MEMOIRS OF THE COLLEGE OF SCIENCE, UNIVERSITY OF KYOTO, SERIES A
VOL. XXX, Mathematics No. 4, 1956.

Sur la forme de Darboux généraliése III.

Par

Jôyô KANITANI

(Reçu le 19, Juin, 1956)

Etant donnés les deux formes $H_{ij}\omega^i\omega^j$, $H_{ijl}\omega^i\omega^j\omega^l$ $(i, j, l : 1 \rightarrow n$; $H = \det|H_{ij}| \neq 0$, $H^i_{il} = H^{ij}H_{ijl} = 0$ $(l=1, \cdots, n)$; $\omega_h^k = a_{kj}^h dx^j)$, nous pouvons déterminer uniquement une connexion $\Gamma^\alpha_{\beta j}\omega^j$ $(\alpha, \beta = 0, 1, \cdots, n+1$; $\Gamma^\alpha_{0j} = \delta_j^\alpha$, $\Gamma^{n+1}_{ij} = H_{ij}$, $\Gamma^0_{ij} = M_{ij}$, $\Gamma^0_{n+1j} = N_j$, $\Gamma^k_{n+1j} = N^k_j$, $\Gamma^{n+1}_{n+1j} = 0$, $M_{ij} = M_{ji}$, $N_{ij} = N_{ji})$ qui fait correspondre à une courbe quelconque C dans l'espace $\boldsymbol{R}_n$ engendré par le point $(x', \cdots, x^n)$ une courbe Γ (le développement de C) dans l'espace projectif $\boldsymbol{S}_{n+1}$ de telle sorte qu'il existe une hypersurface V_n qui a un contact du quatrième ordre avec les développements des courbes issues d'un point x^i de $\boldsymbol{R}_n$. La condition pour que l'hypersurface V_n ait un contact du sixième ordre s'écrit

$$\text{(I)} \qquad H_{ijl\,;\,m} - H_{ijm\,;\,l} + H_{il}(M_{jm} - N_{jm}) + H_{jl}(M_{im} - N_{im}) - H_{im}(M_{jl} - N_{jl}) - H_{jm}(M_{il} - N_{il}) = 0\,,$$

$$\text{(II)} \qquad (M_{il} - N_{il})_{;m} - (M_{im} - N_{im})_{;l} + \tfrac{1}{2}H_{ims}(M_l^s + N_l^s) - \tfrac{1}{2}H_{ils}(M_m^s + N_m^s) + 2H_{il}N_m - 2H_{im}N_l = 0\,,$$

$$\text{(III)} \qquad H^s_{ij}R_{kslm} + H^s_{jk}R_{islm} + H^s_{ik}R_{jslm} = 0\,.$$

On désigne par $;j$ la différentiation absolue par rapport à $\omega^j = a_i^j dx^i$, où la forme $H_{ij}\omega^i\omega^j$ est prise comme forme fondamentale.

Supposons que la matrice

$$\mathfrak{M}(Q) = \begin{pmatrix} Q^s R_{s112} \cdots Q^s R_{s1n-1,n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Q^s R_{sn12} \cdots Q^s R_{snn-1,n} \end{pmatrix}$$

soit du rang $n-2$ (le cas où le nombre du rang de cette matrice est $n-1$ est déjà examiné dans le premier mémoire: Sur la forme de Dardoux généralisée I[1]).

Nous pouvons faire

$$R_{12lm}=0\,,$$

$$R_{2klm}=\mu_k^{\,j}R_{1jlm}\,.$$

Nous avons alors

$$H_{fg}^{q}=0\quad (f,\, g=1,\, 2\,;\; q=3,\, \cdots,\, n),$$

la matrice

$$\mathfrak{M}_1=\begin{pmatrix} R_{1312}\cdots R_{13n-1,n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ R_{1n12}\cdots R_{1nn-1,n}\end{pmatrix}$$

étant du rang $n-2$. Supposons que l'équation

$$D(\rho)=\begin{vmatrix} \mu_3^{\,3}-\rho\cdots\mu_n^{\,3} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mu_3^{\,n}\cdots\mu_n^{\,n}-\rho\end{vmatrix}$$

admette les racines distinctes $\rho_1,\, \cdots,\, \rho_m$ d'ordre $\lambda_1,\, \cdots,\, \lambda_m$, les déterminants $D(\rho_s)$ étant du rang $n-2-h_s$. La cas où $e\geq 3$, $h_s=\lambda_s$ est examiné au second mémoire: Sur la forme de Darboux généralisée II.[2])

1. Nous allons nous occuper maintenant du cas où $e=2$, $h_s=\lambda_s$ $(s=1,\, 2)$. Nous pouvons faire alors

$$\rho_1=0\,,$$
$$R_{2alm}=0\quad (a=3,\, \cdots,\, h_1+2),$$
$$R_{2ilm}=\rho R_{1ilm}\quad (i=h_1+3,\, \cdots,\, n\,;\; \rho=\rho_2).$$

Portons les dans

$$H_{fg}^{\sigma}R_{q\sigma lm}+H_{fq}^{\sigma}R_{g\sigma lm}+H_{gq}^{\sigma}R_{f\sigma lm}=0$$
$$(f,\, g=1,\, 2\,;\; q=3,\, \cdots,\, n).$$

Il vient

1) Ces Mémoires, tome 28 Math., p. 226 (1954).

2) Ces Mémoires, tome 29 Math., p. 229 (1955).

$$
(1.\ 1)\quad \begin{cases} H^{1}_{22}=0,\ H^{a}_{2q}=\delta_q^{\,a}H^{1}_{21},\ H^{k}_{2q}=\frac{1}{2}\delta_q^{\,k}H^{2}_{22}, \\ H^{a}_{1q}=\frac{1}{2}\delta_q^{\,a}H^{1}_{11},\ H^{k}_{1q}=\frac{1}{2}\delta_q^{\,k}(H^{1}_{11}+\rho H^{2}_{11}), \\ (\rho)^2H^{2}_{11}+\rho(H^{1}_{11}-2H^{2}_{12})+(H^{2}_{22}-2H^{1}_{21})=0, \end{cases}
$$

$$
(a=3,\ \cdots,\ h_1+2\,;\ k=h_1+3,\ \cdots,\ n\,;\ q=3,\ \cdots,\ n).
$$

Supposons d'abord que

$$
4H^{2}_{11}(H^{2}_{22}-2H^{1}_{21})-(H^{1}_{11}-2H^{2}_{12})^2\neq 0,\ H^{2}_{22}-2H^{1}_{21}\neq 0.
$$

Dans ce cas d'après le raisonnement du n^0 4 du second mémoire nous pouvons faire

$$
H^{1}_{1q}=H^{2}_{2q},\quad H^{2}_{1a}=0,\quad H^{1}_{2i}=0
$$

$$
(q=3,\ \cdots,\ n\,;\ a=3,\ \cdots,\ h_1+2\,;\ i=h_1+3,\ \cdots,\ n).
$$

Portant ces valeurs dans

$$
H^{\sigma}_{ab}R_{f\sigma lm}+H^{\sigma}_{fa}R_{b\sigma lm}+H^{\sigma}_{fb}R_{a\sigma lm}=0,
$$

$$
H^{\sigma}_{ij}R_{f\sigma lm}+H^{\sigma}_{fi}R_{j\sigma lm}+H^{\sigma}_{fj}R_{i\sigma lm}=0,
$$

$$
(f=1,\ 2\,;\ a,\ b=3,\ \cdots,\ h_1+2\,;\ i,\ j=h_1+3,\ \cdots,\ n)
$$

nous obtenons

$$
H^{1}_{2a}=0,\quad H^{2}_{1i}=0,\quad H^{q}_{ab}=\delta_a^{\,q}H^{1}_{b1}+\delta_b^{\,q}H^{1}_{a1},\quad H^{q}_{ij}=\delta_i^{\,q}H^{1}_{j1}+\delta_j^{\,q}H^{1}_{i1}.
$$

Des équations

$$
H^{\sigma}_{ai}R_{f\sigma lm}+H^{\sigma}_{fa}R_{i\sigma lm}+H^{\sigma}_{fi}R_{a\sigma lm}=0\ \ (f=1,\ 2),
$$

il vient

$$
(H^{2}_{22}-2H^{1}_{21})(H^{\sigma}_{ai}-\delta_a^{\,\sigma}H^{1}_{1i}-\delta_i^{\,\sigma}H^{1}_{1a})R_{1\sigma lm}
$$

$$
-\rho H^{2}_{11}(H^{\sigma}_{ai}-\delta_i^{\,\sigma}H^{2}_{2a})R_{2\sigma lm}=0,
$$

d'où

$$
H^{b}_{ai}=\delta_a^{\,b}H^{1}_{1i}.
$$

Portant cette valeur dans $H^{\sigma}_{i\sigma}=0$, nous obtenons

$$
H^{b}_{ai}=H^{1}_{i1}=H^{2}_{i2}=0\ \ (a,\ b=3,\ \cdots,\ h_1+2\,;\ i=h_1+3,\ \cdots,\ n)
$$

et, par suite,

$$
H^{q}_{ij}=0\ \ (q=3,\ \cdots,\ n).
$$

Si $(\rho)^2H^{2}_{11}\neq H^{2}_{22}-2H^{1}_{21}$, il vient d'ailleurs

$$
H^{j}_{ai}=\delta_i^{\,j}H^{1}_{1a}
$$

et, par suite, grace à $H_{a\sigma}^{\sigma}=0$,

$$H_{ai}^{j}=H_{a}{}^{1}=H_{a2}^{2}=0 \quad (a=3, \cdots, h_1+2),$$

$$H_{ab}^{q}=0 \quad (q=3, \cdots, n), \quad R_{ailm}=0 .$$

Maintenant des équations

$$H_{aa}^{\sigma}R_{a\sigma lm}=0 , \quad H_{aa}^{\sigma}R_{b\sigma lm}+2H_{ab}^{\sigma}R_{a\sigma lm}=0 ,$$

$$H_{aa}^{\sigma}R_{i\sigma lm}+2H_{ai}^{\sigma}R_{a\sigma lm}=0 ,$$

$$H_{ab}^{\sigma}R_{i\sigma lm}+H_{ai}^{\sigma}R_{b\sigma lm}+H_{bi}^{\sigma}R_{a\sigma lm}=0 ,$$

$$H_{ii}^{\sigma}R_{a\sigma lm}+2H_{ai}^{\sigma}R_{i\sigma lm}=0 ,$$

$$H_{ij}^{\sigma}R_{a\sigma lm}+H_{ia}^{\sigma}R_{j\sigma lm}+H_{ja}^{\sigma}R_{i\sigma lm}=0 ,$$

$$H_{ii}^{\sigma}R_{i\sigma lm}=0 , \quad H_{ii}^{\sigma}R_{j\sigma lm}+2H_{ij}^{\sigma}R_{i\sigma lm}=0$$

nous pouvons tirer, proche en proche,

$$H_{aa}^{1}=0 , \quad H_{ab}^{1}=0 , \quad H_{ai}^{1}=0 , \quad H_{aa}^{2}=0 ,$$

$$H_{ab}^{2}=0 , \quad H_{ii}^{1}=0 , \quad H_{ai}^{2}=0 ,$$

$$H_{ij}^{1}=0 , \quad H_{ii}^{2}=0 , \quad H_{ij}^{2}=0 .$$

En résumé, nous avons

$$H_{pq}^{\sigma}=0 \quad (p, q=3, \cdots, n ; \ \sigma=1, \cdots, n),$$

et, par suite,

$$H_{pq2}=0 .$$

D'autre part

$$H_{2ap}=H_{p\sigma}H_{2a}^{\sigma}=H_{pa}H_{21}^{1}$$

Or $H_{21}^{1}\neq 0$, car si $H_{21}^{1}=0$, moyenant $H_{2\sigma}^{\sigma}=0$, on aurait $H_{22}^{2}=0$ contrairement à l'hypothèse que $H_{22}^{2}-2H_{21}^{1}\neq 0$. Il faut donc que

$$H_{pa}=0 \quad (a=3, \cdots, h_1+2 ; \ p=3, \cdots, n).$$

De même on déduit

$$H_{pi}=0 \quad (i=h_1+3, \cdots, n ; \ p=3, \cdots, n).$$

Il vient donc

$$H_{22p}=H_{p2}H_{22}^{2} .$$

D'autre part

$$H_{2a2}=H_{2a}H_{21}^{1} , \quad H_{2i2}=\tfrac{1}{2}H_{2i}H_{22}^{2} .$$

Il faut donc que $H_{2p}=0$. Il résulte ainsi $H=0$ contrairement à l'hypothèse.

Si $(\rho)^2H_{11}^2=H_{22}^2-2H_{21}^1$, en posant

$$\tau=\tfrac{1}{2}H_{22}^2-H_{21}^1=\tfrac{1}{2}(\rho)^2H_{11}^2=\tfrac{1}{2}\rho(H_{12}^2-\tfrac{1}{2}H_{11}^1)$$

et en tenant compte de $H_{1\sigma}^\sigma=0$, $H_{2\sigma}^\sigma=0$ nous pouvons déduire

$$\frac{1}{2}H_{11}^1=-\frac{n-h_1}{n+1}\frac{\tau}{\rho},\quad H_{12}^2=\frac{n+h_1+2}{n+1}\frac{\tau}{\rho},\quad \frac{1}{2}H_{11}^2=\frac{\tau}{\rho},$$

$$\frac{1}{2}H_{22}^2=\frac{h_1+1}{n+1}\tau,\quad H_{21}^1=-\frac{n-h_1}{n+1}\tau.$$

Portant ces valeurs dans les équations

$$\begin{aligned}
&H_{12}(H_{22}^2-H_{21}^1)=H_{22}H_{12}^2,\\
&H_{11}H_{12}^1+H_{12}(H_{12}^2-H_{11}^1)-H_{22}H_{11}^2=0,\\
&H_{22}H_{2a}^2=H_{a2}(H_{22}^2-H_{21}^1),\\
&H_{12}H_{1a}^1=H_{1a}H_{12}^1+H_{2a}(H_{12}^2-\tfrac{1}{2}H_{11}^1),
\end{aligned}$$

qui viennent resppectivement des systèmes équations

$$\begin{aligned}
&H_{221}=H_{1\sigma}H_{22}^\sigma=H_{12}H_{22}^2,\quad H_{122}=H_{21}H_{12}^1+H_{22}H_{12}^2,\\
&H_{112}=H_{21}H_{11}^1+H_{22}H_{11}^2,\quad H_{121}=H_{11}H_{12}^1+H_{12}H_{12}^2,\\
&H_{22a}=H_{a2}H_{22}^2,\quad H_{2a2}=H_{22}H_{a2}^2+H_{2a}H_{21}^1,\\
&H_{12a}=H_{a1}H_{12}^1+H_{a2}H_{12}^2,\quad H_{1a2}=H_{21}H_{1a}^1+\tfrac{1}{2}H_{2a}H_{11}^1,
\end{aligned}$$

nous obtenons

$$\rho H_{12}=H_{22},\quad \rho H_{11}=H_{12},\quad \rho H_{1a}=H_{2a}.$$

De même, nous pouvons déduire

$$\rho H_{1i}=H_{2i}.$$

Il résulte ainsi $H=0$ contrairement à l'hypothèse.

2. Supposons ensuite que

$$H_{22}^2-2H_{21}^1=0,\quad H_{11}^1-2H_{12}^2\neq 0.$$

Les équations (1. 1) deviennent alors

$$\begin{aligned}
&H_{22}^1=0,\quad H_{2p}^q=\tfrac{1}{2}\delta_p^q H_{22}^2\ (p,q=3,\cdots,n),\\
&H_{1q}^a=\tfrac{1}{2}\delta_q^a H_{11}^1,\quad H_{1q}^k=\delta_q^k H_{12}^2,\\
&\rho H_{11}^2+H_{11}^1=2H_{12}^2
\end{aligned}$$

$$(a=3, \cdots, h_1+2\,;\ k=h_1+3, \cdots, n).$$

Nous pouvons faire

$$H_{1a}^{1}=H_{2a}^{2}\,, \quad H_{1a}^{2}=0\,, \quad H_{1i}^{1}=H_{2i}^{2}\,.$$

Portant ces valeurs dans $H_{2\sigma}^{\sigma}=0$, $H_{1\sigma}^{\sigma}=0$ nous obtenons

$$H_{22}^{\sigma}=0 \quad (\sigma=1, \cdots, n),\ H_{12}^{1}=0\,,$$

$$H_{2p}^{q}=0 \quad (p, q=3, \cdots, n),$$

$$H_{11}^{1}=-\frac{n-h_1-1}{n+1}\rho H_{11}^{2}\,, \quad H_{12}^{2}=\frac{h_1+2}{2(n+1)}\rho H_{11}^{2}\,.$$

Les équations

$$H_{ab}^{\sigma}R_{1\sigma lm}+H_{1a}^{\sigma}R_{b\sigma lm}+H_{1b}^{\sigma}R_{a\sigma lm}=0\,,$$

$$H_{a\sigma}^{\sigma}R_{2\sigma lm}+H_{2a}^{\sigma}R_{a\sigma lm}=0\,,$$

$$H_{ij}^{\sigma}R_{f\sigma lm}+H_{fi}^{\sigma}R_{j\sigma lm}+H_{fj}^{\sigma}R_{i\sigma lm} \quad (f=1, 2)$$

donnent maintenant

$$H_{ab}^{q}=\delta_a^q H_{b1}^{1}+\delta_b^q H_{a1}^{1}\,, \quad H_{2a}^{1}=0\,,$$

$$H_{ij}^{q}=\delta_i^q(H_{j1}^{1}+\rho H_{j1}^{2})+\delta_j^q(H_{i1}^{1}+\rho H_{i1}^{2}) \quad (q=3, \cdots, n),$$

$$H_{ij}^{k}=\delta_i^k(H_{2j}^{2}+\frac{1}{\rho}H_{j2}^{1})+\delta_j^k(H_{i2}^{2}+\frac{1}{\rho}H_{i2}^{1})$$

$$(i, j, k=h_1+3, \cdots, n)$$

tandis que l'équation

$$H_{ai}^{\sigma}R_{2\sigma lm}+H_{2a}^{\sigma}R_{i\sigma lm}+H_{2i}^{\sigma}R_{a\sigma lm}=0$$

donne

$$H_{2i}^{1}=0\,, \quad H_{ai}^{k}=\delta_i^k H_{2a}^{2}\,.$$

Il vient donc

$$H_{1i}^{2}=0\,, \quad H_{a\sigma}^{\sigma}=(n+1)H_{1a}^{1}=0$$

et, par suite,

$$H_{ab}^{q}=0 \quad (q=3, \cdots, n), \quad H_{2a}^{\sigma}=0 \quad (\sigma=1, \cdots, n).$$

Nous avons donc

$$H_{122}=H_{1\sigma}H_{22}^{\sigma}=0$$

$$=H_{2\sigma}H_{12}^{\sigma}=H_{22}H_{12}^{2}\,, \quad \text{d'où} \quad H_{22}=0\,,$$

$$H_{112}=H_{2\sigma}H^{\sigma}_{11}=H_{21}H^{1}_{11}$$
$$=H_{1\sigma}H^{\sigma}_{12}=H_{12}H^{2}_{12}\,, \quad \text{d'où} \quad H_{12}=0\,,$$
$$H_{12a}=H_{1\sigma}H^{\sigma}_{2a}=0$$
$$=H_{a\sigma}H^{\sigma}_{12}=H_{a2}H^{2}_{12}\,, \quad \text{d'où} \quad H_{a2}=0$$
$$H_{12i}=H_{1\sigma}H^{\sigma}_{2i}=H_{12}H^{2}_{2i}=0$$
$$=H_{i\sigma}H^{\sigma}_{12}=H_{i2}H^{2}_{12}\,, \quad \text{d'où} \quad H_{i2}=0$$

Il résulte ainsi $H=0$ contrairement à l'hypothèse.

3. Supposons maintenant que

$$4H^{2}_{11}(H^{2}_{22}-2H^{1}_{21})=(H^{1}_{11}-2H^{2}_{12})\neq 0\,.$$

Dans ce cas si l'on pose

$$\sigma=\tfrac{1}{2}H^{1}_{11}-H^{2}_{12}$$

il vient d'apres (1. 1)

$$H^{2}_{11}=-\frac{\sigma}{\rho}\,, \quad H^{2}_{22}-2H^{1}_{21}=-\sigma\rho\,.$$

Portons les dans $H^{\sigma}_{2\sigma}=0$, $H^{\sigma}_{1\sigma}=0$. Il vient

$$H^{2}_{22}=-\frac{h_1+1}{n+1}\sigma\rho\,, \quad H^{1}_{21}=\frac{n-h_1}{2(n+1)}\sigma\rho\,,$$

$$H^{1}_{11}=\frac{n-h_1}{n+1}\sigma\,, \quad H^{2}_{12}=-\frac{n+h_1+2}{2(n+1)}\sigma\,.$$

Nous pouvons faire

$$H^{2}_{1a}=0\,, \quad H^{1}_{2i}=0\,, \quad H^{1}_{1i}=H^{2}_{2i}\,.$$

Les systèmes des équations

$$H_{221}=H_{12}H^{2}_{22}\,, \quad H_{122}=H_{21}H^{1}_{12}+H_{22}H^{2}_{12}\,,$$
$$H_{112}=H_{21}H^{1}_{11}+H_{22}H^{2}_{11}\,, \quad H_{121}=H_{11}H^{1}_{12}+H_{12}H^{2}_{12}$$

donnent maintenant

$$H_{22}=\rho H_{12}\,, \quad H_{12}=\rho H_{11}\,.$$

De la même manière que n° précédent, nous pouvons déduire

$$H^{q}_{ab}=\delta_a{}^{q}H^{1}_{b1}+\delta_b{}^{q}H^{1}_{a1}\,, \quad H^{1}_{2a}=0\,,$$
$$H^{k}_{ij}=\delta_i{}^{k}H^{1}_{1j}+\delta_j{}^{k}H^{1}_{1i}\,, \quad H^{2}_{1i}=0\,.$$

Des équations

$$H_{ai}^{\sigma}R_{f\sigma lm}+H_{fa}^{\sigma}R_{i\sigma lm}+H_{fi}^{\sigma}R_{a\sigma lm}=0 \quad (f=1,\ 2)$$

il suit

$$\rho(H_{ai}^{\sigma}-\delta_a^{\sigma}H_{1i}^{1}-\delta_i^{\sigma}H_{1a}^{1})R_{1\sigma lm}-(H_{ai}^{\sigma}-\delta_i^{\sigma}H_{22}^{2})R_{2\sigma lm}=0$$

ce qui nous donne

$$H_{ai}^{b}=\delta_b^{a}H_{1i}^{1}, \quad H_{1a}^{1}=H_{2a}^{2}.$$

Donc, grace à $H_{i\sigma}^{\sigma}=0$, il vient

$$H_{ai}^{b}=0, \quad H_{ij}^{q}=0.$$

Puisque

$$H_{22a}=H_{a2}H_{22}^{2}, \quad H_{2a2}=H_{22}H_{2a}^{2}+H_{2a}H_{21}^{1},$$

$$H_{12a}=H_{a1}H_{12}^{1}+H_{a2}H_{12}^{2}, \quad H_{1a2}=H_{21}H_{1a}^{1}+\tfrac{1}{2}H_{2a}H_{11}^{1},$$

$$H_{22i}=H_{i2}H_{22}^{2}, \quad H_{2i2}=H_{22}H_{2i}^{2}$$

$$H_{12i}=H_{i1}H_{12}^{1}+H_{i2}H_{12}^{2}, \quad H_{1i2}=H_{21}H_{1i}^{1}$$

il vient

$$H_{2a}=\rho H_{1a}, \quad H_{2i}=\rho H_{1i}.$$

Il résulte ainsi $H=0$ contrairement à l'hypothèse.

4. Supposons enfin que

$$H_{11}^{2}(H_{22}^{2}-2H_{21}^{1})=\tfrac{1}{4}(H_{11}^{1}-2H_{12}^{2})=0.$$

Puisque $\rho\neq 0$, la dernière éqation de (1. 1) donne

$$H_{11}^{2}=0, \quad H_{22}^{2}-2H_{21}^{1}=0.$$

Donc, comme conséquence de $H_{1\sigma}^{\sigma}=0$, $H_{2\sigma}^{\sigma}=0$, il vient

$$H_{11}^{\sigma}=H_{12}^{\sigma}=H_{22}^{\sigma}=0 \quad (\sigma=1,\ \cdots,\ n)$$

et, par suite,

$$H_{1p}^{q}=0, \quad H_{2p}^{q}=0 \quad (p,\ q=3,\ \cdots,\ n).$$

Portons les dans

$$H_{ab}^{\sigma}R_{f\sigma lm}+H_{fa}^{\sigma}R_{b\sigma lm}+H_{fb}^{\sigma}R_{a\sigma lm}=0,$$

$$H_{ij}^{\sigma}R_{f\sigma lm}+H_{fi}^{\sigma}R_{j\sigma lm}+H_{fj}^{\sigma}R_{i\sigma lm}=0,$$

$$H_{ai}^{\sigma}R_{f\sigma lm}+H_{fa}^{\sigma}R_{i\sigma lm}+H_{fi}^{\sigma}R_{a\sigma lm}=0$$

$$(f=1,\ 2\ ;\ a,\ b=3,\ \cdots,\ h_1+2\ ;\ i,\ j=h_1+3,\ \cdots,\ n).$$

Nous avons

$$H^{q}_{ab}=\delta_a^{\ q}H^{1}_{b1}+\delta_b^{\ q}H^{1}_{a1}\,,\quad H^{1}_{ab}=0\,,$$

$$H^{q}_{ij}=\delta_i^{\ q}(H^{1}_{j1}+\rho H^{2}_{j1})+\delta_j^{\ q}(H^{1}_{i1}+\rho H^{2}_{i1}),$$

$$H^{q}_{ai}=\delta_i^{\ q}(H^{1}_{a1}+\rho H^{2}_{1a})+\delta_a^{\ q}H^{1}_{1i}\,,$$

$$H^{1}_{2q}=0\,,\quad H^{1}_{1q}+\rho H^{2}_{1q}=H^{2}_{2q}$$

$$(q=3,\ \cdots,\ n).$$

Donc, moyenant $H^{\sigma}_{q\sigma}=0$ nous pouvons déduire

$$H^{1}_{1a}=-\frac{n-h_1-1}{n+1}\rho H^{2}_{1a}\,,\quad H^{2}_{2a}=\frac{h_1+2}{n+1}\rho H^{2}_{1a}\,,$$

$$H^{1}_{1i}=-\frac{n-h_1}{n+1}\rho H^{2}_{1i}\,,\quad H^{2}_{2i}=\frac{h_1+1}{n+1}\rho H^{2}_{1i}$$

de sorte que nous aurons $H_{\sigma\tau\rho}=0$ $(\sigma,\ \tau,\ \rho=1,\ \cdots,\ n)$ lorsque les H^{2}_{1q} $(q=3,\ \cdots,\ n)$ sont tous nuls.

Si l'un au mions de H^{2}_{1q} $(q=3,\ \cdots,\ n)$, par exemple, H^{2}_{13} n'est pas nul, les équations

$$H_{223}=H_{3\sigma}H^{\sigma}_{22}=0\,,\quad H_{232}=H_{22}H^{2}_{23}=\frac{h_1+2}{n+1}H_{22}\rho H^{2}_{13}\,,$$

$$H_{213}=H_{3\sigma}H^{\sigma}_{21}=0\,,\quad H_{231}=H_{12}H^{2}_{23}=\frac{h_1+2}{n+1}H_{12}\rho H^{2}_{13}$$

donnent

$$H_{22}=0\,,\quad H_{21}=0\,.$$

Nous avons donc

$$H_{233}=H_{32}H^{2}_{32}=\frac{h_1+2}{n+1}H_{23}\rho H^{2}_{13}\,,$$

$$H_{332}=H_{2\sigma}H^{\sigma}_{33}=2H_{23}H^{1}_{31}=-\frac{2(n-h_1-1)}{n+1}H_{23}\rho H^{2}_{13}$$

ceux qui nous donnent

$$H_{23}=0$$

et, par suite

$$H_{2p3}=H_{3\sigma}H^{\sigma}_{2p}=0\ \ (p=3,\ \cdots,\ n)$$

D'autre part nous avons

$$H_{23p}=H_{p2}H^{2}_{23}=\frac{h_1+2}{n+1}H_{2p}\rho H^{2}_{13}\,.$$

Il résulte donc $H_{2\sigma}=0$ $(\sigma=1, \cdots, n)$ et, par suite, $H=0$ contrairement à l'hypothèse.

Nous pouvons ainsi conclure que *si les* $H_{\sigma\tau\rho}$ $(\sigma, \tau, \rho=1, \cdots, n)$ *ne sont pas tous nuls, il ne peut pas arriver que* $e=2$, $h_s=\lambda_i$ $(s=1, 2)$.

Lorsque $e=1$, $\lambda_1=h_1$, en faisant $\rho_1=0$, nous obtenons

$$R_{2\sigma lm}=0 \quad (\sigma=1, \cdots, n).$$

Dans ce cas la forme de Darboux $(\neq 0)$ se reduit à l'un des trois types suivants:

$$H_{\sigma\tau\rho}\omega^\sigma\omega^\tau\omega^\rho=(H_{12}\omega^1+\omega^2)(3H_{\sigma\tau}\omega^\sigma\omega^\tau-(n+2)(H_{12}\omega^1+\omega^2)^2);$$

$$H_{\sigma\tau\rho}\omega^\sigma\omega^\tau\omega^\rho=H_{111}(\omega^1)^3, \quad H_{12}\neq 0;$$

$$H_{\sigma\tau\rho}\omega^\sigma\omega^\tau\omega^\rho=H_{333}(\omega^3)^3, \quad H_{12}=H_{22}=0.$$

5. Nous allons nous occuper ensuite du cas où l'une au mioins des inégalités $h_s<\lambda_s$ est vérifiée. Nous pouvons supposer alors que $h_1<\lambda_1$.

Les équations

$$(5.\ 1) \qquad H_{fg}^i=0 \quad (f, g=1, 2;\ i=3, \cdots, n)$$

sont aussi vérifiées dans ce cas.

Nous pouvons faire $\rho_1=0$. Les coefficients μ_h^j de l'équation

$$R_{2hlm}=\sum_{j=3}^{n}\mu_h^j R_{1jlm}$$

peuvent se mettre sous la forme

$$\begin{array}{cc|cccccc}
h\backslash j & & \overbrace{h_1} & \overbrace{h_1'} & \overbrace{h_1''} & & \overbrace{h_1^{(\tau)}} & \\
h_1 & h_1' & 0\cdots 0 & 1\cdots 0 & 0\cdots 0 & \cdots\cdots & 0\cdots 0 & \cdots\ 0 \\
 & & 0\cdots 0 & 0\cdots 1 & 0\cdots 0 & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\ 0 \\
 & & 0\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\ 0 \\
 & & 0\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\ 0 \\
h_1' & h_1'' & 0\ \cdots & 0\cdots 0 & 1\cdots 0 & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\ 0 \\
 & & 0\ \cdots & \cdots\cdots & 0\cdots 1 & 0\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots\ 0 \\
 & & 0\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\ 0 \\
 & & 0\ \cdots & 0\cdots 0 & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\ 0 \\
h_1^{(\tau)} & & 0\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & 0\cdots 0 & \cdots\ 0 \\
 & & 0\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & 0\cdots 0 & \cdots\ 0 \\
 & & 0\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\ 0 & \rho_2\cdots \\
 & & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots
\end{array}$$

de sorte que l'èquation dont nous venons de mentionner se ramène à

$$
(5.\ 2)\qquad \left\{
\begin{aligned}
& R_{23lm}=0,\ \cdots,\ R_{2\ h_1+2\ lm}=0, \\
& R_{2\ \mu_1+3\ lm}=R_{1\ \mu_1-h_1^{(s-1)}+3\ lm}, \\
& R_{2\ \mu_1+h_1^{(s)}+2\ lm}=R_{1\ \mu_1-h_1^{(s-1)}+h_1^{(s)}+2\ lm} \\
& R_{2\ \lambda_1+3\ lm}=\rho_2 R_{1\ \lambda_1+3\ lm} \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& \begin{cases} R_{2nlm}=\rho_e R_{1nlm}, & \text{si } h_e=\lambda_e \\ R_{2nlm}=\rho_e R_{1nlm}+R_{1\ n-h_e^{(\tau_e)}\ lm}, & \text{si } h_e<\lambda_e \end{cases}
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\begin{pmatrix} \mu_1=h_1+\cdots+h_1^{(s-1)}, & s=1,\ \cdots,\ \tau, \\ \lambda_1=h_1+\cdots+h_1^{(\tau)}, & h_1\geq h_1'\geq\cdots\geq h_1^{(\tau)}\geq 1 \end{pmatrix}
$$

6. L'éqution

$$H_{22}^{\sigma}R_{i\sigma lm}+2H_{2i}^{\sigma}R_{2\sigma lm}=0\quad (i=3,\ \cdots,\ n)$$

s'écrit, grace à (5. 1)

$$H_{22}^{1}R_{i1lm}+(2H_{2i}^{k}-\delta_i^k H_{22}^{2})R_{2klm}=0\quad (k=3,\ \cdots,\ n).$$

Faisons-y $i=\lambda_1+2$. Il vient d'après (5. 2)

$$H_{22}^{1}=0$$

de sorte qu'on a

$$(2H_{2i}^{k}-\delta_i^k H_{22}^{2})R_{2klm}=0$$

ce qui nous montre que

$$H_{2i}^{k}=\tfrac{1}{2}\delta_i^k H_{22}^{2}\quad (i=3,\ \cdots,\ n\ ;\ k=h_1+3,\ \cdots,\ n),$$

en particulier,

$$H_{2\ \lambda_1+2}^{\ \lambda_1+2}=\tfrac{1}{2}H_{22}^{2}.$$

L'équation

$$H_{12}^{\sigma}R_{i\sigma lm}+H_{2i}^{\sigma}R_{1\sigma lm}+H_{1i}^{\sigma}R_{2\sigma lm}=0$$

devient maintenant

$$(H_{2i}^{\sigma}-\delta_i^{\sigma}H_{12}^{1})R_{1\sigma lm}+(H_{1i}^{\sigma}-\delta_i^{\sigma}H_{12}^{2})R_{2\sigma lm}=0$$

Faisons-y $i=\lambda_1+2$, nous obtenons

$$H_{2\ \lambda_1+2}^{\ \lambda_1+2}=H_{12}^{1}=\tfrac{1}{2}H_{22}^{2}.$$

Nous avons donc

$$(H^a_{2i}-\tfrac{1}{2}\delta^a_i H^2_{22})R_{1alm}+(H^a_{1i}-\delta^a_i H^2_{12})R_{2alm}=0$$
$$(a:\ 3\to h_1+2),$$

d'où

$$(6.\ 2)\quad \begin{cases} H^b_{2i}-\tfrac{1}{2}\delta^b_i H^2_{22}+H^{b+h}_{1i}-\delta^{b+h}_i H^2_{12}=0 \quad (b=3,\ \cdots,\ h_1'+2), \\ H^d_{2i}=\tfrac{1}{2}\delta^d_i H^2_{22} \quad (d=h_1'+3,\ \cdots,\ h_1+2), \\ H^u_{1i}=\delta^u_i H^2_{12} \quad (i=3,\ \cdots,\ n\ ;\ u=h_1+h_1'+3,\ \cdots,\ n), \end{cases}$$

en particulier,

$$H_{1\,\lambda_1+2}^{\ \lambda_1+2}=H^2_{12}, \quad \text{si } \tau>1$$

L'équation

$$H^\sigma_{11}R_{i\sigma lm}+2H^\sigma_{1i}R_{1\sigma lm}=0$$

s'écrit

$$(6.\ 3)\qquad H^2_{11}R_{i2lm}+(2H^\sigma_{1i}-\delta^\sigma_i H^1_{11})R_{1\sigma lm}=0$$

Faisons-y $i=\lambda_1+2$. Il vient

$$H_{1\,\lambda_1+2}^{\ \lambda_1+2}=\tfrac{1}{2}H^1_{11}=H^2_{12}, \quad \text{si } \tau>1$$

de sorte qu'on a

$$(6.\ 4)\qquad H^2_{11}R_{i2lm}+\sum_{\sigma=3}^{h_1+h_1'+2}(2H^\sigma_{1i}-\delta^\sigma_i H^1_{11})R_{1\sigma lm}=0, \quad \text{si } \tau>1$$

7. Supposons d'abord que $\tau>2$. Dans ce cas en faisant $i=h_1+h_1'+h_1''+3$ dans (6. 4) nous obtenons

$$H^2_{11}=0$$

et, par suite,

$$H^j_{1i}=\tfrac{1}{2}\delta^j_i H^1_{11}, \quad H^2_{12}=\tfrac{1}{2}H^1_{11},$$
$$H^j_{2i}=\tfrac{1}{2}\delta^j_i H^2_{22}, \quad H^1_{21}=\tfrac{1}{2}H^2_{22}$$
$$(i,\ j=3,\ \cdots,\ n).$$

Portons les dans $H^\sigma_{1\sigma}=0$, $H^\sigma_{2\sigma}=0$. Il vient

$$H^\sigma_{11}=H^\sigma_{12}=H^\sigma_{22}=0 \quad (\sigma=1,\ \cdots,\ n),$$
$$H^i_{1\sigma}=H^i_{2\sigma}=0 \quad (\sigma=1,\ \cdots,\ n\ ;\ i=3,\ \cdots,\ n).$$

L'équation

$$H^\sigma_{ij}R_{2\sigma lm}+H^\sigma_{2i}R_{j\sigma lm}+H^\sigma_{2j}R_{i\sigma lm}=0$$

s'écrit maintenant

(7. 1) $$(H_{ij}^{a}-\delta_{j}^{a}H_{2i}^{2}-\delta_{j}^{a}H_{2j}^{2})R_{2alm}+H_{2i}^{1}R_{j1lm}+H_{2j}^{1}R_{i1lm}=0\,.$$

Faisons-y d'abord $i=j=\lambda_1+2$. Il vient

$$H_{2}{}^{1}{}_{\lambda_1+2}=0\,,\quad H_{\lambda_1+2,\lambda+2}^{\lambda_1+2}=2H_{2}{}^{2}{}_{\lambda_1+2}$$

Faisons ensuite $j=\lambda_1+2$, $i\neq\lambda_1+2$. Il vient cette fois-ci

$$H_{2i}^{1}=0\,,\quad H_{i}{}^{\lambda_1+2}_{\lambda_1+2}=H_{2i}^{2}$$

de sorte que l'équation (7. 1) devient

$$(H_{ij}^{a}-\delta_{j}^{a}H_{2i}^{2}-\delta_{i}^{a}H_{2j}^{2})R_{2alm}=0$$

ce qui nous donne

$$H_{ij}^{k}=\delta_{j}^{k}H_{2i}^{2}+\delta_{i}^{k}H_{2j}^{2}\ \ (i,j=3,\cdots,n\,;\ k=h_1+3,\cdots,n).$$

De même, de l'équation

$$H_{ij}^{a}R_{1alm}+H_{1i}^{a}R_{jalm}+H_{1j}^{a}R_{ialm}=0$$

on déduit

$$H_{\lambda_1+2,\lambda_1+2}^{\lambda_1+2}=2H_{1}{}^{1}{}_{\lambda_1+2}=2H_{2}{}^{2}{}_{\lambda_1+2}\,,$$

$$H_{i}{}^{\lambda_1+2}_{\lambda_1+2}=H_{1i}^{1}=H_{2i}^{2}\ \ (i\neq i_1+2),$$

$$(H_{ij}^{a}-\delta_{i}^{a}H_{j1}^{1}-\delta_{j}^{a}H_{i1}^{1})R_{1alm}+H_{1i}^{2}R_{j2lm}+H_{1j}^{2}R_{i2lm}=0$$

$$(a:\ 3\rightarrow h_1+2)$$

Faisons-y d'abord $i=j=h_1+h_1'+3$, et puis $j=h_1+h_1'+3$, $i\neq h_1+h_1'+3$. Il vient

$$H_{1}{}^{2}{}_{h_1+h_1'+3}=0\,,\quad H_{1i}^{2}=0\,.$$

Nous avons ainsi

$$H_{ij}^{k}=\delta_{j}^{k}H_{1i}^{1}+\delta_{i}^{k}H_{1j}^{1}\ \ (i,j,k=3,\cdots,n)$$

et, par suite,

$$H_{1\sigma}^{\tau}=H_{2\sigma}^{\tau}=0\ \ (\sigma,\tau=1,\cdots,n),$$

$$H_{ij}^{k}=0\ \ (i,j,k=3,\cdots,n)$$

grace à $H_{i\sigma}^{\sigma}=0$.

L'équation

$$H_{ij}^{a}R_{kalm}+H_{jk}^{a}R_{ialm}+H_{ki}^{a}R_{jalm}=0$$

s'écrit maintenant

$$H_{ij}^{1}R_{k1lm}+H_{jk}^{1}R_{i1lm}+H_{ki}^{1}R_{j1lm}$$
$$+H_{ij}^{2}R_{k2lm}+H_{jk}^{2}R_{i2lm}+H_{ki}^{2}R_{j2lm}=0.$$

Faisons-y d'abord $i=j=k=\lambda_1+2$, et puis $j=k=\lambda_1+2$, $i\neq\lambda_1+2$, et enfin $k=\lambda_1+2$; $i, j\neq\lambda_1+2$. Il vient

$$H_{ij}^1=H_{ij}^2=0 \quad (i, j=3, \cdots, n).$$

En somme, nous avons $H_{\sigma\tau\rho}=0$ $(\sigma, \tau, \rho=1, \cdots, n)$.

Même quand $\tau=2$, si $e>1$ en faisant $i=n$ dans (6. 3) nous obtenons $H_{11}^2=0$ de sorte qu'il viennent, par le raisonnement précedent, $H_{\sigma\tau\rho}=0$ $(\sigma, \tau, \rho=1, \cdots, n)$.

8. Lorsque $\tau=1$ $(\lambda_1=h_1+h_1')$, $e>1$ nous avons

$$\begin{aligned}
&R_{23lm}=0, \cdots, R_{2\, h_1+2\, lm}=0\,,\\
&R_{2\, h_1+3\, lm}=R_{13lm}, \cdots, R_{2\lambda_1lm}=R_{1\, h'+2\, lm}\,,\\
&R_{2\,\lambda_1+3\, lm}=\rho_2 R_{1\,\lambda_1+3\, lm}\,,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\,,\\
&H_{22}^1=0,\ H_{12}^1=\tfrac{1}{2}H_{22}^2\,,\\
&H_{2i}^{b*}=\tfrac{1}{2}\delta_i^{b*}H_{22}^2 \quad (i=3, \cdots, n\,;\ b^*=h_1'+3, \cdots, n),\\
&H_{2i}^b-\tfrac{1}{2}\delta_i^b H_{22}^2+H_{1i}^{b+h}-\delta_i^{b+h}H_{12}^2=0 \quad (b=3, \cdots, h_1'+2),\\
&H_{1i}^r=\delta_i^r H_{12}^2 \quad (i=3, \cdots, n\,;\ r=\lambda_1+3, \cdots, n).
\end{aligned}$$

Si $H_{11}^2=0$, nous avons d'après (6. 3), (8. 1)

$$H_{1i}^j=\tfrac{1}{2}H_{11}^1=H_{12}^2, \quad H_{2i}^k=\tfrac{1}{2}\delta_i^j H_{22}^2=H_{21}^1$$
$$(i, j=3, \cdots, n).$$

Il en résulte, comme nous l'avons déjà démontré, que $H_{\sigma\tau\rho}=0$ $(\sigma, \sigma, \rho=1, \cdots, n)$.

Supposons ainsi que $H_{11}^2\neq 0$. L'équation (6. 3) donne alors

$$\begin{aligned}
&H_{1a}^i=\tfrac{1}{2}\delta_a^i H_{11}^1 \quad (a=3, \cdots, h_1+2\,;\ i=3, \cdots, n),\\
&H_1{}^i_{b+h}=\tfrac{1}{2}(\delta_{b+h}^i H_{11}^1+\delta_b^i H_{11}^2) \quad (b=3, \cdots, h_1'+2\,;\ i=3, \cdots, n),\\
&R_{2rlm}=\frac{1}{H_{11}^2}(2H_{12}^2-H_{11}^1)R_{1rlm} \quad (r=\lambda_1+3, \cdots, n).
\end{aligned}$$

Il faut donc que

$$e=2\,,\quad \lambda_2=h_2\,,\quad 2H_{12}^2-H_{11}^1=\rho_2 H_{11}^2\neq 0\,.$$

Nous voyons ainsi que, *si nous laissons à côté le cas ou* $H_{\sigma\tau\rho}=0$ $(\rho, \sigma, \tau=1, \cdots, n)$, *nous n'avons que les deux cas pourvu que* $e>1$: *le cas* $(e=3, \lambda_s=h_s)$ *dont nous avons déjà étudié au second mémoire*, et *le cas où* $(e=2, h_1<\lambda_1, h_2=\lambda_2)$. Le cas dernier pent être regardé comme limite du cas premier lorsque $\rho_2\to\rho_1$.