MEMOIRS OF THE COLLEGE OF SCIENCE, UNIVERSITY OF KYOTO, SERIES A
Vol. XXXII, Mathematics No. 1, 1959.

Sur le faisceau canonique d'une variété différentiable

Par

Jôyô Kanitani

(Reçu le 31 Janvier, 1959)

---

1. Au moyen du groupe d'holonomie de la connexion projective majorante que nous avons établi pour la variété différentiable dans un mémoire précédent [1] nous exposerons, dans cet article, une interprétation géométrique d'une quantité qui s'exprime, rapporteé aux coordonneés locales, par la même expression que le faisceau canonique d'une surface dans un espace projectif ([2] p. 9.1).

Nous commençons par résumer des résultats du mémoire précedent en faisant un changement légère des définitions. Soit M une variété différentiable à n dimensions qui est un espace de Hausdorff et qui possède une base dénombrable. Envisageons, dans M, un champ de tenseur symmétrique et positif définit qui s'exprime par

$$a_{ij}(u^1(x), \cdots, u^n(x))du^i \otimes du^j \qquad (x \in U_m)$$

rapporté au système des coordonnées locales u^i $(i=1, \cdots, n)$ dans le voisinage U_m du point $m \in M$. Nous l'appellerons le champ de tenseur fondamental. Posons

$$H_{ij} = \frac{a_{ij}}{\kappa} \qquad (\kappa = \sqrt[n]{|a_{ij}|}.$$

Lorsque $x \in U_m \bigcap U'_{m'}$ $(m, m' \in M)$, nous avons

$$H'_{ij} = \nu\nu Q^s_i Q^t_j H_{st} \qquad (i, j = 1, \cdots, n\,;\ s, t:\ 1 \to n)\,,$$

où

$$(1.\,1) \qquad Q^i_j = \frac{\partial u^i}{\partial u'^j}\,,\ P^j_i = \frac{\partial u'^j}{\partial u^i}\,,\ \nu = \sqrt[n]{\varepsilon |P^j_i|}$$

ε étant le signe du déterminant $|P^j_i|$.

Définissons P_α^β $(\alpha, \beta=0, 1, \cdots, n+1)$ par

$$(1.2)\quad \begin{cases} P_0^0=1,\ P_0^K=0\ (K=1, \cdots, n+1), \\ P_A^{n+1}=0\ (A=0, \cdots, n),\ P_{n+1}^{n+1}=\nu\nu, \\ P_i^0=-(\log\nu)_i=-\dfrac{\partial\log\nu}{\partial u^i},\ P_{n+1}^j=P_a^jP_b^0H^{ab}, \\ P_{n+1}^0=\dfrac{1}{2}P_a^0P_b^0H^{ab}\ (i, j=1, \cdots, n;\ a, b:\ 1\rightarrow n) \end{cases}$$

et Q_β^α par

$$P_\alpha^\gamma Q_\gamma^\beta=P_\gamma^\beta Q_\alpha^\gamma=\delta_\alpha^\beta \qquad (\gamma:\ 0\rightarrow n+1),$$

à savoir,

$$Q_0^0=1,\ Q_0^K=0,\ Q_A^{n+1}=0,\ Q_{n+1}^{n+1}=\frac{1}{\nu\nu},$$

$$Q_i^0=\frac{\partial\log\nu}{\partial u'^i},\ Q_{n+1}^j=Q_a^jQ_b^0H'^{ab}=\frac{1}{\nu\nu}(\log\nu)_bH^{bj},$$

$$Q_{n+1}^t=\frac{1}{2}Q_a^0Q_b^0H'^{ab}=\frac{1}{\nu\nu}P_{n+1}^0.$$

Concernant les étendues des indices nous ferons, d'ores et déjà, la convention suivante :

$$\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu, \sigma, \tau, \rho=0, 1, \cdots, n+1,$$
$$a, b, c, h, i, j, k, l, m, r, s, t=1, \cdots, n,$$
$$A, B, C, D=0, \cdots, n,$$
$$H, I, J, K, L, M=1, \cdots, n+1.$$

Considérons, dans un espace projectif $\boldsymbol{S}_{n+1}$ à $n+1$ dimensions, une homographique régulière

$$(p_\beta^\alpha):\ \rho\xi'^\alpha=p_\beta^\alpha\xi^\beta \qquad (\alpha=0, 1, \cdots, n+1;\ \beta:\ 0\rightarrow n+1).$$

laissant invariant un point O et un hyperplan o qui y passe. Nous avons pour cett transformation

$$(1.4)\quad \begin{aligned} &p_0^K=0\ (K=1, \cdots, n+1),\ p_A^{n+1}=0\ (A=0, 1, \cdots, n), \\ &p_0^0\,|p_j^i|\,p_{n+1}^{n+1}\neq 0, \end{aligned}$$

en prenant O comme point $(1, 0, \cdots, 0)$ et o comme hyperplan $(0, \cdots, 0, 1)$. Nous ferons $p_0^0=1$. L'ensemble de telles homographiques forme un groupe que nous désignerons par $\mathfrak{P}$.

Définisons q^β_α par $p^\alpha_\gamma q^\gamma_\beta = p^\gamma_\beta q^\alpha_\gamma = \delta^\alpha_\beta$, à savoir,

$$(1.5)\quad \begin{cases} q^0_0 = 1,\ q^K_0 = 0,\ q^{n+1}_A = 0,\ q^{n+1}_{n+1} = \dfrac{1}{p^{n+1}_{n+1}}, \\ q^0_i = -p^0_s q^s_i,\ q^k_{n+1} = -q^{n+1}_{n+1} p^s_{n+1} q^k_s \ (s:\ 1\to n), \\ p^s_i q^j_s = p^j_s q^s_i = \delta^j_i,\ p^0_{n+1} + q^0_s p^s_{n+1} + q^0_{n+1} p^{n+1}_{n+1} = 0 . \end{cases}$$

D'après (1.1), (1.2) nous avons une homographique (P^β_α) appartenant à $\mathfrak{P}$ et, par suite, une application

$$U_m \cap U_{m'} \to \mathfrak{P} .$$

Soit $B(M, \mathfrak{P})$ un espace fibré principal construit au moyen de cette application ([3] p. 14). Nous pouvons prendre u^i $(i=1, \cdots, n)$, p^A_K $(A=1, \cdots, n;\ K=1, \cdots, n+1)$, p^{n+1}_{n+1} comme coordonneés locales du point $b\in B$. Désignons par $T(b)$ l'espace de vecteurs tangents à b, et par $T^*(b)$ celui de covecteurs tagents. Les du^i, dp^K_A, dp^{n+1}_{n+1} se font un système de base de $T^*(b)$. Posons

$$\kappa^\beta_\alpha = dp^\beta_\alpha + \varphi^\beta_\alpha ,$$

où φ^β_α $(\alpha, \beta = 0, 1, \cdots, n+1)$ sont des combinaisons linéaires de du', en paticulier,

$$(1.6)\quad \begin{cases} \varphi^i_0 = w^i_s p^s_0,\ w^i_0 = du^i,\ \varphi^{n+1}_0 = 0 , \\ \varphi^{n+1}_i = w^{n+1}_s p^s_i,\ w^{n+1}_i = H_{ij} du^j . \end{cases}$$

