MEMOIRS OF THE COLLEGE OF SCIENCE, UNIVERSITY OF KYOTO, SERIES A
Vol. XXVIII, Mathematics No. 3, 1953.

Sur la forme de Darboux généralisée I

Par

Jôyô KANITANI

(Reçu les 20 April 1954)

Notoins prériminaires

Une hypersurface dans un espace projectif S_{n+1} $(n>2)$ dont le point courant est

$$y^{\alpha}(x^1, \cdots, x^n) \qquad (\alpha=0, 1, \cdots, n+1)$$

peut se déterminer, à l'exception d'une transformation projective, au moyen d'une forme asymptotique $H_{ij}\omega^i\omega^j$ $(\omega^i=a^i_l dx^l)$ et d'une forme de Darboux $H_{ijk}\omega^i\omega^j\omega^k$ $(i, j, k: 1\rightarrow n)$ satisfaisant aux équations fondamentales qui expriment la condition d'intégrabilité des équations simultanées aux dérivées partielles définissant le repère mobile attaché à l'hypersurface. Supposens maintenant qu'on se donne deux formes $H_{ij}\omega^i\omega^j$, $H_{ijk}\omega^i\omega^j\omega^k$ arbitrairement. Nous pouvens alors définir un espace R_n à connexion projective majorante sans torsion, admettant d'une hypersurface V_n qui a un contact du quatrième ordre avec R_n. Cet article est consacré à la détermination de H_{ijk} $(i, j, k=1, \cdots, n)$, etant donné H_{ij}, de telle sorte que l'hyparsurface V_n ait un contact du sixième ordre avec R_n.

1. Considérons un espace R_n à connexion projective majorante $\omega^{\beta}_{\alpha}=a^{\beta}_{\alpha i}dx^i$ $(\alpha, \beta=0, 1, \cdots, n+1\,;\ i:\ 1\rightarrow n\,;\ n+1$ expressions ω_0^{λ} $(\lambda=1, \cdots, n+1)$ contiennent n expressions indépaendantes) : le repère mobile $[A, A_1, \cdots, A_{n+1}]$ dans l'espace projectif S_{n+1} attaché à une courbe C dans R_n est défini par

$$(1\cdot1) \qquad dA_{\alpha}=\omega^{\beta}_{\alpha}A_{\beta} \quad (\alpha=0, 1, \cdots, n+1\,;\ \beta:\ 0\rightarrow n+1\,;\ A_0\equiv A)$$

(le point A_{α} a pour coordonnées $A_{\alpha}^0, \cdots, A_{\alpha}^{n+1}$).

En prenant une connexion convenable qui est équivalente à la connexion donnce (i.e. sans changer le développement de C), nous pouvons faire

$$(1\cdot2) \qquad \omega_0^{\,0}=0, \quad \omega_0^{\,n+1}=0, \quad \omega_1^{\,1}+\cdots+\omega_{n+1}^{n+1}=0\,.$$

Alors, les n expressions $\omega^i = a^i_j\,dx^j$ ($\equiv \omega^i_0 = a^i_{0j}\,dx^j$; $i=1,\cdots,n$; $j: 1\to n$) sont indépendantes. On les nomme les expressions de Pfaff de base. Nous pouvons donc écrire

$$dx^j = b^j_m\,\omega^m \qquad (a^i_l\,b^j_l = a^j_l\,b^l_i = \delta^j_i).$$

Posons

$$\frac{\partial f(x^1,\cdots,x^n)}{\omega^i} = b^l_i\,\frac{\partial f}{\partial x^l}$$

do sorte qu'on ait

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^l}\,dx^l = \left(\frac{\partial f}{\omega^m}\right)\omega^m.$$

Nous pouvons écrire

$$\omega^\beta_\alpha = \Gamma^\beta_{\alpha j}\,\omega^j \qquad (\Gamma^\beta_{0j} = \delta^\beta_j).$$

Si l'on pose

$$\alpha^i_{hk} = \left(\frac{\partial a^i_l}{\partial x^m} - \frac{\partial a^i_m}{\partial x^l}\right) b^l_h\,b^m_k = a^i_m\left(\frac{\partial b^m_k}{\omega^h} - \frac{\partial b^m_h}{\omega^k}\right),$$

$$R^\beta_{\alpha ij} = \frac{\partial \Gamma^\beta_{\alpha i}}{\omega^j} - \frac{\partial \Gamma^\beta_{\alpha j}}{\omega^i} + \Gamma^\beta_{\alpha m}\,\alpha^m_{ij} + \Gamma^\gamma_{\alpha i}\,\Gamma^\beta_{\gamma i} - \Gamma^\gamma_{\alpha j}\,\Gamma^\beta_{\gamma i} \qquad (\gamma: 0\to n+1),$$

$$[\omega^\beta_\alpha\,\omega^\gamma_\sigma] = \begin{vmatrix} a^\beta_{\alpha i}\,dx^i & a^\gamma_{\sigma l}\,dx^l \\ a^\beta_{\alpha j}\,\delta x^j & a^\gamma_{\sigma m}\,\delta x^m \end{vmatrix}$$

le covariant bilinéaire $d\omega^\beta_\alpha$ de ω^β_α s'écrit

$$d\omega^i = \sum_{(l,m)} \alpha^i_{lm}\,[\omega^l\,\omega^m],$$

$$d\omega^\beta_\alpha = [\omega^\beta_\gamma\,\omega^\gamma_\alpha] + \sum_{(l,m)} R^\beta_{\alpha lm}\,[\omega^l\,\omega^m].$$

2. Introduisons les hyperplans

$$B^\alpha = A_0\,A_1\cdots A_{\alpha-1}\,A_{\alpha+1}\cdots A_{n+1} \qquad (A^\gamma_\alpha\,B^\beta_\gamma = A^\beta_\gamma\,B^\gamma_\alpha = \delta^\beta_\alpha)$$

(l'hyperplan B^α a pour coordonnees $B^\alpha_0,\cdots,B^\alpha_{n+1}$).

