

Le probleme de Cauchy pour les équations hyperboliques

Par

Sigeru MIZOHATA

(Reçu le 2 Août 1956)

1. Introduction. Dans son cours intitulé «hyperbolic differential equations» ([1]), M. Leray a développé une théorie des équations hyperboliques en se fondant sur la transformation de Laplace. Ce petit article a pour but de montrer que, tant qu'on considère l'équation hyperbolique donnée comme une équation d'évolution (Voir [2]), on peut faire un raisonnement assez simple pour le problème de Cauchy. En effet, M. Leray a trouvé une matrice, et grace à cette matrice, il a étendu l'inégalité d'énergie de Friedrichs et Lewy pour des solutions assez régulières. Nous allons montrer que l'inégalité d'énergie subsiste même dans le cas où des solutions sont distributions mais non pas fonctions. Nous discuterons dans un autre article le problème de Cauchy pour les équations paraboliques en nous appuyant sur presque le même principe.

2. Opérateur. $\tau_q(p)$ ($-\infty < q < +\infty$). Soit f tempérée, alors on définit $\tau_q(p)f \equiv (1 - p_1^2 - \dots - p_n^2)^q f$ comme l'image réciproque de Fourier de $(1 + 4\pi^2 |\xi|^2)^q \varphi_\xi \in (\mathcal{S}')_\xi$, φ_ξ étant la transformée de f . (Voir [1], [3]).

Espace hilbertien D^s ($-\infty < s < +\infty$). $f \in D^s$, si f est tempérée et $\tau_{s/2}(p)f \in L^2$. On le munit du produit scalaire suivant :

$$(f, g) = (\tau_{s/2}(p)f, \tau_{s/2}(p)g) = (\tau_s(p)f, g).$$

Remarquons que, si $s' < s$, alors $D^{s'} \supset D^s$, c'est-à-dire que D^s est contenu dans $D^{s'}$ avec une topologie plus fine.

Par définition, a) les applications : $f \rightarrow p_1^{\nu_1} \dots p_n^{\nu_n} f$ de D^s dans $D^{s-|\nu|}$
b) les applications : $f \rightarrow \tau_q(p)f$ de D^s dans D^{s-2q} , sont des applications continues.

Nous aurons besoin ultérieurement le

LEMME 1. Soit q entier positif quelconque, $f \in (\mathcal{D}'_{L^2})$ et $c(x) \in (\mathcal{L})$.
Alors

$$(2 \cdot 1) \quad \tau_{-q}(\mathfrak{p})c(x)f = c(x)\tau_{-q}(\mathfrak{p})f + \sum_{\substack{|\nu| \leq k, \\ k=1,2,\dots,q}} \mathfrak{p}_1^{\nu_1} \cdots \mathfrak{p}_n^{\nu_n} \tau_{-k}(\mathfrak{p})c'_{\nu,k}(x)\tau_{-q}(\mathfrak{p})f,$$

où $c'_{\nu,k}(x)$ sont des combinaisons linéaires des dérivées de $c(x)$.

LEMME 2. Soit s entier quelconque. $a(x) \in (\mathcal{L})$, $f \in D^s$. Alors, l'application $(a(x), f) \rightarrow a(x)f$ de $(\mathcal{L}) \times D^s$ dans D^s dans D^s est continue.

Démonstration du lemme 1. $(1 - \mathfrak{p}_1^2 - \cdots - \mathfrak{p}_n^2)c(x)f = c(x)(1 - \mathfrak{p}_1^2 - \cdots - \mathfrak{p}_n^2)f - [\sum_{i=1}^n \mathfrak{p}_i^2 c(x)]f - 2 \sum_{i=1}^n [\mathfrak{p}_i c(x)]\mathfrak{p}_i f$. En remplaçant f par $(1 - \mathfrak{p}_1^2 - \cdots - \mathfrak{p}_n^2)^{-1}f$ et en appliquant $\tau_{-1}(\mathfrak{p})$ à gauche,

$$\begin{aligned} c(x)\tau_{-1}(\mathfrak{p})f &= \tau_{-1}(\mathfrak{p})[c(x) - \{\sum_{i=1}^n \mathfrak{p}_i^2 c(x)\} \cdot \tau_{-1}(\mathfrak{p}) \\ &\quad - 2 \sum_{i=1}^n \{\mathfrak{p}_i c(x)\} \cdot \mathfrak{p}_i \tau_{-1}(\mathfrak{p})]f \end{aligned}$$