Nous avons alors

$$\kappa^\alpha_0 = \varphi^\alpha_0, \quad \kappa^{n+1}_i = \varphi^{n+1}_i ,$$

et les κ^i_0, κ^A_K, κ^{n+1}_{n+1} deviennent un système de base de $T^*(b)$. Pour que les κ^β_α se transforment, lorsqu'on effectue la translation à droite R_c: $p'^\beta_\alpha = p^\beta_\gamma c^\gamma_\alpha$ $(c^\beta_\alpha \in \mathfrak{P})$, d'après

$$dR^*_c(\kappa'^\beta_\alpha)_{b'} = (\kappa^\beta_\alpha)_b c^\gamma_\alpha = R_c(\kappa^\beta_\alpha)_b$$

et, par suite, que les $\tilde{\kappa}^\beta_\alpha = \kappa^\beta_\sigma q^\sigma_\alpha$ deviennent des invariants à droite, il faut et il suffit que les $w^\beta_\alpha = \varphi^\beta_\gamma q^\gamma_\alpha$ ne dépendent que de u^i.

Les φ^β_α étant pris ainsi, les τ^μ_λ $(\lambda, \mu = 0, 1, \cdots, n+1)$ définis par

$$\tau^\mu_\lambda = q^\mu_\beta\left(\tilde{\kappa}^\beta_\alpha - \frac{1}{n}\delta^\beta_\alpha \tilde{\kappa}^i_i\right)p^\alpha_\lambda$$

satiasfont à l'équation

$$dR_c^*(\tau_\lambda'^\mu) = adj(c^{-1})\tau_\lambda^\mu . \tag{1.7}$$

En écrivant w_β^α à nouveau à la place de $w_\alpha^\beta - \frac{1}{n} w_i^i$ de sorte qu'on ait pour w_α^β nouveaux

$$w_i^i = 0 , \tag{1.8}$$

nous pouvons écrire

$$\tau_\lambda^\mu = q_\beta^\mu dp_\lambda^\beta + q_\beta^\mu w_\alpha^\beta p_\lambda^\alpha - \delta_\lambda^\mu d \log \pi \qquad (\pi = \sqrt[n]{\varepsilon |p_i^j|}). \tag{1.9}$$

La condition pour que les τ_λ^μ sont déterminées indépendamment du choix des coordonnées locales u^i, s'écrit

$$w_\alpha'^\beta = P_\tau^\beta (w_\sigma^\tau Q_\alpha^\sigma + dQ_\alpha^\tau) + \delta_\alpha^\beta d \log \nu . \tag{1.10}$$

Nous démontrerons plus tard qu'il existe un systéme de w_α^β satisfaiant à cette condition. En particulier, nous avons grâce à (1. 1), (1. 2), (1. 3)

$$w_0'^0 = w_0^0, \quad w_{n+1}'^{n+1} = w_{n+1}^{n+1} .$$

Nous pouvons donc faire

$$w_0^0 = 0, \quad w_{n+1}^{n+1} = 0 .$$

Nous avons alors

$$\tau_0^0 = q_s^0 w_0^s - d \log \pi, \ \tau_0^i = q_s^i w_0^s = q_s^i du^s, \ \tau_0^{n+1} = 0$$

et τ_0^i, $\tau_K^A - \delta_K^A \tau_0^0$, $\tau_{n+1}^{n+1} - \tau_0^0$ se font un systéme de base de $T^*(b)$.

Si l'on pose

$$w_\alpha^\beta = \Gamma_{\alpha j}^\beta du^j$$

il vient

$$\Gamma_{0j}^\beta = \delta_j^\beta, \quad \Gamma_{ij}^{n+1} = H_{ij}, \quad \Gamma_{n+1 j}^{n+1} = 0, \quad \Gamma_{sj}^s = 0 \tag{1.11}$$

2. Soit

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial p_K^A}, \frac{\partial}{\partial p_{n+1}^{n+1}} \right)$$

la base de $T(b)$, qui est duale à $(du^i, dp_K^A, dp_{n+1}^{n+1})$ de sorts qu'on a

$$(2.1)\quad \begin{cases} \left\langle \dfrac{\partial}{\partial u^i}\, du^i \right\rangle = \delta^j_i, & \left\langle \dfrac{\partial}{\partial u^i}\, dp^\mu_\lambda \right\rangle = 0, \\ \left\langle \dfrac{\partial}{\partial p^A_K}\, du^j \right\rangle = 0, & \left\langle \dfrac{\partial}{\partial p^A_K}\, dp^\mu_\lambda \right\rangle = \delta^\mu_A \delta^K_\lambda, \\ \left\langle \dfrac{\partial}{\partial p^\alpha_{n+1}}\, du^j \right\rangle = 0, & \left\langle \dfrac{\partial}{\partial p^\alpha_{n+1}}\, dp^\mu_\lambda \right\rangle = \delta^\mu_\alpha \delta^{n+1}_\lambda. \end{cases}$$

Posons

$$\frac{\partial}{\partial p^\beta_0} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial p^{n+1}_i} = 0\,.$$

Il vient alors

$$(2.2)\quad \begin{cases} \left\langle \dfrac{\partial}{\partial p^\beta_\alpha}\, du^j \right\rangle = 0, & \left\langle \dfrac{\partial}{\partial p^\beta_\alpha}\, dp^A_K \right\rangle = \delta^A_\beta \delta^\alpha_K, \\ \left\langle \dfrac{\partial}{\partial p^\beta_\alpha}\, dp^\mu_{n+1} \right\rangle = \delta^\mu_\beta \delta^\alpha_{n+1}. \end{cases}$$

Lorsqu'on effectue la translation à gauche L_c: $p'^\beta_\alpha = c^\beta_\gamma p^\gamma_\alpha$, il vient

$$dL_c\left(\frac{\partial}{\partial p^\beta_\alpha}\right)_b = c^\gamma_\beta\left(\frac{\partial}{\partial p'^\gamma_\alpha}\right)_{b'}.$$

Donc les $\Lambda^\beta_\alpha = p^\gamma_\alpha \dfrac{\partial}{\partial p^\gamma_\beta}$ sont des invariants à gauche et nous avons

$$(2.3)\quad \frac{\partial}{\partial p^\lambda_\beta} = q^\alpha_\lambda \Lambda^\beta_\alpha, \quad (\Lambda^\beta_\alpha)_e = \left(\frac{\partial}{\partial p^\alpha_\beta}\right)_e.$$

Nous voyons ainsi que les Λ^K_A, Λ^{n+1}_{n+1} forment un systéme de base de Lie-algèbre de $\mathfrak{P}$, si l'on regarde p^β_α comme coordonnées d'un point de l'espace de $\mathfrak{P}$, tandis qu'ils forment un système de base du champ de vecteur fondamental de B ([5] p. 20), si l'on regarde p^β_α comme coordonnées d'un point du fibre sur un point de M.

