Memoirs of the College of Science, University of Kyoto, Series A
Vol. XXXI, Mathematics No. 2, 1958.

Unicité dans le problème de Cauchy pour quelques équations différentielles elliptiques

Par

Sigeru Mizohata

(Reçu le 17 mai, 1958)

---

1. Introduction. Il est bien connu que, pour les systèmes kowalewskiens à coefficients analytiques, les solutions (continuement différentiables jusqu'à certain ordre convenable) pour le problème de Cauchy sont uniques (Holmgren)· Depuis, plusueurs articles ont donné des extentions de ce théorème au cas des coefficients non analytiques. Dans le cas elliptique, en s'inspirant des travaux de MM. Müller et Heinz ([5], [4]), M. Aronszajn a obtenu un résultat tout-à-fait satisfaisant pour les équations d'ordre 2 ([1]). Voir aussi le travail de M. Cordes ([3]). Or M. Nirenberg a établi quelques résultats remarquables pour une classe d'équations (non nécessairement elliptiques) dont le terme de plus haut degré est un opérateur à coefficients constants ([6]). Ce petit article a justement pour origine de départ cet article-là. On va envisager l'unicité pour les équations elliptiques dont le terme de plus haut degré est un opérateur à coefficients constants. Après avoir rédigé cet article, j'ai pu lire un article de M. A. P. Calderón, qui vient d'être publié ([8]). Ce beau mémoire étend d'une manière satisfaisante le résultat de Carleman. Alors, dans les cas où l'équation caractéristique a toujours des racines distinctes, il n'y a rien à désirer, (il a prouvé le théorème dans le cas de coefficiens variables !), mais sa méthode, nous semble-t-il, n'est pas applicable aux cas où l'équation a des racines multiples, nous pensons donc que cet article mérite d'être publié. Soit $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ un opérateur différentiel elliptique à coefficients constants d'ordre homogène $2m$ défini dans un espace $R^{n+1}(n\geqslant 1)$. Nous supposons que *les coefficients sont réels*. Pour notre but, prenons un des x_1

comme une variable t, et considérons le problème de Cauchy pour l'avenir avec les données initiales sur $t=0$. Nous supposons que le coefficient de $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{2m}$ est égal à 1. Alors,

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{2m}+\sum_{i=0}^{2m-1}a_i\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^i, \tag{1, 1}$$

$a_i\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ sont des polynomes

de dérivation homogènes de degré $(2m-i)$.
La condition d'ellipticité devient alors ceci :
L'équation caractéristique en

$$\lambda^{2m}+\sum a_i(\xi)\lambda^i=0 \tag{1, 2}$$

a toujours $2m$ racines *non réelles*, lorsque ξ (réel) parcourt la sphère $|\xi|=1$. Comme les coefficients des $a_i(\xi)$ sont réels, ces $2m$ racines sont deux à deux conjuguées en chaque point ξ sur la sphére $|\xi|=1$. En désignant désormais le point $\xi/|\xi|$ par ξ^0, on vérifie facilement ceci : on peut tracer sur la sphère, un ensemble fermé N de mesure superficielle nulle tel que dans le complémentaire de N on peut définir, dans chaque ouvert connexe (sur la sphère), $2m$ fonctions $\mu_i(\xi^0)+i\kappa_i(\xi^0)$ $(i=1,\cdots,m)$ $\kappa_i(\xi^0)>0$, formées des racines de l'équation (1, 2) continues en ξ^0. Notons que

$$\min_{|\xi^0|=1}\kappa_i(\xi^0)=k>0\,. \tag{1, 3}$$

Notre résultat est ceci :
Proposition 1. *Soit P un opérateur elliptique à coefficients constants d'ordre homogène $2m$; soit $u(x,t)$ une solution de l'équation elliptique de la forme*

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)+\sum_{|\nu|\leq m}a_\nu(x,t)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\nu_0}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\nu_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\nu_n}\cdot u=0\,.^{*)} \tag{1, 4}$$