Il vient de (1·1)

$$dB^\alpha = -\omega^\alpha_\beta\,B^\beta. \tag{2·1}$$

Envisageons, dans R_n, l'ensemble des courbes $\{C_\sigma\}$ issues du point x^i. Comme on a $dA = \omega^i A_i$, l'hyperplan B^{n+1} est le lieu décrit par les tangentes menées en point A aux développements $\{\mathfrak{C}_\sigma\}$ de $\{C_\sigma\}$. Nous l'appelelons l'hyperplan tangent en point A. Les courbes C_q dont les développements $\mathfrak{C}_q$ ont un contact du second ordre avec cet hyperplan tangent sont définies par

$$H_{ij}\omega^i\omega^j=0 \qquad (H_{ij}=\Gamma_{ij}^{n+1}).$$

Le premier membre de cette épuation sera nommé la forme asymptotique.

Lorsque chacun des courbes de $\{\mathfrak{C}_\sigma\}$ a un contact d'ordre ν avec une hypersurface V_n dans S_{n+1}, nous dirons simplement que V_n a un contact d'ordre ν avec R_n.

Osculation du troisième ordre

3. La condition pour un contact du troisième ordre de V_n avec R_n s'ècrit (Ces Mémoires t. 26, p. 189)

$$R_{0ij}^{n+1}=H_{ij}-H_{ji}=0\,.$$

Supposons que cette condition soit vérifiées et que $H=\det.\,|H_{ij}|\neq 0$. Nous pouvons alors faire

$$(3\cdot1) \qquad \omega_{n+1}^{n+1}=0\,, \qquad H=\pm1$$

en remplaçant la connexion donné par une connexion qui lui est équivalente. Nous supposerons toujours, d'or et déja, que les relations (1·2) et (3·1) soient vérifiées. La transformation conservant ces relations est définie par

$$\omega'^i=P_j^i\omega^j \qquad (\omega^j=Q_i^j\omega'^i\,;\ P_l^jQ_i^l=P_i^lQ_l^j=\delta_i^j),$$

$$H'_{ij}=(\nu)^2H_{ab}Q_i^aQ_j^b \qquad (a,b:\ 1\rightarrow n),$$

$$\Gamma'^s_{ij}=P_\sigma^s\Big(Q_i^\alpha Q_j^\beta\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma+\frac{\partial Q_i^\sigma}{\omega'^j}\Big) \qquad (\Gamma_{\mu0}^\lambda=\delta_\mu^\lambda),$$

$$\Gamma'^s_{n+1,j}=\Big(\frac{1}{\nu}\Big)^2\Gamma_\sigma^s\Big(Q_{n+1}^\alpha Q_j^\beta\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma+\frac{\partial Q_{n+1}^\sigma}{\omega'^j}\Big),$$

$$(s=0,1,\cdots,n\,;\ i,j=1,\cdots,n\,;\ \alpha,\beta,\sigma:\ 0\rightarrow1),$$

où les P_i^k $(i,k=1,\cdots,n)$, P_{n+1}^0 peuvent être les fonctions quelconques de $x^1,\cdots,x^n$ à la condition que $P=\det.\,|P_i^k|\neq0$,

$$\nu=\sqrt[n]{\pm P}\,, \qquad P_i^0=-\frac{\partial\log\nu}{\omega^i}\,, \qquad P_{n+1}^j=P_l^jH^{lm}\frac{\partial\log\nu}{\omega^m}\,,$$

$$P_0^\alpha=\delta_0^\alpha, \qquad P_\alpha^{n+1}=\delta_\alpha^{n+1}, \qquad H^{il}H_{lj}=\delta_j^l\,,$$

$$P_\sigma^\alpha Q_\beta^\sigma=P_\beta^\sigma Q_\sigma^\alpha=\delta_\beta^\alpha\,, \qquad \text{i.e.,}$$

$$Q_i^0 = \frac{\partial \log \nu}{\omega'^i}, \qquad Q_{n+1}^j = H^{ij} \frac{\partial \log \nu}{\omega^i}, \qquad Q_0^\alpha = \delta_0^\alpha, \qquad Q_\alpha^{n+1} = \delta_\alpha^{n+1},$$

$$Q_{n+1}^0 = -(P_{n+1}^0 + Q_{n+1}^k P_k^0).$$

Osculation du quatrième ordre

4. L'hypersurface V_n qui a un contact du troisième ordre avec R_n est dêfinie par

$$z^{n+1} = \frac{1}{2} H_{ij} z^i z^j + \frac{1}{6} H_{ijk} z^i z^j z^k + \cdots,$$

où

$$H_{ijk} = \Delta_k H_{ij} = \frac{\partial H_{ij}}{\omega^k} - \Gamma_{ik}^a H_{aj} - \Gamma_{jk}^a H_{ia} \qquad (a:\ 1 \to n).$$