Nous avons

$$\langle \Lambda^A_K\ \tau^\mu_\lambda - \delta^\mu_\lambda \tau^0_0 \rangle = \delta^\mu_A \delta^K_\lambda, \quad \langle \Lambda^{n+1}_{n+1}\ \tau^\mu_\lambda - \delta^\mu_\lambda \tau^0_0 \rangle = \delta^\mu_{n+1} \delta^{n+1}_\lambda.$$

Posons

$$(2.4)\quad \begin{aligned} \tilde{\Lambda}_i &= \frac{\partial}{\partial u^i} - p^\tau_\sigma \Gamma^\rho_{\tau i} \frac{\partial}{\partial p^\rho_\sigma} + q^{n+1}_{n+1} H_{is} p^s_t p^C_{n+1} \frac{\partial}{\partial p^C_t} + q^0_i p^\tau_\sigma \frac{\partial}{\partial p^\tau_\sigma}, \\ \Lambda_i &= p^s_i \tilde{\Lambda}_s \\ &= p^a_i\left(\frac{\partial}{\partial u^a} - p^\tau_\sigma \Gamma^\rho_{\tau a} \frac{\partial}{\partial p^\rho_\sigma} + q^{n+1}_{n+1} H_{as} p^s_t p^C_{n+1} \frac{\partial}{\partial p^C_t}\right) - p^0_i p^\tau_\sigma \frac{\partial}{\partial p^\tau_\sigma}. \end{aligned}$$

Il vient, grâce à (1. 11), (2. 1), (2. 2)

$$\langle \Lambda_i\ \tau_0^0\rangle = 0\,, \quad \langle \Lambda_i\ \tau_0^j\rangle = \delta_i^j\,,$$
$$\langle \Lambda_i\ \tau_j^A\rangle = 0\,, \quad \langle \Lambda_i\ \tau_{n+1}^\alpha\rangle = 0\,.$$

Donc, Λ_i est déterminé indépendamment du choix des coordonnées locales u^i, et $(\Lambda_i, \Lambda_K^A, \Lambda_{n+1}^{n+1})$ devient le système de base qui est dual à $(\tau_0^i, \tau_K^A - \delta_K^A\tau_0^0, \tau_{n+1}^{n+1} - \tau_0^0)$.

Le vecteur tangent de la forme $a^s\Lambda_s$ (a_i : nombre réel) sera dit horizontal.

D'après (1. 9) nous avons

$$d\tau_\lambda^\mu + \tau_\alpha^\mu \wedge \tau_\lambda^\alpha = q_\beta^\mu\ (dw_\rho^\beta + w_\alpha^\beta \wedge w_\rho^\alpha)p_\lambda^\rho$$

de sorte que, si nous posons

$$dw_\alpha^\beta + w_\sigma^\beta \wedge w_\alpha^\sigma = \frac{1}{2}\,R_{\alpha ij}^\beta du^i \wedge du^j\,,$$

c'est-à-dire,

$$R_{\alpha ij}^\beta = \frac{\partial \Gamma_{\alpha j}^\beta}{\partial u^i} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha j}^\beta}{\partial u^j} + \Gamma_{\gamma i}^\beta \Gamma_{\alpha j}^\gamma - \Gamma_{\gamma j}^\beta \Gamma_{\alpha i}^\gamma\,, \tag{2. 5}$$

il vient

$$d\tau_\lambda^\mu + \tau_\lambda^\mu \wedge \tau_\lambda^\alpha = \frac{1}{2}\,\Omega_{\lambda ij}^\mu \tau_0^i \wedge \tau_0^j\,,$$

$$(dR_{\alpha ij}^\beta + w_\gamma^\beta R_{\alpha ij}^\gamma - w_\alpha^\gamma R_{\gamma ij}^\beta) \wedge du^i \wedge du^j = 0\,, \tag{2. 6}$$

où

$$\Omega_{\lambda ij}^\mu = q_\beta^\mu p_\lambda^\alpha p_i^a p_j^b R_{\alpha ab}^\beta\,.$$

Moyennat (2. 1), (2. 2) on tire

$$[\Lambda_j, \Lambda_i] = \Lambda_j\Lambda_i - \Lambda_i\Lambda_j = \Omega_{\lambda ij}^\mu \Lambda_\mu^\lambda\,. \tag{2. 7}$$

3. Désignons par Π_{ij}^k le symbole de Christoffel relatif la forme quandrique $H_{ij}du^idu^j$. Lorsque $x \in U_m \wedge U'_{m'}$, il vient

$$\Pi'^k_{ij} = P_s^k \Pi_{ab}^s Q_i^a Q_j^b + P_s^k \frac{\partial Q_i^s}{\partial u'^j}$$
$$+ \delta_j^k \frac{\partial \log \nu}{\partial u'^i} + \delta_i^k \frac{\partial \log \nu}{\partial u'^j} - H'_{ij} \frac{\partial \log \nu}{\partial u'^b} H'^{bk}\,.$$

D'autre part, on a d'après (1. 10)

$$\Gamma'^k_{ij} = P^k_s \Gamma^s_{ab} Q^a_i Q^b_j + P^k_s \frac{\partial Q^s_i}{\partial u'^j}$$
$$+ \delta^k_j \frac{\partial \log \nu}{\partial u'^i} + \delta^k_i \frac{\partial \log \nu}{\partial u'^j} - H'_{ij} \frac{\partial \log \nu}{\partial u'^b} H'^{bk}.$$

Donc,

$$\frac{1}{2} K^k_{ij} = \Pi^k_{ij} - \Gamma^k_{ij}$$

est un tenseur du type (1, 2.). D'ailleurs, comme conséquence de $\Pi^i_{ij} = \Gamma^i_{ij} = 0$, on a

$$K^i_{ij} = 0. \tag{3.1}$$

Nous démontrerons plus tard qu'il existe un champ de tenseur symmétrique covariant du troisième ordre tel que

$$a^{ij} b_{ijl} = 0 \qquad (l = 1, \cdots, n\,;\ i, j:\ 1 \to n\,;\ (a^{ij}) = (a_{ij})^{-1}),$$

le champ du tenseur lui-même étant donné par

$$b_{ijl}(x) du^i \otimes du^j \otimes du^l \qquad (x \in U_m)$$

se rapportant aux coordonnées locales u^i dans le voisinage U_m du point $m \in M$. Il est clair que cette équation est indépendante du choix des coordonnées locales.