$u(x,t)$ est définie pour $x\in R^n$, $0\leq t\leq t_0$ (t_0 étant quelconque) ; on suppose que les $\left(\frac{d}{dt}\right)^i u(x,t)$ $(i=0,1,\cdots,2m+1)$ sont des fonctions

---

*) Je ne pouvais pas démontrer le théorème de l'unicité pour l'opérateur elliptique avec des termes quelconques d'ordre $\leq 2m$-1 sans aucune condition sur des racines de l'équation caractéristique.

continuement différentiables en t avec leurs dérivéss spatiales $\left(\frac{d}{dt}\right)^i\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\nu_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\nu_2}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\nu_n}u(x, t)$ $\nu_1+\cdots\nu_n\leqq m-i$ *à valeurs dans* $L^2(R^n)$; *les* $a_\nu(x, t)$ *sont mesurables bornées* ; *la donnée initiale est zéro, c'est-à-dire que* $u(x, 0)=\frac{d}{dt}u(x, 0)=\cdots=\left(\frac{d}{dt}\right)^{2m-1}u(x, 0)=0$. *Alors* $u(x, t)\equiv 0$ *pour* $t<\varepsilon$ *pour* ε *assez petit.*

Proposition 2. *Dans la même hypothèse que la Proposition* 1, *supposons en outre que la condition suivante sur P soit remplie*: *il existe une constante* δ *et un nombre* $r(\leq m)$ *tels que pour chaque points* ξ^0, *il existe r racines de* (1, 2), $\mu i_p(\xi^0)+i\kappa i_p(\xi^0)$ $(p=1, \cdots, r)$, *pour lesquelles on a*

$\kappa i_p(\xi^0)-\kappa i_{p-1}(\xi^0)>\delta$ $(p=2, \cdots, r)$, δ *étant indépendente de* ξ^0.[1]

Alors la proposition est vraie pour l'équation de la forme,

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)+\sum_{|\nu|\leq m+r-1}a_\nu(x, t)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\nu_0}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\nu_n}\cdot u=0. \tag{1, 5}$$

2. Démonstration des propositions. Commençons par un *Lemme. Soit Soit* $u(t)$ $(-\infty<t<\infty)$ *une fonction à carré sommable avec sa dérivée* (*à valeurs complexes*), *on a alors deux sortes de minorations de l'intégrale*: $\mathrm{I}=\int\left|\left(\frac{d}{dt}+\alpha+i\beta\right)u(t)\right|^2dt$, α, β, *sont des constantes réelles.*

$$\mathrm{I}\geqslant\alpha^2\int|u(t)|^2dt, \tag{2, 1}$$

$$\mathrm{I}\geqslant\frac{1}{2}\left(\int\left|\frac{d}{dt}u(t)\right|^2dt+\alpha^2\int|u(t)|^2dt\right)-\beta^2\int|u(t)|^2dt. \tag{2, 2}$$

Si on suppose de plus que $u(t)$ *soit à support compact,*

$$\mathrm{I}\geqslant\frac{2}{(\text{longeur du support de } u)^2}\int|u(t)|^2dt. \tag{2, 3}$$

Vérification. La transformation de Fourier, ou bien le calcul direct donne (2, 1). L'inégalité $|a+b|^2\geqslant\frac{1}{2}|a|^2-|b|^2$ donne (2, 2). En posant $v(t)=\exp(-i\beta t)u(t)$, on a $\exp(-i\beta t)\left(\frac{d}{dt}+\alpha+i\beta\right)\cdot u(t)=\left(\frac{d}{dt}+\alpha\right)v(t)$. D'où

[1] Notons qu'il n'est pas exigé de faire ce choix $\kappa_{i_p}(\xi^0)$ uniformément sur la sphère entière.

$$\mathrm{I}=\int\left|\left(\frac{d}{dt}+\alpha\right)v(t)\right|^2dt=\int\left|\frac{d}{dt}v\right|^2+\alpha^2\int|v|^2dt\geqslant\int\left|\frac{d}{dt}v\right|^2dt$$
$$\geqslant\frac{2}{(\text{longeur du support de } u)^2}\int|v|^2dt\,,$$

compte tenu de $|v|=|u|$, on a (2, 3). c.q.f.d.

