatrix}=0 \quad (s\geqq 1),$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ \lambda_{m-1} \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -1 \\ -\lambda_m-1 \end{bmatrix}=-1+1=0.$$

Dans tous cas

$$B_{\lambda_1+\dots+\lambda_{m-2},\, \lambda_{m-1}+\lambda_m+1-s;\, n+1-s}\left(\begin{bmatrix} s-1 \\ \lambda_{m-1} \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} s-1 \\ s-1-\lambda_m \end{bmatrix}\right)=0.$$

Quant au terme

$$B_{\lambda_1,\dots,\lambda_{m-1};\, n+1-s}\left(\begin{bmatrix} s-1 \\ \lambda_m \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} s-1 \\ s-1-\mu \end{bmatrix}\right)$$

on a

$$B_{\lambda_1,\dots,\lambda_{m-1};\, n+1-s}=0.$$

si $\lambda_1+\cdots+\lambda_{m-1}>n+1-s$ tandis qu'on a

$$\begin{bmatrix} s-1 \\ \lambda_m \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} s-1 \\ s-1-\mu \end{bmatrix}=0,$$

si $\lambda_1+\cdots+\lambda_{m-1}\leq n+1-s,\ \lambda_m<0.$ La démonstration est ainsi complétée.

8. Nous allons maintenant démontrer que

$$
(8\cdot 1)\qquad \frac{d^m u'^p}{dt^m}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\lambda_1=0}^{n-1}\sum_{\lambda_2=0}^{n-1-\lambda_1}\cdots\sum_{\lambda_{m-1}=0}^{n-1-\lambda_1-\cdots\cdots-\lambda_{m-1}}(-1)^{n+m-1}B_{\lambda_1,\dots,\lambda_{m-1};n}
$$

$$
\times C^p_{\underbrace{\quad}_{\lambda_1} j_1 \underbrace{\quad}_{\lambda_2} j_2\cdots j_{m-2}\underbrace{\qquad}_{\lambda_{m-1}} j_{m-1}\underbrace{\qquad\qquad}_{n-\lambda_1-\cdots\cdots-\lambda_{m-1}} j_m}
$$

$$
\times u'^{i_1}\cdots u'^{i_n}\alpha^{j_1}\cdots\alpha^{j_m}
$$

Nous avons déjà vu que cette équation est vérifiée pour $n=1$, 2. Il suffit donc maintenant de prouver que si elle est vérifiée pour m, elle s'étend aussi pour $m+1$. Or, en différentiant (8·1) on a d'après (3·2),

$$
(8\cdot 2)\qquad \frac{d^{m+1}u'^p}{dt^{m+1}}=\Big\{\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\lambda_1=0}^{n-1}\sum_{\lambda_2=0}^{n-1-\lambda_1}\cdots\sum_{\lambda_{m-1}=0}^{n-1-\lambda_1-\cdots\cdots-\lambda_{m-2}}(-1)^{n+m-1}B_{\lambda_1,\dots,\lambda_{m-1};n}
$$

$$
\times\Big(C^p_{\underbrace{\quad}_{\lambda_1} j_1\cdots j_{m-1} h\underbrace{\qquad\qquad}_{n-1-\lambda_1-\cdots\cdots-\lambda_{m-1}} j_m}+\cdots
$$

$$
+C^p_{\underbrace{\quad}_{\lambda_1} j_1\cdots j_{m-1}\underbrace{\qquad\qquad}_{n-1-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-1}} h j_m}
$$

$$
+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{\lambda_1=0}^{n-2}\cdots\sum_{\lambda_{m-2}=0}^{n-2-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-3}}\ \sum_{\lambda_{m-1}=1}^{n-1-\lambda_1\cdots-\lambda_{m-2}}
$$

$$
(-1)^{n+m-1}B_{\lambda_1,\dots,\lambda_{m-1};n}\Big(C^p_{\underbrace{\quad}_{\lambda_1} j_1\cdots j_{m-2} h\underbrace{\qquad}_{\lambda_{m-1}-1} j_{m-1}\underbrace{\qquad\qquad}_{n-\lambda_1-\cdots\lambda_{m-1}} j_m}+\cdots
$$

$$
+C^p_{\underbrace{\quad}_{\lambda_1} j_1\cdots j_{m-2}\underbrace{\qquad}_{\lambda_{m-1}-1} h j_{m-1}\underbrace{\qquad\qquad}_{n-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-1}} j_m}\Big)
$$

$$
+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{\lambda_1=0}^{n-2}\cdots\sum_{\lambda_{m-3}=0}^{n-2-\lambda_1\cdots-\lambda_{m-3}}\ \sum_{\lambda_{m-2}=1}^{n-1-\lambda_1\cdots-\lambda_{m-3}}\ \sum_{\lambda_{m-1}=1}^{n-1-\lambda_1\cdots\cdots\lambda_{m-2}}
$$

$$
(-1)^{n+m-1}B_{\lambda_1,\dots,\lambda_{m-1};n}\Big(C^p_{\underbrace{\quad}_{\lambda_1} j_1\cdots j_{m-3} h\underbrace{\qquad}_{\lambda_{m-2}-1} j_{m-2}\underbrace{\qquad}_{\lambda_{m-1}} j_{m-1}\underbrace{\qquad\qquad}_{n-\lambda_1-\cdots\cdots-\lambda_{m-1}} j_m}
$$

$$
+\cdots\cdots
$$

$$
+C^p_{\underbrace{\quad}_{\lambda_1} j_1\cdots j_{m-3}\underbrace{\qquad}_{\lambda_{m-1}-1} h j_{m-2}\underbrace{\qquad}_{\lambda_{m-1}} j_{m-1}\underbrace{\qquad\qquad}_{n-\lambda_1-\cdots\cdots-\lambda_{m-1}} j_m}\Big)
$$