Par récurrence,

$$c(x)\tau_{-q}(\mathfrak{p})f = \tau_{-q}(\mathfrak{p})[c(x) + \sum_{\substack{|\nu| \leq k, \\ k=1,2,\dots,q}} c'_{\nu,k}(x)\mathfrak{p}_1^{\nu_1} \cdots \mathfrak{p}_n^{\nu_n} \tau_{-k}(\mathfrak{p})]f,$$

où $c'_{\nu,k}(x)$ sont des combinaisons linéaires des dérivées de $c(x)$. Comme $f \in (\mathcal{D}'_{L^2})$, on a, pour tout $\varphi(x) \in \mathcal{D}_{L^2}$, $\langle \tau_{-q}f, \varphi(x) \rangle = \langle f, \tau_{-q}\varphi(x) \rangle$, donc, en considérant deux opérateurs transposés, nous avons (2.1).

Démonstration du lemme 2. Pour $s \geq 0$, ce lemme est évident. Pour $s < 0$, en remarquant que D^{-s} est le dual de D^s , et en appliquant à D^{-s} ce lemme, on a la propriété voulue.

Définition.

Espace D_s ($-\infty < s < +\infty$). $F \equiv (f_1, \dots, f_i, \dots, f_m) \in D_s$, si $f_i \in D^{s-(i-1)}$ ($i=1, \dots, m$). On le munit du produit scalaire suivant :
 $(F, G) = \sum_{i=1}^m (\tau_{s-(i-1)}(\mathfrak{p})f_i, g_i)$.

En introduisant la matrice :

$$E_s(\mathfrak{p}) = \begin{bmatrix} \tau_s(\mathfrak{p}) & & & \\ & \tau_{s-1}(\mathfrak{p}) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \tau_{s-(m-1)}(\mathfrak{p}) \end{bmatrix}$$

on peut écrire

$$(F, G)_{D_s} = (E_s^{1/2}(\mathfrak{p})F, E_s^{1/2}(\mathfrak{p})G) = (E_s(\mathfrak{p})F, G).$$

Espace \tilde{D}_s ($-\infty < s < +\infty$). $F \in \tilde{D}_s$, si $f_i \in D^{s+(i-1)}$ ($i=1, \dots, m$).

On le munit du produit scalaire suivant :

$$(F, G)_{\tilde{D}_s} = \sum_{i=1}^m (\tau_{s+(i-1)}(p) f_i, g_i).$$

Nous signalons que l'espace \tilde{D}_{-s} est l'espace dual de D_s , et que la norme de \tilde{D}_{-s} n'est autre que la norme induite comme espace dual par D_s . En effet, soit $F' \in (D_s)'$ (espace dual de D_s). Alors, par Riesz, il existe un et un seul élément $F \in D_s$ tel que, pour tout $G \in D_s$, $\langle F', G \rangle = (G, F)_{D_s}$ c'est-à-dire $= (G, E_s(p)F)$, donc, $F' = \overline{E_s(p)}F$ ou encore $= E_s(p)\bar{F} \in \tilde{D}_{-s}$. De plus, $\|F'\|_{(D_s)'} = \|F\|_{D_s} = \|\bar{F}\|_{D_s} = \|E_s^{-1}(p)F'\|_{D_s} = \|F'\|_{\tilde{D}_{-s}}$.

3. Etant donnée une équation kowalewsquienne, écrite comme équation d'évolution,

$$(3.1) \quad (d/dt)^m u(t) + \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i(x, t, p) (d/dt)^i u(t) = v(t),$$

où $\alpha_i(x, t, p)$ sont des polynômes en p d'ordre $\leq (m-i)$, dont les coefficients $\alpha_{i,v}(x, t)$ sont des fonctions *continûment différentiables en t à valeurs dans (\mathcal{L})* .

