MEMOIRS OF THE COLLEGE OF SCIENCE, UNIVERSITY OF KYOTO, SERIES A
Vol. XXIX, Mathematics No. 2, 1955.

Généralization projective des équations de Codazzi

Par

Jōyō KANITANI

(Reçu, le 24, Septembre, 1954)

Une surface, dans un espace projectif à trois dimensions, qui n'admet pas de déformation projective peut se détermine uniquement, près à transformation projective, au moyen des quantités fondamentales H_{ij}, K_{ijl} qui se relient par certaines relations. Ces relations s'expriment ordinairement par un système des équations simultanées aux dérivées partielles contenant les fonctions intermidiaires L, M et leurs dérivées. Dans cet article nous déduisons, en éliminant L, M, les équations définissant directement les quantités K_{ijl} lorsque les quantités H_{ij} sont données. Elles sont des équations aux dérivées partielles d'huitième ordre.

1. Considérons une surface définie par

$$x^{\sigma}=x^{\sigma}(u, v) \qquad (\sigma=0, 1, 2, 3).$$

Posons

$$h_{ij}=\left| x\ x_u\ x_v\ \frac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial u^j} \right| \qquad (u^1=u,\ u^2=v).$$

En supposant que $h=h_{11}h_{22}-(h_{12})^2$ ne soit pas nul, introduisons un repère de Lie $[x, x_1, x_2, x_3]$ où $x_1=x_u$, $x_2=x_v$ et le facteur commun des coordonnées du point x_3 qui se trouve sur la quadrique de Lie d'après la définition même, est choisi de manière à avoir

$$|x\ x_1\ x_2\ x_3|=\sqrt[4]{\pm h}\,.$$

Autant que nous considérons une surface réele, nous convi-endrons de choisir le signe de $\pm h$ de telle sorte qu'il soit positif.

Posons

$$H_{ij}=\frac{h_{ij}}{\sqrt[4]{\pm h}}, \qquad H=\begin{vmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{vmatrix}.$$

Il suit de là que $\sqrt{\pm H}=\sqrt[4]{\pm h}$. Dèsignons par Γ_{ij}^k le symbole de Christoffel où la forme $H_{ij}du^i du^j$ est prise comme forme fondamentale.

Il vient alors

$$(1\cdot1)\qquad \begin{cases} dx = x_i du^i, \\ dx_i = M_{ij}du^j x + (\Gamma^k_{ij} - \tfrac{1}{2}K^k_{ij})du^j x_k + H_{ij}du^j x_3, \\ dx_3 = N_j du^j x + N^k_j du^j x_k, \end{cases}$$

où

$$K^i_{il} = 0, \quad M^i_i - N^i_i = 0 \quad (i: 1\to 2),$$

le développement canonique étant donné par

$$z^3 = \tfrac{1}{2}H_{ij}z^i z^j + \tfrac{1}{6}K_{ijl}z^i z^j z^l + \ldots\ldots$$

2. Rapporté aux paramètres asymptotiques, il vient

$$H_{11} = H_{22} = 0, \quad K_{112} = K_{122} = 0.$$

Posons

$$K_{11}^{\ 2} = \frac{K_{111}}{H_{12}} = a, \quad K_{22}^{\ 1} = \frac{K_{222}}{H_{12}} = b, \quad \log H_{12} = \theta$$

$$L = M_{11} + N_{11} - \theta_{uu} + \tfrac{1}{2}\theta_u^2, \quad M = M_{22} + N_{22} - \theta_{vv} + \tfrac{1}{2}\theta_v^2.$$

Nous avons alors comme condition d'intégrabilité de $(1\cdot1)$

$$(2\cdot1)\qquad \begin{cases} L_v = \tfrac{1}{4}((ab)_u + ab_u), \quad M_u = \tfrac{1}{4}((ab)_v + ba_v), \\ (bL)_u + Lb_u - b_{uuu} = (aM)_v + Ma_v - a_{vvv}. \end{cases}$$

Désignons par φ la valeur des deux membres de la dernière équation de sorte qu'on a

$$(2\cdot2)\qquad \begin{aligned} & L_u + 2\frac{\partial \log b}{\partial u}L = \frac{\varphi}{b} + \frac{b_{uuu}}{b}, \\ & L_{uv} + 2\frac{\partial \log b}{\partial u}L_v + 2\Delta b L = \left(\frac{\varphi}{b}\right)_v + \left(\frac{b_{uuu}}{b}\right)_v \end{aligned}$$

$$\left(\Delta b = \frac{\partial^2 \log b}{\partial u \partial v}\right).$$

Portons-y les valeurs de L_{uv}, L_v données par la première équation de $(2\cdot1)$. Il vient (la surface n'admettant pas de déformation projective par l'hypothèse, Δa et Δb sont différents de zéro)

$$(2\cdot3)\qquad L = \frac{1}{2\Delta b}\left(\frac{\varphi}{b}\right)_v + \frac{1}{2\Delta b}\left(\frac{b_{uuu}}{b}\right)_v - \frac{1}{8\Delta b}((ab)_u + ab_u)_u$$

