Memoirs of the College of Science, University of Kyoto, Series A
Vol. XXXII, Mathematics No. 1, 1959.

Le problème de Cauchy et les opérateurs d'intégrale singulière

Par

Masaya Yamaguti

(Reçu le 7 mars 1959)

Introduction. Nous traitons le problème de Cauchy relatif à l'équation hyperbolique par la méthode de Calderón et Zygmund [1], [2], c'est-à-dire, par la méthode de l'opérateur d'intégrale singulière. Nous savons que le problème de Cauchy pour l'équation régulièrement hyperbolique est bien étudié par des travaux de M. I. G. Petrowsky, M. J. Leray et M. L. Gårding depuis que M. Petrowsky [12] a fondé une méthode pour ce problème. La méthode de M. Petrowsky est la suivante: trouver d'abord une inégalité d'énergie pour la solution, et ensuite appliquer le passage à la limite pour démontrer l'existence en s'appuyant sur le théorème de Kowalewski. M. J. Leray a établi cette méthode sous une forme plus précise [5]. M. L. Gårding a montré une autre méthode élémentaire qui n'utilise pas le passage à la limite [4]. L'auteur a indiqué par une note [13] que s'il s'agit seulement de trouver l'inégalité d'énergie, on peut utiliser l'opérateur d'intégrale singulière de Calderón et Zygmund pour un système Kowalewskien d'ordre 1. Cette méthode a une difficulté pour le cas où la dimension spatiale est 2[1]. Mais, pour une équation régulièrement hyperbolique même d'ordre supérieur à 1, cette méthode marche très bien. Donc on peut résoudre le problème avec la méthode du passage à la limite, ou bien la méthode de semi-groupe [10].

Quant à l'équation qui est kowalewskienne, mais qui n'est pas

1) Pour un système d'équations, il faut diagonaliser la matrice des coefficients des équations. Mais alors la construction de la matrice diagonalisatrice $N(t)$ dans [13] ne marche plus au cas de la dimension $2=n$. Mais pour une équation d'ordre quelconque régulièrement hyperbolique on peut trouver la forme explicite de cette matrice.

régulièrement hyperbolique, il est difficile à résoudre ce problème. La difficulté vient de ce que le polynôme caractéristique ne détermine pas la condition pour que le problème de Cauchy soit bien posé, même au cas de l'équation à coefficients constants [11].

Alors, au moins à ma connaissance, il n'y a qu'un résultat de M^e. A. Lax pour l'équation à coefficients variables de deux variables [6].

Cet article a pour but de montrer une généralisation de la méthode de A. Lax pour le cas de n variables ($n>2$) en utilisant une classe d'opérateurs qui est une généralisation de la classe des opérateurs de Calderón et Zygmund.

Nous définissons une algèbre d'opérateurs bornés de L^2 dans lui-même et nous étudierons des propriétés de ces opérateurs, dans le chapitre 1. En suite, nous résouderons le problème de Cauchy pour une équation dont le polynôme caractéristique a des racines réelles multiples, dans le chapitre 2, sous la condition que la multiplicité de toutes les racines soit invariante et que l'opérateur différentiel de l'équation puisse être exprimé par les opérateurs de cette algèbre sous une forme particulière. Nous démontrons à la fin du chapitre 2 que cette deuxième condition est nécessaire pour l'équation à coefficients constants si on suppose la première condition.

L'auteur a directement inspiré par les travaux de mon collègue S. Mizohata [7], [8] et [9].

L'auteur exprime un remerciement sincère à M. Sigeru Mizohata pour sa stimulation et pour son encouragement continuel.

Chapitre I Algèbra $\mathfrak{A}_1$

1. Une classe d'opérateurs. Nous définissons une classe d'opérateurs bornés de L^2 dans lui-même qui est dans quelque mesure une généralisation de la notion de l'opérateur d'intégrale singulière de Calderón et Zygmund [1], [2]. Nous suivons toujours les définitions et les notations de ces auteurs.

Soit H un opérateur défini par la formule:

$$H[u]=\sum_{r=0}^{\infty} a_r(x)h_r[u] \qquad x\in R_n\,,\ u\in L^2 \tag{1, 1}$$

où h_r est un opérateur borné de L^2 dans lui-même défini par

$$h_r[u]=\int \exp(2\pi i x\xi)\hat{h}_r(\xi)\hat{u}(\xi)d\xi \tag{1, 2}$$

où $\hat{h}_r(\xi)$ et $a_r(x)$ satisfont aux conditions suivantes (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6).

$$(1,3) \qquad a_r(x) \in \mathcal{B}_x\,,$$

$\hat{h}_r(\xi)$ indéfiniment dérivables en dehors de l'origine.

$$(1,4) \qquad A_r = \sup_{x \in R_n} |a_r(x)|\,, \quad A_r^\alpha = \sup_{x \in R_n} \left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha a_r(x)\right| \qquad \alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$$

$\{A_r\}$, $\{A_r^\alpha\}$ forment une suite à décroissance rapide[2] pour chaque α.

$$(1,5) \qquad B_r = \sup_{\xi \in R_n} |\hat{h}_r(\xi)|\,,$$

$\{B_r\}$ est une suite à croissance polynomiale[2].

$$(1,6) \qquad \left|\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\alpha \hat{h}_r(\xi)\right| \leqq \frac{B_r^\alpha}{|\xi|^{|\alpha|}} \qquad |\xi| \geqq 1\,,$$

$\{B_r^\alpha\}$ est aussi une suite à croissance polynomiale pour chaque α.

Définition *Nous dirons désormais qu'un opérateur H appartient à 0_0 si et seulement si H est défini par* (1, 1) *avec $a_r(x)$ et $\hat{h}_r(\xi)$ satisfaisant* (1, 2)-(1, 6).

Pour tout $H \in 0_0$, nous définissons l'adjoint H^* de H par

$$(1,7) \qquad H^*[u] = \sum_r h_r^* \bar{a}_r(x)[u]\,, \qquad h^* = \overline{h(-x)}$$

Nous désignerons le symbole de H par $\sigma(H) = \sum_r a_r(x)\hat{h}_r(\xi)$ qui a un sens grâce aux conditions (1, 3)-(1, 6). Remarquons que H^* l'adjoint de $H \in 0_0$, n'appartient pas à 0_0. On voit tout de suite que l'opérateur de Calderón et Zygmund est un cas particulier, sauf la différentiabilité de $a_r(x)$, de 0_0.

Montrons d'abord que l'opérateur $H \in 0_0$ définit une application bornée de L^2 dans lui-même. En tenant compte de ce que h est un opérateur de convolution, on a

---

2) On définit une suite à décroissance rapide comme suit:

Une suite A_r est à décroissance rapide si et seulement si pour un entier q quelconque, il existe un autre r_0, et une constante C tels que l'on a

$$0 < A_r \leqq \frac{C}{r^q} \qquad r \geqq r_0$$

et on dit qu'une suite B_r est à croissance polynomiale si et seulement s'il y a un entier q et r_0 et une constante C' tels que

$$0 < B_r \leq C' r^q \qquad r \geqq r_0\,.$$

$$||h_r[u]|| = \left\{ \int |\hat{h}_r(\xi)|^2 |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \right\}^{\frac{1}{2}} \leqq B_r ||u||$$

$$(1, 8) \qquad ||H[u]|| \leqq (\sum_{r \geq 0} \sup_{x \in R_n} |a_r(x)| B_r) ||u|| \leqq (\sum_r A_r B_r) ||u||$$

On peut démontrer facilement par la même méthode la

Proposition 1, 1 *H définit une application bornée de $\mathfrak{D}^m_{L^2}$ dans lui-même où $H \in 0_0$ et m est un entier positif ou négatif ou zéro.*

On va voir que presque tous les théorèmes dans [1] réapparaîtront sous une forme plus précise au paragraphe suivant.

2. Une algèbre d'opératurs. Nous définissons une algèbre $\mathfrak{A}_1$ d'opérateurs bornés de L^2 dans lui-même comme une sorte de "l'adhérence" de 0_0.

Définition.[3)] *Un opérateur borné K de L^2 dans lui-même appartient à $\mathfrak{A}_1$ et seulement si pour tout entier positif p, il existe une constante M_p et un opérateur $H_p \in 0_0$ tels que l'inégalité* (1, 9) *soit assurée pour toutes les fonctions $u \in \mathfrak{D}^\infty_{L^2}$* :[*)]

$$(1, 9) \qquad ||\Lambda^r(K - H_p)\Lambda^s[u]|| \leqq M_p ||u|| \qquad r + s \leqq p.$$

Evidemment, $\mathfrak{A}_1$ est linéaire. On verra tout à l'heure par le théorème 2 que $\mathfrak{A}_1$ est une algèbre. Le théorème 1 indiquera que l'opérateur $\Lambda H - H\Lambda$ qu'on utilise assez souvent, appartient à $\mathfrak{A}_1$ si $H \in 0_0$ et même si $H \in \mathfrak{A}_1$. En plus H^* de $H \in 0_0$ appartient à $\mathfrak{A}_1$. On verra aussi un critère au paragraphe suivant qui est assez commode pour décider si un opérateur appartient à $\mathfrak{A}_1$.

Nous commençons par prouver un lemme qui sera utilisé partout dans les calculs qui vont suivre.

Soit B_ν un opérateur défini par l'intégrale :

$$(1, 10) \qquad B_\nu[u] = \int a_\nu(x, y)(x - y)^\nu h(x - y) u(y) dy$$

---

3) Λ est aussi un opérateur défini par Calderón et Zygmund [1] il est défini par :

$$(\widehat{\Lambda u}) = \hat{u}|\xi| \qquad \hat{u} : \text{transformé de Fourier.}$$

il est un opérateur de $\mathfrak{D}^m_{L^2}$ dans $\mathfrak{D}^{m-1}_{L^2}$.

*) L'espace $\mathfrak{D}^\infty_{L^2}$, est défini comme suit : L'espace des fonctions à carré sommable avec toutes leurs dérivées de tout ordre. On écrit des fois $\mathfrak{D}^\infty$ au lieu de $\mathfrak{D}^\infty_{L^2}$.

Plus précisément, on peut dire le théorème 3 de la manière suivante :

Etant donné $v(t)$ fonction continue en t à valeur $\mathfrak{D}^{m+q}_{L^2}$, il existe une et une seule solution $u(t)$ de (2, 1), fonction continue en t à valeurs dans $\mathfrak{D}^{m+q}_{L^2}$, et m fois continûment dérivable en t à valeurs dans $\mathfrak{D}^p_{L^2}$.

où $a_\nu(x, y) \in \mathcal{B}_{x,y}$, $\hat{h}(\xi)$ est une fonction indéfiniment dérivable bornée dont le support est contenu dans le domaine $|\xi| \geqq 1$, en plus elle satisfait à la condition suivante :

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^{\alpha} \hat{h}(\xi)\right| \leqq K(|\alpha|)|\xi|^{l-|\alpha|} \qquad |\xi| \geqq 1 \tag{1, 11}$$

où l est un entier positif ou zéro, et α est une indice multiple.

Alors voici un lemme qui a été essentiellement déjà démontré dans [8],

Lemme 1, 1 *Pour tout p entier, il existe un autre m tel que l'opérateur $B_\nu(|\nu| = m)$ soit borné de L^2 dans lui-même et en plus satisfasse à l'inégalité suivante pour tout $u \in \mathcal{D}^\infty$,*

$$\begin{aligned} \|\Lambda^r B_\nu \Lambda^s[u]\| \leqq C(p, n, m)&\Big(\sum_{0 \leq |\beta| \leq r, 0 \leq |\beta'| \leq s} \sup \left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\beta}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\beta'} a_\nu(x, y)\right|\Big) \\ \times \Big(&\sum_{2q+n+1+l \leq |\mu| \leq 2q+|\nu|} K(|\mu|) + K(|\nu|)\Big)\|u\| \\ & r+s \leqq p \quad 2q = \max(p, n+1) \quad u \in \mathcal{D}^\infty \end{aligned} \tag{1, 12}$$

ce qui signifie que B_ν reste borné après la multiplication par Λ^r (ou Λ^s)

Démonstration D'abord, remarquons que l'expression a un sens pour $u \in \mathcal{D}^\infty$ à cause de la condition (1, 11). De plus la distribution $(x^\nu h)$ est une fonction authentique pour m assez grand comme on voit facilement par la transformation de Fourier :

$$x^\nu h \xrightarrow{\mathcal{F}_1} (-1)^{|\nu|}\left(\frac{1}{2\pi_i}\right)^{|\nu|}\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^{\nu} \hat{h}(\xi) \tag{1, 13}$$

d'où vient l'inégalité :

$$|(x-y)^\nu h(x-y)| \leqq \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{|\nu|} \int \left|\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^{\nu} \hat{h}(\xi)\right| d\xi \tag{1, 14}$$

si on prend $m = n+1+l$, l'intégrale dans le second membre est finie.