Posons

$$K^k_{ij} = a^{ks} b_{ijs}.$$

Ii vient alors

$$H_{lk} K^k_{ij} = K_{ijl} = \frac{b_{ijl}}{\kappa}, \tag{3.2}$$

$$\Gamma^k_{ij} = \Pi^k_{ij} - \frac{1}{2} K^k_{ij}. \tag{3.3}$$

Désignons par ; la différentiation absolue où la forme quadrique $H_{ij} du^i du^j$ est prise comme forme fondamentale. Il vient

$$K'^s_{ij;s} = Q^a_i Q^b_j \,(K^s_{ab;s} + n K^s_{ab} (\log \nu)_s),$$
$$((\log \kappa)_i)' = Q^s_i ((\log \kappa)_s - 2(\log \nu)_s),$$
$$((\log \kappa)_{i;j} - \frac{1}{2} (\log \kappa)_i (\log \kappa)_j + \frac{1}{4} H_{ij} (\log \kappa)_a (\log \kappa)_b H^{ab})'$$
$$= Q^s_i Q^t_j \Big\{ (\log \kappa)_{s;t} - \frac{1}{2} (\log \kappa)_s (\log \kappa)_t + \frac{1}{4} H_{st} (\log \kappa)_a (\log \kappa)_b H^{ab}$$
$$- 2(\log \nu)_{s;t} + 2(\log \nu)_s (\log \nu)_t - H_{st} (\log \nu)_a (\log \nu)_b H^{ab} \Big\}.$$

D'autre part, on a d'après (1. 10)

$$\Gamma'^{0}_{ij} = Q^s_i Q^t_j \Big\{ \Gamma^0_{st} + \frac{1}{2} (\log \nu)_a K^a_{st} + (\log \nu)_{s;t} - (\log \nu)_s (\log \nu)_t + \frac{1}{2} H_{st} (\log \nu)_a (\log \nu)_b H^{ab} \Big\}$$

$$H'_{ik} \Gamma'^{k}_{n+1j} = Q^s_i Q^t_j \Big\{ H_{sa} \Gamma^a_{n+1t} - \frac{1}{2} (\log \nu)_a K^a_{st} + (\log \nu)_{s;t} - (\log \nu)_s (\log \nu)_t + \frac{1}{2} H_{st} (\log \nu)_a (\log \nu)_b H^{ab} \Big\} .$$

Donc,

$$r_{ij} = \Gamma^0_{ij} - \frac{1}{2n} K^s_{ij;s} + \frac{1}{2} (\log \kappa)_{i;j} - \frac{1}{4} (\log \kappa)_i (\log \kappa)_j + \frac{1}{8} H_{ij} (\log \kappa)_a (\log \kappa)_b H^{ab} ,$$

$$s_{ij} = H_{ik} \Gamma^k_{n+1j} + \frac{1}{2n} K^s_{ij;s} + \frac{1}{2} (\log \kappa)_{i;j} - \frac{1}{4} (\log \kappa)_i (\log \kappa)_j + \frac{1}{8} H_{ij} (\log \kappa)_a (\log \kappa)_b H^{ab}$$

sont des tenseurs du type (0, 2).

Faisons $r_{ij} = s_{ij}$. Il vient alors

$$\text{(3. 4)} \quad \begin{cases} \Gamma^0_{ij} - H_{ik} \Gamma^k_{n+1j} = \dfrac{1}{n} K^s_{ij;s} , \\ \Gamma^0_{ij} + H_{ik} \Gamma^k_{n+1j} = 2 r_{ij} - (\log \kappa)_{i;j} + \dfrac{1}{2} (\log \kappa)_i (\log \kappa)_j \\ \qquad\qquad - \dfrac{1}{4} H_{ij} (\log \kappa)_a (\log \kappa)_b H^{ab} . \end{cases}$$

Nous avons enfin d'après (1. 10), (3. 3)

$$\Gamma'^{0}_{n+1j} = \frac{1}{\nu\nu} Q^t_j \Big(\Gamma^0_{n+1t} + \frac{1}{n} (\log \nu)_a K^{as}_{t;s} + \frac{1}{2} (\log \nu)_a (\log \nu)_b K^{ab}_t \Big)$$

de sorte que

$$\text{(3. 5)} \quad t_j = \frac{1}{\kappa} \Big(\Gamma^0_{n+1j} + \frac{1}{2n} (\log \kappa)_a K^{as}_{j;s} + \frac{1}{8} (\log \kappa)_a (\log \kappa)_b K^a_{jb} \Big)$$

est un vecteur covariant.

4. Désignons par $\left\{ {k \atop ij} \right\}$ le symbol de Christoffel relatif la forme quadrigue $a_{ij} du^i du^j$: on a

$$\Pi_{ij}^{k} = \begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix} - \frac{1}{2}\,\delta_j^k(\log\kappa)_i - \frac{1}{2}\,\delta_i^k(\log\kappa)_j + \frac{1}{2}\,H_{ij}(\log\kappa)_s H^{sk}\,.$$

Posons

$$T_{h\cdot ij}^{\,k} = \frac{\partial\Pi_{hj}^{k}}{\partial u^i} - \frac{\partial\Pi_{hi}^{k}}{\partial u^j} + \Pi_{si}^{k}\Pi_{hj}^{s} - \Pi_{sj}^{k}\Pi_{hi}^{s}\,,$$

$$\begin{Bmatrix} k \\ h\cdot ij \end{Bmatrix} = \frac{\partial\begin{Bmatrix} k \\ hj \end{Bmatrix}}{\partial u^i} - \frac{\partial\begin{Bmatrix} k \\ hi \end{Bmatrix}}{\partial u^j} + \begin{Bmatrix} k \\ si \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} s \\ hj \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} k \\ sj \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} s \\ hi \end{Bmatrix},$$

$$T_{hmij} = H_{mk}T_{h\cdot ij}^{\,k}, \qquad T_{\cdot\cdot ij}^{lk} = H^{lh}T_{h\cdot ij}^{\,k}\,,$$

$$\{hmij\} = a_{mk}\begin{Bmatrix} k \\ h\cdot ij \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} lk \\ \cdot\cdot ij \end{Bmatrix} = a^{lh}\begin{Bmatrix} k \\ h\cdot ij \end{Bmatrix}.$$

Il vient

(4. 1)
$$T_{l\cdot is}^{\,s} = \begin{Bmatrix} s \\ l\cdot is \end{Bmatrix} - \frac{1}{2}\,H_{li}(\log\kappa)_{a;b}H^{ab} - \frac{n-2}{2}\,(\log\kappa)_{l;i}$$
$$-\frac{1}{2}\,(\log\kappa)_l(\log\kappa)_i + \frac{1}{2}\,H_{li}(\log\kappa)_a(\log\kappa)_b H^{ab}\,,$$

$$\frac{1}{n-1}\,T_{\cdot\cdot ts}^{st} = \frac{\kappa}{n-1}\begin{Bmatrix} st \\ \cdot\cdot st \end{Bmatrix} - (\log\kappa)_{a;b}H^{ab} - \frac{n-2}{4}\,(\log\kappa)_a(\log\kappa)_b H^{ab}\,.$$

En supposant d'abord que $n > 2$, posons

$$\Pi_{ij} = \frac{1}{n-2}\left(T_{i\cdot js}^{\,s} - \frac{1}{2(n-1)}\,H_{ij}T_{\cdot\cdot st}^{st}\right)$$
$$= \frac{1}{n-2}\left(\begin{Bmatrix} s \\ i\cdot js \end{Bmatrix} - \frac{a_{ij}}{2(n-1)}\,T_{\cdot\cdot st}^{st}\right)$$
$$-\frac{1}{2}\,(\log\kappa)_{i;j} + \frac{1}{4}\,(\log\kappa)_i(\log\kappa)_j - \frac{1}{8}\,H_{ij}(\log\kappa)_a(\log\kappa)_b H^{ab},$$

$$\Theta_{ij} = \frac{1}{n-2}\left(K_{it}^{s}K_{js}^{t} - \frac{1}{2(n-1)}\,H_{ij}K^{rst}K_{rst}\right):$$

on a

$$\Pi = H^{ij}\Pi_{ij} = \frac{1}{2(n-1)}\,T_{\cdot\cdot st}^{st}\,, \qquad \Theta = H^{ij}\Theta_{ij} = \frac{1}{2(n-1)}\,K^{rst}K_{rst}\,.$$