$$-\frac{1}{4\Delta b}\frac{\partial\log b}{\partial u}((ab)_u+ab_u).$$

En éliminant encore L_v nous obtenons

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\varphi}{b}\right)_{vv}-\frac{\partial\log\Delta b}{\partial v}\left(\frac{\varphi}{b}\right)_v+\left(\frac{b_{uuu}}{b}\right)_{vv}-\frac{\partial\log\Delta b}{\partial v}\left(\frac{b_{uuu}}{b}\right)_v\\&\quad-\frac{1}{4}((ab)_u+ab_u)_{uv}+\frac{1}{4}\frac{\partial\log\Delta b}{\partial v}((ab)_u+ab_u)_u\\&\quad-\frac{1}{2}\frac{\partial\log b}{\partial u}((ab)_u+ab_u)_v+\frac{1}{2}\frac{\partial\log b}{\partial u}\frac{\partial\log\Delta b}{\partial u}((ab)_u+ab_u)\\&\quad-\Delta b(ab)_u+ab_u)=0.\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\varphi}{b}\right)_{vv}-\frac{\partial\log\Delta b}{\partial v}\left(\frac{\varphi}{b}\right)_v\\&\quad=\frac{1}{b}\left\{\varphi_{vv}-\frac{\partial\log b^2\Delta b}{\partial v}\varphi_v-\left(\frac{\partial^2\log b}{\partial v^2}-\frac{\partial\log b}{\partial v}\frac{\partial\log b\Delta b}{\partial v}\right)\varphi\right\},\end{aligned}$$

$$\frac{b_{uuu}}{b}=\frac{\partial^3\log b}{\partial u^3}+3\frac{\partial\log b}{\partial u}\frac{\partial^2\log b}{\partial u^2}+\left(\frac{\partial\log b}{\partial u}\right)^3, \tag{2·4}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{b_{uuu}}{b}\right)_v=\Delta b\Big\{&\frac{\partial^2\log\Delta b}{\partial u^2}+\left(\frac{\partial\log\Delta b}{\partial u}\right)^2+3\frac{\partial^2\log b}{\partial u^2}\\&+3\frac{\partial\log b}{\partial u}\frac{\partial\log\Delta b}{\partial u}+3\left(\frac{\partial\log b}{\partial u}\right)^2\Big\},\end{aligned}\tag{2·5}$$

$$\begin{aligned}&\left(\frac{b_{uuu}}{b}\right)_{vv}-\frac{\partial\log\Delta b}{\partial v}\left(\frac{b_{uuu}}{b}\right)_v\\&=\Delta b\Big\{\frac{\partial^3\log\Delta b}{\partial u^2\partial v}+2\frac{\partial\log\Delta b}{\partial u}\frac{\partial^2\log\Delta b}{\partial u\partial v}+6(\Delta b)_u\\&\qquad+3\frac{\partial\log b}{\partial u}\frac{\partial^2\log\Delta b}{\partial u\partial v}+6\Delta b\frac{\partial\log b}{\partial u}\\&=\Delta b\Big\{\frac{\partial^3\log\Delta b}{\partial u^2\partial v}+2\frac{\partial\log b\Delta b}{\partial u}\frac{\partial^2\log\Delta b}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^3\log b}{\partial u^2\partial v}+5\Delta b\frac{\partial\log\Delta b}{\partial u}\\&\qquad+\frac{\partial\log b}{\partial u}\frac{\partial^2\log\Delta b}{\partial u\partial v}+\frac{\partial\log b}{\partial u}\frac{\partial^2\log b}{\partial u\partial v}+5\Delta b\frac{\partial\log b}{\partial u}\Big\}\\&=\Delta b\Big\{\frac{\partial^3\log b\Delta b}{\partial u^2\partial v}+\frac{\partial\log b}{\partial u}\frac{\partial^2\log b\Delta b}{\partial u\partial v}+\Delta b\frac{\partial\log b\Delta b}{\partial u}\end{aligned}$$

$$+2\frac{\partial \log b\Delta b}{\partial u}\frac{\partial^2 \log b\Delta b}{\partial u bv}+2\Delta b\frac{\partial \log b\Delta b}{\partial u}\Big\}$$

$$=\Delta b\left\{\left(\tau_u+\frac{\partial \log b}{\partial u}\tau\right)_v+2\tau(\tau_v+\Delta b)\right\}$$

$$\left(\tau=\frac{\partial \log b\Delta b}{\partial u}\right).$$

Il vient donc

$$(2\cdot 6)\qquad \varphi_{vv}=\frac{\partial \log b^2\Delta b}{\partial v}\varphi_v+\left(\frac{\partial^2 \log b}{\partial v^2}-\frac{\partial \log b}{\partial v}\frac{\partial \log b\Delta b}{\partial v}\right)\varphi-T$$

$$T=b\Delta b\left\{\left(\tau_u+\frac{\partial \log b}{\partial u}\tau\right)_v+2\tau(\tau_v+\Delta b)\right\}$$