$$
+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
$$

$$
+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{\lambda_1=1}^{n-1}\sum_{\lambda_2=0}^{n-1-\lambda_1}\cdots\sum_{\lambda_{m-1}=0}^{n-1-\lambda_1-\cdots\cdots-\lambda_{m-2}}(-1)^{n+m-1}B_{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{m-1};n}
$$

$$
\times\Big(C^p_{h\underbrace{\qquad}_{\lambda_1-1} j_1\underbrace{\quad}_{\lambda_2} j_2\cdots j_{m-1}\underbrace{\qquad\qquad}_{n-\lambda_1-\cdots\cdots-\lambda_{m-1}} j_m}+\cdots
$$

$$
+C^p_{\underbrace{\qquad}_{\lambda_1-1} h j_1\underbrace{\quad}_{\lambda_2} j_2\cdots j_{m-1}\underbrace{\qquad\qquad}_{n-\lambda_1-\cdots\cdots-\lambda_{m-1}} j_m}\Big)\Big\}u'^{i_1}\cdots u'^{i_{n-1}}
$$

$$\times\left\{\delta^h_{j_{m+1}}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n B_n c^{\nu}_{k_1\cdots k_n\, j_{m+1}}\, u'^{k_1}\cdots u'^{k_n}\right\}a^{j_1}\cdots a^{j_{m+1}}.$$

En multipliant par $\delta^h_{j_{m+1}}$ la première somme dans le second membre de cette équation (l'addition est faite papport à h). et en ecrivant $n+1$ à la place de n, on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\lambda_1=0}^{n}\cdots\sum_{\lambda_{m-1}=0}^{n-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-2}}\ \sum_{\mu=0}^{n-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-2}}(-1)^{n+m}B_{\lambda_1,\cdots,\lambda_{m-1};n+1}$$

$$\times\, c^i_{\underbrace{}_{\lambda_1} j_1\cdots j_{m-1}\underbrace{}_{\mu} j_m \underbrace{\qquad\qquad}_{n-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-1}-\mu} j_{m+1}}u'a.$$

Et, puisque

$$c^i_{\cdots j_m\, j_{m+1}}a^{j_m}a^{j_{m+1}}=0,$$

l'intervalle de la sommation par rapport à λ, μ peut s'écrire

$$\sum_{\lambda_1=0}^{n-1}\cdots\sum_{\lambda_{m-1}=0}^{n-1-\lambda-\cdots\lambda_1\cdots-\lambda_{m-2}}\ \sum_{\mu=0}^{n-1-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-2}}$$

De la meme manière, multiplions la deuxième somme par $\delta^h_{j_{m+1}}$, et échangeons l'ordre de la sommation en remarquant que

$$\sum_{\lambda_{m-1}=1}^{n-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-2}}\ \sum_{\mu=0}^{\lambda_{m-1}-1}=\sum_{\mu=0}^{n-1-\lambda_1\cdots-\lambda_{m-2}}\ \sum_{\lambda_{m-1}=1=\mu+1}^{n-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-2}}$$

et posons $\lambda_{m-1}-\mu-1=\nu$. Il vient

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\lambda_1=0}^{n-1-\lambda_1}\cdots\sum_{\lambda_{m-2}=0}^{n-1-\lambda_1\cdots-\lambda_{m-3}}\ \sum_{\mu=0}^{n-\lambda_1\cdots-\lambda_{m-2}}\ \sum_{\nu=0}^{n-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-2}}$$

$$(-1)^{n+m}B_{\lambda_1,\cdots,\lambda_{m-2},\,\mu+\nu+1;\,n+1}$$

$$\times\, c^i_{\underbrace{}_{\lambda_1} j_1\cdots j_{m-2}\underbrace{}_{\mu} j_m \underbrace{\qquad\qquad}_{n-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-2}-\mu-\nu} j_{m+1}}u'a$$

Enfin, la m-ième somme multipliée par $\delta^h_{j_m+1}$ peut s'écrire

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{n-1}\sum_{\nu=0}^{n-1-\mu}\ \sum_{\lambda_2=0}^{n-1-\mu-\nu}\cdots\sum_{\lambda_{m-1}=0}^{n-1-\mu-\nu-\cdots-\lambda_{m-2}}$$

$$(-1)^{n+m}B_{\mu+\nu+1,\,\lambda_2,\cdots,\lambda_{m-1};\,n+1}$$

$$\times\, c^i_{\underbrace{}_{\mu} j_1\underbrace{}_{\nu} j_2\underbrace{}_{\lambda_2} j_3\cdots j_m \underbrace{\qquad\qquad}_{n-\mu-\nu-\lambda_2-\cdots-\lambda_{m-1}} j_{m+1}}u'\,a.$$

9. La deuxième somme dans le second membre de $(8\cdot 2)$ s'écrit, si l'on pose $n-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-1}=\nu$,

$$(9\cdot 1)\qquad \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{\lambda_1=0}^{n-2}\cdots\sum_{\lambda_{m-2}=0}^{u-2-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-3}}\ \sum_{\nu=1}^{n-1-\lambda_1\cdots-\lambda_{m-2}}$$

$$(-1)^{n+m-1}B_{\lambda_1,\cdots,\lambda_{m-2},\,n-\lambda_1\cdots-\lambda_{m-2}-\nu;\,n}\times$$

$$\times\,(c^{p}\underset{\lambda_1}{\smile}{}_{j_1\cdots j_{m-2}h}\,\overbrace{\qquad}_{n-1-\lambda_1\cdots-\lambda_{m-2}-\nu}{}^{j_{m-1}}\underset{\nu}{\smile}{}_{j_m}+\cdots\cdots$$

