MEMOIRS OF THE COLLEGE OF SCIENCE, UNIVERSITY OF KYOTO, SERIES A
Vol. XXIX, Mathematics No. 1, 1955.

Sur la deduction axiomatique des formules de transformation de Lorentz

Par

Toshizô MATSUMOTO

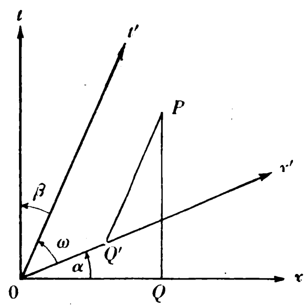
(Reçu le Juin, 14 1954)

Soient $S(x, y, z, t)$, $S'(x', y', z', t')$ les systèmes de références galiliennes que se déplacent relativement avec une vitesse constante. Pour éviter l'hypothèse de la constance de la vitesse de la lumière, M. Stiegler a introduit quelques axiomes raisonables sauf que l'égalité des grandeurs des vitesses relatives de translation vue de S et de S'. (Voir son axiome 1, (5), (6))[1] Dans la suite je veux déduire l'égalité de ces grandeurs par une autre voie.

1. D'abord *nous supposons que*, [1],

$$y=y', \quad z=z'. \tag{1}$$

et donc nous considérons seulement $S(x, t)$ et $S'(x', t')$, c'est-à-dire les plans de (x, t) et (x', t'). Représentons le repère de $S'(x', t')$ sur le plan de $S(x, t)$ avec la même origine O. *Nous supposons que*, [2], la figure montre le cas où S' vu de S s'éloigne de S avec une vitesse constante. Soient α, ω, β les angles mesurés dans le même sens, entre les axes (x, x'), (x', t'), (t', t) respectivement. On a



$$a+\omega+\beta=\frac{\pi}{2}. \tag{2}$$

Soient (x, t) et (x', t') les coodrdonnées d'un point P commun à S et S'. De la figure, on a

$$\begin{cases} x=x' \cos \alpha + t' \cos (a+\omega) \\ \quad =x' \cos \alpha + t' \sin \beta, \end{cases} \tag{3}$$

---

1. *Comptes rendus*, 234, 1952, p. 1250.

$$\begin{cases} t = x' \cos\left(-\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + t' \cos\beta \\ \quad = x' \sin\alpha + t' \cos\beta. \end{cases}$$

Ce sont les transformations de la géométrie analytique du plan. Ce que nous voulons sont les transformations du plan physique. Au point de vue physique, les unités de mesure des axes x' et t' de S' se changeraient, vu de S. Donc il faut poser:

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{x'}{\tau} \cos\alpha + \dfrac{t'}{\tau} \sin\beta, \\[2mm] t = \dfrac{x'}{\sigma} \sin\alpha + \dfrac{t'}{\tau} \cos\beta, \end{cases}$$

où σ at τ sont les unités de mesure susdites. *Nous supposons que*, [3], le déterminant de la transformation est unité d'où on a

$$\text{(5)} \qquad \sigma\tau = \sin\omega.$$

2. Croyons maintenant que nous sommes dans S', et S est vu de S'. Dans ce cas l'angle entre les axes (x', t') est $\frac{\pi}{2}$ et *nous supposons que*, [4], les angles α et β ne changent pas. Par suite, l'angle entre les axes x et t de S devint plus grand que $\frac{\pi}{2}$; (Remarquons que l'augle eutre les directions negatives des axes x' et x devint α.)

Nous avons donc les formules suivantes:

$$\text{(6)} \qquad \begin{cases} x' = \dfrac{x}{\sigma'} \cos(-\alpha) + \dfrac{t}{\tau'} \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \beta\right) \\[2mm] \quad = \dfrac{x}{\sigma'} \cos\alpha - \dfrac{t}{\tau'} \sin\beta, \\[2mm] t' = \dfrac{x}{\sigma'} \cos\left(-\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) + \dfrac{t}{\tau'} \cos(-\beta) \\[2mm] \quad = \dfrac{t}{\tau'} \cos\beta - \dfrac{\alpha}{\sigma'} \sin\alpha; \end{cases}$$

$$\text{(7)} \qquad \sigma'\tau' = \sin\omega,$$

où σ' et τ' sont les unités de mesure des axes x et t de S vu de S'.

3. En mettant (6) dans (4) et remarquant (5) et (7), on aura facilement

(8) $$\sigma'=\sigma, \qquad \tau'=\tau.$$

En somme nous avons obtenu les formules de transformation cherchées, écrites brièvement comme suivantes :

(9) $$\begin{cases} x=a_{11}x'+a_{12}t', \\ t=a_{21}x'+a_{22}t' ; \end{cases}$$

(10) $$\begin{cases} x'=a_{11}x-a_{12}t, \\ t'=a_{22}t-a_{21}x ; \end{cases}$$

où

(11) $$\begin{cases} a_{11}=\cos\alpha/\sigma, \quad a_{12}=\sin\beta/\tau, \\ a_{21}=\sin\alpha/\sigma, \quad a_{22}=\cos\beta/\tau, \\ a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=1. \end{cases}$$

Comme conséquence, on a de (10) et (9)

$$\dot{x}=v=\frac{a_{12}}{a_{11}}, \quad \dot{x}'=v'=-\frac{a_{12}}{a_{11}};$$

donc on a nécessairement

(12) $$v'=-v, \quad \text{où} \quad v=\frac{\sigma}{\tau}\,\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}.$$

En résolvant (9) par rapport à (x', t') et comparant avec (10), on a

(13) $$a_{11}=a_{23}, \quad \text{où} \quad \frac{\cos\alpha}{\sigma}=\frac{\cos\beta}{\tau}.$$

De (12), (13) et de (11), on a

(14) $$v=\tan\beta, \quad \text{et} \quad a_{12}=a_{22}v.$$

4. Posons (4) dans, [5], $x^2-c^2t^2=0$, on aurait $x'^2-c'^2t'^2=0$. Donc en égalant le coéfficient de $x't'$ à zéro, on a facilement

(15) $$c^2=\cot\alpha\tan\beta,$$

ou par (14) on a

(15′) $$c^2=v\cot\alpha.$$

Si on part de (6) et de $x'^2-c'^2t'^2=0$, on aura

$$c'^2=v\cot\alpha.$$

Donc on a

$$(16) \qquad c = c'.$$

D'autre part, de (13) et (15), on a

$$(17) \qquad c^2 \sin\alpha/\sigma = \sin\beta/\tau, \quad \text{où} \quad c^2 a_{21} = a_{12}.$$

De (11), (13), (17) et de (14), on a

$$1 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{22}{}^2 - \frac{v^2}{c^2}a_{22}^2.$$

Donc on a

$$(18) \qquad a_{22} = \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}}, \quad \text{où} \quad \gamma = \frac{v}{c};$$

d'où l'on a facilement

$$(18') \qquad a_{11} = \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}}, \quad a_{12} = \frac{v}{\sqrt{1-\gamma^2}}, \quad a_{21} = \frac{v/c^2}{\sqrt{1-\gamma^2}},$$

Ainsi nous avons déduit les formules de Lorentz sans les hypothèses sur les constances de la vitesse de la lumière et de la vitesse relative.

Les axiomes employés sont [1], [2], [3], [4], [5].