$$-\frac{b}{4}\left\{((ab)_u+ab_u)_u+2\frac{\partial \log b}{\partial u}((ab)_u+ab_u)\right\}_v$$

$$+\frac{b}{4}\frac{\partial \log \Delta b}{\partial u}\left\{((ab)_u+ab_u)_u+2\frac{\partial \log b}{\partial u}((ab)_u+ab_u)\right\}$$

$$-\frac{b}{2}\Delta b((ab)_u+ab_u).$$

De même, moyennant la deuxième équation de $(2\cdot 1)$ et l'équation

$$(2\cdot 7)\qquad M_v+2\frac{\partial \log a}{\partial v}M=\frac{\varphi}{a}+\frac{a_{vv}}{a}$$

nous pouvons déduire

$$(2\cdot 8)\qquad \varphi_{uu}=\frac{\partial \log a^2\Delta a}{\partial u}\varphi_u+\left(\frac{\partial^2 \log a}{\partial u^2}-\frac{\partial \log a}{\partial u}\frac{\partial \log a\Delta a}{\partial u}\right)\varphi-S$$

$$S=a\Delta a\left\{\left(\sigma_v+\frac{\partial \log a}{\partial v}\sigma\right)_u+2\sigma(\sigma_u+\Delta a)\right\}$$

$$-\frac{a}{4}\left\{((ab)_v+ba_v)_v+2\frac{\partial \log a}{\partial v}((ab)_v+ba_v)\right\}_u$$

$$+\frac{a}{4}\frac{\partial \log \Delta a}{\partial u}\left\{((ab)_v+ba_v)_v+2\frac{\partial \log a}{\partial v}((ab)_v+ba_v)\right\}$$

$$-\frac{a}{2}\Delta a((ab)_v+ba_v)\qquad \left(\sigma=\frac{\partial \log a\Delta a}{\partial v}\right).$$

3. Eliminons cette fois-ci L_u, L des équations (2·2), (2·3). Nous aurons

$$2\Delta b\left(\frac{\varphi}{b}+\frac{b_{uuu}}{b}\right)=\left(\frac{\varphi}{b}\right)_{uv}-\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\Delta b}{b^2}\cdot\left(\frac{\varphi}{b}\right)_v$$
$$+\left(\frac{b_{uuu}}{b}\right)_{uv}-\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\Delta b}{b^2}\cdot\left(\frac{b_{uuu}}{b}\right)_v$$
$$-\frac{1}{4}\left\{((ab)_u+ab_u)_{uu}-\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\Delta b}{b^2}((ab)_u+ab_u)_u\right\}$$
$$-\frac{1}{2}\frac{\partial\log b}{\partial u}\left\{((ab)_u+ab_u)_u-\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\Delta b}{b^2}((ab)_u+ab_u)\right\}$$
$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\log b}{\partial u^2}((ab)_u+ab_u).$$

Or, d'après (2·4), (2·5)

$$\left(\frac{b_{uuu}}{b}\right)_{uv}-\frac{\partial\log b}{\partial u}\left(\frac{b_{uuu}}{b}\right)_v$$
$$=\Delta b\left\{\frac{\partial^3\log\Delta b}{\partial u^3}+2\frac{\partial\log\Delta b}{\partial u}\frac{\partial^2\log\Delta b}{\partial u^2}+3\frac{\partial^3\log b}{\partial u^3}\right.$$
$$+3\frac{\partial^2\log b}{\partial u^2}\frac{\partial\log\Delta b}{\partial u}+3\frac{\partial\log b}{\partial u}\frac{\partial^2\log\Delta b}{\partial u^2}$$
$$\left.+6\frac{\partial\log b}{\partial u}\frac{\partial^2\log b}{\partial u^2}\right\}$$
$$=\Delta b\left\{\frac{\partial^3\log b\Delta b}{\partial u^3}+2\frac{\partial\log\Delta b}{\partial u}\frac{\partial^2\log b}{\partial u^2}+2\frac{\partial^3\log b}{\partial u^3}\right.$$
$$\left.+3\frac{\partial^2\log b}{\partial u^2}\frac{\partial\log b\Delta b}{\partial u}+3\frac{\partial\log b}{\partial u}\frac{\partial^2\log b\Delta b}{\partial u^2}\right\},$$

$$\left(\frac{b_{uuu}}{b}\right)_{uv}-\frac{\partial\log\Delta b}{\partial u}\left(\frac{b_{uuu}}{b}\right)_v+2\frac{\partial\log b}{\partial u}\left(\frac{b_{uuu}}{b}\right)_v-2\Delta b\left(\frac{b_{uuu}}{b}\right)$$
$$=\Delta b\left\{\frac{\partial^3\log b\Delta b}{\partial u^3}+2\frac{\partial\log b\Delta b}{\partial u}\frac{\partial^2\log\Delta b}{\partial u^2}+3\frac{\partial^2\log b}{\partial u^2}\frac{\partial\log b\Delta b}{\partial u}\right.$$
$$+3\frac{\partial\log b}{\partial u}\frac{\partial^2\log b\Delta b}{\partial u^2}+2\frac{\partial\log b}{\partial u}\frac{\partial\log\Delta b}{\partial u}\frac{\partial\log b\Delta b}{\partial u}$$
$$\left.+4\left(\frac{\partial\log b}{\partial u}\right)^2\frac{\partial\log b\Delta b}{\partial u}\right\}.$$