Démonstration de la Prop. 1. L'idée géneratrice est due à Nirenberg. Notons la transformée de $u(x, t)$ en x (pour t fixé) par $\hat{u}(\xi, t)$:
$u(x, t)\xrightarrow[\mathscr{F}]{}\hat{u}(\xi, t)$. Nous pouvons supposer que $\hat{u}(\xi, t)$ ($\xi\in R_\xi^n$, $t\in[0, t_0]$) est m fois continuement différentiable et t sur presque toutes les parallèlles à l'axe des t, et de plus que les dérivées $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^i\hat{u}(\xi, t)$ ($i=1, \cdots, m$) prises au sens habituel représentent $\left(\frac{d}{dt}\right)^i\hat{u}(\xi, t)$ respectivement. En effect, $\hat{u}(\xi, t)$ est une fonction $(m+1)$-fois continuement différentiable en t à valeurs dans $L^2(R^n)$, ceci entraîne que la distribution définie par $\hat{u}(\xi, t)$, de la maniére évidente, est une fonction (localement sommable) avec ses dérivées jusqu'à l'ordre $(m+1)$. Or, le Théorème V (p. 58) de la traité [7], montre que $\hat{u}(\xi, t)$, compte tenu de ce que les $\hat{u}(\xi, t)$ et $\frac{d}{dt}\hat{u}(\xi, t)$ sont des fonction continues en t à valeurs dans $L^2(R^n)$, après éventuelle modifications sur un ensemble de longeur nulle sur presque toutes les parallèles est absolument continue et $\frac{d}{dt}\hat{u}(\xi, t)$ est représentée par $\left[\frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(\xi, t)\right]$, où $[\hat{u}(\xi, t)]$ est une fonction modifiée de $\hat{u}(\xi, t)$. En répétant ce procédé, on voit la propriété demandée.

Si on suppose de plus que $\left(\frac{d}{dt}\right)^i u(x, t)$ ($i=0, 1, \cdots, m$) s'annulent (au sens de L^2) en $t=t_0$, alors $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^i\hat{u}(\xi, t)$ ($i=0, \cdots, m$) s'annulent en $t=t_0$. Ceci fait, considérons l'intégrale

$$(2,\ 4)\qquad \iint_{x\in R^n,\, t\in[0, t_0]}\left|P\left(\frac{\partial}{\partial t}+\beta, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(x, t)\right|^2dxdt\,,$$

β étant une constant >1 quelconque ; par transformation de Fourier en x, elle

$$= \iint\limits_{\xi\in R^n_\xi,\, 0\leq t\leq t_0} \left|P\left(\frac{\partial}{\partial t}+\beta, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(x, t)\right|^2 dxdt$$

$$= \iint\limits_{\substack{\xi\in R^n_\xi \\ 0\leq t\leq t_0}} \left| \prod_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\beta-2\pi i|\xi|\Big(\mu_i(\xi^0)+i\kappa_i(\xi^0)\Big)\right.\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{\partial}{\partial t}+\beta-2\pi i|\xi|\Big(\mu_i(\xi^0)-i\kappa_i(\xi^0)\Big)\hat{u}(\xi, t)\right|^2 d\xi dt\,.$$

Maintenant, ξ étant fixé, faisons une minoration de l'intégrale :

$$\mathrm{J}=\int_0^{t_0}\left|\left(\frac{\partial}{\partial t}+\beta+2\pi|\xi|\kappa_i(\xi^0)-2\pi i|\xi|\mu_i(\xi^0)\right)v(\xi, t)\right|^2 dt$$

où $v(\xi, t)$ est une fonction continuement différentiable en t *s'annulant en* $t=0,\ t_0$.