Alors, nous dirons d'après Leray ([1], page 128) que (3.1) est *régulièrement hyperbolique* dans $t_1 \leq t \leq t_2$, en posant

$$(3.2) \quad f(r) = r^m + h_{m-1}(x, t, \xi)r^{m-1} + \dots + h_1(x, t, \xi)r + h_0(x, t, \xi) = 0$$

où $h_i(x, t, p)$ étant les parties homogènes de degré $(m-i)$ des polynômes $\alpha_i(x, t, p)$, si cette équation admet toujours m racines réelles distinctes pour $t \in [t_1, t_2]$, $x \in R^n$, et pour ξ réel $\neq 0$, et de plus, quand $|\xi|=1$, il existe un nombre δ tel que $|r_i - r_j| \geq \delta > 0$ ($i \neq j$; $i, j=1, \dots, m$), pour tout $t \in [t_1, t_2]$, et $x \in R^n$ fixés, r_i étant les m racines de (3.2).

(3.1) est équivalent à

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_0(t) \\ u_1(t) \\ \vdots \\ u_{m-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ -\alpha_0(x, t, p) & \dots & \dots & \dots & -\alpha_{m-1}(x, t, p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0(t) \\ u_1(t) \\ \vdots \\ u_{m-1}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v(t) \end{bmatrix}$$

ou

$$(3.3) \quad (d/dt)U(t) = A(x, t, p)U(t) + V(t).$$

Nous considérerons désormais l'équation sous cette forme, dans l'espace D_s (s , entier quelconque).

Alors, à partir de cette condition d'hyperbolicité, M. Leray a trouvé, pour chaque l entier $> m(m-1)/2$, une matrice $B_l(x, t, p) = (b_{ij}(x, t, p))$ telle que 1) $b_{ij}(x, t, p)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, sont des polynômes en p de degré au plus $2l - (i+j-2)$, avec les coefficients continûment différentiables en t à valeurs dans $(\mathcal{B})_x$, 2) $B_l(x, t, p)$ est hermitienne positive définie : il existe $\sigma > 0$ tel que

$$(3 \cdot 4) \quad B_l(x, t, p) \geq \sigma E_l(p),$$

3) il existe $\gamma_l > 0$ tel que

$$(3 \cdot 5) \quad -\gamma_l E_l(p) < B_l(x, t, p) A(x, t, p) \\ + [B_l(x, t, p) A(x, t, p)]^* < \gamma_l E_l(p).$$

Remarquons que $B_l(x, t, p)$ est continûment différentiable en t à valeurs dans $\mathcal{L}(D_s, \tilde{D}_{s-2l})$, où s est un entier quelconque. (Sauf mention expresse, $\mathcal{L}(E, F)$, E et F deux espaces de Banach, est muni de la norme canonique).

Maintenant, nous prenons un l , de sorte que $B_l(x, t, p)$. Nous voulons en déduire des matrices $B_{l-2q}(x, t, p)$ ($q=1, 2, \dots$) de la manière suivante :

$$(3 \cdot 6) \quad B_{l-2q}(x, t, p) = \tau_{-q}(p) B_l(x, t, p) \tau_{-q}(p).$$

Alors, $B_{l-2q}(x, t, p)$ est aussi hermitienne, et on a

$$(3 \cdot 7) \quad B_{l-2q}(x, t, p) \geq \sigma E_{l-2q}(p).$$

Nous voulons démontrer qu'il existe $\beta_q > 0$ tel que

$$(3 \cdot 8) \quad -\beta_q E_{l-2q}(p) \leq B_{l-2q} A + (B_{l-2q} A)^* \leq \beta_q E_{l-2q}(p).$$

Démonstration. D'après (2.1), posons

$$(3 \cdot 9) \quad \tau_{-q}(p) A(x, t, p) = [A(x, t, p) + A'(x, t, p)] \tau_{-q}(p),$$

où $A'(x, t, p)$ est une matrice qu'on obtient en remplaçant, dans $A(x, t, p)$, les coefficients $c(x)$ par $\sum_{\substack{|\nu| \leq k \\ k=1, 2, \dots, q}} p_1^{\nu_1} \cdots p_n^{\nu_n} \tau_{-k}(p) c'_{\nu, k}(x)$, $c'_{\nu, k}(x)$ étant des combinaisons linéaires des dérivées (en x) de $c(x)$.