$$=\Delta b\left(\tau_{uu}+2\tau\tau_u+\frac{\partial^2\log b}{\partial u^2}\tau+3\frac{\partial\log b}{\partial u}\tau_u\right.$$

$$\left.+2\frac{\partial\log b}{\partial u}\tau^2+2\left(\frac{\partial\log b}{\partial u}\right)^2\tau\right)$$

$$=\Delta b\left\{\left(\tau_u+\frac{\partial\log b}{\partial u}\tau\right)_u+2\left(\tau+\frac{\partial\log b}{\partial u}\right)\left(\tau_u+\frac{\partial\log b}{\partial u}\tau\right)\right\}.$$

Il vient donc

(3·1)

$$\varphi_{uv}=\frac{\partial\log b}{\partial v}\varphi_u+\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\Delta b}{b}\cdot\varphi_v+\left(3\Delta b-\frac{\partial\log b}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\Delta b}{b}\right)\varphi-Q,$$

$$Q=b\,\Delta b\left\{\left(\tau_u+\frac{\partial\log b}{\partial u}\tau\right)_u+2\left(\tau+\frac{\partial\log b}{\partial u}\right)\left(\tau_u+\frac{\partial\log b}{\partial u}\tau\right)\right\}$$

$$-\frac{b}{4}\left\{((ab)_u+ab_u)_u+2\frac{\partial\log b}{\partial u}((ab)_u+ab_u)\right\}_u$$

$$+\frac{b}{4}\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\Delta b}{b^2}\cdot\left\{((ab)_u+ab_u)_u+2\frac{\partial\log b}{\partial u}((ab)_u+ab_u)\right\}.$$

De même, de la deuxième équation de (2·1) et de l'équation (2·7) nous pouvons déduire

(3·2)

$$\varphi_{uv}=\frac{\partial}{\partial v}\log\frac{\Delta a}{a}\cdot\varphi_u+\frac{\partial\log a}{\partial u}\varphi_v+\left(3\Delta a-\frac{\partial\log a}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\log\frac{\Delta a}{a}\right)\varphi-P,$$

$$P=a\Delta a\left\{\left(\sigma_v+\frac{\partial\log a}{\partial v}\sigma\right)_v+2\left(\sigma+\frac{\partial\log a}{\partial v}\right)\left(\sigma_v+\frac{\partial\log a}{\partial v}\sigma\right)\right\}$$

$$-\frac{a}{4}\left\{((ab)_v+ba_v)_v+2\frac{\partial\log a}{\partial v}((ab)_v+ba_v)\right\}_v$$

$$+\frac{a}{4}\frac{\partial}{\partial v}\log\frac{\Delta a}{a^2}\cdot\left\{((ab)_v+ba_v)_v+2\frac{\partial\log a}{\partial v}((ab)_v+ba_v)\right\}.$$

Nous avons donc

(3·3)

$$(\log\alpha)_v\left(\varphi_u-\frac{\partial\log a}{\partial u}\varphi\right)-(\log\beta)_u\left(\varphi_v-\frac{\partial\log b}{\partial v}\varphi\right)-3\Delta\frac{b}{a}\cdot\varphi$$

$$=P-Q\qquad\left(\alpha=\frac{\Delta a}{ab},\quad\beta=\frac{\Delta b}{ab}\right).$$

Différentions cette équation par rapport à u, et portons les valeurs de φ_{uu}, φ_{uv} données par (2·8), (3·1). Il vient

(3·4)
$$\Big(\frac{\alpha_{uv}}{\alpha}-3\Delta\frac{b}{a}\Big)\Big(\varphi_u-\frac{\partial\log a}{\partial u}\varphi\Big)-\Big(\frac{\beta_{uu}}{\beta}-\frac{\partial\log ab}{\partial u}\frac{\beta_u}{\beta}\Big)\Big(\varphi_v-\frac{\partial\log b}{\partial v}\varphi\Big)$$
$$=(P-Q)_u-\frac{\partial\log a^2b}{\partial u}(P-Q)+(\log\alpha)_vS-(\log\beta)_uQ\,.$$

De même, moyennant (2·6), (3·2) nous obtenons

(3·5)
$$\Big(\frac{\alpha_{vv}}{\alpha}-\frac{\partial\log ab}{\partial v}\frac{\alpha_v}{\alpha}\Big)\Big(\varphi_u-\frac{\partial\log a}{\partial u}\varphi\Big)-\Big(\frac{\beta_{uv}}{\beta}+3\Delta\frac{b}{a}\Big)\Big(\varphi_v-\frac{\partial\log b}{\partial v}\varphi\Big)$$
$$=(P-Q)_v-\frac{\partial\log ab^2}{\partial v}(P-Q)+(\log\alpha)_vP-(\log\beta)_uT\,.$$