Faisons

(4. 2)$_n$
$$r_{ij} = \frac{1}{n-2}\left(\begin{Bmatrix} s \\ i\cdot js \end{Bmatrix} - \frac{a_{ij}}{2(n-1)}\begin{Bmatrix} st \\ \cdot\cdot st \end{Bmatrix}\right) + \frac{1}{4}\,\Theta_{ij}\,.$$

Il vient

(4. 3)$_n$
$$\Gamma_{ij}^{0} + H_{ik}\Gamma_{n+1\,j}^{k} = 2\Pi_{ij} + \frac{1}{2}\,\Theta_{ij}\,,$$

(4. 4)$_n$
$$H^{ij}\Gamma_{ij}^{0} + \Gamma_{n+1\,s}^{s} = 2\Pi + \frac{1}{2}\,\Theta\,.$$

Lorsque $n=2$, posons

$$\Pi=\frac{1}{2}T^{st}_{\cdot\cdot st}\,,\qquad \Theta=\frac{1}{2}K^{rst}K_{rst}\,,$$

et faison

$$r_{ij}=\frac{1}{4}a_{ij}\begin{Bmatrix} st \\ \cdot\cdot st\end{Bmatrix}+\frac{q}{8}H_{ij}\Theta\,, \tag{4. 2$_2$}$$

où q est un nombre réel différent de 1.

On a alors

$$H^{ij}\Gamma^0_{ij}+\Gamma^s_{n+1s}=2\Pi+\frac{q}{2}\Theta\,. \tag{4. 4$_2$}$$

Désignons maintenant par / la différentiation absolue où la forme quadrique $a_{ij}du^i du^j$ est prise comme forme fondamentale. Il vient

$$\begin{aligned} K^s_{ij;s}&=b^s_{ij/s}-\frac{n}{2}(\log\kappa)_a K^a_{ij}\,, \\ K^{st}_{i;s;t}&=\kappa a^{ab}a^{st}b_{ias/b/t}-(n-1)(\log\kappa)_a K^{as}_{i;s} \\ &\quad-\frac{n(n-2)}{4}(\log\kappa)_a(\log\kappa)_b K^{ab}_i-\frac{n}{2}(\log\kappa)_{a;b}K^{ab}_i\,. \end{aligned} \tag{4. 5}$$

Nous avons donc, grâce à (3. 4)

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{n+i}&=\kappa\left(t_i-\frac{1}{2(n-1)}a^{ab}a^{st}\left(\frac{1}{n}b_{ias/b/t}-b_{ias}r_{bt}\right)\right) \\ &\quad+\frac{1}{2n(n-1)}K^{st}_{i;s;t}-\frac{1}{4(n-1)}K^{ab}_i(\Gamma^0_{ab}+H_{ak}\Gamma^k_{n+1b}) \end{aligned}$$

même quand $n=2$. Si l'on fait

$$t_i=\frac{1}{2(n-1)}a^{ab}a^{st}\left(\frac{1}{n}b_{ias/b/t}-b_{ias}r_{bt}\right)$$

on a

$$\Gamma^0_{n+1i}=\frac{1}{2n(n-1)}K^{st}_{i;s;t}-\frac{1}{4(n-1)}K^{ab}_i(\Gamma^0_{ab}+H_{ak}\Gamma^k_{n+1b})\,. \tag{4. 6}$$

5. Puisque b_{ijk}, r_{ij} sont symmétriques nous avons

$$R^\alpha_{0ij}=R^{n+1}_{\beta ij}=0\quad(\alpha,\beta=0,1,\cdots,n+1\,;\ i,j=1,\cdots,n) \tag{5. 1}$$

En posant $R_{hkij}=H_{km}R^m_{hij}$ nous obtenons

(5.2) $$R_{hkij}+R_{khij}=K_{hki;j}-K_{hkj;i} + H_{hi}(\Gamma^0_{kj}-H_{ks}\Gamma^s_{n+1j})+H_{ki}(\Gamma^0_{hj}-H_{hs}\Gamma^s_{n+1j}) - H_{hj}(\Gamma^0_{ki}-H_{ks}\Gamma^s_{n+1i})-H_{kj}(\Gamma^0_{hi}-H_{hs}\Gamma^s_{n+1i}),$$

(5.3) $$R_{hkij}-R_{khij}=2T_{hkij}-\frac{1}{2}(K_{his}K^s_{kj}-K_{hjs}K^s_{ki}) - H_{hi}(\Gamma^0_{kj}+H_{ks}\Gamma^s_{n+1j})+H_{ki}(\Gamma^0_{hj}+H_{hs}\Gamma^s_{n+1j}) + H_{hj}(\Gamma^0_{ki}+H_{ks}\Gamma^s_{n+1i})-H_{kj}(\Gamma^0_{hi}+H_{hs}\Gamma^t_{n+1i}).$$

Moyenant (3.1), (3.4) on tire de (5.2)

(5.4) $$H^{kj}(R_{hkij}+R_{khij})=0.$$

Nous avons d'ailleurs, lorsque $n>2$, d'après $(4.3)_n$, $(4.4)_n$, (5.3)

$$H^{kj}(R_{hkij}-R_{khij})=0$$

et, par suite,

$(5.5)_n$ $$H^{kj}R_{hkij}=0, \qquad H^{kj}R_{khij}=0.$$

Lorsque $n=2$, l'équation (5.4) est équivalente à

$(5.4)_2$ $$R_{hkij}+R_{khij}=0 \qquad (h, k, i, j=1, 2),$$

tandis que l'équation (5.3) devient

$$R_{1212}-R_{2112}=2T_{1212}-\frac{1}{2}(K_{112}K^s_{22}-K_{12s}K^s_{12}) -H^{ij}(\Gamma^0_{ij}+H_{is}\Gamma^s_{n+1j}).$$

Or, nous avons dans ce cas

$$T_{h\cdot is}^{\ s}=H_{hi}T_{1212}$$

et, par suite,

$$T^{st}_{\cdot\cdot st}=2T_{1212}, \qquad \Pi=T_{1212}$$

D'ailleurs, si nous posons

$$k_{hkij}=K_{his}K^s_{kj}-K_{hjs}K^s_{ki},$$

nous avons

$$-K^t_{hs}K^s_{it}=H^{kj}k_{hkij}=H_{hi}k_{1212},$$

parce que $k_{khij}=-k_{hkij}$, $k_{hkji}=-k_{hkij}$. Il vient donc

$$2k_{1212}=-K^{rst}K_{rst}=-2\Theta$$

et, par suite,

$$k_{1212} = -\Theta, \qquad K^t_{hs}K^s_{it} = H_{hi}\Theta .$$

Nous avons donc grâce à $(4.4)_2$, $(5.4)_2$

$$(5.5)_2 \qquad R_{1212} = -R_{2112} = \frac{1-q}{4}\Theta$$

et, par suite,

$$(5.5)'_2 \qquad \begin{cases} R^1_{1\,12} = \dfrac{1-q}{4}H^{12}\Theta, & R^2_{1\,12} = \dfrac{1-q}{4}H^{22}\Theta , \\ R^1_{2\,12} = -\dfrac{1-q}{4}H^{11}\Theta, & R^2_{212} = -\dfrac{1-q}{4}H^{21}\Theta . \end{cases}$$