La condition pour un contact du quatriéme ordre de V_n avec R_n s'êcrt

$$R_{0lm}^{n+1} = 0, \qquad D_i R_{0lm}^{n+1} = H_{ia} R_{0lm}^a - R_{ilm}^{n+1} = 0 \qquad (a:\ 1 \to n),$$

où

$$D_k R_{\alpha ij}^\beta = \frac{\partial R_{\alpha ij}^\beta}{\omega^k} + \Gamma_{\gamma k}^\beta R_{\alpha ij}^\gamma - \Gamma_{\alpha k}^\gamma R_{\gamma ij}^\beta - \Gamma_{ik}^m R_{\alpha mj}^\beta - \Gamma_{ik}^m R_{\alpha im}^\beta$$

$$(\gamma:\ 0 \to n+1;\ m:\ 1 \to n).$$

Supporsons que la connexion donnée soit sans torsion, la condition ci-dessus devient alors

$$H_{ilm} = \Delta_m H_{il} = \Delta_l H_{im} = H_{iml} = H_{mil} = H_{lmi}$$

ce qui donne

$$(4\cdot1) \qquad \Pi_{ij}^m = \frac{1}{2} H^{mk} \Pi_{ijk}$$

$$= \frac{1}{2} H^{mk} \left(\frac{\partial H_{jk}}{\omega^i} + \frac{\partial H_{ik}}{\omega^j} - \frac{\partial H_{ij}}{\omega^k} - H_{ia} \alpha_{jk}^a - H_{ja} \alpha_{ik}^a - H_{ka} \alpha_{ij}^a \right)$$

$$= \Gamma_{ij}^m + \frac{1}{2} H_{ij}^m \qquad (H_{ij}^m = H^{mk} H_{ijk}),$$

$$(4\cdot2) \qquad H_{aj}^a = 0\,.$$

Réciproquement, si l'on se donne les deux formes $H_{ij}\omega^i\omega^j$ ($H = \det. |H_{ij}| \neq 0$), $H_{ijk}\omega^i\omega^j\omega^k$, en écrivant H_{ij}, H_{ijk} à nouveau à la place de

$$\frac{H_{ij}}{\sqrt[n]{\pm H}}, \qquad \frac{1}{\sqrt[n]{\pm H}}\left\{H_{ijk}-\frac{1}{n+2}(H_{ij}H^a_{ak}+H_{ik}H^a_{aj}+H_{jk}H^a_{ai})\right\},$$

et en posant

$$\Gamma'^{n+1}_{ij}=H_{ij}, \qquad \Gamma'^k_{ij}=H^k_{ij}-\frac{1}{2}H^k_{ij}$$

on obtient une connexion qui est sans torsion et qui admet une hypersurface V_n ayant un contact du quatrième ordre avec R_n.

Posons

$$\Gamma^0_{ij}=M_{ij}, \qquad M^j_i=M_{il}H^{lj}, \qquad N^j_i=\Gamma^j_{n+1\,i}.$$

Il vient d'après (3·2), (3·3), (4·1), (4·2)

$$M'^i_i=\left(\frac{1}{\nu}\right)^2\left(M^a_a+\frac{\partial Q^a_{n+1}}{\omega^a}+nP^0_{n+1}+Q^a_{n+1}P^0_a\right),$$

$$N'^i_i=\left(\frac{1}{\nu}\right)\left(N^a_a+\frac{\partial Q^a_{n+1}}{\omega^a}+nQ^0_{n+1}+Q^a_{n+1}P^0_a\right),$$

d'où

$$M'^i_i-N'^i_i=\left(\frac{1}{a}\right)^2(M^a_a-N^a_a+2nP^0_{n+1}+nQ^a_{n+1}P^0_a).$$

Donc, en remplaçant la connexion donnée par une connexion convenable qui lui est équivalente, nous povons faire

$$M^i_i-N^i_i=0.$$

La transformation conservant cette relation ainsi que (1·2), (3·1) est défine par (3·2) où

$$P^0_{n+1}=\frac{1}{2}H^{ab}P^0_aP^0_b=Q^0_{n+1}.$$

Osculation du cinquième ordre

5. La condition pour un contact du cinquième ordre de V_n avec R_n s'écrit

$$R^{n+1}_{0lm}=0, \qquad D_iR^{n+1}_{0lm}=0,$$

$$D_jD_iR^{n+1}_{0lm}=-H_{ija}R^a_{0lm}-H_{ia}R^a_{jlm}-H_{ja}R^a_{ilm}$$
$$+H_{ij}(R^0_{0lm}+R^{n+1}_{n+1\,lm})=0.$$