Alors nous évaluons l'intégrale (1, 10). Écrivons-le sous la forme d'une somme de deux intégrales :

$$\begin{aligned} B_\nu[u] &= \int_{|x-y| \leqq 1} a_\nu(x, y)(x-y)^\nu h(x-y) u(y) dy \\ &+ \int_{|x-y| \geqq 1} a_\nu(x, y)(x-y)^\nu h(x-y) u(y) dy \\ &= B_{1\nu}[u] + B_{2\nu}[u] . \end{aligned} \tag{1, 15}$$

Compte tenu de (1, 13)-(1, 14), la norme de la première intégrale est évaluée par le théorème de Young:

$$(1,16)\qquad \|B_{1\nu}[u]\| \leqq \sup|a_\nu(x,y)|\, b_n\Big(\frac{1}{2\pi}\Big)^m \int\Big|\Big(\frac{\partial}{\partial\xi}\Big)^\nu \hat{h}(\xi)\Big|\, d\xi\, \|u\|$$
$$\leqq \sup|a_\nu(x,y)|\, C(n)K(n+1+l)\|u\|$$

où b_n est la volume de la boule d'unité. La seconde intégrale sera évaluée en tenant compte de ce que

$$|\,|x|^{2q}x^\nu h| \xrightarrow{\mathfrak{F}} (-1)^{|\nu|+2q}\Big(\frac{1}{2\pi i}\Big)^{|\nu|+2q}\int_{|\xi|\geqq 1}\Big|\Delta^q\Big(\frac{\partial}{\partial\xi}\Big)^\nu \hat{h}(\xi)\Big|\, d\xi\,,$$

on a

(1, 17)
$$\|B_{2\nu}[u]\| \leqq \sup|a_\nu(x,y)|\int\frac{1}{|x|^{2q}}dx\Big(\frac{1}{2\pi}\Big)^{2q+|\nu|}\int\Big|\Delta^q\Big(\frac{\partial}{\partial\xi}\Big)^\nu \hat{h}(\xi)\Big|\, d\xi\,\|u\|\,.$$

Si on prend $2q=n+1$ pour que l'intégrale $\int\frac{1}{|x|^{2q}}dx$ soit finie, on obtient

$$\|B_{2\nu}[u]\| \leqq \sup|a_\nu(x,y)|\, C'(n)\Big(\frac{1}{2\pi}\Big)^{2(n+1)+l} K(2(n+1)+l)$$

Donc enfin on a

$$(1,18)\qquad \|B_\nu[u]\| \leqq \sup|a_\nu(x,y)|\, C(l,n)(K(\overline{2n+1}+l)+K(n+1+l))$$
$$|\nu| = m = n+1+l$$

De la même façon, nous pouvons évaluer la norme de $\Lambda^r B\Lambda^s[u]$. Nous profitons de l'expression $\Lambda = i\Big(\sum_i R_i\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)$ [4] (voir [1], c'est-à-dire, il nous suffit de calculer $\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^\alpha B_\nu\Big(\frac{\partial}{\partial y}\Big)^\beta[u]$ parce que la norme de R_i est connue. Alors

$$\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^\alpha B_\nu\Big(\frac{\partial}{\partial y}\Big)^\beta[u] = \Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^\alpha\int a_\nu(x,y)(x-y)^\nu h(x-y)\Big(\frac{\partial}{\partial y}\Big)^\beta u(y)dy$$
$$= \int\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^\alpha\Big(\frac{\partial}{\partial y}\Big)^\beta (a_\nu(x,y)(x-y)^\nu h(x-y))u(y)dy$$
$$= \sum C_\delta^\gamma C_{\delta'}^{\gamma'}\Big(\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^\gamma\Big(\frac{\partial}{\partial y}\Big)^{\gamma'} a_\nu(x,y)\Big)(-1)^\delta\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^{\delta+\delta'}(x-y)^\nu h(x-y)u(y)dy$$
$$|\alpha| + |\beta| \leqq p$$

4) R_i est défini à p. 906 dans [1].

Ici nous utilisons la décomposition utilisée plus haute,

$$\int\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\gamma}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\gamma'} a_\nu(x, y)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\delta+\delta'}(x-y)^\nu h(x-y)u(y)dy$$

$$=\int_{|x-y|\leqq 1} \text{"} \quad + \quad \int_{|x-y|\geqq 1} \text{"} \quad =(B'_{1\nu}+B'_{2\nu})[u]$$

Alors avec les mêmes raisonnments pour $r=s=p=0$, nous obtenons

$$||B'_{1\nu}[u]|| \leqq \sup\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\gamma}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\gamma'} a_\nu(x, y)\right| \cdot b_n C\int|\xi|^{\delta+\delta'}\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^{\nu}\hat{h}(\xi)|d\xi||u||$$

$$\leqq \sup\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\gamma}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\gamma'} a_\nu(x, y)\right| C_1(n)K(n+1+p+l)||u||$$

$$m=n+1+p+l$$

et puis la deuxième intégrale:

$$||B'_{2\nu}[u]|| \leqq \sup\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\gamma}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\gamma'} a_\nu(x, y)\right| C'_1(n)$$

$$\times\Big(\sum_{0\leqq|\mu|\leqq p} K(2q-|\mu|+p+n+1+l)\Big)||u||$$

$$2q=\max.(p, n+1), \quad m=n+1+p+l$$

Donc enfin, on a

$$(1.19) \quad ||\Lambda^r B\Lambda^s[u]|| \leqq \Big(\sum_{0\leq|\beta|\leq r}\sum_{0\leq|\beta'|\leq s} \sup\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\beta}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\beta'} a_\nu(x, y)\right|\Big)$$

$$\times(C_1(n)+C'_1(n))\Big(\sum_{0\leq|\mu|\leq p\ |\nu|=m} K(|\nu|)+K(2q-|\mu|+|\nu|)\Big)||u||$$

$$2q=\max(p, n+1), \quad m=|\nu|=n+l+p+1.$$

3. Ordre d'un opérateur. Nous définissons une notion qui sera utile dans les calculs qu'on rencontre après[5].

Définition *Nous appelons un opérateur K borné de L^2 dans lui-même "d'ordre p" si et seulement s'il existe une constante A telle que pour tous $u\in\mathfrak{D}^\infty$, on ait*

$$||\Lambda^r K\Lambda^s[u]|| \leqq A||u|| \qquad r+s\leqq p$$

Cela voudra dire que l'opérateur $\Lambda^r K\Lambda^s$ a un sens comme un opérateur borné de L^2 dans lui-même. Dans cette terminologie,

5) Ici, la notion de l'ordre de l'opérateur borné est introduite pour simplifier les discussions. Je pense que le mot "l'ordre" n'est pas tellement convenable, mais je ne trouve pas d'autre expression.

par exemple, l'opérateur B_ν dans le lemme 1, 1 est un opérateur d'ordre p si $m=n+1+l+p$. On va voir un exemple très simple d'un opérateur d'ordre ∞. Ainsi, on peut définir l'algèbre $\mathfrak{A}_1$ par un critère; "Un opérateur $K\in\mathfrak{A}_1$ si et seulement si pour p quelconque K possède une décomposition:

$$K=H_p+B_p \tag{1, 20}$$

où $H_p\in 0_0$ et B_p est un opérateur d'ordre p.
Nous utiliserons exclusivement ce critérium pour décider si un opérateur appartient à $\mathfrak{A}_1$. Nous allons envisager des proprietés de $\mathfrak{A}_1$.

Nous commençons par un cas très simple:

Proposition 1, 2 *Soit H un opérateur borné de L^2 dans lui-même défini par une multiplication de $a(x)\in\mathcal{B}$. Evidemment, il appartient à 0_0. Alors pour p, q entiers quelconques, on peut décomposer l'opérateur $a(x)\Lambda^p-\Lambda^p a(x)$ de la manière suivante:*

$$a(x)\Lambda^p-\Lambda^p a(x)=H_q\Lambda^{p-1}+B_q \tag{1, 21}$$

où H_q est un opérateur dans 0_0 et B_q est un opérateur d'ordre q.

Démonstration Partageons Λ^p en deux parties: $\Lambda_1^p+\Lambda_2^p$ où $\hat{\Lambda}_1^p(\xi)$ est $\alpha(\xi)|\xi|^p$, $\hat{\Lambda}_2^p=(1-\alpha(\xi))|\xi|^p$ et $\alpha(\xi)\in\mathcal{D}_\xi$ qui est égale à 1 $|\xi|\leqq 1$, et zéro en dehors de la boule $|\xi|\leqq 2$. Comme on voit facilement, $a(x)\Lambda_1^p$ et $\Lambda_1^p a(x)$ sont des opérateurs bornés. En plus ces opérateurs sont d'ordre ∞. Nous avons vu déjà au paragraphe 1 que les opérateurs du type $a(x)h$ ou $ha(x)$ ($\hat{h}(\xi)$ est borné) sont des opérateurs bornés. Mais alors si $\hat{h}(\xi)$ est à support compact, ils sont naturellement des opérateurs bornés. Compte tenu de ce que $\Lambda=i\left(\sum R_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$, du fait que $\frac{\partial}{\partial x_i}a(x)\Lambda_1^p=\left(\frac{\partial}{\partial x_i}a(x)\right)\Lambda_1^p+a(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\Lambda_1^p$ où deux termes dans le second membre sont tous les deux des opérateurs du type précédent, il résultera que $\Lambda^q a(x)\Lambda_1^p$, $a(x)\Lambda^q\Lambda_1^p$, $\Lambda_1^p a(x)\Lambda^q$ et $\Lambda^q\Lambda_1^p a(x)$ sont des opérateurs bornés, qui sont encore du type précédent. Donc l'application successive de la règle de la différentiation du produit nous montre que $\Lambda^q a(x)\Lambda_1^p$, $a(x)\Lambda^q\Lambda_1^p$, $\Lambda_1^p a(x)\Lambda^q$ et $\Lambda^q\Lambda_1^p a(x)$ sont tous bornés pour q quelconque. De plus on voit

$$\|\Lambda^q a(x)\Lambda_1^p[u]\|\leqq\left(\sum_{|\beta|\leq q}\sup\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta a(x)\right|\right)\left(\sup_{|\xi|\leqq 2}|\hat{\Lambda}_1^p(\xi)|\right)\|u\| \tag{1, 22}$$

ou bien

(1, 22') $\quad \|\Lambda^r a(x)\Lambda_1^p\Lambda^s[u]\| \leq \left(\sum_{|\beta|\leq q} \sup\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta a(x)\right|\right) \sup_{|\xi|\leq 2}|\hat{\Lambda}_1^p(\xi)|\,\|u\|$

$$r+s\leq q$$

Maintenant, nous utilisons la décomposition (N) définie par M. S. Mizohata dans ses travaux [7], [8], pour $a(y)-a(x)$:

(1, 23) $\quad (\Lambda_2^p a(x)-a(x)\Lambda_2^p)[u] = \int \Lambda_2^p(y-x)(a(y)-a(x))u(y)dy$

$$= \int \sum_{0<|\nu|\leq m-1} \frac{D^\nu a(x)}{\nu!}(y-x)^\nu \Lambda_2^p(y-x)u(y)dy$$

$$+ \int \sum_{|\nu|=m} \frac{a(x,y)}{\nu!}(y-x)^\nu \Lambda_2^p(y-x)u(y)dy \quad |\nu|=m \text{ indéterminé} > 1$$

Notons que la deuxième intégrale est justement celle qui a été étudiée dans le lemme 1, 1, parce que $\hat{\Lambda}_2^p(\xi)$ satisfait à la condition (1, 11) ($l=p$). Donc en prenant $m=|\nu|=p+1+q+n$, l'opérateur défini par cette deuxième intégrale est d'ordre q pour q donné.

Il ne reste qu'à démontrer que la première somme d'intégrales est un opérateur du type $H_q\Lambda^{p-1}$ où $H_q \in 0_0$.
Mais alors, la transformation de Fourier nous donne:

$$(x^\nu \Lambda_2^p(x)) \xrightarrow{\mathfrak{F}} \left(\frac{-1}{2\pi i}\right)^{|\nu|}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\nu (1-\alpha(\xi))|\xi|^p = \hat{\psi}_\nu(\xi)|\xi|^{p-1}$$

Donc elle s'écrit

(1, 24) $$\sum_{0<|\nu|<m}(-1)^{|\nu|}\frac{D^\nu a(x)}{\nu!}\psi_\nu \Lambda^{p-1}[u],$$

$$\hat{\psi}_\nu(\xi) = \left[\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\nu ((1-\alpha(\xi))|\xi|^p)\right]|\xi|^{1-p}$$

où on voit bien que $\hat{\psi}_\nu(\xi)$ satisfait à la condition (1, 6) parce que

$$\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\alpha \hat{\psi}_\nu(\xi) = \left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\alpha\left[\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\nu \{(1-\alpha(\xi))|\xi|^p\}|\xi|^{1-p}\right] \quad |\xi|\geq 1, \quad |\nu|\geq 1$$

$$= \sum C_\beta^\delta \left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\beta\left[\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\nu \{(1-\alpha(\xi))|\xi|^p\}\right]\cdot\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\delta |\xi|^{1-p}$$

Donc on a

(1, 24') $$\left|\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\alpha \hat{\psi}_\nu(\xi)\right| \leq \sum_{\beta+\delta=\alpha} C_\beta^\delta \frac{K^{|\nu|+|\beta|}}{|\xi|^{|\beta+\nu|}\cdot|\xi|^{|\delta|-1}} = \frac{K'^{|\alpha|}}{|\xi|^{|\alpha|}}$$

$$|\nu|\geq 1, \quad |\xi|\geq 1, \quad |\alpha|\geq 1$$

Evidemment, $\hat{\psi}_\nu(\xi)$ est borné $|\nu|\geq 1$.
Par conséquent, compte tenu de ce que $a(x)\in\mathcal{B}_x$,
$H_q=\sum_{0<|\nu|\leq m-1}(-1)^{|\nu|}\frac{D^\nu a(x)}{\nu!}\psi_\nu$ appartient à 0_0. On peut étendre cette proposition aux opérateurs qui sont de la forme $a(x)h$ (ou $ha(x)$) c'est-à-dire :

Corollaire 1. *Soit $H=a(x)h$, $a(x)\in\mathcal{B}_x$ et $\hat{h}(\xi)$ satisfait à la condition* (1, 6), *alors on a* $\Lambda^p H-H\Lambda^p=H_q\Lambda^{p-1}+B_q$ *et* $H^*\Lambda^p-\Lambda^p H^*=H'_q\Lambda^{p-1}+B'_q$ *pour q donné quelconque.* $H'_q, H_q\in 0_0$, B_q, B'_q *sont d'ordre q.*

Démonstration Il suffit de démontrer la première égalité parce qu'on a $\Lambda^p H^*-H^*\Lambda^p=\Lambda^p h^*\bar{a}(x)-h^*\bar{a}(x)\Lambda^p=h^*(\Lambda^p\bar{a}(x)-\bar{a}(x)\Lambda^p)$ qui sera traité presque par la même façon pour le cas de $\Lambda^p H-H\Lambda^p$.

Posons $h[u]=v$ pour tous $u\in\mathfrak{D}^\infty$. Alors on a

$$\begin{aligned}\Lambda^p H-H\Lambda^p[u] &= (\Lambda^p a(x)h-a(x)h\Lambda^p)[u]\\ &= (\Lambda^p a(x)-a(x)\Lambda^p)h[u]=(\Lambda^p a(x)-a(x)\Lambda^p)[v]\\ &= (\bar{H}_q\Lambda^{p-1}+\bar{B}_q)[v]=(\bar{H}_q h\Lambda^{p-1}+\bar{B}_q h)[u]=(H_q\Lambda^{p-1}+B_q)[u]\end{aligned}$$

où H_q est un opérateur 0_0 parce que $\sigma(H_q)=\sum a'_\nu(x)\hat{h}_\nu(\xi)\hat{h}(\xi)$ et que $\hat{h}_\nu(\xi)\hat{h}(\xi)$ satisfait à la condition (1, 6). En plus, $B_q=\bar{B}_q h$ est un opérateur d'ordre q parce que h est borné de $\mathfrak{D}^q_{L^2}$ dans lui-même et que $\Lambda^r B_q\Lambda^s=\Lambda^r\bar{B}_q\Lambda^s\cdot h$ (par la commutativité)

Nous allons généraliser en suite cette proposition aux opérateurs $\in 0_0$. Avant cette généralisation de la proposition, nous remarquons le fait suivant :

Corollaire 2 *Soit H un opérateur du type $a(x)h$ où $a(x)\in\mathcal{B}_x$ et $\hat{h}(\xi)$ satisfait à la condition* (1, 6), *alors les opérateurs $a(x)h_1$ et $h_1a(x)$ sont des opérateurs d'ordre ∞ (Ici h_1 est défini par $\hat{h}_1(\xi)=\alpha(\xi)\hat{h}(\xi)$ où $\alpha(\xi)$ est la même fonction utilisée pour définir Λ_1^p dans la démonstration de la proposition* 1, 2).

Démonstration On n'à qu'à remplacer Λ_1^p dans la démonstration de la proposition 1, 2 par h_1.

Maintenant, nous démontrons la proposition suivante qu'on doit essentiellement à M. S. Mizohata [8].

Proposition 1, 3 *Si $H\in 0_0$, on a une décomposion de l'opérateur $\Lambda^p H-H\Lambda^p$ $(H^*\Lambda^p-\Lambda^p H^*)$ pour p, q deux entiers quelconques.*

(1, 25) $\Lambda^p H-H\Lambda^p=H_q\Lambda^{p-1}+B_q$ *où* $H_q\in 0_0$, B_q : *d'ordre q*

(1, 25') $H^*\Lambda^p-\Lambda^p H^*=H'_q\Lambda^{p-1}+B_q$ *où* $H'_q\in 0_0$, B'_q : *d'ordre q*

Démonstration Pour le cas simple où $H=a(x)h$, on a déjà la proposition 1, 2, corollaire 1. Nous revenons à l'expression (1, 1) pour le cas général. On a, en appliquant termes à termes le corollaire

$$(1,26)\qquad \Lambda^p H - H\Lambda^p = \sum_\mu (\Lambda^p a_\mu(x) h_\mu - a_\mu(x) h_\mu \Lambda^p)$$
$$= \sum_\mu (H_q^\mu \Lambda^{p-1} + B_q^\mu) h_\mu = H_q \Lambda^{p-1} + B_q$$

Donc on n'a qu'à prouver la convergence des séries $\sum_\mu H_q^\mu h_\mu$ et $\sum B_q^\mu h_\mu$.

D'abord, pour $\sum_\mu H_q^\mu h_\mu$, on sait son expression ((1, 24))

$$(1,27)\qquad \|\sum_\mu H_q^\mu h_\mu[u]\| \leqq \sum_\mu \left\|\left(\sum_{0<|\nu|\leq m-1} (-1)^{|\nu|}\frac{D^\nu a_\mu(x)}{\nu!}\psi_\nu h_\mu[u]\right)\right\|$$
$$\leqq \sum_\mu \left(\sum_{0<|\nu|\leq m-1} \sup \frac{|D^\nu a_\mu(x)|}{\nu!} \sup_{|\xi|} |\hat{\psi}_\nu(\xi)|\right) B_\mu \|u\|$$
$$\leqq C(n,p,q)(\sum_\mu (\sum_{0<|\nu|\leq m-1} A_\mu^\nu K_\nu) B_\mu \|u\|$$

Visiblement, $H_q = \sum_\mu H_q^\mu h_\mu$ appartient à 0_0 parce que $\hat{\psi}_\nu(\xi)\hat{h}_\mu(\xi)$ satisfait à la condition (1, 6).

Grâce à la décomposition pour le cas simple de la proposition 1, 2, on a en désignant $B_\nu^\mu u = \sum_{|\nu|=m} \int \frac{a_\nu^\mu(x,y)}{\nu!}(x-y)^\nu \Lambda_2^p(x-y) u(y) dy$.

$$(1,28)\qquad B_q = \sum_\mu B_q^\mu h_\mu = \sum_\mu (a_\mu(x)\Lambda_1^p - \Lambda_1^p a_\mu(x)) h_\mu + \sum_\mu \sum_{|\nu|=m} B_\nu^\mu h_\mu = P_1 + P_2.$$

Nous montrons que P_1 est d'ordre ∞, et que P_2 est d'ordre q. L'inégalité (1, 22') nous donne pour q donné quelconque :

$$(1,29)\qquad \|\Lambda^r P_1 \Lambda^s[u]\| \leqq \sum_\mu \|(\Lambda^r a_\mu(x)\Lambda_1^p \Lambda^s h_\mu[u] + \Lambda^r \Lambda_1^p a_\mu(x)\Lambda^s h_\mu[u]\|$$
$$\leqq C(q) \sum_\mu (\sum_{|\beta|\leq q} \sup |D^\beta a_\mu(x)|) \sup |\hat{h}_\mu(\xi)|\ \|u\|$$
$$\leqq C(q)\{\sum_\mu (\sum_{|\beta|\leq q} A_\mu^\beta) B_\mu\}\ \|u\| \qquad r+s \leqq q$$

et puis (1, 19) dans le lemme 1, 1 montre (si on prend $m=|\nu| = p+q+n+1$)

$$(1,30)\qquad \|\Lambda^r P_2 \Lambda^s[u]\| \leqq C(p,q,n) \sum_\mu \left(\sum_{|\beta\leq r} \sum_{\substack{|\beta'|\leq s \\ |\nu|=m}} \sup \left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\beta a_\mu^\nu(x,y)\right|\right)$$
$$\times \sup |\hat{h}_\mu(\xi)|\ \|u\|$$
$$\leqq \sum_\mu C(p,q,n)(\sum_{|\nu|=m} \sum_{|\beta|\leq q+m} \sup |D^{\beta+\nu} a_\mu(x)|) \sup |\hat{h}_\mu(\xi)|\ \|u\|$$
$$\leqq C(p,q,n)(\sum_\mu (\sum_{|\beta|\leq q+m} A_\mu^\beta B_\mu))\|u\|$$

ce qui signifie la convergence de la série $\sum_{\mu} B_q^{\mu} h_{\mu}$, que P_1 est d'ordre ∞, et que P_2 est d'ordre q si $m=n+1+p+q$.

Pour l'opérateur $\Lambda^p H^* - H^* \Lambda^p$, on voit facilement que le raisonnement qu'on vient de faire peut être appliqué exactement de la même manière, en tenant compte du fait :

$$\begin{aligned}\Lambda^p H^* - H^* \Lambda^p &= \sum_{\mu} (\Lambda^p h_{\mu}^* \bar{a}_{\mu}(x) - h_{\mu}^* \bar{a}_{\mu}(x) \Lambda^p) \\ &= \sum_{\mu} h_{\mu}^* (\Lambda^p \bar{a}_{\mu}(x) - \bar{a}_{\mu}(x) \Lambda^p) .\end{aligned}$$

Comme un cas particulier, on voit tout de suite :

Corollaire *Si H appartient à 0_0, $\Lambda H - H\Lambda$ appartient à $\mathcal{A}_1$, c'est-à-dire, il y a une décomposition $\Lambda H - H\Lambda = H_q + B_q$ pour q donné quelconque. Ici $H_q \in 0_0$ et $B_q \in \mathcal{A}_1$. D'ailleurs, on a la majoration* :

$$(1, 31) \qquad \| (\Lambda H - H\Lambda)[u] \| \leqq C(n) (\sum_{\mu} (\sum_{0 \leq |\alpha| \leq n+2} A_{\mu}^{\alpha}) B_{\mu} \| u \| .$$

Maintenant, on peut énoncer le

Théorème 1 *Si un opérateur K appartient à $\mathcal{A}_1$, alors $\Lambda K - K\Lambda$ y appartient aussi. (c'est-à-dire $\mathcal{A}_1$ est fermé pour cette opération)*

Démonstration Puisque K est un élément de $\mathcal{A}_1$, il y a une décomposition du type $K = H_q + B_q$ pour q quelconque où $H_q \in 0_0$ et B_q est d'ordre q. Nous prenons la décomposition qui correspond à $q+1$ pour q donné. Donc $K = H'_{q+1} + B'_{q+1}$. Envisageons l'opérateur $\Lambda K - K\Lambda$, on a

$$\Lambda K - K\Lambda = \Lambda H'_{q+1} - H'_{q+1}\Lambda + \Lambda B'_{q+1} - B'_{q+1}\Lambda .$$

Par la proposition 1, 3, $\Lambda H'_{q+1} - H'_{q+1}\Lambda = H_q + B_q$. Or, $\Lambda B'_{q+1}$ et et $B'_{q+1}\Lambda$ sont des opérateurs d'ordre q par définition. Donc on a une décomposition $\Lambda K - K\Lambda = H_q + (B_q + \bar{B}_q)$ où $\bar{B}_q = \Lambda B_{q+1} - B_{q+1}\Lambda$.

c.q.f.d.

Nous définissons $H^{\#}$ pour $H \in 0_0$ par la formule suivante :

$$(1, 32) \qquad H^{\#} = \sum \bar{a}_{\mu}(x) h_{\mu}^* \qquad \text{si } H = \sum a_{\mu}(x) h_{\mu} .$$

On verra que si H appartient à 0_0, H^* appartient à $\mathcal{A}_1$. Pour le démontrer, nous envisageons encore le cas simple où $H = a(x)h \in 0_0$ par suite $H^* = h^* \bar{a}(x)$, $H^{\#} = \bar{a}(x) h^*$. Alors $H^{\#} - H^* = \bar{a}(x) h^* - h^* \bar{a}(x)$ qui est de la forme pareille à l'opérateur $a(x)\Lambda - \Lambda a(x)$ traité dans la proposition 1, 2, sera envisagé un peu plus en détail, on a le

Lemme 1, 2 *L'opérateur $H^{\#}-H^{*}$ peut être développé de la manière suivante pour q donné quelconque.*

$$H^{\#}-H^{*}=H_1+H_2+\cdots\cdots+H_q+H_\infty \tag{1, 33}$$

où H_i $(i=1,2,\cdots,q-1)\in 0_0$ *est d'ordre* i.

$H_q\in\mathfrak{X}_1$ *est d'ordre* q.

H_∞ *est d'ordre* ∞. (*Evidemment* $H_\infty\in\mathfrak{X}_1$)

Démonstration Nous développons $\bar{a}(x)h^*-h^*\bar{a}(x)$ par le même procédé utilisé dans la démonstration de la proposition 1, 2. On sait déjà que si on désigne par h_1^* l'opérateur qui est défini par $\hat{h}_1^*(\xi)=\alpha(\xi)\hat{h}^*(\xi)$ avec $\alpha(\xi)$ utilisée dans le corollaire de la proposition 1, 2, alors $\bar{a}(x)h_1^*$ et $h_1^*\bar{a}(x)$ sont des opérateurs d'ordre ∞. Ce qui est important est la deuxième partie $\bar{a}(x)h_2^*-h_2^*\bar{a}(x)$.
Alors nous appliquons la décomposition (N), on a

$$\begin{aligned}(\bar{a}(x)h_2^*-h_2^*\bar{a}(x))[u]&=\int(\bar{a}(x)-\bar{a}(y))h_2^*(x-y)u(y)dy\\&=\int\sum_{0<|\nu|\leq m-1}\frac{D^\nu\bar{a}(x)}{\nu!}(x-y)^\nu h_2^*(x-y)u(y)dy\\&\quad+\int\sum_{|\nu|=m}\frac{\bar{a}_\nu(x,y)}{\nu!}(x-y)^\nu h_2^*(x-y)u(y)dy\end{aligned} \tag{1, 34}$$

où la deuxième intégrale a été bien étudiée au lemme 1, 1 $(l=0)$ dont on sait qu'elle définit un opérateur d'ordre q pour $|\nu|=m$ assez grand $(m=q+n+1)$. Alors il ne reste qu'à expliciter la première intégrale.

Nous commençons par envisager le premier terme :

$$\sum_{1\leq i\leq n}\int\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\bar{a}(x)(x_i-y_i)h_2^*(x-y)u(y)dy$$

que nous désignerons $H_1[u]$. On obtient

$$\|\Lambda H_1[u]\|\leqq C(n)\Big(\sum_{1\leq|\alpha|\leq 2}\sup\Big|\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^\alpha\bar{a}(x)\Big|\Big)\times\Big(\sum_{|\beta|\leq 1}\sup_{|\xi|\geq 1}\Big|(|\xi|)^{|\beta|}\Big(\frac{\partial}{\partial\xi}\Big)^\beta\hat{h}_2^*(\xi)\Big|\Big)\|u\| \tag{1, 35}$$

parce que $\Lambda H_1[u]=\sum_i i\left(R_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)H_1[u]=\int\sum_i i\left(R_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\sum_j\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\bar{a}(x)$ $\times(x_j-y_j)h_2^*(x-y)u(y)\,dy+iR_i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\bar{a}(x)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)(x_j-y_j)h_2^*(x-y)u(y)dy$ et on peut appliquer le théorème de Plancherel. On obtient en même temps l'inégalité :

$$(1,35') \qquad \|H_1\Lambda[u]\| \leqq C(n)\Big(\sum_{|\beta|=1}\sup\Big|\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^{\beta}\bar{a}(x)\Big|\Big) \times\Big(\sum_{|\beta|=1}\sup\Big|(|\xi|)^{|\beta|}\Big(\frac{\partial}{\partial \xi}\Big)^{\beta}\hat{h}_2^*(\xi)\Big|\Big)\|u\|$$

(1, 35), (1, 35′) signifient que H_1 est un opérateur d'ordre 1. Si nous désignons $H_i[u]=\int\sum_{|\nu|=i}\frac{\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\nu}a(x)}{\nu!}(x-y)^{\nu}h_2^*(x-y)u(y)dy$ $(i=1,2,\cdots,q-1)$, nous obtenons par la même méthode les inégalités:[6]

$$(1,36) \qquad \|\Lambda^r H_i\Lambda^s[u]\| \leqq C(n)\Big(\sum_{\substack{|\nu|=i\\0\leq|\beta|\leq i}}\sup\Big|\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^{\nu+\beta}\bar{a}(x)\Big|\Big) \times\Big(\sum_{|\nu|\leq i}\sup|\xi|^{|\nu|}\Big|\Big(\frac{\partial}{\partial \xi}\Big)^{\nu}\hat{h}_2{}^*(\xi)\Big|\Big)\|u\|. \qquad r+s\leqq i$$

On voit facilement comme on a vu dans la proposition 1, 2 que H_i appartiennent à 0_0. Maintenant, il faut définir $H_q[u]$ par la somme: $\int\sum_{q\leq|\nu|\leq m-1}\frac{\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\nu}a(x)}{\nu!}(x-y)^{\nu}h_2^*(x-y)u(y)dy+$ la deuxième intégrale dans (1, 34)

$$=H_q^1[u]+H_q^2[u]$$

La première intégrale sera évaluée par la même discussion qu'on vient de faire. On a

$$(1,37) \qquad \|\Lambda^r H_q^1\Lambda^s[u]\| \leqq C(n)\Big(\sum_{\substack{q\leq|\nu|\leq m-1\\|\beta|\leq q}}\sup\Big|\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^{\nu+\beta}a(x)\Big|\Big) \times\Big(\sum_{q\leq|\nu|\leq m-1}\sup|\xi|^{q}\Big|\Big(\frac{\partial}{\partial \xi}\Big)^{\nu}\hat{h}_2^*(\xi)\Big|\Big)\|u\| \qquad r+s\leqq q\,,$$

quant à H_q^2, c'est un cas particulier du lemme 1, 1, prenant $K(|\nu|)=\sum_{|\nu|=|m|}B^{\nu}$ on a par (1, 19), $(|\nu|=m=n+1+q)$

$$(1,38) \qquad \|\Lambda^r H_q^2\Lambda^s[u]\| \leqq C(n,q)\Big(\sum_{0\leq|\alpha|\leq m+q}\sup\Big|\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^{\alpha}a(x)\Big|\Big) \times\Big(\sum_{0\leq|\mu|\leq q}K(|\nu|)+K(2p-|\mu|+|\nu|)\Big)\|u\| \qquad r+s\leqq q\,,\quad 2p=\max(q,n+1)\,.$$

---

6) Nous utilisons toujours la même $C(n)$ pour exprimer une constante qui ne dépend que de n.

En resumé, (1, 36) (1, 38) montrent que H_i sont d'ordre i et que H_q est d'ordre q. Donc on peut établir notre développement en posant $H=\bar{a}(x)h_1^* - h_1^*\bar{a}(x)$.

On peut le généraliser au cas général.

Proposition 1, 4 *Si* $H\in 0_0$, $H^*\in \mathfrak{A}_1$ *et on a le développement pour* q *donné quelconque*:

$$(1,39)\qquad H^*-H^{\#}=H_1+H_2+\cdots\cdots+H_q+H_\infty$$

où H_i $(i=1,2,\cdots,q-1)\in 0_0$ *est d'ordre* i *respectivement,*
$H_q\in\mathfrak{A}_1$ *est d'ordre* q.
H_∞ *est d'ordre* ∞.

Démonstration Par les conditions (1, 4)-(1, 6) imposées à H, qui s'exprime en série $H=\sum_\mu a_\mu(x)h^\mu$, on peut faire la même discussion qui a été faite à la démonstration de la proposition 1, 3 en remplaçant Λ^p par h^μ. Par exemple, (1, 36) donne une majoration pour H_i $(i=1,2,\cdots,q-1)$ où H_i est défini par

$$(1,40)\quad H_i=\sum_\mu H_i^\mu,\quad H_i^\mu[u]=\int\sum_{|\nu|=i}\frac{D^\nu a_\mu(x)}{\nu!}(x-y)^\nu h_2^{*\mu}(x-y)u(y)dy$$

Aussi (1, 37), (1, 38) donnent une majoration pour

$$(1,41)\quad H_q=\sum_\mu H_q^\mu,\quad H_q^\mu[u]=\int\sum_{q\leqq|\nu|\leqq m-1}\frac{D^\nu a_\mu(x)}{\nu!}(x-y)^\nu h_2^{*\mu}(x-y)u(y)dy$$

$$m=1+n+q\qquad +\int\sum_{|\nu|=m}\frac{a_\mu^\nu(x,y)}{\nu!}(x-y)^\nu h_2^{*\mu}(x-y)u(y)dy$$

Pour H_∞, il y a une inégalité analogue aux (1, 22) (1, 22').
En résumé, on peut se persuader que H_i $(i=1,2,\cdots q-1)$ sont d'ordre i respectivement et que H_q est d'ordre q, H est d'ordre ∞. Il nous reste donc à démontrer que H_i $(i=1,2,\cdots q-1)$ appartiennent à 0_0. Pour cela, il suffit de montrer que $\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\nu \hat{h}_2^{*\mu}(\xi)$ $(|\nu|\geqq 1)$ satisfasse aux conditions (1, 5) (1, 6). En effet, on a

$$\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\nu \hat{h}_2^{*\mu}(\xi)=\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\nu((1-\alpha(\xi))\hat{h}_2^{*\mu}(\xi)),$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\nu \hat{h}_2^{*\mu}(\xi)=\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^{\alpha+\nu}\hat{h}^{*\mu}(\xi)\qquad |\xi|\geqq 2$$

d'où

$$(1,42)\qquad \left|\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^{\nu}\hat{h}_2^{*\mu}(\xi)\right| \leqq \frac{B'^{\alpha}_{\mu}}{|\xi|^{|\alpha+\nu|}} \qquad |\xi|\geqq 1$$

B'^{p}_{μ}: suite à croissance polynomiale c.q.f.d.

Corollaire *Si H appartient à 0_0, alors $\Lambda(H^*-H^{\#})$ et $(H^*-H^{\#})\Lambda$ appartiennent à $\mathfrak{A}_1$.*

Démonstration Par le théorème, on peut décomposer $H^*-H^{\#}$ pour q donné quelconque:

$$H^*-H^{\#} = H_1+H_2+\cdots\cdots+H_{q+1}+H_{\infty}$$

où H_i $(i=1,2,\cdots q)\in 0_0$ d'ordre i respectivement, H_{q+1} est d'ordre $q+1$ et H_{∞} est d'ordre ∞. Donc on a

$$\Lambda(H^*-H^{\#}) = \Lambda H_1+\Lambda H_2+\cdots\cdots+\Lambda H_{q+1}+\Lambda H_{\infty}\,.$$

Mais ΛH_{q+1} et ΛH_{∞} sont d'ordre q par définition.

On peut montrer que ΛH_i $(i=1,2,\cdots q)$ appartiennent à $\mathfrak{A}_1$. Puisque $\Lambda H_i-H_i\Lambda\in\mathfrak{A}_1$ (Théorème 1), il suffit de prouver que $H_i\Lambda\in 0_0$. Supposons de nouveau que H_i s'est exprimé par

$$H_i = \sum_{\mu} a_{\mu}(x)h_{\mu}$$

Alors (1, 42) montre

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^{\alpha}\hat{h}_{\mu}(\xi)\right| \leqq \frac{B'^{\beta}_{\mu}}{|\xi|^{|\alpha|+i}} \qquad |\xi|\geqq 1$$

donc par Leipniz

$$(1,43)\qquad \left|\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^{\alpha}(\hat{h}_{\mu}(\xi)|\xi|)\right| = \left|\sum_{\beta+\delta=\alpha} C^{\delta}_{\beta}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^{\beta} h_{\mu}(\xi)\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^{\delta}|\xi|\right|$$
$$\leqq C\frac{(\sum C_{\beta}B'^{\beta}_{\mu})}{|\xi|^{|\alpha|+i-1}}\ |\xi|\geqq 1 \qquad i\geqq 1$$

où $\qquad (\sum_{\beta} C_{\beta}B'^{\beta}_{\mu})$ est une suite à croissance polynomiale.

Donc, $\hat{h}_{\mu}(\xi)|\xi|$ satisfait à la condition (1, 6). On note aussi que $\hat{h}_{\mu}(\xi)|\xi|$ est à support dans $|\xi|\geqq 1$, donc satisfait à (1, 5). Par conséquent, $\Lambda(H^*-H^{\#})\in\mathfrak{A}_1$, en même temps $(H^*-H^{\#})\Lambda\in\mathfrak{A}_1$.

Maintenant, nous avançons de démontrer que $\mathfrak{A}_1$ est une algèbre c'est-à-dire que si H_1 et H_2 appartiennent à $\mathfrak{A}_1$, alors H_1H_2 (la composition au sens de l'opérateur) appartient à $\mathfrak{A}_1$. Pour cela nous commençons comme toujours par traiter le cas le plus simple où $H=a(x)h$, $K=b(x)k$.

Nous donnons une définition : [1]

Définition *Si* $H=\sum_{\mu} a_{\mu}(x)h^{\mu}$, $K=\sum_{\nu} b_{\nu}(x)k^{\nu}\in 0_0$, *nous désignerons l'opérateur* $\sum a_{\mu}(x)b_{\nu}(x)h^{\mu}k^{\nu}$ *par* $H\circ K$. *Naturellement* $H\circ K\in 0_0$.

Proposition 1, 5 *Soient* H, K *deux opérateurs* $\in 0_0$ *qui s'expriment* $H=a(x)h$, $K=b(x)k$, *alors* $HK\in\mathfrak{A}_1$, *et en plus* HK *possède la décomposition suivante pour* q *donné quelconque,*

$$HK = H\circ K+\bar{H}_q+\bar{B}_q \tag{1, 44}$$

où $\bar{H}_q$ *appartient à* 0_0 *et* $\bar{H}_q\in\mathfrak{A}$, $\bar{H}_q\Lambda$ *appartiennent à* $\mathfrak{A}_1$ *et* $\bar{B}_q$ *est d'ordre* q.

Démonstration Par la définition de $H\circ K$, on a pour q donné :

$$\begin{aligned} HK-H\circ K &= a(x)hb(x)k-a(x)b(x)hk \\ &= a(x)(hb(x)-b(x)h)k \\ &= a(x)(H_1+H_2+\cdots+H_{q+1}+H_\infty)k \quad \text{(Lemme 1, 2)} \end{aligned}$$

Si on pose $a(x)(H_1+H_2+\cdots+H_q)k=\bar{H}_q$, $a(x)(H_{q+1}+H_\infty)k=\bar{B}_q$, on voit assez facilement que $\bar{H}_q$ appartient à 0_0 et que $\bar{B}_q$ est d'ordre $q+1$ par la proposition 1, 3). Donc $HK-H\circ K\in\mathfrak{A}_1$. En plus, $\bar{H}_q\Lambda$ appartient à 0_0 (parce que $\bar{H}_q$ est d'ordre 1) et $\bar{B}_q\Lambda$ est d'ordre q. Par conséquent, $\Lambda(HK-H\circ K)$, $(HK-H\circ K)\Lambda$ appartiennent à $\mathfrak{A}_1$.

Enfin, nous énonçons la généralisation de cette proposition.

Proposition 1, 6 *Soient* H *et* K *deux opérateurs dans* 0_0. HK *appartient à* $\mathfrak{A}_1$. $\Lambda(HK-H\circ K)$, $(HK-H\circ K)\Lambda$ *y appartiennent aussi.*

Démonstration Nous supposons que H et K se sont exprimés en forme :

$$H=\sum_{\mu} a_{\mu}(x)h^{\mu}, \qquad K=\sum_{\nu} b_{\nu}(x)k^{\nu}$$

Puisque H, K satisfont aux conditions (1, 3)-(1, 6), nous posons

$$\begin{aligned} &\sup|D^{\alpha}a_{\mu}(x)|=A_{\mu}^{\alpha}, \quad \sup|\hat{h}^{\mu}(\xi)|=B_{\mu}, \quad \sup_{|\xi|\geq 1}|\xi|^{|\alpha|}|D^{\alpha}\hat{h}^{\mu}(\xi)|=B_{\mu}^{\alpha}, \\ &\sup|D^{\alpha}b_{\nu}(x)|=A_{\nu}'^{\alpha}, \quad \sup|\hat{k}^{\nu}(\xi)|=B_{\nu}', \quad \sup_{|\xi|\geq 1}|\xi|^{|\alpha|}|D^{\alpha}\hat{k}^{\nu}(\xi)|=B_{\nu}'^{\alpha}. \end{aligned}$$

Alors $\{A_{\mu}^{\alpha}\}$, $\{A_{\nu}'^{\alpha}\}$ sont des suites à décroissance rapide et $\{B_{\mu}\}$, $\{B_{\mu}^{\alpha}\}$, $\{B_{\nu}'\}$, $\{B_{\nu}'^{\alpha}\}$ sont des suites à croissance polynomiale. Cela étant, on peut écrire $HK-H\circ K=\sum_{\mu,\nu} a_{\mu}(x)(h^{\mu}b_{\nu}(x)-b_{\nu}(x)h^{\nu})k^{\nu}$. Il faut démontrer que la série $\sum a_{\mu}(x)(h^{\mu}b_{\nu}(x)-b_{\nu}(x)h^{\mu})k^{\nu}$ soit convergente au sens de "l'opérateur-norme" avec $\sum \Lambda a_\mu(x)(h^\mu b_\nu(x)-b_\nu(x)h^\mu)k^\nu$ et $\sum a_\mu(x)(h^\mu b_\nu(x)-b_\nu(x)h^\mu)k^\nu\Lambda$ et qu'ils appartiennent tous à $\mathfrak{A}_1$.

La proposition 1, 5 nous montre que l'opérateur $(h^\mu b_\nu(x)-b_\nu(x)h^\mu)$ peut s'écrire en forme $\bar{H}^{\mu,\nu}_{q+1}+\bar{B}^{\mu,\nu}_{q+1}$ où $\bar{H}^{\mu,\nu}_{q+1}\in 0_0$, $\bar{B}^{\mu,\nu}_{q+1}$ est d'ordre $q+1$. Donc il faut prouver que premièrement, $\sum a_\mu(x)\bar{H}^{\mu,\nu}_{q+1}k^\nu$ soit convergente (Ce qui signifie que cette série appartient à 0_0) avec $\sum \Lambda a_\mu(x)\bar{H}^{\mu,\nu}_{q+1}k^\nu$ et $\sum a_\mu(x)\bar{H}^{\mu,\nu}_{q+1}k^\nu\Lambda$. Et deuxièmement, il faut montrer que la série $\sum a_\mu(x)\bar{B}^{\mu,\nu}_{q+1}k^\nu$ soit convergente et d'ordre $q+1$.

Cette fois aussi, la méthode de la série (double) majorante marche bien. Alors nous éffectuons la démonstration seulement pour $\sum a_\mu(x)\bar{H}^{\mu,\nu}_{q+1}k^\nu\Lambda$ et $\sum a_\mu(x)\bar{B}^{\mu,\nu}_{q+1}k^\nu$ parce que pour les autres, le même raisonnement peut s'appliquer.

Envisageons le premier, on a

$$\bar{H}^{\mu,\nu}_{q+1}=H^{\mu,\nu}_1+H^{\mu,\nu}_2+\cdots\cdots+H^{\mu,\nu}_q$$

(1, 36) nous donne

$$\|H^{\mu,\nu}_i\Lambda[u]\|\leqq C(n)\Big(\sum_{0\leqq|\beta|\leqq 1+i}\sup|D^\beta b_\nu(x)|\Big)$$
$$\times\Big(\sum_{1\leqq|\alpha|\leqq i}\sup|\xi|^{|\alpha|}\Big|\Big(\frac{\partial}{\partial\xi}\Big)^\alpha\hat{h}^\mu_2(\xi)\Big|\Big)\|u\|$$

d'où vient

$$\|H^{\mu,\nu}_i\Lambda[u]\|\leqq C(n)(\sum_{0\leq|\beta|\leq i+1}A'^{(\beta)}_\nu)(\sum_{1\leq|\alpha|\leq i}B^{(\alpha)}_\mu)\|u\|$$

Donc on a

$$\|\bar{H}^{\mu,\nu}_{q+1}\Lambda[u]\|\leqq\sum_{i=1}^{q}\|H^{\mu,\nu}_i\Lambda[u]\|\leqq M(\sum_{0\leq|\beta|\leq q+1}A'^{(\beta)}_\nu)(\sum_{1\leq|\alpha|\leq q}B^{(\alpha)}_\mu)\|u\|$$

par suite

$$\sum_{\mu,\nu}\|a_\mu(x)\bar{H}^{\mu,\nu}_{q+1}k^\nu[u]\|\leqq\sum_{\mu,\nu}M(A_\mu(\sum_{0\leq|\beta|\leq q+1}A'^{(\beta)}_\nu)(\sum_{1\leq|\alpha|\leq q}B^{(\alpha)}_\mu)B'_\nu)\|u\| \tag{1, 45}$$

On voit facilement la convergence de cette série double numérique.

Maintenant nous évaluons $\sum a_\mu(x)\bar{B}^{\mu,\nu}_{q+1}k^\nu$, il faut démontrer que cet opérateur soit d'ordre $q+1$, c'est-à-dire que

$$\Lambda^r\sum_{\mu,\nu}a_\mu(x)\bar{B}^{\mu,\nu}_{q+1}k^\nu\Lambda^s \quad \text{soit borné pour } r+s\leqq q+1\,.$$

En tenant compte de ce que

$$\Lambda^r a_\mu(x)\bar{B}^{\mu,\nu}_{q+1}k^\nu\Lambda^s = a_\mu(x)\Lambda^r\bar{B}^{\mu,\nu}_{q+1}k^\nu\Lambda^s + a_\mu(x)H_1\Lambda^{r-1}B^{\mu,\nu}_{q+1}k^\nu\Lambda^s + a_\mu(X)B_1\bar{B}^{\mu,\nu}_{q+1}k^\nu\Lambda^s.$$

(en vertu de la proposition 1, 3)
Il suffit de démontrer que $\sum a_\mu(x)\Lambda^r\bar{B}^{\mu,\nu}_{q+1}\Lambda^s k^\nu$ soit borné.
Alors (1, 37) (1, 38) nous montrent

$$(1,46)\qquad \|\sum(a_\mu(x)\Lambda^r\bar{B}^{\mu,\nu}_{q+1}\Lambda^s k^\nu)[u]\| \leqq M_1\sum_{\mu,\nu}A_\mu(\sum_{0\leqq|\beta|\leqq m+q+1}A'^{(\beta)}_\nu)$$
$$\times(\sum_{\substack{|\alpha|=m\\ 0\leqq|\gamma|\leqq q}}K_\mu(|\alpha|)+K_\mu(2p-|\gamma|+|\alpha|))B'_\nu\|u\|$$
$$2p=\max(q,n+1),\quad m=n+1+q$$

Donc on peut dire que $(HK-H\circ K)\Lambda\in\mathfrak{A}_1$. Il en resulte que $\Lambda(HK-H\circ K)$ appartient à $\mathfrak{A}_1$ parce que $HK-H\circ K$ appartient à $\mathfrak{A}_1$ on peut appliquer le théorème 1. c.q.f.d.

Théorème 2 *Soient H, K deux opérateurs de $\mathfrak{A}_1$. Alors HK appartient à $\mathfrak{A}_1$. C'est-à-dire, $\mathfrak{A}_1$ constitue une algèbre.*

Démonstration Par l'hypothèse, on a la décomposition pour q donné quelconque,

$$H=H_q+B^1_q,\quad K=K_q+B^2_q\quad \text{où}\quad H_q,K_q\in 0_0,$$

B^1_q, B^2_q sont d'ordre q.

Alors on obtient

$$HK=(H_q+B^1_q)(K_q+B^2_q)=H_qK_q+B^1_qK_q+H_qB^2_q+B^1_qB^2_q$$

On peut montrer que $B^1_qK_q$, $H_qB^2_q$ sont des opérateurs d'ordre q, parce que la proposition 1, 3 montre que $\Lambda^rB^1_qK_q\Lambda^s=\Lambda^rB^1_q\Lambda^sK_q+\Lambda^rB^1_qH_1\Lambda^{s-1}+\Lambda^rB^1_qB$, et que $\Lambda^rB^1_q\Lambda^s$ est borné pour $r+s\leqq q$ par définition. Or, $B^1_qB^2_q$ est naturellement d'ordre q. Par conséquent, HK appartient à $\mathfrak{A}_1$.

Corollaire *Si H, K appartiennent à $\mathfrak{A}_1$, $(HK-KH)\Lambda$ et $\Lambda(HK-KH)$ y appartient aussi.*

Démonstration On applique comme toujours la décomposition pour $q+1$ (q : donné quelconque) :

$$H=H_{q+1}+B^1_{q+1},\qquad K=K_{q+1}+B^2_{q+1}$$

Alors on a les identités :

$$\Lambda(HK-KH)=\Lambda(H_{q+1}K_{q+1}-K_{q+1}H_{q+1})+\Lambda(B^1_{q+1}K_{q+1}+H_{q+1}B^2_{q+1}+B^1_{q+1}B^2_{q+1})-\Lambda(B^2_{q+1}H_{q+1}+K_{q+1}B^1_{q+1}+B^2_{q+1}B^1_{q+1})$$

Or, $$\Lambda(H_{q+1}K_{q+1}-K_{q+1}H_{q+1}) = \Lambda(H_{q+1}K_{q+1}-H_{q+1}\circ K_{q+1}) + \Lambda(K_{q+1}\circ H_{q+1}-K_{q+1}H_{q+1})$$

La proposition 1, 6 montre que le second membre appartient à $\mathfrak{A}_1$. On voit facilement que les termes qui contiennent B^1_{q+1} et B^2_{q+1} sont d'ordre q par la proposition 1, 3. Donc $\Lambda(HK-KH)$ et $(HK-KH)\Lambda$ appartiennent à $\mathfrak{A}_1$.

Proposition 1, 7 *Si H est un opérateur de Calderón et Zygmund, tel que son symbole ne s'anulle jamais, alors il existe un opérateur K tel que $HK=I+N$ et N est un opérateur qui appartienne à $\mathfrak{A}_1$, avec ΛN et $N\Lambda$. (I est l'opérateur identique)*

Démonstration Prenons comme K l'opérateur dont le symbole est l'inverse du symbole de H. On n'a qu'à appliquer la proposition 1, 6.

Nous ajoutons une proposition qui est presque évidente.

Proposition 1, 8 *Si K est un opérateur dans $\mathfrak{A}_1$, il est borné de $\mathfrak{D}^m_{L^2}$ dans lui-même pour m quelconque.*

4. Opérateurs dépendant d'un paramètre t. Nous utiliserons dans le chapitre suivant des opérateurs $\in 0_0$ qui dépendent d'un paramètre t. Définissons-les par la série :

$$H(t) = \sum_{\mu} a_{\mu}(t, x)h_{\mu}$$

où $a_{\mu}(t, x)$ est une fonction m fois continûment dérivable en t à valeurs dans $\mathcal{B}_x$ pour $0 \leqq t \leqq h$ qui satisfait uniformément à la condition (1, 4). $\hat{h}_{\mu}(\xi)$ satisfait à (1, 4) (1, 5) et (1, 6). Si les dérivées en t jusqu'à l'ordre m de $a_{\mu}(t, x)$ satisfont à (1, 4) (uniformément en t, mais pas pour l'ordre de dérivation), on définit la dérivée $\frac{dH}{dt}$ de $H(t)$ par

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{\mu} \frac{d}{dt} a_{\mu}(t, x)\cdot h_{\mu}$$

Alors on peut définir la dérivée en t pour tous les opérateurs qui sont fabriqués par la multiplication de Λ aux opérateurs $H(t)$ qui sont déjà définis plus haut, parce que l'opérateur Λ est commutatif avec $\frac{d}{dt}$.

Chapitre II Equation hyperbolique

1. Equation hyperbolique. Nous étudions le problème de Cauchy relatif à l'équation kowalewskienne à coefficients variables :

$$(2,1) \qquad L[u] = \frac{\partial^m u}{\partial t^m} - \sum_{|\nu| \leqq m} A^{\nu_0, \nu_1, \cdots \nu_n}(t, x)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\nu_0}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\nu_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\nu_n} u = v$$

$$\nu = (\nu_0, \cdots \nu_n)$$

Remplaçant symboliquement $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$ par ξ_i et $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$ par λ, nous considérons le polynôme :

$$(2,2) \qquad P_m(\lambda) = \lambda^m - \sum_{|\nu|=m} A^{\nu_0, \nu_1, \cdots \nu_n}(t, x)\lambda^{\nu_0}\xi_1^{\nu_1} \cdots \xi_n^{\nu_n}$$

où nous supposerons $A^{\nu_0 \cdots \nu_n}(t, x)$; une fonction m fois continûment dérivable en t à valeurs dans $\mathcal{B}_x$.

Hypothèse *Nous supposerons dans toute la suite que toutes les racines de l'équation algébrique $P_m(\lambda) = 0$ sont toujours réelles. (pour $|\xi| = 1$) et que si deux racines sont différentes à un point (t_0, x_0, ξ_0) $(|\xi_0| = 1)$ alors la valeur absolue de la différence de ces deux racines qui est une fonction continue de t $(0 \leq t \leq t_1)$, x et ξ $|\xi| = 1$, est supérieure à une constante positive.*

On voit que si toutes les racines ont la multiplicité 1, c'est le cas que M. J. Leray a appellé "régulièrement hyperbolique" [5].

Par le travail de Calderón, on sait déja que ces racines λ_i sont considérées comme les symboles d'opérateurs H_i d'intégrale singulière de Calderón et Zygmund (voir [1], [2]). Donc on a droit de considérer un opérateur d'évolution :

$$(2,3) \qquad \partial_i = \frac{d}{dt} - iH_i\Lambda$$

(il faut discerner l'unité imaginaire i et l'indice i)

Et un opérateur composé de ∂_i, qui correspond à $P_m(\lambda)$:

$$(3,4) \qquad \Pi_m = \prod_i^m \left(\frac{d}{dt} - iH_i\Lambda\right) = \partial_1 \partial_2 \cdots \partial_m .$$

Nous appelons S le module sur l'algèbre $\mathfrak{A}_1$ (définie au chapitre 1), engendré par tous les monômes qui soient obtenus à partir de Π_m en supprimant au moins un des $\partial_1, \partial_2, \cdots, \partial_m$ de Π_m.

Alors le lemme 2,1 montre que si $\partial_{i_1}, \partial_{i_2}, \cdots \partial_{i_k}$ est une base *de S, alors* $\partial_{i_1'}, \partial_{i_2'}, \cdots \partial_{i_k'}$ *appartient à S, où* $i_1', i_2', \cdots, i_k'$ *est une permutation de* $i_1, i_2, \cdots, i_k$. *Or la démonstration du lemme* 2, 1 *dit même plus*: *Soit*

$$\partial_{i_1'}, \partial_{i_2'}, \cdots, \partial_{i_k'} = \sum_{\sigma} K_\sigma(t) b_\sigma, \tag{2, 5}$$

où b_σ *sont des bases de S, alors* $K_\sigma(t)$ *sont des fonctions continues en t à valeurs dans* $\mathfrak{L}(\mathfrak{D}_{L^2}^m, \mathfrak{D}_{L^2}^m)$ *où m est un entier quelconque.*

Envisageons maintenant l'équation d'évolution mise sous la forme :

$$\Pi_m[u] + N[u] = v \tag{2, 6}$$

Nous faisons à l'opérateur $N[u]$ l'hypothèse suivante :

(H) $N[u]$ est une combinaison linéaire des $\partial_{i_1}^{\mu_1}\partial_{i_2}^{\mu_2}\cdots\partial_{i_m}^{\mu_m}$, μ_i prenant 0 ou 1, le cas $\mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_m=1$ étant exclu, et tous les coefficients sont des fonctions continues en t à valeurs dans $\mathfrak{L}(\mathfrak{D}_{L^2}^m, \mathfrak{D}_{L^2}^m)$, s étant un entier quelconque.

Théorème 3 *On suppose que l'équation* (2, 1) *peut être exprimée sous la forme* (2, 6) *vérifiant la condition* (H). *Alors, pour tout* $v(t)$, *fonction continue en t às valeurs dans* $\mathfrak{D}_{L^2}^\infty$,*) *il existe une et une seule solution* $u(t)$, *m fois continûment dérivable en t à valeurs dans* $\mathfrak{D}_{L^2}^\infty$ *vérifiant*

$$u(0) = \frac{d}{dt}u(0) = \cdots\cdots = \frac{d}{dt}u(0) = 0$$

La démonstration de ce théorème sera terminée à la fin du paragraphe 4 de ce chapitre.

Remarque. Le cas régulièrement hyperbolique vérifie évidemment la condition (H). Notre cadre englobe une large classe d'opérateurs hyperboliques à caractéristiques multiples. Par exemple, on a l'opérateur différentiel du type :

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} - a^2(x)\Delta\right)^2 + (\text{termes d'ordre } 1)\left(\frac{d^2}{dt^2} - a^2(x)\Delta\right)$$
$$+ (\text{termes d'ordre au plus } 2) \qquad \text{où} \quad a(x) \in \mathcal{B}_x, \ |a(x)| > \delta > 0\,.$$

La vérification de (H) ne sera pas difficile d'après le lemme 2, 1 du paragraphe suivant.

2. Nous établissons un lemme qui sera essentiel dans le raisonnement qui va suivre.

Lemme 2, 1 *Soient* $\partial_1'\partial_2'\cdots\partial_k'$, $\partial_1''\partial_2''\cdots\partial_k''$ *deux opérateurs composés de* ∂_i $(i=1,2,\cdots m)$ *de* Π_m. *Alors* $\partial_1'\partial_2'\cdots\partial_k'-\partial_1''\partial_2''\cdots\partial_k''$ *est une combinaison linéaire d'oéprateurs composés d'au plus* $(k-1)$ *opérateurs* ∂_i $(i=1,2,\cdots m)$ *dont les coefficients sont dans* $\mathfrak{A}_1$.

Démonstration Notons qu'il suffit de la démontrer pour deux opérateurs $\partial_1\partial_2\cdots\partial_{i-1}\partial_i\partial_j\partial_{j+1}\cdots\partial_k$ et $\partial_1\partial_2\cdots\partial_{i-1}\partial_j\partial_i\partial_{j+1}\cdots\partial_k$ parce que les autres cas seront obtenus par des combinaisons de ces cas simples. Aussi, on peut supposer que $\partial_i\neq\partial_j$ parce que sinon il n'y a rien à démontrer. Nous remarquons que par notre hypothèse, $\partial_i\neq\partial_j$ signifie que le symbole $\sigma(H_i-H_j)$ ne s'anulle jamais pour (t,x) $|\xi|=1$. (En plus $|\sigma(H_i-H_j)|\geqq\delta>0$).

Commençons par le cas le plus simple: On a

$$\begin{aligned}
\partial_i\partial_j-\partial_j\partial_i &= \left(\frac{d}{dt}-iH_i\Lambda\right)\left(\frac{d}{dt}-iH_j\Lambda\right)-\left(\frac{d}{dt}-iH_j\Lambda\right)\left(\frac{d}{dt}-iH_i\Lambda\right)\\
&= -\frac{d}{dt}(iH_j\Lambda)-iH_i\Lambda\left(\frac{d}{dt}-iH_j\Lambda\right)+\frac{d}{dt}(iH_i\Lambda)+iH_j\Lambda\left(\frac{d}{dt}-iH_i\Lambda\right)\\
&= -i\left(\frac{d}{dt}H_j\right)\Lambda-iH_j\frac{d}{dt}\Lambda-iH_i\Lambda\frac{d}{dt}+H_i\Lambda H_j\Lambda\\
&\quad +i\left(\frac{d}{dt}H_i\right)\Lambda+iH_i\Lambda\frac{d}{dt}+iH_j\Lambda\frac{d}{dt}-H_j\Lambda H_i\Lambda\\
&= K_1 i\Lambda\,,\quad K_1=\left(\frac{d}{dt}H_i\right)-\left(\frac{d}{dt}H_j\right)-i(H_j\Lambda)H_i+i(H_i\Lambda)H_j
\end{aligned}$$

Ici, on peut dire que l'opératuer K_1 appartient à $\mathfrak{A}_1$, parce que

$$K_1=\left(\frac{d}{dt}H_i\right)-\left(\frac{d}{dt}H_j\right)-i(H_j\Lambda H_i-H_i\Lambda H_j)$$

Or, $(H_j\Lambda H_i-H_i\Lambda H_j)=(H_jH_i-H_iH_j)\Lambda-H_j(H_i\Lambda-\Lambda H_i)+H_i(H_j\Lambda-\Lambda H_j)$ appartient à $\mathfrak{A}_1$, en vertu du théorème 1 et du corollaire du théorème 2. Compte tenu de ce que $\left(\frac{d}{dt}H_i\right)$, $\left(\frac{d}{dt}H_j\right)$ sont des opérateur de 0_0 défini à la fin du chapitre 1, on voit bien que K_1 appartient à $\mathfrak{A}_1$

Maintenant, nous exprimons Λ par une somme de deux opérateurs ∂_i et ∂_j à coefficients appartenant à $\mathfrak{A}_1$. Puisque $\sigma(H_i-H_j)$ ne s'anulle jamais (En plus sa valeur absolue est toujours supérieure à une constante positive, on peut appliquer la proposition 1, 7. Donc on a un opérateur $K_2\in 0_0$ tel que

$$\sigma(K_2)\sigma(H_i-H_j)=I,\quad K_2(H_i-H_j)=I+N',\qquad N',\ N'\Lambda,\ \Lambda N'\in\mathfrak{A}_1\,.$$

Or

$$\partial_i-\partial_j=-iH_i\Lambda+iH_j\Lambda=i(H_j-H_i)\Lambda\,. \tag{2, 7}$$

En multipliant K_2 à gauche, on a

$$K_2(\partial_j-\partial_i)=i(I+N')\Lambda=i\Lambda+iN'\Lambda\,,\qquad B_1=iN'\Lambda$$

d'où on obtient

$$i\Lambda=K_2(\partial_j-\partial_i)+B_1\,,\qquad K_2,\,B_1\in\mathfrak{A}_1\ \text{(Proposition 1, 7)} \tag{2, 8}$$

$$\partial_i\partial_j-\partial_j\partial_i=K(\partial_j-\partial_i)+B\,,\qquad K=K_1K_2,\ B=B_1K_1\in\mathfrak{A}_1\,. \tag{2, 9}$$

Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned}&\partial_1\partial_2\cdots\partial_{i-1}\partial_i\partial_j\partial_{j+1}\cdots\partial_k-\partial_1\partial_2\cdots\partial_{i-1}\partial_j\partial_i\partial_{j+1}\cdots\partial_k\\&=\partial_1\partial_2\cdots\partial_{i-1}(K\partial_i-K\partial_j+B)\partial_{j+1}\cdots\partial_k\\&=\partial_1\partial_2\cdots\partial_{i-1}K\partial_i\partial_{j+1}\cdots\partial_k-\partial_1\partial_2\cdots\partial_{i-1}K\partial_j\partial_{j+1}\cdots\partial_k\\&+\partial_1\partial_2\cdots\partial_{i-1}B\partial_{i+1}\cdots\partial_k\end{aligned} \tag{2, 10}$$

Alors nous envisageons l'opérateurs du type:

$$s=\partial_1\partial_2\cdots\partial_eH_{e+1}\cdots\partial_k\qquad H\in\mathfrak{A}_1$$

Nous pouvons démontrer que l'opérateur s peut s'écrire sous une forme d'une combinaison linéaire d'opérateurs composés du type (2, 5) d'opérateurs ∂_i ($i=1, 2, \cdots e, e+1 \cdots k$).
Posons $\partial_{e+1}\cdots\partial_k[u]=w$. On a

$$s=\partial_1\partial_2\cdots\partial_{e-1}\partial_eH[w]$$

Considérons

$$\begin{aligned}\partial_eH[w]&=\left(\frac{d}{dt}-iH_e\Lambda\right)H[w]=\left(\frac{d}{dt}H\right)[w]+H\frac{d}{dt}[w]-iH_e\Lambda H[w]\\&=\left(\frac{d}{dt}H\right)[w]+H\frac{d}{dt}[w]-iHH_e\Lambda[w]+i(HH_e-H_eH)\Lambda[w]\\&\quad+iH_e(H\Lambda-\Lambda H)[w]\\&=H\left(\frac{d}{dt}-iH_e\Lambda\right)[w]+K_3[w]\,,\quad K_3=\left(\frac{d}{dt}H\right)\\&\quad+i(HH_e-H_eH)\Lambda+iH_e(H\Lambda-\Lambda H)\,,\end{aligned}$$

d'où on voit facilement grâce au théorème 1 et le corollaire du théorème 2 et la remarque à la fin du chapitre 1, que si on prend comme H un opérateur tel que $\left(\frac{dH}{dt}\right) \in \mathfrak{A}_1$, alors K_3 appartient a $\mathfrak{A}_1$. Mais alors dans notre cas (2, 10), K et B satisfont à la dérnière condition (c'est-a-dire, $\left(\frac{dK}{dt}\right)$, $\left(\frac{dB}{dt}\right) \in \mathfrak{A}_1$ par définition)[7].

Donc on obtient (pour $H=K$ ou B dans (2, 10))

$$\partial_1 \cdots \partial_{e-1} \partial_e H \partial_{e+1} \cdots \partial_k = \partial_1 \partial_2 \cdots \partial_{e-1} H \partial_e \partial_{e+1} \cdots \partial_k + \partial_1 \cdots \partial_{e-1} K_3 \partial_{e+1} \cdots \partial_k \tag{2, 11}$$

Nous voyons bien que l'opérateur H dans s change sa position à gauche et que deuxième terme ne contient que $(k-1)$ opérateurs ∂_i. Alors nous éffectuons ce procédé encore pour ces deux termes. D'après l'application continuelle de ce procédé on finit par obtenir une expression qu'on a voulue.

3. Une inégalité d'énergie. Maintenant, nous revenons à l'équation (2, 6). Nous préparons une inégalité pour la résolution du problème de Cauchy pour cette équation.

Lemme 2, 2 *Pour $u(t, x)$ une fonction m fois continûment dérivable en t à valeurs dans $\mathfrak{D}^m_{L^2}$, satisfaisant à $u(0)=u'(0)= \cdots =u^{m-1}(0)=0$. il y a une inégalité pour h suffisamment petit* :

$$\max_{0 \leqq t \leqq h} \|N[u]\|_{\mathfrak{D}^m_{L^2}} \leqq C \max_{0 \leqq t \leqq h} \|\Pi_m[u]\|_{\mathfrak{D}^m_{L^2}}, \qquad C<1 \tag{2, 12}$$

où Π_m, N sont des opérateurs définis au paragraphe 1 de ce chapitre.

Démonstration Considérons une équation d'évolution très simple :

$$\frac{d}{dt} u - iH_s \Lambda[u] = v \tag{2, 13}$$

qui a été traitée dans l'article [13][1]. On a eu l'inégalité : pour u tel que $u(0)=0$

$$M \int_0^h \left\| \frac{d}{dt} u - iH_s \Lambda[u] \right\|^2 dt = \|u_t\|^2$$

On va chercher une inégalité analogue pour l'espace $\mathfrak{D}^m_{L^2}$ par

---

7) On voit bien que K et B sont construites toujours à partir des opérateurs H_i par la multiplication de Λ et leurs produits.

la même méthode en utilisant la proposition 1, 3 dans le premier chapitre.

Calculons $\frac{d}{dt}\|u\|^2_{\mathfrak{D}^m_{L^2}}=\frac{d}{dt}\langle(1+\Lambda^m)u,\ (1+\Lambda^m)u\rangle,\ u\in\mathfrak{D}^\infty$

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2_{\mathfrak{D}^m_{L^2}}=\langle(1+\Lambda^m)\frac{du}{dt},\ (1+\Lambda^m)u\rangle+\langle(1+\Lambda^m)u,\ (1+\Lambda^m)\frac{du}{dt}\rangle$$
$$=\langle(1+\Lambda^m)(iH_s\Lambda u+v),\ (1+\Lambda^m)u\rangle+\langle(1+\Lambda^m)u,\ (1+\Lambda^m)(-iH_s\Lambda u+v)\rangle$$
$$=\langle(1+\Lambda^m)v,\ (1+\Lambda^m)u\rangle+\langle(1+\Lambda^m)u,\ (1+\Lambda^m)v\rangle$$
$$+i\langle(1+\Lambda^m)H_s\Lambda u,\ (1+\Lambda^m)u\rangle-i\langle(1+\Lambda^m)u,\ (1+\Lambda^m)H_s\Lambda u\rangle$$

La proposition 1, 3 nous montre

$$(1+\Lambda^m)H_s\Lambda=H_s\Lambda(1+\Lambda^m)+H_1'\Lambda^m+H_2',\quad H_1',H_2' \text{ bornés}$$

Donc on a

$$\langle(1+\Lambda^m)H_s\Lambda u,\ (1+\Lambda^m)u\rangle-\langle(1+\Lambda^m)u,\ (1+\Lambda^m)H_s\Lambda u\rangle$$
$$=\langle H_s\Lambda(1+\Lambda^m)u,\ (1+\Lambda^m)u\rangle-\langle(1+\Lambda^m)u,\ H_s\Lambda(1+\Lambda^m)u\rangle$$
$$+\langle H_1'\Lambda^m u,\ (1+\Lambda^m)u\rangle+\langle H_2'\Lambda u,\ (1+\Lambda^m)u\rangle$$
$$-\langle(1+\Lambda^m)u,\ H_1'\Lambda^m u\rangle-\langle(1+\Lambda^m)u,\ H_2'\Lambda u\rangle$$
$$=\langle(H_s\Lambda-\Lambda H_s^*)(1+\Lambda^m)u,\ (1+\Lambda^m)u\rangle+\langle(H_1'\Lambda^m+H_2'\Lambda)u,\ (1+\Lambda^m)u\rangle$$
$$-\langle(1+\Lambda^m)u,\ (H_1'\Lambda^m+H_2'\Lambda)u\rangle$$
$$=\langle(H_s\Lambda-\Lambda H_s^*)(1+\Lambda^m)u,\ (1+\Lambda^m)u\rangle+\langle R(1+\Lambda^m)u,\ (1+\Lambda^m)u\rangle+$$
$$+\langle(1+\Lambda^m)u,\ R(1+\Lambda^m)u\rangle$$

où $R=\dfrac{H_1'\Lambda^m+H_2'\Lambda}{(1+\Lambda^m)}$ qui est borné.

Aussi, les théorème 1, et 2 nous montrent que $H_s\Lambda-\Lambda H_s^*=H_s\Lambda-\Lambda H_s+\Lambda(H_s-H_s^*)$ appartient à $\mathfrak{A}_1$. Donc on a

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2_{\mathfrak{D}^m_{L^2}}\leqq C_1\|v\|^2_{\mathfrak{D}^m_{L^2}}\|u\|^2_{\mathfrak{D}^m_{L^2}}+C_2\|u\|^2_{\mathfrak{D}^m_{L^2}}$$

Par suite, on a

$$(2,14)\qquad \|u(t)\|^2_{\mathfrak{D}^m_{L^2}}\leqq M_1\int_0^h\|\frac{d}{dt}u-iH_s\Lambda u\|^2_{\mathfrak{D}^m_{L^2}}dt\qquad 0\leqq t\leqq h,\ u(0)=0$$

ou bien

$$(2,15)\qquad \|u(t)\|^2_{\mathfrak{D}^m_{L^2}}\leqq M_1\int_0^h\|\partial_i[u]\|^2_{\mathfrak{D}^m_{L^2}}dt\qquad (i=1,2,\cdots m),\ 0\leqq t\leqq h$$
$$u(0)=0$$

d'où on obtient

$$(2,16) \qquad \max_{0\leqq t\leqq h}. \|u(t)\|_{\mathfrak{D}^m_{L^2}} \leqq M_2 h^{\frac{1}{2}} \max_{0\leqq t\leqq h}. \|\partial_i[u]\|_{\mathfrak{D}^m_{L^2}}, \qquad u(0)=0$$

Nous commençons à considérer des opérateurs composés. Prenons par exemple, l'opérateur $s_{m-1}=\partial_2\partial_3\cdots\partial_m$, alors pour $u(t,x)$ m fois continûment dérivable en t à valeurs dans $\mathfrak{D}^m_{L^2}$, on a

$$(2,17) \qquad \max_{0\leqq t\leqq h}. \|s_{m-1}[u]\|_{\mathfrak{D}^m_{L^2}} \leqq M_2 h^{\frac{1}{2}} \max_{0\leqq t\leqq h}. \|\Pi_m[u]\|_{\mathfrak{D}^m_{L^2}}.$$

Si s^j_{m-1} est un opérateur composé de $(m-1)$ opérateurs ∂_i tel que $\partial_j s^j_{m-1}=\Pi'_m$ où Π'_m est une permutée de $\Pi_m=\partial_1\partial_2\cdots\partial_m$.

Grâce au lemme 2,1 $\Pi_m-\Pi'_m$ est une combinaison linéaire d'opérateurs composés qui contiennent au plus $(m-1)$ opérateurs ∂_i $(i=1,2,\cdots m)$ dont les coefficients sont des opérateurs dans $\mathfrak{A}_1$.

Alors on a

$$\max_{0\leqq t\leqq h}. \|s^j_{m-1}[u]\|_{\mathfrak{D}^m_{L^2}} \leqq M_2 h^{\frac{1}{2}} \Big(\max_{0\leqq t\leqq h} \|\Pi_m[u]\|_{\mathfrak{D}^m_{L^2}} + \max_{0\leqq t\leqq h} \Big\|\begin{pmatrix}\text{combinaison linéaire}\\ \text{d'opérateurs composés}\\ \text{d'au plus } (m-1)\ \partial_i\end{pmatrix}u\Big\|_{\mathfrak{D}^m_{L^2}}$$

De la même manière, on voit facilement que si s_k est un opérateur composé de k opérateurs ∂_i $(i=1,2,\cdots m)$ $k<m$, alors on a, en supposant $M_2 h^{\frac{1}{2}}<1$,

$$\begin{aligned}\max_{0\leqq t\leqq h} \|s_k[u]\|_{\mathfrak{D}^m_{L^2}} &\leqq M_2 h^{\frac{1}{2}} \Big(\max_{0\leqq t\leqq h} \|s_{k+1}[u]\|_{\mathfrak{D}^m_{L^2}} \\ &\quad + \max_{0\leqq t\leqq h} \|(\text{combinaison linéaire de tous } s_1, s_2, \cdots s_k)u\|_{\mathfrak{D}^m_{L^2}} \\ &\leqq M_2 h^{\frac{1}{2}} \Big(\max_{0\leqq t\leqq h} \|s_{k+2}[u]\|_{\mathfrak{D}^m_{L^2}} \\ &\quad + \max_{0\leqq t\leqq h} \|(\text{combinaison linéaire de tous } s_1, s_2, \cdots s_{k+1})u\|_{\mathfrak{D}^m_{L^2}} \\ &\leqq \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\leqq M_2 h^{\frac{1}{2}} \Big(\max_{0\leqq t\leqq h} \|\Pi_m[u]\|_{\mathfrak{D}^m} \\ &\quad + \max_{0\leqq t\leqq h} \|(\text{combinaison linéaire de tous } s_1, \cdots s_{m-1})u\|_{\mathfrak{D}^m_{L^2}}\end{aligned}$$

Nous allons faire la somme de tous les opérateurs s_k $(k=1,2,\cdots m-1)$. En désignant par n_1 le nombre de tous les opérateurs s_k, on a

$$\sum_k \max_{0\leqq t\leqq h} \|s_k[u]\|_{\mathfrak{D}^m_{L^2}} \leqq M_2 h^{\frac{1}{2}} \max_{0\leqq t\leqq h} \|\Pi_m[u]\|_{\mathfrak{D}^m_{L^2}}$$
$$+ n_1 M_2 h^{\frac{1}{2}} \sum_k \max_{0\leqq t\leqq h} \|s_k[u]\|_{\mathfrak{D}^m_{L^2}}.$$

Si on prend h suffisamment petit de telle manière que $\frac{1}{2} > n_1 M_2 h$, on arrive à l'inégalité voulue:

(2, 18) $$\sum \max_{0\leqq t\leqq h} \|s_k[u]\|_{\mathfrak{D}^m_{L^2}} \leqq M_2 h^{\frac{1}{2}} \max_{0\leqq t\leqq h} \|\Pi_m[u]\|_{\mathfrak{D}^m_{L^2}}.$$

Par conséquent, on obtient l'inégalité (2, 12).

4. Résolution du problème de Cauchy. Considérons d'abord la partie principale Π_m seulement. Nous envisageons l'équation:

(2, 19) $$\Pi_m[u] = v$$

Alors on peut remplacer (2, 19) par un système équivalent:

(2, 20) $$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} u - iH_1 \Lambda u = v_1 \\ &\frac{d}{dt} v_1 - iH_2 \Lambda v_1 = v_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\frac{d}{dt} v_{m-1} - iH_m \Lambda v_{m-1} = v \end{aligned}$$

Nous remarquons que ce système n'est nullement un système des équations aux dérivées partielles, mais un système des équations d'évolutions d'opérateurs d'intégrale singulière. Alors pour la démonstration de l'existence de la solution du problème de Cauchy, le théorème de Kowalewski ne marche plus. Mais un travail de S. Mizohata [10] qui utilise la méthode de semi-groupe assure que pour l'équation du type:

$$\frac{d}{dt} v_s - iH_{s+1} \Lambda v_s = v_{s+1}$$

on peut trouver une solution v_s continue en t à valeurs dans $\mathfrak{D}^m_{L^2}$, continûment dérivable en t à valeurs dans $\mathfrak{D}^{m-1}_{L^2}$, du problème de Cauchy avec la valeur initiale zéro pour v_{s+1}, fonction continue en t à valeurs dans $\mathfrak{D}^m_{L^2}$. Donc on peut supposer que le problème de Cauchy relatif à (2, 20) est résolu dans le sens plus haut.

Maintenant nous résoudrons l'équation (2, 6) par la méthode des approximations successives. Posons

$$\Pi_m[v_{p+1}] = v - N[v_p]. \tag{2, 21}$$

où $v_0 = 0$, v est une fonction m-fois continûment dérivable en t à valeurs dans $\mathfrak{D}_{L^2}^{\infty}$. Dans la suite, nous fixons h dans le lemme 2, 2 qui assure l'inégalité (2, 12). Et puis, nous désignons

$$\max_{0 \leqq t \leqq h} \|\Pi_m[u]\|_{\mathfrak{D}_{L^2}^m} = |||u||| \quad \text{(Notation d'Anneli Lax).} \tag{2, 22}$$

Alors on a

$$|||v_q - v_p||| = |||v_q - v_{q-1}||| + |||v_{q-1} - v_{q-2}||| + \cdots + |||v_{p+1} - v_p|||$$

Or,

$$\begin{aligned} |||v_k - v_{k-1}||| &= \max_{0 \leqq t \leqq h} \|\Pi_m[v_k - v_{k-1}]\|_{\mathfrak{D}_{L^2}^m} \\ &= \max_{0 \leqq t \leqq h} \|N[v_{k-1} - v_{k-2}]\|_{\mathfrak{D}_{L^2}^m} \\ &\leqq C \max_{0 \leqq t \leqq h} \|\Pi_m[v_{k-1} - v_{k-2}]\|_{\mathfrak{D}_{L^2}^m} \qquad \text{(Lemme 2, 2)} \\ &\leqq C\, |||v_{k-1} - v_{k-2}||| \end{aligned}$$

d'où il vient

$$|||v_k - v_{k-1}||| \leqq C^{k-1} |||v_1 - v_0|||$$

$$v_q||| - v_p||| \leqq (C^{q-1} + \cdots + C^p)|||v_1 - v_0||| \leqq \frac{C^p}{1-C} \max_{0 \leqq t \leqq h} \|v\|_{\mathfrak{D}_{L^2}^m}$$

On voit que $\{v_q\}$ est une suite de Cauchy pour la topologie de la norme ||| ||| dans l'espace des fonctions continues en t à valeurs dans $\mathfrak{D}_{L^2}^m$.

Mais on a

$$\max_{0 \leqq t \leqq h} \|v_q - v_p\|_{\mathfrak{D}_{L^2}^m} \leqq C' |||v_q - v_p||| \qquad C' > 1$$

Enfin, $v_q(t)$ forment une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}(\mathfrak{D}_{L^2}^m)$. Donc si on pose

$$u(t) = \lim_{q \to \infty} v_q(t)$$

alors $u(t)$ est une solution m fois continuement dérivable à valeurs dans $\mathfrak{D}_{L^2}^m$ du problème de Cauchy pour v. L'unicité du problème est évidente par cette approximation.

5. Equation à coefficients constants Nous démontrons que sous notre hypothèse, la condition du théorème 3 est nécessaire pour l'équation (2, 1) à coefficients constants. Ce n'est qu'un résultat presque banal du théorème suivant où on suppose que $A^{\nu_0\nu_1\cdots\nu_n}(t, x) = A^{\nu_0\nu_1\cdots\nu_n}$.

Théorème *R.* (*Courant et A. Lax*) *Pour que le problême de Cauchy relatif à l'équation* (2, 1) *soit uniformément bien posé il faut et il suffit que* $L(u)$ *soit écrite sous la forme suivante* :

$$L(u) = \Pi_m[u] + N[u] \tag{2, 23}$$

qui est exactement la même chose que (2, 6).

Démonstration. Par une remarque de R. Courant et A. Lax [3], le problème de Cauchy relatif à l'équation (2, 1) peut être remplacé par une famille des problèmes de Cauchy relatifs aux équations réduites qui contiennent deux variables seulement :

$$L_\alpha(u) = \frac{\partial^m u}{\partial t^m} - \sum_{\substack{|\nu| \leqq m \\ \nu_0 < m}} A^{\nu_0\nu_1\cdots\nu_n}(\alpha_1)^{\nu_1} \cdots (\alpha_n)^{\nu_n} \frac{\partial^{|\nu|} u}{\partial x_1'^{|\nu|-\nu_0} \partial t^{\nu_0}} \quad x_1' = \alpha_i x_i \tag{2, 24}$$

où $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ parcourent la sphère d'unité $|\alpha| = 1$. Or, A. Lax [6] a trouvé une condition nécessaire et suffisante pour que le problème de Cauchy relatif à l'équation (2, 24) soit uniformément bien posé.

La condition de A. Lax s'énonce comme suit :

$$P(\lambda, \alpha) = P_m(\lambda) + n(\lambda, \alpha) \text{ où } P_m(\lambda) = \prod_{i=1}^{m} (\lambda - \lambda_i(a)) \tag{2, 25}$$

où $P(\lambda, \alpha)$ est le polynôme qui est obtenu à partir de l'opérateur differentiel L en remplaçant $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$ par α_i respectivement et $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$ par λ et $n(\lambda, \alpha)$ est un élément du module engendré par des mônomes de $(\lambda - \lambda_i)$, qui sont obtenus à partir de $P_m(\lambda) = \prod_{i=1}^{m} (\lambda - \lambda_i(\alpha))$ en supprimant au moins un des facteurs de $P_m(\lambda)$.

Revenons à l'équation (2, 1) à coefficient constants et écrivons-le sous une forme de l'équation d'évolution d'opérateur d'intégrale singulière comme nous avons fait dans l'article [13]. Alors on a

$$L(u) = \frac{\partial^m u}{dt^m} - \sum_{\substack{|\nu| \leq m \\ \nu_0 < m}} A^{\nu_0, \nu_1 \cdots \nu_n} R_1^{\nu_1} \cdots R_n^{\nu_n} \Lambda^{|\nu|-\nu_0} \frac{\partial^{\nu_0} u}{dt^{\nu_0}} = 0 \tag{2, 26}$$

et on peut considérer l'équation symbolique de (2, 26) en éffectuant la transformation de Fourier spatiale, on obtient

$$\frac{\partial^m \hat{u}}{\partial t^m} - \sum_{\substack{|\nu| \leq m \\ \nu_0 < m}} A^{\nu_0, \nu_1 \dots \nu_n} \left(\frac{\xi_1}{|\xi|}\right)^{\nu_1} \cdots \left(\frac{\xi_n}{|\xi|}\right)^{\nu_n} |\xi|^{|\nu| - \nu_0} \frac{\partial^{\nu_0} \hat{u}}{\partial t^{\nu_0}} = 0 \tag{2,27}$$

Donc ici, en vertu de la condition de A. Lax (2, 25), on peut l'écrire sous la forme suivante :

$$\prod_i \left(\frac{d}{dt} - i\lambda_i\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right)|\xi|\right)\hat{u} + n\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\xi}{|\xi|}\right)\hat{u} = 0 \tag{2,28}$$

Si on revient à l'équation originelle par la transformation de Fourier inverse, on trouve justement l'équation (2, 6).

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. P. Calderón and A. Zygmund: Singular integral operators and differential equations, Amer. J. Math., 79, 901-921 (1957).

[2] A. P. Calderón: Uniqueness in the Cauchy problem for partial differential equations, Amer. J. Math., 80, 16-36 (1958).

[3] R. Courant and A. Lax: Remarks on Cauchy's problem, Comm. Pure Appl. Math., 8, 497-502 (1955).

[4] L. Gårding: Solution directe du problème de Cauchy pour les équation hyperboliques, Colloque International de C. N. R. S., Nancy (1956).

[5] J. Leray: Hyperbolic differential equations, Lecture in Princeton (1954).

[6] A. Lax: On Cauchy's problem for partial differential equations with multiple characteristics, Comm. Pure Appl. Math., 9, 135-168 (1956).

[7] S. Mizohata: Unicité dans le problème de Cauchy pour quelques équations différentielles elliptiques, Mem. Coll. Sci. Kyoto Univ., Ser. A, 21, Math., 121-128 (1958).

[8] S. Mizohata: Le problème de Cauchy pour le passé pour quelques équations paraboliques, Proc. Japan Acad., 34, 693-696 (1958).

[9] S. Mizohata: Unicité du prolongement des solutions des équations elliptiques du quatrième ordre, Proc. Japan Acad., 34, 687-692 (1958).

[10] S. Mizohata: Systèmes hyperboliques, (à paraitre Journ. Math. Soc. Japan.)

[11] I. Petrowsky: Über das Cauchysche Problem für Systeme von partiellen Differentialgleichungen, Recueil Math. (Math. Sbornik) 2, vol. 44 815-868 (1937).

[12] I. Petrowsky: Über das Cauchysche Problem für ein System linearer partieller Differentialgleichungen im Gebiete der nichtanalytischen Funktionen, Bulletin de l'Universite d'Etat de Moscou, fasc. 7, 1-74 (1938).

[13] M. Yamaguti: Sur l'inégalité d'énergie pour le systeme hyperbolique, Proc. Japan Acad. 35, 37-41 (1959).

[14] S. Mizohata: Une remarque sur le traitement par des opérateurs d'intégrale singulière. (à paraitre Journ. Math. Soc. Japan)

Note adjoutée pendant la correction des épreuves. Une légère modification de la méthode de [10] nous fera éviter la difficulté pour le cas $n=2$. (Voir [14])