6. Nous avons enfin d'après (2.5), (3.4)

$$(6.1) \qquad R_{h\cdot ij}^{\;0} - H_{hk}R_{n+1\cdot ij}^{\;\;\;\;\;k} = \frac{1}{n}(K^s_{hj;s;i} - K^s_{hi;s;j})$$
$$+\frac{1}{2}K^s_{hi}(\Gamma^0_{sj}+H_{sk}\Gamma^k_{n+1j}) - \frac{1}{2}K^s_{hj}(\Gamma^0_{si}+H_{sk}\Gamma^k_{n+1i})$$
$$+2H_{hj}\Gamma^0_{n+1i} - 2H_{hi}\Gamma^0_{n+1j} ,$$

$$(6.2) \qquad R_{h\cdot ij}^{\;0} + H_{hk}R_{n+1\cdot ij}^{\;\;\;\;\;k} = \frac{\partial(\Gamma^0_{hj}+H_{hk}\Gamma^k_{n+1j})}{\partial u^i} - \Pi^s_{hi}(\Gamma^0_{sj}+H_{sk}\Gamma^k_{n+1j})$$
$$-\frac{\partial(\Gamma^0_{hi}+H_{kk}\Gamma^k_{n+1i})}{\partial u^j} + \Pi^s_{hj}(\Gamma^0_{si}+H_{sk}\Gamma^k_{n+1i})$$
$$+\frac{1}{2n}(K^l_{hi}K^s_{lj;s} - K^l_{hj}K^s_{li;s}) .$$

En faisant l'usage de (3.1), (4.6) on tire de (6.1)

$$(6.3) \qquad R^{s0}_{\cdot\cdot is} - R_{n+1\cdot is}^{\;\;\;\;\;s} = 0 .$$

Lorsque $n=2$ ce système d'équations devient

$$(6.3)_2 \qquad \begin{cases} R^{20}_{\cdot\cdot 12} = R^{s0}_{\cdot\cdot 1s} = R_{3\cdot 1s}^{\;\;s} = R_{3\cdot 12}^{\;\;2} , \\ R^{10}_{\cdot\cdot 12} = -R^{s0}_{\cdot\cdot 2s} = R_{3\cdot 2s}^{\;\;s} = R_{3\cdot 12}^{\;\;1} \end{cases}$$

tansis que l'équation (6.2) devient, d'après (3.4), (4.2)

$$R_{h\cdot ij}^{\;0} + H_{hk}R_{3\cdot ij}^{\;\;k} = H_{hj}\left(\frac{\partial(\kappa\rho)}{\partial u^i} + \frac{q}{4}\frac{\partial\Theta}{\partial u^i}\right) - H_{hi}\left(\frac{\partial(\kappa\rho)}{\partial u^j} + \frac{q}{4}\frac{\partial\Theta}{\partial u^j}\right)$$
$$+T^s_{hij}(\log\kappa)_s + \frac{1}{2}((\log\kappa)_{h;i}(\log\kappa)_j - (\log\kappa)_{h;j}(\log\kappa)_i)$$
$$-\frac{1}{2}(H_{hj}(\log\kappa)_{a;i}(\log\kappa)_b H^{ab} - H_{hi}(\log\kappa)_{a;j}(\log\kappa)_b H^{ab})$$
$$+\frac{1}{4}(K^l_{hi}K^s_{lj;s} - K^l_{hj}K^s_{li;s}) ,$$

où

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} s\,t & \\ \cdot\cdot & st \end{Bmatrix} = \frac{\{1212\}}{\kappa\kappa}\,.$$

On en tire, en tenant compte de (4. 1), (4. 5)

$$(6.\,4)_2 \quad R^{s0}_{\cdot\cdot is} = R^{\ s}_{3\cdot is} = \frac{\kappa}{2}\frac{\partial\rho}{\partial u^i} + \frac{q-1}{8}\frac{\partial \log \kappa}{\partial u^i}\Theta + \frac{\kappa}{8}\left(q\frac{\partial\theta}{\partial u^i} + k_i\right),$$

où

$$b^{lm}_{i} = a^{mt} b^{l}_{it}\,, \qquad \theta = \frac{1}{k}\Theta = \frac{1}{2} b^{st}_{r} b^{r}_{st}\,,$$

$$k_i = b^{lm}_{i} b^{s}_{lm/s}\,.$$

7. En remarquant (1. 7) on démontre qu'au dessus de tout chemin $m(t)$ $(m(0)=m_0,\ 0\leqq t\leqq 1)$, il existe un chemin horizontal issu d'un point arbitrare b_0 de la fibre G_{m_0} ([4] p. 58). Moyenant ce fait, on définit le groupe d'holonomie.

Soient X, X' des vecteurs horizontals. L'élément $\Omega_{b_0}(X, X')$ ([5] p. 39) de la sous-algère d'holonomie de Lie-algère de $\mathfrak{P}$ peut être représentée par une homographique dans $\boldsymbol{S}_{n+1}$.

Lorsque $n=2$, si l'on fait $p^i_j=\delta^i_j$, $p^{n+1}_{n+1}=1$ pour b_0, une telle homograghique s'exprime par

$$(7.\,1) \qquad \begin{cases} \lambda\xi'^0 = q^0_C R^C_{112}\xi^1 + q^0_C R^C_{212}\xi^2 + q^0_C R^C_{312}\xi^3, \\ \lambda\xi'^1 = R^1_{112}\xi^1 + R^1_{212}\xi^2 + p^L_3 R^1_{L12}\xi^3, \\ \lambda\xi'^2 = R^2_{112}\xi^1 + R^2_{212}\xi^2 + p^L_3 R^1_{L12}\xi^3, \\ \lambda\xi'^3 = 0 \qquad (C:\ 0\to 2,\ L:\ 1\to 3)\,. \end{cases}$$

Cette homographique amène tout point de $\boldsymbol{S}_3$ à un point du plan $o=AA_1A_2$. Elle renferme ainsi comme sous-transformation l'homographique dans le plan o:

$$(7.\,2) \qquad \begin{cases} \lambda\xi'^0 = q^0_C R^C_{112}\xi^1 + q^0_C R^C_{212}\xi^2, \\ \lambda\xi'^1 = R^1_{112}\xi' + R^1_{212}\xi^2, \\ \lambda\xi'^2 = R^2_{112}\xi^1 + R^2_{212}\xi^2. \end{cases}$$