Lorsque la connexion donnée est sans torsion cette condition devient

$$H_{ia}R^a_{jlm}+H_{ja}R^a_{ilm}=H_{ij}(R^0_{0lm}+R^{n+1}_{n+1\ lm}).$$

Multiplion par H^{ij} les deux membres de cette équation, et additionons par rapport à i, j de 1 à n. Il vient

$$R^a_{alm}=n(R^0_{0lm}+R^{n+1}_{n+1\ lm}).$$

D'autre part, on a d'après la définition même

$$R^\gamma_{\gamma lm}=0 \quad (\gamma:\ 0\rightarrow n+1).$$

Il vient donc

$$(5\cdot 1)\qquad R^0_{0lm}+R^{n+1}_{n+1\ lm}=0$$

et, par suite,

$$(5\cdot 2)\qquad R_{ijlm}+R_{jilm}=0 \qquad (R_{ijlm}=H_{ja}R^a_{ilm})$$

$$(i,\ j,\ l,\ m=1,\ \cdots,\ n\ ;\ a:\ 1\rightarrow n).$$

Supposons maintenant que la connexion donnée est symmetrique ($R^0_{0lm}=M_{lm}-M_{ml}=0$, $R^k_{0lm}=0$). Il vient alors de (5·1)

$$R^{n+1}_{n+1\ lm}=N_{lm}-N_{ml}=0 \qquad (N_{lm}=N^i_l H_{im}).$$

Désignons maintenant par θ_i la différentiation absolue où la forme $H_{ij}\omega^i\omega^j$ est prise comme forme fondamentale:

$$\theta_i G^k_{lm}=\frac{\partial G^k_{lm}}{\omega^i}+H^k_{ai}G^a_{lm}-H^a_{li}G^k_{am}-H^a_{mi}G^k_{la}$$

$$(i,\ k,\ l,\ m=1,\ \cdots,\ n\ ;\ a:\ 1\rightarrow n),$$

et par T_{ijlm} le tenseur de courbure de cette forme. Il vient alors d'après (4·1)

$$R_{ijlm}=T_{ijlm}-\frac{1}{2}\theta_m H_{ijl}+\frac{1}{2}\theta_l H_{ijm}+\frac{1}{4}H^a_{il}H_{ajm}-\frac{1}{4}H^a_{im}H_{ajl}$$
$$+M_{il}H_{jm}+H_{il}N_{jm}-M_{im}H_{il}-H_{im}N_{jl}\,.$$

Donc la condition (5·2) peut s'écrire

$$(5\cdot 3)\qquad \theta_m H_{ijl}-\theta_l H_{ijm}+H_{il}(M_{jm}-N_{jm})+H_{jl}(M_{im}-N_{im})$$
$$-H_{im}(M_{jl}-N_{jl})-H_{jm}(M_{il}-N_{il})=0\,,$$

et on a

$$(5\cdot 4)\qquad 2R_{ijlm}=2T_{ijlm}+\frac{1}{2}H^a_{il}H_{ajm}-\frac{1}{2}H^a_{im}H_{ajl}$$
$$+H_{jm}(M_{il}+N_{il})+H_{il}(M_{jm}+N_{jm})$$

$$-H_{jl}(M_{im}+N_{im})-H_{im}(M_{jl}+N_{jl}).$$

De même, on déduit, en posant $\Gamma^0_{n+1,i}=N_i$,

$$R^0_{ilm}=\theta_m M_{il}-\theta_l M_{im}+\frac{1}{2}H^a_{im}M_{al}-\frac{1}{2}H^a_{il}M_{am}+H_{il}N_m-H_{im}N_l,$$

$$H_{ia}R^a_{n+1,lm}=\theta_m N_{il}-\theta_l N_{im}-\frac{1}{2}H^a_{im}N_{al}+\frac{1}{2}H^a_{il}N_{am}-H_{il}N_m+H_{im}N_l,$$

d'où

$$(5\cdot5)\qquad R^0_{ilm}-H_{ia}R^a_{n+1,lm}=\theta_m(M_{il}-N_{il})-\theta_l(M_{im}-N_{im})$$
$$+\frac{1}{2}H^a_{im}(M_{al}+N_{al})-\frac{1}{2}H^a_{il}(M_{am}+N_{am})+2H_{il}N_m-2H_{im}N_l,$$

$$(5\cdot6)\qquad R^0_{ilm}+H_{ia}R^a_{n+1\,lm}=\theta_m(M_{il}+N_{il})-\theta_l(M_{im}+N_{im})$$
$$+\frac{1}{2}H^a_{im}(M_{al}-N_{al})-\frac{1}{2}H^a_{il}(M_{am}-N_{am}),$$

On a enfin

$$(5\cdot7)\qquad R^0_{n+1,lm}=\theta_m N_l-\theta_l N_m+\frac{1}{2}(M^a_l+N^a_l)(M_{am}-N_{am})$$
$$-\frac{1}{2}(M^a_m+N^a_m)(M_{al}-N_{al}).$$

Osculation du sixième ordre

6. Lorsque la connexion est symmetrique, la condition pour un contact du sixième ordre de V_n avec R_n

$$R^{n+1}_{0lm}=0,\ D_i R^{n+1}_{0lm}=0,\ D_j D_i R^{n+1}_{0lm},\ D_k D_j D_i R^{n+1}_{0lm}=0$$

devient

$$(6\cdot1)\qquad R^{n+1}_{\alpha lm}=0\qquad(\alpha=0,1,\cdots,n+1),$$

$$(6\cdot2)\qquad R_{ijlm}+R_{jilm}=0,$$

$$(6\cdot3)\qquad H_{ija}R^a_{klm}+H_{jka}R^a_{ilm}+H_{kia}R^a_{jlm}$$
$$+H_{ij}H_{ka}R^a_{n+1\,lm}+H_{jk}H_{ia}R^a_{n+1\,lm}+H_{ki}H_{ja}R^a_{n+1\,lm}$$
$$-H_{ij}R^0_{klm}-H_{jk}R^0_{ilm}-H_{ki}R^0_{jlm}=0.$$