$$+\,c^{p}\smile_{j_1\cdots j_{m-2}})$$

De meme, puisque

$$\sum_{\lambda_{m-2}=1}^{n-1-\lambda_1-\cdots\cdots-\lambda_{m-3}}\ \sum_{\lambda_{m-1}=0}^{n-1-\lambda_1\cdots\cdots-\lambda_{m-2}}=\sum_{\lambda_{m-1}=0}^{n-2-\lambda_1-\cdots\cdots-\lambda_{m-3}}\ \sum_{\lambda_{m-2}=1}^{n-1-\lambda_1-\cdots\cdots-\lambda_{m-3}-\lambda_{m-1}}$$

la troisième somme s'écrit

$$(9\cdot2)\qquad \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{\lambda_1=0}^{n-2}\cdots\sum_{\lambda_{m-3}=0}^{n-2-\lambda_1-\cdots\cdots-\lambda_{m-4}}\ \sum_{\lambda_{m-1}=0}^{n-2-\lambda_1-\cdots\cdots-\lambda_{m-3}}\ \sum_{\nu=1}^{n-1-\lambda_1-\cdots\cdots-\lambda_{m-3}-\lambda_{m-1}}$$

$$(-1)^{n+m-1}\,B_{\lambda_1,\cdots\cdots,\lambda_{m-3},\,n-\lambda_1-\cdots\cdots-\lambda_{m-3}-\lambda_{m-1}-\nu,\,\lambda_{m-1};\,n}$$

$$\times\,(c^{p}\underset{\lambda_1}{\smile}{}_{j_1\cdots j_{m-3}h}\,\overbrace{\qquad}_{n-\lambda_1-\cdots\cdots-\lambda_{m-3}-\lambda_{m-1}-\nu}{}^{j_{m-2}}\underset{\lambda_{m-1}}{\smile}{}^{j_{m-1}}\underset{\nu}{\smile}{}_{j_m}+\cdots$$

$$+\,c^{p}\underset{\lambda_1}{\smile}{}_{j_1\cdots j_{m-3}}\,\overbrace{\qquad}_{n-\lambda_1-\cdots\cdots-\lambda_{m-3}-\lambda_{m-1}-\nu}{}^{hj_{m-2}}\underset{\lambda_{m-1}}{\smile}{}^{j_{m-1}}\underset{\nu}{\smile}{}_{j_m}),$$

et ainsi de suite. Enfin, la m-ieme some s'écrit

$$(9\cdot3)\qquad \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{\lambda_2=1}^{n-2}\cdots\sum_{\lambda_{m-1}=0}^{n-2-\lambda_2-\cdots\cdots-\lambda_{m-2}}\ \sum_{\nu=1}^{n-1-\lambda_2-\cdots\cdots-\lambda_{m-1}}$$

$$(-1)^{n+m-1}B_{n-\lambda_2-\cdots\cdots-\lambda_{m-1}-\nu,\,\lambda_2,\cdots,\lambda_{m-1};\,n}$$

$$\times\,(c^{p}_{h}\,\overbrace{\qquad}_{n-1-\lambda_2-\cdots\cdots-\lambda_{m-1}-\nu}{}^{j_1}\underset{\lambda_2}{\smile}{}^{j_2\cdots j_{m-1}}\underset{\nu}{\smile}{}_{j_m}+\cdots$$

$$+\,c^{p}\,\overbrace{\qquad}_{n-1-\lambda_2-\cdots\cdots-\lambda_{m-1}-\nu}{}^{hj_1}\underset{\lambda_2}{\smile}{}^{j_2\cdots j_{m-1}}\underset{\nu}{\smile}{}_{j_m}).$$

10. Multiplions la première somme dans le second membre de (8·2) par

$$(10\cdot1)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}B_{n}c^{p}_{k_1\cdots k_n j_{m+1}}u'^{a}$$

Alors, le terme d'ordre n par rapport à $u'^{1},\cdots,u'^{r}$ s'écrit

$$\sum_{\rho=1}^{n}\sum_{\lambda_1=0}^{\rho-1}\sum_{\lambda_2=0}^{\rho-1-\lambda_1}\cdots\sum_{\lambda_{m-1}=0}^{\rho-1-\lambda_1-\cdots\cdots-\lambda_{m-2}}\ \sum_{\mu=0}^{n-\lambda_1-\cdots\cdots-\lambda_{m-1}}$$

$$(-1)^{n+m}B_{\lambda_1,\cdots,\lambda_{m-1};\,\rho}B_{n+1-\rho}$$

$$\times\,(c^{p}\underset{\lambda_1}{\smile}{}_{j_1\cdots j_{m-1}h}\,\overbrace{\qquad}_{\rho-1-\lambda_1-\cdots\cdots-\lambda_{m-1}}{}_{j_m}+\cdots.$$

$$c^{p}\smile_{j_1\cdots j_{m-1}}\,\overbrace{\qquad}_{\rho-1-\lambda_1\cdots\cdots-\lambda_{m-1}}{}_{hj_m})\,c^{h}_{i_\rho\cdots i_n j_{m+1}}u'^{a}$$

Or

$$c^{p}\underset{\lambda_1}{\smile}{}_{j_1\cdots j_{m-1}h}\,\overbrace{\qquad}_{\rho-1-\lambda_1-\cdots\cdots-\lambda_{m-1}}{}_{j_m}c^{h}_{i_\rho\cdots i_n j_{m+1}}u'^{a}$$

$$=\sum_{\mu=0}^{n-\rho+1}(-1)^{n}\binom{n+1-\rho}{\mu}c^{p}\underset{\lambda_1}{\smile}{}_{j_1\cdots j_{m-1}}\underset{n+1-\rho-\mu}{\smile}{}^{j_{m+1}}\,\overbrace{\qquad}_{\rho-1-\lambda_1-\cdots\cdots-\lambda_{m-1}+\mu}{}^{j_m}u'^{a}$$

$$=\sum_{\mu'=0}^{n-\rho+1}(-1)^{n+1+\rho+\mu'}\binom{n+1-\rho}{\mu'}c^{p}_{\underbrace{j_1\cdots j_{m-1}}_{\lambda_1}\underbrace{j_m}_{\mu'}\overbrace{j_{m-1}}^{n-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-1}-\mu}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$c^{p}_{\underbrace{j_1\cdots j_{m-1}}_{\lambda_1}\overbrace{\qquad}^{\rho-1-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-1}}hj_m}c^{h}_{i_\rho\cdots i_n j_{m+1}}u'\alpha$$

$$=\sum_{\mu=0}^{n-\rho+1}(-1)^{n}\binom{n+1-\rho}{\mu}c^{i}_{\underbrace{j_1\cdots j_{m-1}}_{\lambda_1}\overbrace{j_{m+1}}^{n-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-1}-\mu}\underbrace{j_m}_{\mu}}u'\alpha$$

$$=\sum_{\mu'=\rho-1-\lambda_1\cdots-\lambda_{m-1}}^{n-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-1}}(-)^{n+\lambda_1+\cdots+\lambda_{m+1}+\mu'}\binom{n+1-\rho}{\mu'-\rho+1+\lambda_1+\cdots+\lambda_{m-1}}$$

$$\times c^{p}_{\underbrace{j_1\cdots j_{m-1}}_{\lambda_1}\underbrace{j_m}_{\mu'}\overbrace{j_{m-1}}^{n-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-1}-\mu}}u'\alpha.$$

On a d'après (4·1), (4·2)

$$\sum_{\mu=0}^{n-\rho+1}(-1)^{n+1+\rho+\mu}\binom{n+1-\rho}{\mu}+\cdots$$

$$+\sum_{\mu=\rho-1-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-1}}^{n-\lambda_1-\cdots-\lambda_m}(-1)^{n+\lambda_1+\cdots-\lambda_{m-1}+\mu}\binom{n+1-\rho}{\mu-\rho+1+\lambda_1+\cdots+\lambda_{m-1}}$$

$$=\sum_{\mu=0}^{n-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-1}}(-1)^{n+1+\rho+\mu}\Bigg(\binom{n+1-\rho}{\mu}-\binom{n+1-\rho}{\mu-1}+\cdots$$

$$+(-1)^{\rho-1-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-1}}\binom{n+1-\rho}{\mu-\rho+1+\lambda_1++\lambda_{m-1}}\Bigg)$$

$$=\sum_{\mu=0}^{n-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-1}}\Bigg((-1)^{n+1+\rho+\mu}\binom{n-\rho}{\mu}+\cdots$$

$$+(-1)^{n+\mu+\lambda_1+\cdots+\lambda_{m-1}}\binom{n-\rho}{\mu-\rho+\lambda_1+\cdots+\lambda_{m-1}}\Bigg).$$

On a de plus

$$\sum_{\rho=1}^{n}\sum_{\lambda_1=0}^{\rho-1}\sum_{\lambda_2=0}^{\rho-1-\lambda_1}\cdots\sum_{\lambda_{m-1}=0}^{\rho-1-\lambda_1\cdots-\lambda_{m-2}}\sum_{\mu=0}^{n-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-1}}$$

$$=\sum_{\lambda_1=0}^{n-1}\sum_{\lambda_2=0}^{n-1-\lambda_1}\cdots\sum_{\rho=\lambda_1+\cdots+\lambda_{m-1}+1}^{n-1-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-2}}\sum_{\rho=\lambda_1+\cdots+\lambda_{m-1}+1}^{n}\sum_{\mu=0}^{n-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-1}}$$

Donc, si l'on pose $n+1-\rho=\rho'$, le teıme considéré peut s'écrire

$$\sum_{\lambda_1=0}^{n-1}\sum_{\lambda_1=0}^{n-1-\lambda_1}\cdots\sum_{\lambda_{m-1}=0}^{n-1-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m=2}}\sum_{\mu=0}^{n-1-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-1}}\sum_{\rho'=1}^{n-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-1}}$$

$$(-1)^{n+m}B_{\rho'}B_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{m-1};\,n+1-\rho'}\Bigg\{(-1)^{\rho'+\mu}\binom{\rho'-1}{n}$$

$$+(-1)^{n+\lambda_1+\cdots+\lambda_{m-1}+\mu}\binom{\rho'-1}{\rho'-1+\lambda_1+\cdots+\lambda_{m-1}+\mu-n}\Bigg\}$$

$$\times c^{p}_{\underbrace{j_1\cdots j_{m-1}}_{\lambda_1}\underbrace{j_m}_{\mu}\overbrace{j_{m+1}}^{n-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-1}-\mu}}u'\alpha.$$

Or, lorsque $\rho'=n+1-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-1}$, on a

$$(-1)^{\rho'+\mu}\binom{\rho'-1}{\mu}+(-1)^{n+\lambda_1+\cdots+\lambda_{m-1}+\mu}\binom{\rho'-1}{\rho'-1+\lambda_1+\cdots+\lambda_{m+1}+\mu-n}$$
$$=(-1)^{n+1+\lambda_1+\cdots+\lambda_{m-1}+\mu}\binom{n-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-1}}{\mu}$$
$$+(-1)^{n+\lambda_1+\cdots+\lambda_{m-1}+\mu}\binom{n-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-1}}{\mu}=0.$$

Si $\rho'>n+1-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-1}$, on a d'après (7·5)

$$B_{\lambda_1,\ldots,\lambda_m;\, n+1-\rho'}=0.$$

On a donc

$$\sum_{\rho=1}^{n-\lambda_1\cdots-\lambda_{m-1}} B_\rho B_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{m-1};\, n+1-\rho}\left\{(-1)^{\rho+\mu}\binom{\rho-1}{\mu}\right.$$
$$\left.+(-1)^{n+\lambda_1+\cdots+\lambda_{m+1}+\mu}\binom{\rho-1}{\rho-1+\lambda_1+\cdots+\lambda_{m-1}+\mu-n}\right\}$$
$$=\sum_{\rho=1}^{n'}\sum_{a=1}^{\rho}\sum_{s_1=1}^{\rho+1-a}\cdots\sum_{s_{a-1}=1}^{\rho-1-s_1-\cdots-s_{a-2}}\frac{(-1)^a B_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{m+1};\, n+1-\rho}}{(s_1+1)!\cdots(s_{a-1}+1)!\,(\rho+1-s)!}$$
$$\times\left\{(-1)^{\rho+\mu}\binom{\rho-1}{\mu}+(-1)^{n+\lambda_1+\cdots+\lambda_{m-1}+\mu}\binom{\rho-1}{\rho-1+\lambda_1+\cdots+\lambda_{m+1}+\mu-n}\right\}$$
$$(s=s_1+\cdots+s_{a-1})$$
$$=\sum_{a=1}^{n}\sum_{s_1=1}^{n+1-a}\cdots\sum_{s_{a-1}=1}^{n-1-s_1-\cdots-s_{a-2}}\sum_{\rho=s_1+\cdots+s_{a-1}+1}^{n}(\;,,\;)$$
$$=\sum_{a=1}^{n}\sum_{s_1=1}^{n+1-a}\cdots\sum_{s_{a-1}=1}^{n-1-s_1-\cdots-s_{a-2}}\sum_{\alpha=2}^{n+1-s}\frac{(-1)^a B_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{m-1};\, n+2-s-\alpha}}{(s_1+1)!\cdots(s_{a-1}+1)!\,\alpha!}$$
$$\times\left\{(-1)^{\alpha+s+1+\mu}\binom{\alpha+s-2}{\mu}\right.$$
$$\left.+(-1)^{n+\cdots+\lambda_{m-1}+\mu}\binom{\alpha+s-2}{\alpha+s-2+\lambda_1+\cdots+\lambda_{m-1}+\mu-n}\right\}$$
$$(\alpha=\rho+1-s).$$

11. Considérons ensuite le produit de (9·1) et (10·1). Le terme d'ore n par rapport à $u'^1,\cdots,u'^r$ dans ce produit s'écrit

$$\sum_{\rho=2}^{n}\sum_{\lambda_1=0}^{\rho-2}\sum_{\lambda_2=0}^{\rho-2-\lambda_1}\cdots\sum_{\lambda_{m-2}=0}^{\rho-1-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-3}}\sum_{\nu=1}^{\rho-1-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-2}}$$
$$(-1)^{n+m}B_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{m-2},\,\rho-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-2}-\nu;\,\rho}B_{n+1-\rho}$$
$$\times\,(c^{p}_{\underbrace{}_{\lambda_1}j_1\cdots j_{m-2}}{}^{h}{}_{\overbrace{}^{}_{\rho-1-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-2}-\nu}}{}_{j_{m-1}\underbrace{}_{\nu}j_m}+\cdots$$
$$+\,c^{ph}_{\underbrace{}_{\lambda_1}j_1\cdots j_{m-2}}{}_{\overbrace{}^{}_{\rho-1-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-2}-\nu}}{}^{h}{}_{j_{m-1}\underbrace{}_{\nu}j_m})\,c_{i_\rho\cdots i_n j_{m+1}}u'^{a}$$

Or,

$$c^{p}_{\underbrace{}_{\lambda_1}j_1\cdots j_{m-2}}{}^{h}{}_{\overbrace{}^{}_{\rho-1-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-2}-\nu}}{}^{h}{}_{j_{m-1}\underbrace{}_{\nu}j_m})\,c^{h}_{i_\rho\cdots i_m j_{n+1}}u'^{a}$$

$$=\sum_{\mu=0}^{n+1-\rho}(-1)^{u}\binom{n+1-\rho}{\mu}$$

$$\times C^{p}_{\underset{\lambda_1}{\smile} j_1\cdots j_{m-2} \underset{n+1-\rho-\mu}{\smile} j_{m+1} \underset{\rho-1-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-2}-\nu+\mu}{\frown} j_{m-1} \underset{\nu}{\smile} j_m} u'a$$

$$=\sum_{\mu'=0}^{n+1-\rho}(-1)^{n+1+\rho+\mu'}\binom{n+1-\rho}{\mu'}$$

$$\times C^{p}_{\underset{\lambda_1}{\smile} j_1\cdots j_{m-2} \underset{\mu'}{\smile} j_{m-1} \underset{n-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-2}-\nu-\mu'}{\frown} j_m \underset{\nu}{\smile} j_{m+1}} u'a$$

....

$$C^{p}_{\underset{\lambda_1}{\smile} j_1\cdots j_{m-2} \underset{\rho-1-\lambda_1-\cdots\lambda_{m-2}-\nu}{\frown} h j_{m-1} \underset{\nu}{\smile} j_m} C^{h}_{i_s\cdots i_n j_{m+1}} u'a$$

$$=\sum_{\mu=0}^{n+1-\rho}(-1)^{u}\binom{n+1-\rho}{\mu}$$

$$\times C^{p}_{\cdots j_{m-2} \underset{n-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-2}-\mu-\nu}{\frown} j_{m+1} \underset{\mu}{\smile} j_{m-1} \underset{\nu}{\smile} j_m} u'a$$

$$=\sum_{u'=\rho-1-\lambda_1-\lambda_{m-2}-\nu}^{n-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-2}-\nu}(-1)^{n+\lambda_1+\cdots+\lambda_{m-2}+\mu'+\nu}\binom{n+1-\rho}{\mu'-\rho+1+\lambda_1+\cdots\lambda_{m+2}+\nu}$$

$$\times C^{p}_{\underset{\lambda_1}{\smile} j_1\cdots j_{m-2} \underset{\mu'}{\smile} j_{m-1} \underset{n-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-2}-\nu-\mu'}{\frown} j_m \underset{\nu}{\smile} j_{m+1}} u'a.$$

On a d'après (4·1), (4·2)

$$\sum_{\mu=0}^{n+1-\rho}(-1)^{n+1+\rho+\mu}\binom{n+1-\rho}{\mu}+\cdots$$

$$+\sum_{\mu=\rho-1-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-2}-\nu}^{n+\lambda_1+\cdots+\lambda_{m-2}+\mu+\nu}(-1)^{n+\lambda_1+\cdots\lambda_{m-2}+\mu+\nu}\binom{n+1-\rho}{\mu-\rho+1+\lambda_1\cdots+\lambda_{m-2}+\nu}$$

$$=\sum_{\mu=0}^{n-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-2}-\nu}(-1)^{n+1+\rho+\mu}\left\{\binom{n+1-\rho}{\mu}-\binom{n+1-\rho}{\mu-1}+\cdots\right.$$

$$\left.+(-1)^{\rho+1+\lambda_1+\cdots+\lambda_{m-2}+\nu}\binom{n+1-\rho}{\mu-\rho+1+\lambda_1+\cdots-\lambda_{m-2}+\nu}\right\}$$

$$=\sum_{\mu=0}^{n-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-2}-\nu}\left\{(-)^{n+1+\rho+\mu}\binom{n-\rho}{\mu}\right.$$

$$\left.+(-1)^{n+\lambda_1+\cdots+\lambda_{m-2}+\nu+\mu}\binom{n-\rho}{\mu-\rho+\lambda_1+\cdots+\lambda_{m-2}+\nu}\right\}.$$

On a de plus

$$\sum_{\rho=2}^{n}\sum_{\lambda_1=0}^{\rho-2}\sum_{\lambda_2=0}^{\rho-2-\lambda_1}\cdots\sum_{\lambda_{m-2}=0}^{\rho-2-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-2}}\sum_{\nu=1}^{\rho-1-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-2}}\sum_{\mu=0}^{n-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-2}-\nu}$$

$$=\sum_{\lambda_1=0}^{n-2}\sum_{\lambda_2=0}^{n-2-\lambda_1}\cdots\sum_{\lambda_{m-2}=0}^{n-2-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-2}}\sum_{\nu=1}^{n-1-\cdots-\lambda_{m-2}}\sum_{\rho=\lambda_1+\cdots+\lambda_{m-2}+\nu+1}^{n}\sum_{\mu=0}^{n-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-2}-\nu}.$$

Donc, si l'on pose $n+1-\rho=\rho'$, le terme considéré peut s'écrire

$$(11\cdot1)\qquad \sum_{\lambda_1=0}^{n-2}\sum_{\lambda_2=0}^{n-2-\lambda_1}\cdots\sum_{\lambda_{m-2}=0}^{n-2-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-3}}\ \sum_{\nu=1}^{n-1=\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-2}}\ \sum_{\mu=0}^{n-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-2}-\nu}\ \sum_{\rho'=1}^{n-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-2}-\nu}$$

$$(-1)^{n+m}B_{\rho'}\ B_{\lambda_1,\dots,\lambda_{m-2},\ n+1-\lambda_1\cdots-\lambda_{m-2}-\nu-\rho',\ n+1-\rho'}$$

$$\times\left\{(-1)^{\rho'+\mu}\binom{\rho'-1}{\mu}\right.$$

$$\left.+(-1)^{n+\lambda_1+\cdots+\lambda_{m-2}+\mu-\nu}\binom{\rho'-1}{\rho'-1+\lambda_1+\cdots+\lambda_{m+2}+\mu+\nu-n}\right\}$$

$$\times c^{p}_{\underbrace{\ }_{\lambda_1}j_1\cdots j_{m-2}\underbrace{\ }_{\mu}j_{m-1}\overbrace{n-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-2}-\nu-\mu}\ j_m\underbrace{\ }_{\nu}j_{m+1}}u'\alpha.$$

Or, lorsque $\rho'=n+1-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-2}-\nu$ on a

$$(-1)^{\rho'+\mu}\binom{\rho'-1}{\mu}$$

$$+(-1)^{n+\lambda_1+\cdots+\lambda_{m-2}+\mu+\nu}\binom{\rho'-1}{\rho'-1+\lambda_1+\cdots+\lambda_{m+2}+\mu+\nu-n}$$

$$=(-1)^{n+1+\lambda_1+\cdots\lambda_{m-2}+\mu+\nu}\binom{n-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-2}-\nu}{\mu}$$

$$+(-1)^{n+\lambda_1+\cdots+\lambda_{m-2}+\mu+\nu}\binom{n-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-2}-\nu}{\mu}=0.$$

Si $\rho'>n+1-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-1}$, on a d'après (7·6)

$$B_{\lambda_1,\dots,\lambda_{m-2},\ n+1-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-2}-\nu-\rho'}=0.$$

Nous pouvens donce supposer dans (11·1) que l'addition par rappsrt à ρ' s'étend de 1 à n. D'ailleurs, si $\nu=n-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-2}$ $\rho'=1$ on a

$$\binom{\rho'-1}{\mu}=\binom{\rho'-1}{\rho'-1+\lambda_1+\cdots+\lambda_{m-2}+\mu-\nu-n}=\binom{0}{\mu},$$

tandis que si $\nu=n-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m+2}$, $\rho'>1$ on a

$$B_{\lambda_1,\dots,\ \lambda_{m-2},n+1-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-2}-\nu-\rho';\ n+1-\rho'}=0.$$

Nous pouvons donc suppeser que l'addition par rapport à ν s'étend de 1 à $n-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-1}$. De plus, nous pouvons supposer que les additions par rapport a $\lambda_1,\cdots,\lambda_{m-2}$ s'etendent respectivement de o à $n-1$, de o à $n-1-\lambda_1,\cdots$, de o à $n-1-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-2}$, car si $\lambda_1=n-1$, par exemple, on a $\lambda_2=0,\cdots$, $\lambda_{m-2}=0$ et, par suite, $n-\lambda_1-$