Celle-ci est aussi singulière. La corresponence entre les droites dans cette homographique s'exprime par

$$u'_0 = 0\,,$$
$$u'_1 = q^0_C R^C_{112} u_0 + R^1_{112} u_1 + R^2_{112} u_2\,,$$
$$u'_2 = q^0_C R^C_{212} u_0 + R^1_{212} u_1 + R^2_{212} u_2\,.$$

de sorte que la droite singière l ([6] p. 69) de l'homographie (7. 2) est donnée, grâce à $(5.5)_2'$, par

$$R^0_{1\,12}u_0+\frac{1-q}{4}H^{12}\Theta(u_1+q^0_1u_0)+\frac{1-q}{4}H^{22}\Theta(u_2+q^0_2u_0)=0\,,$$

$$R^0_{2\,12}u_0-\frac{1-q}{4}H^{11}\Theta(u_1+q^0_1u_0)-\frac{1-q}{4}H^{21}\Theta(u_2+q^0_2u_0)=0\,,$$

c'est-à-dire,

$$u_0:\ u_1+qu_0:\ u_2+q_2u_0=\frac{1-q}{4}\Theta:\ R^{s0}_{\cdot\cdot1s}:\ R^{s0}_{\cdot\cdot2s}$$

Supposons que Θ ne s'annulle pas au point m_0 (nous démontrerons plus tard qu'il existe un tel point) et faisons

$$q^0_i=\frac{2}{1-q}\frac{1}{\theta}\frac{\partial\rho}{\partial u^i}-\frac{1}{2}\frac{\partial\log\kappa}{\partial u^i}\,.$$

La droite l devient alors, grâce à $(6.4)_2$, la droite de jonction des points

$$A_i+\frac{1}{2\theta}\Big(p\frac{\partial\theta}{\partial u^i}+(p-1)k_i\Big)A\qquad\Big(i=1,2;\ p=\frac{q}{1-q}\Big)\,,$$

où A, A_1, A_2, A_3 sont les sommets du repère choisis auparavant au n° **1.**

Pour une surface dans un espace projectif le faisceau canonique à un point $A(u^i)$, rapporé à un repère mobile $[A, A_1, A_2, A_3](A_i=\partial A/\partial u^i)$ est donné par cette expression ([2] p. 203). Nous appellerons donc *le faisceau canonoque de la variété différentiable M* l'ensemble des droites l où p parcourt les nombres réels.

L'homographique (7. 1) amène tout plan dans S_3 à un plan passant par le point $0(\equiv A)$. Elle renferme ainsi comme soustransformation la projectivité dans l'étoile-0:

$$\begin{aligned}u_1'&=R^1_{1\,12}u_1+R^2_{1\,12}u_2\,,\\ u_2'&=R^1_{2\cdot12}u_1+R^2_{2\,12}u_2\,,\\ u_3'&=p^L_3R^1_{L12}u_1+p^L_3R^2_{L12}u_2\,.\end{aligned}$$

La droite singulière l' de cette transformation est donnée par

$$\begin{aligned}R^1_{1\,12}\xi^1+R^1_{2\,12}\xi^2+p^L_3R^1_{L12}\xi^3&=0\,,\\ R^2_{1\,12}\xi^1+R^2_{2\,12}\xi^2+p^L_3R^2_{L12}\xi^3&=0\,.\end{aligned}$$

Si l'on fait

$$p^i_3=H^{is}\Big(\frac{2}{q-1}\frac{1}{\theta}\frac{\partial\rho}{\partial u^i}+\frac{1}{2}\frac{\partial\log\kappa}{\partial u^i}\Big)\,,$$

la droite l' devient droite joignant A avec le point

$$A_3+H^{ij}\frac{1}{2\theta}\left(p\frac{\partial\theta}{\partial u^i}+(p-1)k_i\right)A_j\,.$$

Les droites l et l' sont conjuguées l'une de l'autre par rapport à la quadrique

$$2\xi^0\xi^3=H_{ij}\xi^i\xi^j\,.$$

Si l'on fait

$$q_i^0=\frac{4}{(1-q)\Theta}R^{s0}_{\cdot\cdot is}\,,\qquad p_3^i=\frac{4}{(q-1)\Theta}H^{it}R^{s0}_{\cdot\cdot ts}$$

les droites A_1A_2, AA_3 se font une paire des arêtes conjuqées.

8. Soient V un espace vectoriel à n dimensions sur le champ de nombles réels, e^i $(i=1,\cdots,n)$ un système de base de V, $T^{(2)}$ un élément

$$G_{ij}e^i\otimes e^j$$

de $V\otimes V$, qui est symmétrique et psitif définit. Un élément symmétrique

$$G_{ijl}e^i\otimes e^j\otimes e^l$$

de $V\otimes V\otimes V$ est dit apolaire à $T^{(2)}$ lorsqu'il satisfait la relation relation

$$G^{ij}G_{ijl}=0\qquad ((G^{ij})=(G_{ij})^{-1})\,. \tag{8.1}$$

Cette relation est indépendante du choix de base e^i. Posons

$$F=G^{rst}G_{rst}=G^{ir}G^{js}G^{lt}G_{ijl}G_{rst}\,.$$

Lorsque $n=2$ nous avons (n° 5) grâce à (8.1)

$$G^s_{it}G^t_{js}=\frac{1}{2}G_{ij}F\,,$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases}(G^1_{11})^2-G^2_{11}G^2_{22}=\dfrac{1}{4}G_{11}F\,,\\[2mm] G^2_{11}G^1_{22}-G^1_{11}G^2_{22}=\dfrac{1}{2}G_{12}F\,,\\[2mm] (G^2_{22})^2-G^1_{22}G^1_{11}=\dfrac{1}{4}G_{22}F\,.\end{cases} \tag{8.2}$$

La relatoion (8.1) elle-même s'écrit $G^1_{11}=-G^2_{12}$, $G^2_{22}=-G^1_{21}$. D'un autre côté, d'après $G_{112}=G_{2s}G^s_{11}=G_{1s}G^s_{12}$, $G_{122}=G_{1s}G^s_{22}=G_{2s}G^s_{12}$, il vient

$$(8.3)\qquad \begin{cases} G_{11}G^2_{22}+2G_{12}G^1_{11}+G_{22}G^2_{11}=0\,, \\ G_{11}G^1_{22}+2G_{12}G^2_{22}+G_{22}G^1_{11}=0\,. \end{cases}$$

Il suit de (8.2), (8.3)

$$(8.4)\qquad \begin{cases} G_{11}\left(\dfrac{G^1_{11}}{G_{11}}\right)^2+2G_{12}\left(\dfrac{G^1_{11}}{G_{11}}\right)\left(\dfrac{G^2_{11}}{G_{11}}\right)+G_{22}\left(\dfrac{G^2_{11}}{G_{11}}\right)^2=\dfrac{1}{4}F \\ G_{11}\left(\dfrac{G^1_{22}}{G_{22}}\right)^2+2G_{12}\left(\dfrac{G^1_{22}}{G_{22}}\right)\left(\dfrac{G^2_{22}}{G_{22}}\right)+G_{22}\left(\dfrac{G^2_{22}}{G_{22}}\right)^2=\dfrac{1}{4}F \end{cases}$$

ce qui nous montre que $F\geqq 0$, et que nous pouvons écrire

$$G^1_{11}=-\frac{1}{2}G_{11}\sqrt{\frac{F}{G}}\cos(\sigma+\varphi)\,,\qquad G^2_{11}=\frac{1}{2}G_{11}\sqrt{\frac{F}{G}}\cos\varphi\,,$$

$$G^1_{22}=-\frac{1}{2}G_{22}\sqrt{\frac{F}{G}}\cos(\sigma+\psi)\,,\qquad G^2_{22}=\frac{1}{2}G_{22}\sqrt{\frac{F}{G}}\cos\psi$$

où

$$\cos\sigma=\frac{G_{12}}{\sqrt{G_{11}G_{22}}}\,,\qquad \sin\sigma=\sqrt{\frac{G}{G_{11}G_{22}}}\,,\qquad G=G_{11}G_{22}-(G_{12})^2$$