Multiplions par H^{ij} les deux membre de $(6\cdot3)$ et sommons par rapport à i, j de 1 à n. Il vient d'après $(4\cdot2)$

$$2H^b_{ak}R^a_{blm}+(n+2)(H_{ka}R^a_{n+1\,lm}-R^0_{klm})=0.$$

Or, nous avons d'après (6·2)

$$R^k_{jlm} = -H^{kb} H_{ja} R^a_{blm}$$

et, par suite,

$$H^b_{ak} R^a_{blm} = -H^b_{ak} H^{ai} H_{bj} R^j_{ilm} = -H^i_{jk} R^j_{ilm}$$

ce qui nous donne

$$H^b_{ak} R^a_{blm} = 0\,.$$

Il vient donc

$$H_{ka} R^a_{n+1,lm} = R^0_{klm} \tag{6·4}$$

$$H^a_{ij} R_{kalm} + H^a_{jk} R_{ialm} + H^a_{ki} R_{jalm} = 0\,. \tag{6·5}$$

Développement sur une quadrique

7. Les équations (6·5) sont vérifiées lorsque $H_{ijl}=0$ $(i, j, l=1, \cdots, n)$. Nous avons dans ce cas d'après (5·3)

$$\begin{gathered} H_{il}(M_{jm} - N_{jm}) + H_{jl}(M_{im} - N_{im}) \\ -H_{im}(M_{jl} - N_{jl}) - H_{jm}(M_{il} - N_{il}) = 0\,. \end{gathered}$$

Multiplions le par H^{il} et sommoms par rapport à i, l en tenant compte de (4·3). Nous aurons

$$M_{jm} - N_{jm} = 0\,.$$

Au moyen de cette équation et de (5·5), (6·4), (5·7) nous avons

$$N_l = 0\,, \qquad R^0_{n+1\,lm} = 0\,.$$

Donc, l'équation de V_n devient (Ces Mémoires t. 26 p. 189)

$$z^{n+1} = \frac{1}{2} H_{ij} z^i z^j.$$

D'autre part, les equations (2·1) deviennent maintenant

$$\left\{\begin{aligned} dB^0 &= -M_{kj}\,\omega^j B^k\,, \\ dB^i &= -\omega^i B^0 - H^i_{kj}\,\omega^j B^k - M^i_j\,\omega^j B^{n+1}, \\ dB^{n+1} &= -H_{kj}\,\omega^j B^k. \end{aligned}\right. \tag{7·1}$$

Soient y^α $(\alpha=0, 1, \cdots, n+1)$ les coordonnées d'un point de S_{n+1} rapporté au repère fixe dans S_{n+1}, ξ^α les coordonnées de ce point rapporté au repère $[A, A_1, \cdots, A_{n+1}]$. Nous avons

$$\kappa \xi^\alpha = B^\alpha_\beta y^\beta\,.$$

L'équation

$$2\xi^0\xi^{n+1}=H_{ij}\xi^i\xi^j$$

de l'hyperquadrique osculatrice V_n devient

$$P_{\alpha\beta}y^\alpha y^\beta=0 \qquad (P_{\alpha\beta}=B^0_\alpha B^{n+1}_\beta+B^0_\beta B^{n+1}_\alpha-H_{ij}B^i_\alpha B^j_\beta)$$

si l'on la rapport au repère fixe.

Or, on a d'après (7·1)

$$dP_{\alpha\beta}=0\,.$$

Nous voyons ainsi que s'il existe, en un point quelconque x^i de R_n une hypersurface V_n qui a un contact du sixième ordre avec les développements des courbes de R_n issues de x^i, et si $H_{rjl}=0$ ces développements se trouvent toujours sur une hyperquadrique fixe dans R_n.

Nous allons nous occuper ensuite du cas où V_n a un contact du sixième ordre avec R_n sans que H_{ijl} soient tous nuls.

Cas où une au mions des matrices $\mathfrak{M}_i$ est du rang $n-1$

8. Supposons d'abord que les matrices

$$\mathfrak{M}_i=\begin{pmatrix} R_{i112} & \cdots & R_{i1\,n-1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ R_{in12} & \cdots & R_{in\,n-1,n}\end{pmatrix}$$

soient du rang $n-1$ pour $i=1,\cdots,n$. Les équations

$$H^a_{11}R_{1alm}=0,\ \cdots,\ H^a_{nn}R_{nalm}=0$$

donnent alors

$$H^k_{ii}=0 \qquad (i\neq k), \qquad \text{i.e.} \qquad H^j_{ii}=2\lambda_i\delta^j_i.$$

Portons-les dans

$$H^a_{ii}R_{kalm}+2H^a_{ik}R_{ialm}=0\,.$$

Il vient

$$(H^a_{ik}-\lambda_i\delta^a_k)R_{ialm}=0$$

et, par suite,

$$H^a_{ik}=\lambda_i\delta^a_k+\mu_k\delta^a_i.$$

Retranchons de cette équation ce qu'on obtent en y échangeant i, k. On obtiendra

$$(\lambda_i-\mu_i)\delta^a_k=(\lambda_k-\mu_k)\delta^a_i$$

d'où $\lambda_i=\mu_i$ $(i=1,\cdots,n)$. On a donc

$$H_{ik}^{a}=\lambda_i\delta_k^a+\lambda_k\delta_i^a.$$

Faisons-y $i=a$ et sommons par rapport à i. Il vient $\lambda_i=0$ et par suite,

$$H_{ijk}=0\,.$$

9. Supposons ensuite que seulement quelqu'unes des matrices $\mathfrak{M}_i$ sont du rang $n-1$: nous pouvons supposer sans restriendre la généralité que seulement $\mathfrak{M}_{e+1},\cdots,\mathfrak{M}_n$ $(e>1)$ sont du rang $n-1$. Nous avons alors

$$H_{ik}^{\sigma}=\lambda_i\delta_k^{\sigma}+\lambda_k\delta_i^{\sigma}\qquad(i,\,k=e+1,\cdots,n\,;\ \sigma=1,\cdots,n).$$