$\cdots-\lambda_{m-2}-\nu=0.$

En échangeant l'ordre de sommation, on obtient

$$\sum_{\nu=1}^{n-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-2}} \sum_{\mu=0}^{n-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-2}-\nu} = \sum_{\mu=0}^{n-1-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-2}} \sum_{\nu=1}^{n-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-2}-\mu}.$$

Donc, si l'on pose $n-\lambda_1-\cdots-\lambda-\mu-\nu=\nu'$, le terme $(11\cdot1)$ peut s'écrire

$$\sum_{\lambda_1=0}^{n-1} \sum_{\lambda_2=0}^{n-1-\lambda_1} \cdots \sum_{\lambda_{m-2}=0}^{n-1-\cdots-\lambda_{m-3}} \sum_{\mu=0}^{n-1-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-2}} \sum_{\nu'=0}^{n-1-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-2}-\mu} \sum_{\rho=1}^{n}$$

$$(-1)^{n+m} B_\rho B_{\lambda_1,\dots,\lambda_{m-2},\mu+\nu'+1-\rho;\, n+1-\rho} \left\{(-1)^{\rho+\mu}\binom{\rho-1}{\mu} + (-1)^{\nu'}\binom{\rho-1}{\rho-1-\nu'}\right\}$$

$$\times C^{\nu}_{\underbrace{\ }_{\lambda} j_1\cdots j_{m-2} \underbrace{\ }_{\mu} j_m \underbrace{\qquad}_{n-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-2}-\mu-\nu'} j_{m+1}} u'a.$$

Comme nous l'avons remarqué au n^0 10, il vient

$$\sum_{\rho=1}^{n} B_\rho B_{\lambda_1,\dots,\lambda_{m-2},\mu+\nu+1;\, n+1-\rho}\left\{(-1)^{\rho+\mu}\binom{\rho-1}{\mu}+(-1)^{\nu}\binom{\rho-1}{\rho-1-\nu}\right\}$$

$$=\sum_{a=1}^{n} \sum_{s_1=1}^{n+1-a} \cdots \sum_{s_{a-1}}^{n-1-s_1-\cdots-s_{a-2}} \sum_{\alpha=2}^{n+1-s} \frac{(-1)^a B_{\lambda_1,\dots,\lambda_{m-2},\mu+\nu+2-s-\alpha;\, n+2-s-\alpha}}{(s_1+1)!\cdots(s_{a-1}+1)!a!}$$

$$\times\left\{(-1)^{\alpha+\mu+s+1}\binom{a+s-2}{\mu}+(-1)^{\nu}\binom{a+s-2}{a+s-\nu}\right\}.$$

De même, le produit de $(9\cdot2)$, $(10\cdot1)$ se réduit à

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\lambda_1=0}^{n-1}\sum_{\lambda_2=0}^{n-1-\lambda_1}\cdots\sum_{\lambda_{m-3}=0}^{n-1-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-4}}\sum_{\mu=0}^{n-1-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-3}}\sum_{\nu=0}^{n-1-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-3}-\nu}$$

$$\sum_{\lambda_{m-1}=0}^{n-1-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-3}-\mu-\nu}\ \sum_{a=1}^{n}\sum_{s_1=1}^{n+1-a}\cdots\sum_{s_{a-1}=1}^{n-1-s_1-\cdots-s_{a-2}}\sum_{\alpha=2}^{n+1-s}$$

$$\frac{(-1)^{a+m+n}B_{\lambda_1,\dots\lambda_{m-3},\mu+\nu+2-\alpha;\, n+2-s-\alpha}}{(s_1+1)!\cdots(s_{a-1}+1)!a!}$$

$$\times\left\{(-1)^{\alpha+\mu+s-1}\binom{a+s-2}{\mu}+(-1)^{\nu}\binom{a+s-2}{a+s-2-\nu}\right\}$$

$$\times C^{\nu}_{\underbrace{\ }_{\lambda_1} j_1\cdots j_{m-3}\underbrace{\ }_{\mu} j_{m-2}\underbrace{\ }_{\nu} m-1 \underbrace{\ }_{\lambda_{m-1}} j_m \underbrace{\qquad}_{n-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-3}-\mu-\nu} j_{m+1}} u'a.$$

Enfin, le produit de $(9\cdot3)$, $(10\cdot1)$ se réduit à

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{n-1}\sum_{\nu=0}^{n-1-\mu}\ \sum_{\lambda_2=0}^{n-1-\mu-\nu}\cdots\sum_{\lambda_{m-1}=0}^{n-1-\lambda_2-\cdots-\lambda_{m-2}-\mu-\nu}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{s_1=1}^{n+1-\alpha}\cdots\sum_{s_{\alpha-1}=1}^{n-1-s_1-\cdots-s_{\alpha-2}}\sum_{\alpha=2}^{n+1-s}\frac{(-1)^{\alpha+n+m}}{(s_1+1)!\cdots(s_{\alpha-1}+1)!\alpha!}$$

$$\times B_{\mu+\nu+2-s-\alpha,\ \lambda_2,\cdots,\ \lambda_{m-1};\ n+2-s-\alpha}\left\{(-1)^{\alpha+\mu+s-1}\binom{\alpha+s-2}{\mu}\right.$$

$$\left.+(-1)^{\nu}\binom{\alpha+s-2}{\alpha+s-2-\nu}\right\}$$

$$\times C^{\nu}_{\underset{\mu}{\smile} j_1 \underset{\nu}{\smile} j_2 \underset{\lambda_2}{\smile} j_3\cdots j_m \overbrace{\ n-\lambda_2-\cdots-\lambda_{m-1}-\mu-\nu\ } j_{m+1}}u'\alpha.$$

12. Considérons maintenant l'éxpression

$$(12\cdot1)\qquad \sum_{a=1}^{n+1}\sum_{s_1=1}^{n+2-a}\cdots\sum_{s_{a-1}}^{n-s_1-\cdots-s_{a-2}}\frac{(-1)^a B_{\lambda_1,\cdots,\lambda_{m-2};\ n+1-s}}{\cdot(s_1+1)!\cdots(s_{a-1}+1)!}$$

$$\times\left\{\begin{bmatrix}s-1\\ \mu\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}s-1\\ s-1-\nu\end{bmatrix}\right\}C^{\nu}_{\underset{\lambda_1}{\smile} j_1\cdots j_{m-1}\underset{\mu}{\smile} j_m \overbrace{\ n-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-1}-\mu\ } j_{m+1}}$$

$$(\lambda_1,\cdots,\lambda_{m-1},\ \mu=0,1,\cdots,n-1;\ \nu=n-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m+1}-\mu;$$
$$s=s_1+\cdots+s_{a-1})$$

Partageons-le en deux partie:

$$(a=1)+\sum_{a=2}^{n+1}\sum_{s_1=1}^{n+2-a}\cdots$$

La première partie est égale à

$$B_{\lambda_1,\cdots,\ \lambda_{m-1};\ n+1}\ C^{\nu}_{\underset{\lambda_1}{\smile} j_1\cdots j_{m-1}\underset{\mu}{\smile} j_m \overbrace{\ n-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-1}-\mu\ } j_{m+1}}.$$

La deuxième partie devient si l'on pose $a=a'+1$

$$\sum_{a'=1}^{n}\sum_{s_1=1}^{n+1-a'}\cdots\sum_{s_{a'-1}=1}^{n-1-s_1-\cdots-s_{a'-2}}\sum_{s_{a'}=1}^{n-s}\frac{(-1)^{a'}}{(s_1+1)!\cdots(s_{a'-1}+1)!(s_{a'}+1)!}$$

$$B_{\lambda_1,\cdots,\ \lambda_{m-1};\ n+1-s-s_{a'}}\left\{(-1)^{s+s_{a'}+\mu}\binom{s_{a'}+s-1}{\mu}-\binom{s_{a'}+s-1}{s_{a'}+s-1-\nu}\right\}$$

$$\times C^{\nu}_{\underset{\mu}{\smile} j_1\cdots j_{m-1}\underset{\mu}{\smile} j_m \overbrace{\ n-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-1}-\mu\ } j_{m+1}}$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{s_1=1}^{n+1-\alpha}\cdots\sum_{s_{\alpha-1}=1}^{n-1-s_1-\cdots-s_{\alpha-2}}\sum_{\alpha=2}^{h+1-s}\frac{(-1)^{\alpha}}{(s_1+1)!\cdots(s_{\alpha-1}+1)!\alpha!}$$

$$B_{\lambda_1,\cdots,\ \lambda_{m-1};\ n+2-s-\alpha}\left\{(-1)^{\alpha+s+\mu-1}\binom{\alpha+s-2}{\mu}-\binom{\alpha+s-2}{\alpha+s-2-\nu}\right\}$$

$$\times C^{\nu}_{\underset{\lambda_1}{\smile} j_1\cdots j_{m+1}}\qquad (s_{a'}+1=\alpha).$$

C'est justement l'expression obtenue au n^0 10.

En effectuant les memes réductions aux expressions obtenues par le remplacent de $B_{\lambda_1,\dots,\lambda_{m-1};\, n-1-s}$ par

$$B_{\lambda_1,\dots,\lambda_{m-2};\, \mu+\nu+1-s;\, n+1-s} \quad (\lambda_1,\cdots,\lambda_{m-2}\ \mu,\ \nu=0,\ 1,\cdots,\ n-1),$$

$$B_{\lambda_1,\dots,\lambda_{m-3},\, \mu+\nu+1-s,\, \lambda_{m-1};\, n+1-s} \quad (\lambda_1,\cdots,\ \lambda_{m-3},\ \mu,\ \nu,\ \lambda_{m-1}=0,1,\cdots,n-1),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$B_{\mu+\nu+1-s,\, \lambda_2,\dots,\lambda_{m-1};\, n+1-s} \quad (\mu,\ \nu,\ \lambda_2,\cdots,\ \lambda_{m-1}=0,\ 1,\cdots,\ n-1)$$

respecrivement, et en tenant compte de (7·3) on tire

$$\frac{d^{m+1}u'^{p}}{dt^{m+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\lambda_1-0}^{n+1}\cdots\sum_{\lambda_m=0}^{n-1-\lambda_1-\cdots-\lambda_m}(-1)^{n+m}B_{\lambda_1\cdots\lambda_m;\, n}$$

$$\times\, c^{p}{}_{\underbrace{}_{\lambda_1} j_1\cdots j_{m-1}\underbrace{}_{\lambda_m} j_m \underbrace{\qquad}_{n-\lambda_1-\cdots-\lambda_m} j_{m+1}}$$

$$\times\, u'^{i_1}\cdots u'^{i_n}\, a^{j_1}\cdots a^{j_{m+1}}\,.$$

Nous voyons ainsi que

$$\varphi^{p}(a^1,\cdots a^r;\ b^1,\cdots,\ b^r)$$

$$=a^1+\cdots+a^r+b^1+\cdots+b^r$$

$$+\sum_{m,n=1}^{\infty}\ \sum_{\lambda_1=1}^{n-1}\cdots\sum_{\lambda_{n-1}=1}^{m-1-\lambda_1-\cdots-\lambda_{n-2}}(-1)^{n+m-1}B_{\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1};\, m}$$

$$\times\, c^{p}{}_{\underbrace{}_{\lambda_1} j_1\cdots j_{n-2}\underbrace{}_{\lambda_{n-1}} j_{n-1}\underbrace{\qquad}_{m-\lambda_1-\cdots-\lambda_{n-1}} j_n}\, a^{i_1}\cdots a^{i_m}\, b^{j_1}\cdots b^{j_n}\,.$$