4. Reprenons les paramètres générales. Lorsqu'on multiplie les coordonnées x^σ par un facteur commun λ, il vient

$$H'_{ij}=(\lambda)^2H_{ij}\,,\qquad K'_{ijl}=(\lambda)^2K_{ijl}\,.$$

Posons maintenant

$$E=K^{pst}K_{pst}\,.$$

Les EH_{ij}, EK_{ijl} ne changent pas de valeurs même quand on multiplie x par un facteur commun. Ils sont des tenteurs (du poids nul) relatifs au changement des paramètres. En choisissant le focteur commun λ convenablement, et en échangeant les paramètres u, v s'il est nécessaire, nous pouvons faire $E=1$. Les coordonnées sont dites alors mormales. Lorsque nous nous occupons de la surface réele, pour conserver $E=1$, en laissant les coordonnées x réeles pendant le changement des paramètres $u'=u'(u,v)$, $v'=v'(u,v)$, il faut supposer que

$$J=\frac{\partial(u',v')}{\partial(u,v)}>0\,.$$

Intropuisons le vecteur covariant

$$G_i=K_i^{st}D_pK_{st}^p\,,$$

en désignant par D_k la dérivées absolue par rapport à u^k où la forme $EH_{ij}du^idu^j$ $(=\bar{H}_{ij}du^idu^j)$ est prise comme forme fondamentale.

Etant donné un tenseur Φ_{ij}, nous obtenons un invavriant

$$\Phi_{[1,2]}=\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pm H}}(\Phi_{12}-\Phi_{21}).$$

En particulier, lorsque $\Phi_{ij}=\Phi_i\Psi_j$, nous écrirons aussi

$$\Phi_1\wedge\Phi_2=\Phi_{[1}\Psi_{2]}=\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pm H}}\begin{vmatrix}\Phi_1 & \Psi_1\\ \Phi_2 & \Psi_2\end{vmatrix}.$$

D'après ce que nous venons de remarquer, si nous déterminons le signe ε pour un système particulier des paramètres, il en sera de même pour un système quelconque des paramètres. Or, lorsque nous bornons nos considérations au voisinage d'un point hyperboloque, par exemple, nous pouvons prendre comme ε le signe de H_{12} de manière à avoir $H_{12}=\varepsilon\sqrt{-H}$, les paramètres étant asymptotiques.

En particulier, posons

$$K=2D_{[2}G_{1]}=\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pm H}}(D_2G_1-D_1G_2). \tag{4·1}$$

Rapporté au paramètres asymptotiques, il vient

$$1=E=\frac{2ab}{H_{12}},$$

$$\left\{\begin{aligned} G_1&=\frac{a}{H_{12}}\left(\frac{\partial b}{\partial u}+\theta_u b\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial\log ab^2}{\partial u}=\frac{1}{H_{12}}((ab)_u+ab_u),\\ G_2&=\frac{b}{H_{12}}\left(\frac{\partial a}{\partial v}+\theta_v a\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial\log a^2b}{\partial v}=\frac{1}{H_{12}}((ab)_v+ba_v),\end{aligned}\right. \tag{4·2}$$

$$K=\frac{1}{2ab}\frac{\partial^2\log\dfrac{b}{a}}{\partial u\partial v}$$

Ensuite,

$$R=-\frac{2}{3}H^{ij}D_jG_i=-\frac{1}{2ab}\frac{\partial^2\log ab}{\partial u\partial v}$$

est la courbure totale de la forme $EH_{ij}du^idu^j$ $(=H_{ij}du^idu^j)$.

Nous avons ainsi

$$-R-K=\frac{1}{ab}\frac{\partial^2\log a}{\partial u\partial v}=\alpha,\qquad -R+K=\frac{1}{ab}\frac{\partial^2\log b}{\partial u\partial v}=\beta. \tag{4·3}$$

Enfin, d'après (4·2), nous avons

$$((ab)_v+ba_v)_v+2\frac{\partial\log a}{\partial v}((ab)_v+ba_v)=H_{12}(D_2+4G_2)G_2,$$

$$(4\cdot4)\qquad \left\{((ab)_v+ba_v)_v+2\frac{\partial\log a}{\partial v}((ab)_v+ba_v)\right\}_v$$

$$-\left(\frac{\partial}{\partial v}\log\frac{\varDelta a}{b^2}\right)\left\{((ab)_v+ab_v)_v+2\frac{\partial\log a}{\partial v}((ab)_v+ba_v)\right\}$$

$$=H_{12}(D_2+4G_2-(\log\alpha)_v)(D_2+4G_2)G_2,$$

$$(4\cdot5)\qquad \left\{((ab)_u+ab_u)_u+2\frac{\partial\log b}{\partial u}((ab)_u+ba_u)\right\}_u$$

$$-\left(\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\varDelta b}{b^2}\right)\left\{((ab)_u+ab_u)_u+2\frac{\partial\log b}{\partial u}((ab)_u+ab_u)\right\}$$