Portons-les dans

$$H_{ii}^{\sigma}R_{a\sigma lm}+2H_{ia}^{\sigma}R_{i\sigma lm}=0\,.$$

Il vient

$$H_{ia}^{\sigma}=\lambda_i\delta_a^{\sigma}+\mu_a\delta_i^{\sigma}\qquad(a=1,\cdots,e\,;\ i=e+1,\cdots,n)$$

et, par suite,

$$0=H_{\sigma i}^{\sigma}=(n+1)\lambda_i\,.$$

Nous avons ainsi

$$H_{ik}^{\sigma}=0\,,\qquad H_{ai}^{\sigma}=\mu_a\delta_i^{\sigma}\qquad(a=1,\cdots,e\,;\ i=e+1,\cdots,n).$$

Portons-les dans

$$H_{ab}^{\sigma}R_{i\sigma lm}+H_{ib}^{\sigma}R_{a\sigma lm}+H_{ai}^{\sigma}R_{b\sigma lm}=0\,.$$

Il vient

$$H_{ab}^{\sigma}-\mu_b\delta_a^{\sigma}-\mu_a\delta_b^{\sigma}=\mu_{ab}\delta_i^{\sigma}\qquad(a,\,b=1,\cdots,e\,;\ i=e+1,\cdots,n).$$

Si $\mu_{ab}=0$ $(a,\,b=1,\cdots,l)$, nous avons $0=H_{a\sigma}^{\sigma}=(n+1)\mu_a$

et, par suite

$$H_{\sigma\tau\rho}=0\qquad(\sigma,\,\tau,\,\rho=1,\cdots,n).$$

Supposons ensuite que les μ_{ab} ne sont pas tous nuls. Nous avons alors $e=n-1$, car sinon il viendrait $\delta_i^{\sigma}=\delta_j^{\sigma}$ $(i\neq j\,;\ \sigma=1,\cdots,n)$ ce qui est absurd. Nous avons ainsi

$$H_{nn\sigma}=0\,,\qquad H_{an\sigma}=\mu_a H_{n\sigma}\,,\qquad 0=H_{ann}=\mu_a H_{nn}\,,$$

d'où $H_{nn}=0$, car si $H_{nn}\neq 0$, on aurait $\mu_a=0$ et, par sute, $0=H_{abn}=\mu_{ab}H_{nn}$, $\mu_{ab}=0$ contrairement à l'hypothèse. Nous avons ainsi

$$H_{nn\sigma}=0,\qquad H_{an\sigma}=\mu_a H_{n\sigma}\qquad(a=1,\cdots,n-1),$$

$$H_{ab\sigma}-\mu_a H_{a\sigma}-\mu_a H_{b\sigma}=\mu_{ab} H_{n\sigma} \qquad (\sigma=1, \cdots, n)$$

Faisons-y $\sigma=n$. Il vient

$$H_{anb}=\mu_a H_{nb}\,, \qquad H_{abn}-\mu_a H_{nb}-\mu_b H_{na}=\mu_{ab} H_{nn}=0$$

et, par suite,

$$\mu_a H_{nb}=0 \qquad (a, b=1, \cdots, n-1).$$

Or, puisque $H\neq 0$, $H_{n1}, \cdots, H_{n,n-1}$ ne sont pas tous nuls, Il faut donc que

$$\mu_a=0 \qquad (a=1, \cdots, n-1).$$

Nous avons ainsi

$$H_{nn\sigma}=0, \qquad H_{an\sigma}=0, \qquad H_{ab\sigma}=\mu_{ab} H_{n\sigma}$$

et, par suite,

$$\mu_{ab} H_{nc}=\mu_{ac} H_{nb} \qquad (a, b, c=1, \cdots, n).$$

Nous pouvons donc écrire

$$\mu_{ab}=\nu_a H_{nb}\,.$$

Il résulte de là que

$$\nu_a H_{nb}=\nu_b H_{na}\,, \qquad \nu_a=\nu H_{na}\,, \qquad \mu_{ab}=\nu H_{na} H_{nb} \qquad H_{\sigma\tau\rho}=\nu H_{n\sigma} H_{n\tau} H_{n\rho}\,.$$

Nous avons ainsi

$$H_{ij}\omega^i\omega^j=\sum_1^{n-1} H_{ij}\omega^i\omega^j+2\omega^n(H_{n1}\omega^1+\cdots+H_{n\,n-1}\omega^{n-1}),$$

$$H_{ijl}\omega^i\omega^j\omega^l=\nu(H_{n1}\omega^1+\cdots+H_{n,n-1}\omega^{n-1})^3.$$

10. Les H_{na} $(a=1, \cdots, n-1)$ n'étant pas tou snuls, nous pouvons supposer sans restriendre la générarité que $H_{n1}\neq 0$. Faisons la transformation

$$\omega'^1=H_{n1}\omega^1+\cdots+H_{n,n-1}\omega^{n-1}.$$

Nous avons après cette transformation

$$H_{ij}\omega^i\omega^j=\sum_1^{n-1} H_{ij}\omega^i\omega^j+2\omega^1\omega^n, \qquad H_{ijl}\omega^i\omega^j\omega^l=\nu(\omega^1)^3$$

de sorte que les équations (5·3) où $j, l, m>1$ donnent

$$\begin{aligned}(10{\cdot}1) \qquad & H_{il}(M_{jm}-N_{jm})+H_{jl}(M_{im}-N_{i\ })\\ & -H_{im}(M_{jl}-N_{jl})-H_{jm}(M_{il}-N_{il})=0\,.\end{aligned}$$

En y faisant $i=j>1$, nous avons d'abord

$$M_{jm}-N_{jm}=\mu_j H_{jm} \qquad (j,\ m=2,\ \cdots,\ n).$$

Portons-les dans (10·1). Il vient

$$(\mu_j-\mu_i)(H_{il}H_{jm}-H_{im}H_{jl})=0$$

et, par suite,

$$\mu_i=\mu_j=\mu \qquad (i,\ j=2,\ \cdots,\ n),$$

car

$$H=-(H_{1n})^2\begin{vmatrix} H_{22} & \cdots & H_{2,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ H_{n-1,2} & \cdots & H_{n=1\ n-1}\end{vmatrix}\neq 0.$$

Faisons ensuite $i=1$ dans (10·1). Nous aurons

$$H_{jl}(M_{1w}-N_{1m}-\mu H_{1m})=H_{jm}(M_{1l}-N_{1l}-\mu H_{1l})$$

ce qui donne (on fait d'abord $j=m=n$, ensuite $m=n$; $j,\ l=2,\ \cdots,$ n$-$1)

$$M_{1l}-N_{1l}=\mu H_{1l} \qquad (l=2,\ \cdots,\ n).$$

Nous avons ainsi

$$(10\cdot 2) \qquad M_{\sigma\tau}=N_{\sigma\tau} \qquad (\sigma,\ \tau=1,\ \cdots,\ n), \qquad \mu=0$$

d'après

$$H^{\sigma\tau}(M_{\sigma\tau}-N_{\sigma\tau})=0, \qquad H^{11}=0.$$

Les équations (5·3) deviennent maintenant

$$(10\cdot 3) \qquad \theta_m K_{ijl}-\theta_l K_{ijm}=0\,.$$

Faisons-y $i=j=1$; $l,\ m>1$. Il vient $\alpha^1_{lm}=0$ ce qui nous montre que l'équation $\omega^1=0$ est complètement intégrable. Nous pouvons écrire $\omega^1=a_1{}^1du^1$. Ainsi, après la transformation

$$\omega'^1=\frac{1}{a_1^{\ 1}}\omega^1=du^1,$$

$$\omega'^n=a_1{}^1\left(\frac{1}{2}H_{11}\omega^1+H_{12}\omega^2+\cdots+H_{1n}\omega^n\right)$$

les formes fondamentales (la forme asymptotiques et la forme de Darboux) deviennent

$$\sum_2^{n-1}H_{ij}\omega^i\omega^j+2du^1\omega^n, \qquad \nu(du^1)^3.$$

Faisons ensuite $i=l=1$; $j,\ m>1$ dans (10·3). Il vient

$$(10\cdot 4) \qquad H^1_{jm}=H_{jmn}=0 \qquad (j,\ m=2,\ \cdots,\ n).$$

Faisons enfin $i=j=l=1$. Il vient

$$\frac{\partial\nu}{\omega^m}=2H^1_{1m}\,.$$

La condition d'intégrabilité de cette equation s'ecrit grâce à (6·3)

$$(10\cdot5)\qquad T_{1njm}=0\qquad (j,\ m=2,\cdots,n).$$

11. D'après (5·5) et (10·2) la condition (6·4) devient

$$(11\cdot1)\qquad H^{\alpha}_{im}M_{\alpha l}-H^{\alpha}_{il}M_{\alpha m}=2H_{im}N_l-2H_{il}N_m\,.$$

En y faisant $i,\ l,\ m>1$, nous tiorons d'abord $N_l=0$ ($l=2,\cdots,n$). Faisons ensuite $l=1$, $i,\ m>1$. Il vient $N_1=0$. Nous avons ainsi

$$(11\cdot2)\qquad N_\sigma=0\qquad (\sigma=1,\cdots,n).$$

Fiasons enfin $i=l=1$, $m>1$. Nous obtenons

$$(11\cdot3)\qquad M_{mn}=M^1_m=0\,.$$

Grâce à (10·5), (11·2) il vient

$$R_{1njm}=0\qquad (j,\ m=2,\cdots,n).$$

Les courbes de Darboux sont données par $u^1=\text{const.}$ D'après (10·2), (11·2) les équations (7·1) où $\omega^1=0$, $k:2\rightarrow n$ sont verifiées. D'ailleurs, grâce à (10·4), (11·3) nous avons $dB^1=0$ lorsque $\omega^1=0$.