D'abord, d'après le lemme

$$\mathrm{J}\geqslant\{\beta+2\pi|\xi|\kappa_i(\xi^0)\}^2\int_0^{t_0}|v(\xi, t)|^2dt \quad \text{(application de (2, 1))},$$

compte tenu de (1, 3),

$$\mathrm{J}\geqslant\frac{1}{2}\cdot\{\beta^2+4\pi^2|\xi|^2k^2\}\int_0^{t_0}|v(\xi,t)|^2dt\,.$$

D'autre part d-après (2, 2),

$$\mathrm{J}\geqslant\frac{1}{2}\int_0^{t_0}\left|\frac{\partial}{\partial t}v(\xi, t)\right|^2dt+\frac{1}{2}\{\beta+2\pi|\xi|\kappa_i(\xi^0)\}^2\int|v(\xi, t)|^2dt$$

$$-4\pi^2|\xi|^2\mu_i^2(\xi^0)\int|v(\xi, t)|^2dt\,,$$

à fortiori

$$\mathrm{J}\geqslant\frac{1}{2}\int_0^{t_0}\left|\frac{\partial}{\partial t}v(\xi, t)\right|^2dt-4\pi^2|\xi|^2\cdot\max_{\xi^0}|\mu_i(\xi^0)|^2\cdot\int_0^{t_0}|v(\xi\ ,t)|^2dt\,.$$

Ces deux inégalités donnent, en multipliant $(1-\lambda)$ à la première, et λ à la deuxième, $(1>\lambda>0)$, en désignant $\max\limits_{1\leq i\leq m}\cdot\max\limits_{\xi^0}|\mu_i(\xi^0)|$ simplement par $|\mu|_{\max}$,

$$\mathrm{J}\geqslant\frac{\lambda}{2}\int_0^{t_0}\left|\frac{\partial}{\partial t}v(\xi, t)\right|^2dt+\left\{\frac{1-\lambda}{2}(\beta^2+4\pi^2|\xi|^2k^2)-\right.$$

$$\left.\lambda\cdot4\pi^2|\xi|^2|\mu|^2_{\max}\right\}\int_0^{t_0}|v(\xi, t)|^2dt\,.$$

Si on choisit λ de manière que $\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)k^2-\lambda\cdot|\mu|^2_{\max}\geqslant\frac{1}{2}k^2$

c'est-à-dire que $\frac{1-\lambda}{2}-\lambda\left(\frac{|\mu|_{\max}}{k}\right)^2\geqslant\frac{1}{2}$,

on a $J\geqslant\frac{\lambda}{2}\int_0^{t_0}\left|\frac{\partial}{\partial t}v(\xi,t)\right|^2dt+\left[\frac{1-\lambda}{2}\beta^2+\frac{k^2}{2}4\pi^2|\xi|^2\right]\int_0^{t_0}|v(\xi,t)|^2dt$.

Résumons ce résultat: . *il existe une constante* $c>0$, *qui ne dépend que de P, c'est-à-dire qui ne dépend ni de* $\beta>1$, *ni de* $v(\xi,t)$ *telle qu'on ait*

$$(2,5)\quad \int_0^{t_0}\left|\left(\frac{\partial}{\partial t}+\beta+2\pi|\xi|\kappa_i(\xi^0)-2\pi i|\xi|\mu_i(\xi^0)\right)v(\xi,t)\right|^2dt$$
$$\geqslant c\left(\int_0^{t_0}\left|\frac{\partial}{\partial t}v(\xi,t)\right|^2dt+(\beta^2+4\pi^2|\xi|^2)\int_0^{t_0}|v(\xi,t)|^2dt\right),$$
$$(i=1,2,\cdots,m).$$

Deuxièment, d'après (2, 3),

$$(2,6)\quad \int_0^{t_0}\left|\frac{\partial}{\partial t}+\beta-2\pi|\xi|\kappa_i(\xi^0)-2\pi i|\xi|\mu_i(\xi^0)\right|^2|v(\xi,t)|^2dt$$
$$\geqslant\frac{2}{t_0^2}\int_0^{t_0}|v(\xi,t)|^2dt.$$