$$=H_{12}(D_1+4G_1-(\log\beta)_u)(D_1+4G_1)G_1.$$

5. Portant la valeur de σ:

$$\sigma=\frac{(a\varDelta a)_v}{a\varDelta a},$$

nous obtenons

$$a\varDelta a\left\{\left(\sigma_v+\frac{\partial\log a}{\partial v}\sigma\right)_v+2\left(\sigma+\frac{\partial\log a}{\partial v}\right)\left(\sigma_v+\frac{\partial\log a}{\partial v}\sigma\right)\right\}$$

$$=\left\{(a\varDelta a)_{vv}+\frac{\partial\log a}{\partial v}(a\varDelta a)_v\right\}_v+2\frac{\partial\log a}{\partial v}\left\{(a\varDelta a)_{vv}+\frac{\partial\log a}{\partial v}(a\varDelta a)_v\right\}$$

$$-\frac{\partial\log a\varDelta a}{\partial v}\left\{(a\varDelta a)_{vv}+\frac{\partial\log a}{\partial v}(a\varDelta a)_v\right\}.$$

Or,

$$a\varDelta a=a^2b\frac{\varDelta a}{ab}=a^2b\alpha,$$

$$(a\varDelta a)_v=a^2b(D_2+2G_2)\alpha,$$

$$(a\varDelta a)_{vv}+\frac{\partial\log a}{\partial v}(a\varDelta a)_v=a^2b(D_2+4G_2)(D_2+2G_2)\alpha.$$

Nous avons donc

$$a\varDelta a\left\{\left(\sigma_v+\frac{\partial\log a}{\partial v}\sigma\right)_v+2\left(\sigma+\frac{\partial\log a}{\partial v}\right)\left(\sigma_v+\frac{\partial\log a}{\partial v}\sigma\right)\right.$$

$$=a^2b(D_2+4G_2-(\log\alpha)_v)(D_2+4G_2)(D_2+2G_2)\alpha.$$

De même,

$$b\Delta b\left\{\left(\tau_u+\frac{\partial\log b}{\partial u}\tau\right)_u+2\left(\tau+\frac{\partial\log b}{\partial u}\right)\left(\tau_u+\frac{\partial\log b}{\partial u}\tau\right)\right\}$$

$$=ab^2(D_1+4G_1-(\log\beta)_u)(D_1+4G_1)(D_1+2G_1)\beta .$$

Donc, en tenant compte de (4·4), (4·5) nous pouvons écrire

(5·1)

$$\begin{cases} P=a^2b(D_2+4G_2-(\log\alpha)_v)(D_2+4G_2)((D_2+2G_2)\alpha-\frac{1}{2}G_2), \\ Q=ab^2(D_1+4G_1-(\log\beta)_u)(D_1+4G_1)((D_1+2G_1)\beta-\frac{1}{2}G_1), \end{cases}$$

(5·2)

$$(\log\alpha)_v\left(\varphi_u-\frac{\partial\log a}{\partial v}\varphi+a^2b(D_2+4G_2)((D_2+2G_2)\alpha-\frac{1}{2}G_2)\right)$$

$$-(\log\beta)_u\left(\varphi_v-\frac{\partial\log b}{\partial v}+ab^2(D_1+4G_1)((D_1+2G_1)\beta-\frac{1}{2}G_1)\right)$$

$$-6abK\varphi=abA ,$$

$$A=a(D_2+4G_2)^2((D_2+2G_2)\alpha-\tfrac{1}{2}G_2)$$

$$-b(D_1+4G_1)^2((D_1+2G_1)\beta-\tfrac{1}{2}G_1).$$

Posons

$$U=K^{st}_{[2}(D_s+4G_s)(D_t+4G_t)((D_1+2G_1)R+\tfrac{1}{2}G_{1]})$$

$$-K^{stp}(D_s+4G_s)(D_t+4G_t)(D_p+2G_p)K$$

$$=\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pm H}}\{K^{st}_2(D_s+4G_s)(D_t+4G_t)((D_1+2G_1)R+\tfrac{1}{2}G_1)$$

$$-K^{st}_1(D_s+4G_s)(D_t+4G_t)(D_2+2G_2)R+\tfrac{1}{2}G_2)\}$$

$$-K^{stp}(D_s+4G_s)(D_t+4G_t)(D_p+2G_p)K$$

les paramètres etant supposés génerarals. Rapporté aux paramètres asymptotiques, il vient

$$U=\frac{A}{(H_{12})^2}.$$

Puisque (p.101)

$$a\Delta a\left\{\left(\sigma_v+\frac{\partial\log a}{\partial v}\sigma\right)_u+2\sigma(\sigma_u+\Delta a)\right\}$$

$$=\left\{(a\Delta a)_{vv}+\frac{\partial \log a}{\partial v}(a\Delta a)_v\right\}_u+2\Delta a(a\Delta a)_v$$

$$-\frac{\partial \log a\Delta a}{\partial u}\left\{(a\Delta a)_{vv}+\frac{\partial \log a}{\partial v}(a\Delta a)_v\right\}$$

$$=a^2b\{(D_1-(\log\alpha)_u)(D_2+4G_2)(D_2+2G_2)\alpha+2ab\alpha(D_2+2G_2)\alpha\},$$

nous avons (p. 96, 100)

$$S=a^2b\{(D_1-(\log\alpha)_u)(D_2+4G_2)+2ab\alpha\}\{(D_2+2G_2)\alpha-\tfrac{1}{2}G_2\}.$$