Nous voyons ainsi que les développements des courbes sur une varieté de Darboux $u^1=\text{const.}$ se trouvent sur un cône

$$z^1=0,\qquad z^{n+1}=\frac{1}{2}\sum_2^{n-1}H_{ij}z^iz^j$$

ce qui est l'intersection de l'hyperquardrique

$$z^{n+1}=\frac{1}{2}\sum_1^n H_{ij}z^iz^j$$

avec l'hyperplan

$$z^1=0\,.$$

Cas où la matrice $\mathfrak{M}(Q)$ est du rang moindre que $n-1$

12. Envisageons la matrice

$$\mathfrak{M}(Q)=\begin{pmatrix} Q^iR_{i112} & \cdots & Q^iR_{i1\,n-1,n}\\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ Q^iR_{in12} & \cdots & Q_iR_{in\,n-1,n}\end{pmatrix}\qquad (i:\ 1\rightarrow n),$$

où $Q^1, \cdots, Q^n$ sont des fonctions de $x^1, \cdots, x^n$. Le cas où cette matrice est du rang $n-1$ pour un système des Q^i $(i=1, \cdots, n)$ convenablement choisis se ramène au cas dont nous venons de considérer. Nous allons maintenant nous occuper du cas où le nombre maximum du rang de $\mathfrak{M}(Q)$ est $n-2$. Dans ce cas nous pouvons supposer que la matrice

$$\mathfrak{M}_1=\begin{pmatrix} R_{1212} & \cdots & R_{12\,n-1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ R_{1n12} & \cdots & R_{1n\,n-1,n} \end{pmatrix}$$

est du rang $n-2$. Les R_{1hlm} s'expriment alors sous la forme

$$R_{1hlm}=\lambda_h^1 P_{1hlm}+\cdots+\lambda_h^{n-2} P_{n-2\,hlm}$$
$$(h=2, \cdots, n\,;\ l, m=1, \cdots, n).$$

Il existe un système des $Q_2^2, \cdots, Q_2^n$ satisfaisant aux équations

$$Q_2^2\lambda_2^s+Q_2^3\lambda_3^s+\cdots+Q_2^n\lambda_n^s=0 \qquad (s=1, \cdots, n-2).$$

En utilisant ces Q_2^i $(i=2, \cdots, n)$, faisons la transformation

$$\begin{aligned} &\omega^1=\omega'^1 \\ &\omega^2=Q_2^2\omega'^2+\cdots+Q_n^2\omega'^n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\omega^n=Q_2^n\omega'^2+\cdots+Q_n^n\omega'^n \qquad (|Q_k^h|\neq 0). \end{aligned}$$

Nous avons après cette transformation

$$R_{12lm}=0 \qquad l, m=1, \cdots, n).$$

La matrice $\mathfrak{M}_1$ étant du rang $n-2$, suposons que

$$\begin{vmatrix} R_{13l_1m_1} & \cdots & R_{13l_qm_q} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ R_{1nl_1m_1} & \cdots & R_{1nl_qm_q} \end{vmatrix}\neq 0 \qquad (q=n-2).$$

D'après l'hypothèse la matrice

$$\begin{pmatrix} R_{h112} & \cdots & R_{h1\,n-1,n} \\ R_{h212} & \cdots & R_{h2\,n-1,n} \\ \rho R_{1312}+R_{h312} & \cdots & \rho R_{13\,n-1,n}+R_{h3\,n-1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho R_{1n12}+R_{hn12} & \cdots & \rho R_{1n\,n-1,n}+R_{hn\,n-1,n} \end{pmatrix}$$

est du rang $n-2$ indépendamment du choix de ρ: nous avons

$$\begin{vmatrix} R_{h2lm} & R_{h2l_1m_1} & \cdots & R_{h2l_qm_q} \\ \rho R_{13lm}+R_{h3lm} & \rho R_{13l_1m_1}+R_{h3l_1m_1} & \cdots & \rho R_{13l_qm_q}+R_{h3l_qm_q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho R_{1nlm}+R_{hnlm} & \rho R_{1nl_1m_1}+R_{hnl_1m_1} & \cdots & \rho R_{1nl_qm_q}+R_{hnl_qm_q} \end{vmatrix}=0.$$

En égalant le coefficient de ρ^{n-2} dans cette êquation à zero, nous obtenons

$$(12\cdot 1)\qquad R_{2hlm}=\sum_{j=3}^{n}\mu_h^{\ j}R_{1jlm}\qquad (h=3,\cdots,n\ ,\ l,\ m=1,\cdots,n).$$

Puisque la martice $\mathfrak{M}_1$ est du rang $n-2$, l'équation (6·5) où $i=j=k=1$: $H_{11}^{\sigma}R_{1\sigma lm}=0$ (σ: $1\rightarrow n$) donne

$$(12\cdot 2)\qquad H_{11}^{q}=0\qquad (q=3,\cdots,n).$$

Portons-le dans

$$H_{11}^{\sigma}R_{2\sigma lm}+2H_{12}^{\sigma}R_{1\sigma lm}=0\,.$$

Nous avons

$$(12\cdot 3)\qquad H_{12}^{q}=0\qquad (q=3,\cdots,n)$$

grâce auquel l'équation

$$H_{22}^{\sigma}R_{1\sigma lm}+2H_{12}^{\sigma}R_{2\sigma lm}=0$$

donne

$$(12\cdot 4)\qquad H_{22}^{q}=0\qquad (q=3,\cdots,n).$$

à suivre.