Alors, l'opérateur $p_1^{\nu_1} \cdots p_n^{\nu_n} \tau_{-k}(p)$ est une application continue de D^s dans $D^{s+2k-|\nu|}$, et comme $2k-|\nu| \geq 1$, cet opérateur est une application continue de D^s dans D^{s+1} . En vertu du lemme 2, $A'(x, t, p)$ est donc continûment différentiable en t à valeurs dans $\mathcal{L}(D_s, D_s)$ (s , entier). Nous avons donc

$$D_s \xrightarrow{\tau_{-q}(p)} D_{s+2q} \xrightarrow{A'} D_{s+2q} \xrightarrow{B_t} \tilde{D}_{s+2q-2l} \xrightarrow{\tau_{-q}(p)} \tilde{D}_{s+4q-2l}$$

Posons $s=l-2q$, alors l'opérateur composé est continûment différentiable en t à valeurs dans $\mathcal{L}(D_{l-2q}, \tilde{D}_{-q-2q})$. Comme $(A')^*$ (l'opérateur adjoint de A') $\in \mathcal{L}(\tilde{D}_s, \tilde{D}_s)$ (s , un entier quelconque), l'opérateur $(\tau_{-q}B_tA'\tau_{-q})^*$ est aussi continûment différentiable en t à valeurs dans $\mathcal{L}(D_{l-2q}, \tilde{D}_{-q-2q})$.

$\tau_{-q}(p)[B_tA' + (B_tA')^*]\tau_{-q}(p)$, qui est hermitien, est donc majoré et minoré par des constants multiples de $E_{l-2q}(p)$. Compte tenu de (3.5), nous avons (3.8).

Si l'on part de $B_{l+1}(x, t, p)$, alors que nous sommes partis de B_l , on aura des matrices $B_{l-1-2q}(x, t, p)$ ($q=1, 2, \dots$) ayant les propriétés (3.7) et (3.8). Nous avons donc la

PROPOSITION 1. Soit q un entier (quelconque), alors il existe une matrice $B_q(x, t, p)$, $t \in [t_1, t_2]$, positive hermitienne telle que

i) $B_q(x, t, p)$ soit continûment différentiable en t à valeurs dans $\mathcal{L}(D_q, \tilde{D}_{-q})$,

ii) $\sigma'E_q(p) \geq B_q(x, t, p) \geq \sigma E_q(p)$, pour $t \in [t_1, t_2]$, $\sigma, \sigma' > 0$,

iii) $-\gamma_q E_q(p) < B_q A + (B_q A)^* < \gamma_q E_q(p)$, pour $t \in [t_1, t_2]$, $\gamma_q > 0$ étant constante. Ou encore, compte tenu de ii),

iii') $-\gamma'_q B_q(x, t, p) < B_q A + (B_q A)^* < \gamma'_q B_q(x, t, p)$.

4. Inégalité d'énergie. Comme M. Leray l'a montré, la prop. 1 donne une inégalité pour les solutions de (3.3). Soit q un entier. Supposons, dans (3.3), $U(t), U'(t), V(t) \in D_q[t_1, t_2]$, où $D_q[t_1, t_2]$ est l'espace des fonctions continues en t , $t \in [t_1, t_2]$, à valeurs dans D_q , muni de la topologie uniforme en t . Alors, le raisonnement de [1], p. 131, et la prop. 1 nous donnent l'inégalité d'énergie suivante :

$$(4.1) \quad \sqrt{(B_q U, U)}_t \leq \left| \int_{t_0}^t \sqrt{(B_q V, V)}_s \exp \gamma(t-s) ds \right| \\ + \sqrt{(B_q U, U)}_{t_0} \exp \gamma |t-t_0|, \quad \gamma > 0,$$

pour $t_1 \leq t \leq t_2$, t_0 étant une valeur quelconque dans $[t_1, t_2]$.

5. Problème de Cauchy. Considérons l'équation

$$(3.3) \quad (d/dt)U(t) = A(x, t, p)U(t) + V(t),$$

dans l'espace D_q (q , un entier quelconque). Nous supposons que la donnée initiale $U_0 \in D_{q+1}$, et que $V(t) \in D_{q+1}[t_1, t_2]$. Alors, il existe

une suite $V_j(t) \in \mathcal{D}_{L^2}[t_1, t_2]$, tendant vers $V(t)$ pour la topologie de $D_{q+1}[t_1, t_2]$. Voir [1], p. 135. Nous donnons la démonstration.

A) Soit $f \in D^s(-\infty < s < +\infty)$, alors $f_\delta(x) = f^*(2\pi\delta)^{-n/2} \exp(-x^2/2\delta)$, $\delta > 0$, converge vers f lorsque $\delta \rightarrow 0$, pour la topologie de D^s . *Démonstration.* La transformée de Fourier de $f_\delta(x)$ devient $\varphi_\delta(\xi) \equiv \varphi(\xi) \exp(-2\pi^2|\xi|^2\delta)$, où $\varphi(\xi) = \mathcal{F}(f)$. Il suffit de démontrer que

$$(1 + 4\pi^2|\xi|^2)^{s/2} \varphi_\delta(\xi) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} (1 + 4\pi^2|\xi|^2)^{s/2} \varphi(\xi) \in (L^2)_\xi,$$

pour la topologie de L^2 . Or, ceci résulte du fait que, $\psi(\xi)$ étant dans L^2 ,

$$(5.1) \quad \int \cdots \int |1 - \exp(-2\pi^2|\xi|^2\delta)|^2 \cdot |\psi(\xi)|^2 d\xi \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0,$$

ce qui serait évident.

B) Le raisonnement dans A) montre que, soit $f(t) \in D^s[a, b]$, $(-\infty < s < \infty)$, alors $f_j(t) \in \mathcal{D}_{L^2}[a, b]$, $f_j(t) \stackrel{*}{\underset{(\infty)}{}} (2\pi\delta_j)^{-n/2} \exp(-x^2/2\delta_j)$, $\delta_j \rightarrow 0$ converge vers $f(t)$ pour la topologie de $D^s[a, b]$. En effet, dans (5.1), si $\psi(\xi, t)$ est continue en t à valeurs dans $(L^2)_\xi$, alors la convergence aura lieu uniformément en t .

Considérons la suite $U_j(t)$, ($j=1, 2, \dots$), où $U_j(t)$ est la solution de l'équation

$(d/dt)U_j(t) = A(x, t, p)U_j(t) + V_j(t)$, avec la condition initiale $U_j(t_0) = U_{0,j}$, où $V_j(t)$ et $U_{0,j}$ sont des suites convergeant vers $V(t)$ et U_0 pour la topologie de $D_{q+1}[t_1, t_2]$ et de D_{q+1} respectivement. Or, $U_j(t)$ est une suite de Cauchy pour la topologie de $D_{q+1}[t_1, t_2]$. En effet, $U_i(t) - U_j(t)$ est la solution avec la condition initiale $U_{0,i} - U_{0,j}$ et avec le second membre $F(t) = V_i(t) - V_j(t)$. Donc, l'inégalité (4.1) montre que $U_j(t) \rightarrow U^{(\infty)}(t)$ pour la topologie de $D_{q+1}[t_1, t_2]$.

$$\text{Or,} \quad U_j(t) = U_{0,j} + \int_{t_0}^t [A(x, t, p)U_j(t) + V_j(t)] dt$$

montre que, comme la convergence $A(x, t, p)U_j(t) \rightarrow A(x, t, p)U^{(\infty)}(t)$ a lieu pour la topologie de $D_q[t_1, t_2]$, (car, $A(x, t, p)$ est continue en t à valeurs dans $\mathcal{L}(D_{q+1}, D_q)$), $U^{(\infty)}(t)$ est donc une solution de (3.3), continûment différentiable pour la topologie de D_q , avec la condition initiale: $U(t_0) = U_0$. Comme l'unicité de la solution résulte de (4.1), nous avons donc la

PROPOSITION 2. *Etant donnés dans (3.3) la condition initiale $U_0 \in D_{q+1}$, pour $t=t_0$, $t_1 \leq t_0 \leq t_2$, et le second membre $V(t) \in D_{q+1}[t_1, t_2]$, où q est un entier (positif, 0, négatif), il existe alors une et une seule solution $U(t)$ telle que*

- i) elle soit continûment différentiable pour la topologie de D_q ,
- ii) $U(t) \in D_{q+1}[t_1, t_2]$, $U(t_0) = U_0$, $t_1 \leq t_0 \leq t_2$.