Portant cette valeur et meyennant (5·1), nous obtenons

$$P_u-\frac{\partial \log a^2b}{\partial u}P+(\log\alpha)_vS$$

$$=a^2b\left\{D_1(D_2+4G_2)^2-\frac{\alpha_{uv}}{\alpha}(D_2+4G)+2ab\alpha_v\right\}\{(D_2+2G_2)\alpha-\tfrac{1}{2}G_2\}$$

De la deuxième équation de (5·1), il suit

$$Q_u-\frac{\partial \log a^2b}{\partial u}Q+(\log\beta)_uQ$$

$$=ab^2\left\{(D_1+4G_1)^3-\left(\frac{\beta_{uu}}{\beta}-\frac{\partial \log ab}{\partial u}\frac{\beta_u}{\beta}\right)(D_1+4G_1)\right\}$$

$$\times\{(D_1+2G_1)\alpha-\tfrac{1}{2}G_1\}.$$

L'équation (3·4) s'écrit donc,

(5·3)

$$\left(\frac{\alpha_{uv}}{\alpha}-6abK\right)\left\{\varphi_u-\frac{\partial \log a}{\partial u}\varphi+a^2b(D_2+4G_2)((D_2+2G_2)\alpha-\tfrac{1}{2}G_2)\right\}$$

$$-\frac{1}{\beta}D_1^2\beta\left\{\varphi_v-\frac{\partial \log b}{\partial v}\varphi+ab^2(D_1+4G_1)((D_1+2G_1)\beta-\tfrac{1}{2}G_1)\right\}$$

$$-ab(6K_u+2\beta_u)\varphi=abB,$$

$$B=a\{D_1(D_2+4G_2)^2-6abK(D_2+4G_2)+2ab\alpha_v\}\{(D_2+2G_2)\alpha-\tfrac{1}{2}G_2\}$$

$$-b(D_1+4G_1)^3((D_1+2G_1)\beta-\tfrac{1}{2}G_1)$$

$$=A_u-\frac{\partial \log a}{\partial u}A-a^2b(6K(D_2+4G_2)-2\alpha_v)((D_2+2G_2)\alpha-\tfrac{1}{2}G_2)$$

$$=(H_{12})^2[(D_1+2G_1)U+K_1^{pq}\{3K(D_p+4G_p)+D_p(R+K)\}$$

$$\times\{(D_q+2G_q)(R+K)+\tfrac{1}{2}G_q\}].$$

De même nous obtenons

(5·4)

$$\frac{1}{\alpha} D_2^2 \alpha \left\{\varphi_u - \frac{\partial \log a}{\partial u} \varphi + a^2 b(D_2+4G_2)((D_2+2G_2)\alpha - \tfrac{1}{2} G_2)\right\}$$
$$-\left(\frac{\beta_{uv}}{\beta} + 6abK\right)\left\{\varphi_v - \frac{\partial \log b}{\partial v} \varphi + ab^2(D_1+4G_1)\right.$$
$$\left.\times((D_1+2G_1)\beta - \tfrac{1}{2} G_1)\right\} - ab(6K_v - 2\alpha_v)\varphi = abC,$$

$$C = a(D_2+4G_2)^3((D_2+2G_2)\alpha - \tfrac{1}{2} G_2)$$
$$-b\{D_2(D_1+4G_1)^3 + 6abK(D_1+4G_1) + 2ab\beta_u\}$$
$$\times\{(D_1+2G_1)\beta - \tfrac{1}{2} G_1\}$$
$$= A_v - \frac{\partial \log b}{\partial v} A - ab^2(6K(D_1+4G_1) + 2\beta_u)(D_1+2G_1)\beta - \tfrac{1}{2} G_1)$$
$$= (H_{12})^2 [(D_2+2G_2) U + K_2^{pq} \{3K(D_p+4G_p) - D_p(R-K)\}$$
$$\times \{(D_q+2G_q)(R-K) + \tfrac{1}{2} G_1\}].$$