En se servant de ces deux minorations chaque m fois, on a une minoration de (2, 4):

$$(2,4)\geqslant c^m\left(\frac{2}{t_0}\right)^2\iint\sum_p\binom{m}{p}(\beta^2+4\pi^2|\xi|^2)^p\left|\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{m-p}\hat{u}(\xi,t)\right|^2d\xi dt.$$

D'où, par Plancherel,

(2, 7):
$$(2,4)\geqslant\left(\frac{2c}{t_0}\right)^m c(m,n)\sum_{|\nu|\leq m}\iint\left|\left(\frac{\partial}{\partial t}+\beta\right)^{\nu_0}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\nu_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\nu_n}u(x,t)\right|^2dxdt,$$

où $c(m,n)$ est une constante qui ne dépend que de m et n (on peut la préciser).

Cette minoration (2, 7) suffit de démontrer la proposition 1. (Voir [6], p. 96-97). Reproduisons ce raisonnement.

Soit $u(x,t)$ une solution satisfaisant à l'hypothèse de la Prop. 1; soit $M\geqslant\sup_{\substack{x\in R^n\\0\leq t\leq t_0}}|a_\nu(x,t)|\,(|\nu|\leq m)$, alors en fixant $\tau_0(<t_0)$ de manière que

$$(2, 8) \qquad \left(\frac{2c}{\tau_0}\right)^m c(m, n) \geqslant 2M,$$

prenons une fonction $\alpha(t)$ indéfiniment différentiable égale à 1 pour $0 \leq t \leq \frac{2}{3}\tau_0$, à 0 pour $t \geqslant \tau_0$, multiplions $\alpha(t)$ à l'équation, (1, 4) alors on aura

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)\alpha(t)u(x, t) + \sum a_\nu(x, t)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\nu_0} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\nu_n} \alpha(t)u(x,t) + \varphi(x,t) = 0,$$

où $\varphi(x,t)$ *a son support dans la bande* $\frac{2}{3}\tau_0 \leq t \leq \tau_0$. Multiplions ensuite $e^{-\beta t}$, $\beta > 1$, alors on aura

$$(2, 9) \qquad P\left(\frac{\partial}{\partial t} + \beta, \frac{\partial}{\partial x}\right)e^{-\beta t}\alpha u$$
$$+ \sum a_\nu\left(\frac{\partial}{\partial t} + \beta\right)^{\nu_0}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\nu_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\nu_n} e^{-\beta t}\alpha u + e^{-\beta t}\varphi = 0:$$

en posant $e^{-\beta t}\alpha(t)u(x, t) = v(x, t)$, envisageons l'intégrale: $\iint \left|P\left(\frac{\partial}{\partial t} + \beta, \frac{\partial}{\partial x}\right)v(x, t)\right|^2 dxdt$, elle se majore par

$$M \sum_{|\nu| \leq m} \iint \left|\left(\frac{\partial}{\partial t} + \beta\right)^{\nu_0} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\nu_n} v(x, t)\right|^2 dxdt + \iint e^{-2\beta t} |\varphi(x, t)|^2 dt.$$

D'autre part, en vertu de la minoration (2, 7), elle se minore par le deuxième member de (2, 7), en remplaçant, bien entendu, $u(x, t)$ par $v(x, t)$, et par la condition (2, 8), on aura finalement

$$M \iint \left|\left(\frac{\partial}{\partial t} + \beta\right)^{\nu_0} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\nu_n} v\right|^2 dxdt \leq \iint e^{-2\beta t} |\varphi|^2 dxdt,$$

à fortiori $M \iint |v(x, t)|^2 dxdt \leq \iint e^{-2\beta t} |\varphi(x, t)|^2 dxdt$, à fortiori $M \iint_{0 \leq t \leq \frac{1}{3}\tau_0} |v(x, t)|^2 dxdt \leq \iint e^{-\beta t} |\varphi(x, t)|^2 dxdt$, à fortiori

$e^{-\frac{2}{3}\beta\tau_0} \cdot M \iint_{0 \leq t \leq \frac{1}{3}\tau_0} |u(x, t)|^2 dxdt \leq e^{-\frac{4}{3}\beta\tau_0} \iint |\varphi(x, t)|^2 dxdt$ (le support de $\varphi(x, t)$ est dans la bande $\frac{2}{3}\tau_0 \leq t \leq \tau_0$).