Revenons à l'équation (3.1), et considérons les solutions dans l'espace D^q (q , entier quelconque), alors la prop. 2 se traduit de la manière suivante.

PROPOSITION 3. *Etant donnés la condition initiale pour $t=t_0$, $t_0 \in [t_1, t_2]$, et le second membre $v(t) : (u_0, u_1, \dots, u_{m-1}) \in (D^{q+m}, D^{q+(m-1)}, \dots, D^{q+1})$, et $v(t) \in D^{q+1}[t_1, t_2]$, alors il existe une et une seule solution $u(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, telle que*

- i) elle est m fois continûment différentiable pour la topologie de D^q ,
- ii) $(d/dt)^i u(t) \in D^{q+(m-i)}[t_1, t_2]$,
 $(d/dt)^i u(t_0) = u_i$, ($i=0, 1, \dots, m-1$).

6. Extension à des espaces des distributions tempérées. Nous allons montrer qu'une extension de nos résultats (les prop. 2, 3) à des espaces des distributions tempérées est immédiate.

LEMMA 3. *Soit k un entier positif. Alors*

$$(6.1) \quad \frac{1}{(1+r^2)^k} A(x, t, p) = [A(x, t, p) + R_1(x, t, p)] \frac{1}{(1+r^2)^k}$$

où $R_1(x, t, p) = (r_{ij}(x, t, p))$, $r_{ij}(x, t, p) = 0$ pour $i \neq m$,
 $r_{mj}(x, t, p) =$ un polynôme en p de degré $\leq (m-j)$, avec des coefficients continûment différentiables en t à valeurs dans $(\mathcal{L})_x$.

Démonstration. Pour $|\lambda| > 0$, on aura la formule suivante qui est facile à vérifier.

$$\frac{1}{(1+r^2)^k} p_1^{\lambda_1} \dots p_n^{\lambda_n} f = p_1^{\lambda_1} \dots p_n^{\lambda_n} \frac{1}{(1+r^2)^k} f + \sum_{|\mu| \geq 1} c_{\lambda, \mu}(x) p_1^{\lambda_1 - \mu_1} \dots p_n^{\lambda_n - \mu_n} \frac{1}{(1+r^2)^k} f,$$

où $c_{\lambda, \mu}(x) \in (\mathcal{L})$.

c. q. f. d.

Considérons l'équation

$$(3.3) \quad (d/dt)U(t) = A(x, t, p)U(t) + V(t).$$

Appliquons $1/(1+r^2)^k$ ($k > 0$ entier) à gauche, alors, en vertu du lemme précédent,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{1}{(1+r^2)^k} U(t) &= [A(x, t, p) + R_1(x, t, p)] \frac{1}{(1+r^2)^k} U(t) \\ &+ \frac{1}{(1+r^2)^k} V(t). \end{aligned}$$

Le lemme 3 montre que $A + R_1$ est également régulièrement hyperbolique, car l'opérateur R_1 n'influence pas la condition d'hyperbolicité. On peut donc appliquer à cet opérateur les prop. 2, 3. Nous nous bornons à énoncer la proposition suivante, q étant un entier (positif, négatif ou zéro).

PROPOSITION 4. *Etant donnés U_0 et $V(t)$ tels que $\frac{1}{(1+r^2)^k} U_0 \in D_{q+1}$, $\frac{1}{(1+r^2)^k} V(t) \in D_{q+1}[t_1, t_2]$, alors il existe une et une seule solution $U(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, de l'équation (3.3) telle que*

- i) $\frac{1}{(1+r^2)^k} U(t) \in D_{q+1}[t_1, t_2]$, $U(t_0) = U_0$; $t_1 \leq t_0 \leq t_2$,
- ii) $\frac{1}{(1+r^2)^k} U(t)$ est continûment différentiable en t pour la topologie de D_q .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. Leray, Hyperbolic differential equations (cours de Princeton) 1954.
- [2] L. Schwartz, Les équations d'évolution liées au produit de compositions, Ann. Inst. Fourier. 1950.
- [3] L. Schwartz, Théorie des distributions, Paris, Hermann, 1950-51.