6. Posons maintenant

$$W = \{(\varDelta_2(R+K) - 3K(R+K))(\varDelta_2(R-K) + 3K(R-K))$$
$$- K_i^{pq} K^{ist}(D_p D_q R \cdot D_s D_t R - D_p D_q K \cdot D_s D_t K)$$
$$+ 2K_1^{pq} D_p D_q R \wedge K_2^{st} D_s D_t K\} U$$
$$+ \{2K^{lpq} K_l^{st}(D_p D_q R \cdot D_s R - D_p D_q K \cdot D_s K)$$
$$- (\varDelta_2 R - 3K^2) D^t R + (\varDelta_2 K - 3KR) D^t K\} U_t'$$
$$+ \{2K^{lpq} K_l^{st}(D_p D_q K \cdot D_s R - D_p D_q R \cdot D_s K)$$
$$- (\varDelta_2 R - 3K^2) D^t K + (\varDelta^2 K - 3KR) D^t R\} U_t''$$
$$+ 2(K_1^{pq} D_p D_q K \wedge K_2^{st} D_s R - K_1^{pq} D_p D_q R \wedge K_2^{st} D_s R) U_t'$$
$$+ 2(K_1^{pq} D_p D_q R \wedge K_2^{st} D_s R - K_1^{pq} D_p D_q K \wedge K_2^{st} D_s K) U_t''$$
$$+ \{(\varDelta_2 R - 3K^2) D_1 K - (\varDelta_2 K - 3KR) D_1 R\} \wedge U_2'$$
$$+ \{\varDelta_2 R - 3K^2) D_1 R - (\varDelta_2 K - 3KR) D_1 K\} \wedge U_2''$$

où

$$D^i F = H^{il} D_l F, \qquad \varDelta_2 F = H^{ij} D_i D_j F,$$
$$U_t' = (D_t + 2G_t) U + 3KK_t^{ij}(D_i + 4G_i)((D_j + 2G_j) R + \tfrac{1}{2} G_j)$$

$$+K_t^{ij}D_iR\cdot(D_j+2G_j)K+K_t^{ij}D_iK\cdot((D_i+2G_j)R+\tfrac{1}{2}G_j),$$

$$U_t''=K_t^{ij}\{3K(D_i+4G_i)(D_j+2G_j)K$$

$$+D_iR\cdot((D_j+2G_j)R+\tfrac{1}{2}G_j)+D_iK\cdot(D_j+2G_j)K\},$$

et désignons par V ce qu'on obtient en remplaçant U, U_t', U_t'' dans W par $6K$, $8D_tK$, $-2D_tR$ respectivement. Nous obtenons alors

$$\begin{vmatrix} \alpha_v & \beta_v & 6K \\ \alpha_{uv}-6ab\alpha K & D_1^2\beta & 6K_u+2\beta_v \\ D_2^2\alpha & \beta_{uv}+6ab\beta K & 6K_v-2\alpha_v \end{vmatrix}=(H_{12})^2V,$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_v & \beta_v & A \\ \alpha_{uv}-6ab\alpha K & D_1^2\beta & B \\ D_2^2\alpha & \beta_{uv}+6ab\beta K & C \end{vmatrix}=(H_{12})^4W.$$

Les équations (5·2), (5·3), (5·4) résolues par rapport à φ, φ_u, φ_v donnent

$$\varphi=-(H_{12})^2\frac{W}{V},$$

$$(D_1+2G_1)\left(\frac{W}{V}\right)+\tfrac{1}{2}K_1^{pq}(D_p+4G_p)((D_q+2G_q)(R+K)+\tfrac{1}{2}G_q)$$

$$=\frac{R+K}{V}[\{\varDelta_2(R-K)+3K(R-K)\}$$

$$\times\{UD_1(4K-R)-3K(U_1'+U_1'')\}$$

$$-2K_1^{st}K_s^{pq}D_pD_q(R-K)\{UD_t(4K+R)-3K(U_1'-U_1'')\}$$

$$-2K_1^{st}K_s^{pq}D_p(R-K)\{D_q(4K-R)(U_t'-U_t'')$$

$$-(U_q'+U_q'')D_t(4R-K)\}],$$

$$(D_2+2G_2)\left(\frac{W}{V}\right)+\tfrac{1}{2}K_2^{pq}(D_p+4G_p)((D_q+2G_q)(R-K)+\tfrac{1}{2}G_q)$$

$$=\frac{K-R}{V}[\{\varDelta_2(R+K)-3K(R+K)\}$$

$$\times\{UD_2(4K+R)-3K(U_2'-U_2'')$$

$$-2K_2^{st}K_s^{pq}D_pD_q(R+K)\{UD_t(4K-R)-3K(U_t'+U_t'')\}$$

$$-2K_2^{st}K_s^{pq}D_p(R+K)\{D_q(4K+R)(U_t'+U_t'')$$

$$-(U_q'-U_q'')D_t(4K-R)\}].$$

Les H_{ij} étant donnés, pour chacun du système des solutions K_{ijl} du système des équations simultanées formées par les deux dernières équations il existe une surface ayant comme forme fondamentales ces H_{ij}, K_{ijl}. Ces deux équations sont en relation que l'une peut se déduire de l'autre par l'échangement entre 1, K, U'' ; 2, $-K$, $-U''$. Elles sont d'équations aux dérivées partielles du cinquième ordre de K_{ijl}. Nous pouvons écrire le système de ces équations sous la forme qui rend clair son invariabilité, en additionant et puis, en retranchant l'une de l'autre ces équations multiliées respectivement par les components Ψ^1, Ψ^2 d'un vecteur contrevariant.