En faisant β tendre vers $+\infty$, on a

$$\iint_{0 \leq t \leq \frac{1}{3}\tau_0} |u(x, t)|^2 dxdt = 0.$$

c.q.f.d.

Démonstration de la proposition 2. Dans la démonstration au-dessus, on a appliqué m fois la minoration (2, 6). Mais, dans l'hypothèse de cette proposition, cette minoration s'améliore. En effet fixons ξ, alors il existe r racines $\mu_{i_p}(\xi^0)+i\kappa_{i_p}(\xi^0)$; en désignant $\sup_{\xi^0}(\max_i \kappa_{i_p}(\xi^0)=\mathrm{K}$, nous partageons en deux cas suivant $\beta(>1)$:

1° $\beta\leqslant 2\mathrm{K}|\xi|$. Soit $|\xi|\kappa_{i_q}(\xi^0)$ est le point de distance minimum de β (en comparant parmi les points $|\xi|\kappa_{i_1},\cdots,|\xi|\kappa_{i_r}$). On a donc $|\beta-|\xi|\kappa_{i_p}(\xi^0)|\geqslant\frac{\delta}{2}|\xi|\,(p\neq q)$. Comme $|\xi|\geqslant\frac{1}{2\mathrm{K}}\beta$, on a $|\beta-|\xi|\kappa_{i_p}(\xi^0)|\geqslant\frac{\delta}{4}\left(|\xi|+\frac{1}{2\mathrm{K}}\beta\right)$, $(p\neq q)$.

2° $\beta>2\mathrm{K}|\xi|$. En ce cas,

$$|\beta-|\xi|\kappa_{i_p}(\xi^0)|\geqslant\beta-\mathrm{K}|\xi|+\delta|\xi|\geqslant\frac{\beta}{2}+\delta|\xi|,\quad p=1,2,\cdots,r-1\,.$$

En tout cas, quel soit $\beta>1$, on a une minoration :

$$|\beta-|\xi|\kappa_{i_p}(\xi^0)|\geqslant c(|\xi|+\beta),\tag{2, 10}$$

$$(p=1,2,\cdots,r\ \textit{sauf un indice}),\quad c=\min\left(\frac{\delta}{4},\frac{1}{2},\frac{\delta}{8\mathrm{K}}\right).$$

On voit immédiatement que cette minoration est indépendante des ξ. Cette minoration nous suffira pour démontrer la proposition.

c.q.f.d.

Université de Kyoto

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. Aronszajn, Aunique continuation theorem for solutions of elliptic partial differential equations or inequalities of second order, Technical Report, University of Kansas (1956).

[2] T. Carleman, Sur un problème d'unicité pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes, Ark. Mat. Astr. Fys., Vol. 26B, 1939, p. 1-9.

[3] H. Cordes, Über die eindeutige Bestimmtheit der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen durch Anfangsvorgaben, Nach. Akad. Wiss. Göttingen, (1956), p. 239-258.

[4] E. Heinz, Über die Eindeutigkeit beim Cauchyschen Anfangswertproblem einer elliptischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, Nach. Akad. Wiss. Göttingen, No. 1, 1955, p. 1-12.

[5] C. Müller, On the behavior of the solutions of the differential equations $\Delta u=F(x, u)$ in the neighbourhood of a point, Comm. Pure Appl. Math., Vol. 7, 1954, p. 504-515.

[6] L. Nirenberg, Uniqueness in Cauchy problem for differential equations with constant leading coefficients, Comm. Pure Appl. Math., Vol. 10, 1957, p. 85-105.

[7] L. Schwartz, Théorie des distributions, tome 1, 1950, Paris Hermann.

[8] A. P. Calderón, Uniqueness in the Cauchy problem for partial differential equations, Amer. Journal, Vol. 53, 1958, p. 16-36.