Portant ces valeurs dans (8.3) nous obtenons

$$\sin\left(\sigma+\frac{\varphi-\psi}{2}\right)=0\,.$$

Nous avons ainsi

$$G_{111}=\frac{1}{2}G_{11}\sqrt{FG_{11}}\sin\varphi\,,$$

$$G_{112}=\frac{1}{2}G_{11}\sqrt{FG_{22}}\sin(\sigma+\varphi)=\frac{1}{2}\sqrt{FG_{11}}(G_{12}\sin\varphi+\sqrt{G}\cos\varphi)\,,$$

$$G_{122}=\frac{1}{2}G_{22}\sqrt{FG_{11}}\sin(2\sigma+\varphi)$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{F}{G_{11}}}\{((G_{12})^2-G)\sin\varphi+2G_{12}\sqrt{G}\cos\varphi\}\,,$$

$$G_{222}=\frac{1}{2}G_{22}\sqrt{FG_{22}}\sin(3\sigma+\varphi)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{G_{11}}\sqrt{\frac{F}{G_{11}}}\{G_{12}((G_{12})^2-3G)\sin\varphi+\sqrt{G}(3(G_{12})^2-G)\cos\varphi\}\,,$$

c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} G_{11} &= X\,, \\ G_{112} &= \rho X+\lambda Y\,, \\ G_{122} &= (\rho^2-\lambda^2)X+2\rho\lambda Y\,, \\ G_{222} &= \rho(\rho^2-3\lambda^2)X+\lambda(3\rho^2-\lambda^2)Y\,, \end{aligned}$$

où

$$\frac{1}{2}G_{11}\sqrt{FG_{11}}\sin\varphi = X, \qquad \frac{1}{2}G_{11}\sqrt{FG_{11}}\cos\varphi = Y,$$

$$\frac{G_{12}}{G_{11}} = \rho, \qquad \sqrt{\frac{G_{22}}{G_{11}}-\left(\frac{G_{12}}{G_{11}}\right)^2} = \lambda.$$

Si l'on effectue le changement de base dans V: $e^i = Q^i_s e'^s$, il vient

$$G'_{ij} = Q^s_i Q^t_j G_{st}, \qquad G'_{ijl} = Q^s_i Q^t_j Q^r_l G_{str}$$

et, par suite,

$$\text{(8. 5)} \qquad \left\{\begin{aligned} X' &= (Q^1_1+\rho Q^2_1)((Q^1_1+\rho Q^2_1)^2-3(\lambda Q^2_1)^2)X \\ &\qquad +\lambda Q^2_1(3(Q^1_1+\rho Q^2_1)^2-(\lambda Q^2_1)^2)Y, \\ Y' &= -\varepsilon\lambda Q^2_1(3(Q^1_1+\rho Q^2_1)^2-(\lambda Q^2_1)^2)X \\ &\qquad +\varepsilon(Q^1_1+\rho Q^2_1)((Q^1_1+\rho Q^2_1)^2-3(\lambda Q^2_1)^2)Y, \end{aligned}\right.$$

où ε est le singe de $Q^1_1Q^2_2-Q^1_2Q^2_1$. En remarquant que par la suite des transformations $e^i = Q^i_s e'^s$, $e'^j = Q'^j_t e''^t$ il vient

$$e^i = Q''^i_s e''^s \qquad (Q''^i_j = Q^i_s Q'^s_j),$$

$$Q''^1_1+\rho' Q''^2_1 = \frac{(Q^1_1+\rho Q^2_1)(Q''^1_1+\rho Q''^2_1)+\lambda\lambda Q^2_1 Q''^2_1}{(Q^1_1+\rho Q^2_1)^2+(\lambda Q^2_1)^2},$$

$$\varepsilon\lambda' Q''^2_1 = \frac{\lambda Q''^2_1(Q^1_1+\rho Q^2_1)-\lambda Q^2_1(Q''^1_{11}+\rho Q''^2_1)}{(Q^1_1+\rho Q^2_1)^2+(\lambda Q^2_1)^2},$$

on démontre que l'ensemble des transformations linéaires de la (8. 5) se fait un sous-groupe $\mathfrak{L}_2$ du groupe linéaire général L_2.

Remplaçons maintenant, dans (8. 5), G_{ij}, Q^i_j par $a_{ij}(x)$, $\partial u^i/\partial u'^j$. Nous avons alors une applicaton continue

$$g_{m',m}: U_m \bigcap U'_{m'} \to \mathfrak{L}_2.$$

Moyennant cette application nous pouvons construire l'espace fibré $B(M, E^{(2)}, \mathfrak{L}_2)$ dont la fibre $E^{(2)}$ est un espace numérique a deux dimensions, engendré par le point (X, Y). La section local de cet espace fibré peut être étendue sur M ([3] p. 54). Supposons que la section ainsi obtenue est représentée par

$$X = f_1(u^1(x), \cdots, u^n(x)), \qquad Y = f_2(u^1(x), \cdots, u^n(x)) \qquad (x \in U_m)$$

dans le voisinage U_m du point $m \in M$. Le champ de tenseur covarint du troisième ordre mentionné au n^0 **3** est donné par

$$b_{111} = f_1 ,$$

$$b_{112} = \frac{1}{a_{11}}(a_{12} f_1 + \kappa f_2) \qquad (\kappa = \sqrt{a_{11}a_{22} - (a_{12})^2} ,$$

$$b_{122} = \frac{1}{(a_{11})^2}\{((a_{12})^2 - \kappa\kappa) f_1 + 2a_{12}\kappa f_2\} ,$$

$$b_{222} = \frac{1}{(a_{11})^3}\{((a_{12})^2 - 3\kappa\kappa) f_1 + \kappa(3(a_{12})^2 - \kappa\kappa) f_2\} .$$

Il existe donc les b_{ijk} qui ne sont pas tous nuls idéntiquement. Autant qu'un des b_{ijk} ne s'annulle pas au moins, il en est de même pour Θ d'après (8. 4).

REFERENCES

[1] J. Kanitani, Sur la forme de Darboux relative une variété différentiable. (Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. Math. Vol. 30, 1957).
[2] G. Fubuni, E. Chech, Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces.
[3] N. Steenrod, The theory of fibre bundles.
[4] A. Lichnerowicz, Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie.
[5] K. Nomizu, Lie groups and differential geometry.
[6] E. Bertini, Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi.