MEMOIRS OF THE COLLEGE OF SCIENCE, UNIVERSITY OF KYOTO, SERIES A
Vol. XXXII, Mathematics No. 2, 1959.

Analyticité des solutions élémentaires du système hyperbolique à coefficients constants

Par

Sigeru MIZOHATA

(Reçu le 31 août 1959)

---

1. Introduction. Soit $E(x, t)$ une solution élémentaire du système hyperbolique :

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{j=1}^{n} A_j \frac{\partial u}{\partial x_j}-Bu=0, \tag{1, 1}$$

où A_j et B sont des matrices constantes d'ordre N.

Notre but est de montrer que $E(x, t)$, $t \geqslant 0$, est une fonction analytique[1] sauf sur les lignes bicaractéristiques issues de l'origine. Ce résultat est déjà connu pour les systèmes homogènes, à savoir dans le cas où $B=0$ (Petrowsky [4]). Mais, ici, nous allons le montrer directement par le développement asymptotique de l'image de Fourier de $E(x, t)$. Nous suiverons le raisonnement de P. D. Lax exposé dans [1] pour montrer que $E(x, t)$ est une fonction indéfiniment différentiable sauf sur les bicaractéristiques issues de l'origine dans le cas où A_j et B sont des matrices indéfiniment différentiables. On pourrait étendre notre résultat au cas où A_j et B sont analytiques en (x, t), mais il faudra alors une analyse très minutieuse.

2. Ce que nous appelons ici hyperbolique est le suivant (voir Petrowsky [3] p. 66) :

1° pour tout $\xi=(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ réel,

$A\cdot\xi=\sum A_j\xi_j$ est une matrice diagonalisable dont les valeurs caractéristiques sont toutes réelles ;

2°. les multiplicités des valeurs caractéristiques sont invariantes pour ξ :

---

1) Dans cet article, nous entendons par une fonction analytique une fonction analytique de variables réelles.

$$\det(\lambda I - A\cdot\xi) = (\lambda-\lambda_1(\xi))^{p_1}\cdots(\lambda-\lambda_s(\xi))^{p_s},$$
$$\lambda_1(\xi)<\cdots<\lambda_s(\xi), \quad p_1+\cdots+p_s = N.$$

On sait alors que les $\lambda_i(\xi)$ sont des fonctions analytiques.

Montrons notre but pour le système strictement hyperbolique: On suppose les valeurs caractéristiques distinctes. Comme notre raisonnement est essentiellement le même que pour le système hyperbolique au sens généralisé, nous ajoutons, à la fin, des modifications à faire.

Nous allons envisager d'abord le cas où $B=0$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n} A_j \frac{\partial}{\partial x_j} u = 0. \tag{1, 1)'$$

On désigne par $\omega\xi=(\omega_1\xi, \cdots, \omega_n\xi)$, $|\omega|=1$, $\xi\geqslant 0$, les points de l'espace dual de x.

Soit $u(x, t)$ l'une des solutions élémentaires:

$$u(x, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \delta_x \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La transformation de Fourier donne[2)]

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - i \sum_j A_j\cdot\omega\xi\right)\hat{u}(\omega\xi, t) = 0, \qquad \hat{u}(\omega\xi, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2, 1}$$

Soit $R_i(\omega)$ est le vecteur propre de longueur unité de la matrice $A\cdot\omega = \sum_j A_j\omega_j$ correspondant à la valeur propre $\lambda_i(\omega)$:

$$(\lambda_i(\omega)I - A\cdot\omega)R_i(\omega) = 0. \tag{2, 2}$$

Il est évident que les $R_i(\omega)$ $(i=1, 2, \cdots, N)$ sont des vecteurs définis sur la sphère tout entière, analytiques[3)] sauf peut-être dans le cas

---

2) Ce que nous appelons ici l'image de Fourier est, dans la notation actuelle, $\hat{u}(\omega\xi) = \int \exp(-ix\cdot\omega\xi)\,u(x)\,dx$. Alors, l'image réciproque devient $u(x, t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int \exp(ix\cdot\omega\xi)\,\hat{u}(\omega\xi)\,\xi^{n-1}\,d\xi\,d\omega$.

3) La sphère $\Omega_0: |\omega|=1$, est muni d'une structure de variété analytique: $\omega_i=\omega_i(s_1, \cdots, s_{n-1})$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ s étant les coordonnées d'une carte locale. $R_i(\omega)$ est alors un vecteur dont les composants sont des fonctions analytiques en s. Il en est de même de $\lambda_i(\omega)$, $\sigma_j(\omega)$, etc. $\cdots$.

$n=2.$[4] Laissons ce cas de côté.

Comme les R_i sont linéairement indépendants, on exprime la transformée de la donnée initiale:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_j \sigma_j(\omega) R_j(\omega) . \tag{2, 3}$$

Remarquons que $\sigma_j(\omega)$ sont également analytiques.

On a alors

$$\hat{u}(\omega\xi, t) = \sum_{j=1}^{N} \exp\,(i\lambda_j(\omega)t\xi)\,\sigma_j(\omega)R_j(\omega) \tag{2, 4}$$

la solution voulue de (2, 1).

La solution $u(x, t)$ de $(1, 1)'$ s'écrit

$$u(x, t) = (2\pi)^{-n} \sum_j \int \exp\,[i(x\cdot\omega + t\lambda_j)\xi]\,\sigma_j(\omega)R_j(\omega)\,\xi^{n-1}\,d\xi\,d\omega \tag{2, 5}$$

où $d\omega$ désigne l'élément de volume de la sphère unité Ω_0.

Il faut signaler que l'expression ci-dessus ne s'écrit que symboliquement pour exprimer l'image réciproque de Fourier, mais pour le calcul elle est commode.

Une courbe bicaractéristique $x(t)$ issue de l'origine de l'équation (1, 1) ou bien de $(1, 1)'$ est définie par

$$x_i = -\lambda'_{\omega_i}(\omega)t, \; t = t \qquad (i=1, 2, \cdots, n)\,,$$

où $\lambda'_{\omega_i}(\omega)$ désigne la dérivation suivante: on étend $\lambda(\omega)$, pour $|\omega|>0$, par la relation $\lambda(\omega) = |\omega|\lambda\left(\frac{\omega_1}{|\omega|}, \cdots, \frac{\omega_n}{|\omega|}\right)$ et $\lambda'_{\omega_i} = \left.\frac{\partial\lambda}{\partial\omega_i}\right|_{|\omega|=1}$. $\lambda(\omega)$ étant l'une des $\lambda_j(\omega)$. On désigne par $b_j(\omega)$ la ligne ci-dessus correspondant à $\lambda=\lambda_j$. Par (B) l'ensemble des lignes bicaractéristiques issues de l'origine.

Soit (x, t), $t>0$, un point n'appartenant pas à (B). On va montrer que $u(x, t)$ donnée par (2, 5) est une fonction analytique en (x, t) (à valeurs vectorielles) au voisinage de ce point.

---

4) Dans le cas $n=2$, comme le cercle n'est pas homotopiquement 0, il faut quelques considérations pour définir $R_i(\omega)$ sur tout cercle comme un vecteur continu. Mais, comme nous le montrerons dans le n° 4, il nous suffit de supposer que $R_i(\omega)$ est analytique par morceau.

Posons

$$l(\omega\,;\,x,t) = l(\omega) = x\cdot\omega + t\lambda_j(\omega)\,. \tag{2. 6}$$

Nous allons montrer que

$$u(x,t) = \int_{\xi\geqq 1} \exp\left[i\,l(\omega\,;\,x,t)\xi\right]\psi(\omega)\xi^{n-1}d\xi\,d\omega \tag{2, 7}$$

est une fonction analytique en (x, t) au voisinage du point (x, t) vérifiant la condition ci-dessus, où $\psi(\omega)$ est une fonction analytique en ω. Cela suffit pour montrer notre but, car $\int_{|\xi|\leq 1}$,, $d\xi\,d\omega$ est une fonction analytique partout.

De (2, 7), pour $\nu=(\nu_1, \cdots, \nu_n, \nu_{n+1})=(\nu', \nu_{n+1})$, on a

$$D^\nu u(x,t) = i^{|\nu|}\int_{\xi\geqslant 1} \exp\,(il\xi)\omega^{\nu'}\lambda_j^{\nu_{n+1}}\psi(\omega)\xi^{|\nu|+n-1}d\xi\,d\omega\,. \tag{2, 8}$$

Pour évaluer ces dérivées successives, nous suivons le raisonnement de P. D. Lax.

Le point de l'intersection x_0 de la ligne parallèle à $b_j(\omega)$ avec le plan $t=0$ est donné par

$$x_0 = x+(\lambda_j)'t = (x_1+(\lambda_j)'_{\omega_1}t, \cdots, x_n+(\lambda_j)'_{\omega_n}t)\,.$$

L'hypothèse que (x, t) n'est pas situé sur aucune bicaractéristique issue de l'origine entraîne que

$$|x_0| = |x+\lambda'_j t| > 0\,.$$

Or, $\dfrac{\partial l}{\partial\omega_i}=x_i+t(\lambda_j)'_{\omega_i}$, d'où

$$|\mathrm{grad}\, l(\omega)| = |x_0| > 0\,. \tag{2, 9}$$

Comme $\omega\cdot\mathrm{grad}\, l(\omega)=0$, en point ω tel que $l(\omega)=0$, on voit que la longueur du gradient de $l(\omega)$ suivant la surface $|\omega|=1$, est minoré par une constante positive lorsque ω parcourt la variété $V=\{\omega\,;\, l(\omega)=0\}$.

Considérons la sphère $|\omega|=1$ comme une variété riemannienne analytique, et V, définie par $l(\omega)=0$, comme une sous-variété analytique régulière à $(n-2)$ dimensions. Considérons le voisinage de V. Par chaque point de V, il passe une et une seule trajectoire orthogonale aux hypersurfaces $l(\omega)=$constantes. Si l'on prend un voisinage de V assez petit, alors pour chaque point, il en existe une et une seule. On munit V des cartes locales analytiques $(u_1, \cdots, u_{n-2})$. Comme pour tout point $P=(s_1, \cdots, s_{n-1})$ il existe une seule trajectoire passant par $(u_1, \cdots, u_{n-2})$, en désignant $l=l(P)$, on donne au point P, les coordonnées $(u_1, \cdots, u_{n-2}, l)$. Alors $(s_1, \cdots, s_{n-1})$ sont des fonctions analytiques de $(u_1, \cdots, u_{n-2}, l)$ et la correspondance est biunivoque. En effet, la trajectoire orthogonale se donne comme solution de

$$\frac{ds_i}{d\sigma} = \sum_j g^{ij}(s)\, l'_{s_j}(s) \tag{2, 10}$$

où (g^{ij}) est la matrice inverse de (g_{ij}) : $ds^2 = \sum g_{ij}(s)\, ds_i\, ds_j$.
En prenant l comme paramètre au lieu de σ,

$$\frac{ds_i}{dl} = \frac{ds_i}{d\sigma}\frac{d\sigma}{dl} = \sum_j g^{ij} l'_{s_j} \Big/ \sum_{i,j} g^{ij} l'_{s_i} l'_{s_j} \qquad (i=1, 2, \cdots, n-1)\,. \tag{2, 11}$$

Comme $g^{ij}(s)$ et $l(s)$ sont des fonctions analytiques, en désignant par $s_i(l\,;u)$ la solution de (2, 11) vérifiant la condition initiale $s_i(0\,;u)=s_i(u)$, d'après la théorie des équations différentielles, on voit que $s_i(l\,;u)$ sont des fonctions analytiques de $(l, u)=(l, u_1, \cdots, u_{n-2})$, puisque $s_i(u)$ sont des fonctions analytiques de u.

On prend maintenant une partition de l'unité $\{\alpha_i(u)\}_{i=1,2,\cdots,p}$ sur V, indéfiniment différentiables $\sum \alpha_i(u) \equiv 1$ subordonnée aux cartes locales qu'on vient d'introduire, et $\beta(l)$ est indéfiniment différentiable à support petit et vaut 1 au voisinage de $l=0$; $0 \leqslant \beta(l) \leqslant 1$. On fait l'orientation telle que $du_1 \cdots du_{n-2} dl > 0$.
Alors, (2, 8) s'écrit

$$\begin{aligned} D^\nu u(x, t) = & \int_{\xi \geqslant 1} \xi^{|\nu|+n-1}\, d\xi \int \exp(il\xi) \sum_i \beta(l)\, \alpha_i(u)\, \psi_\nu(\omega) \\ & \qquad \times \frac{\partial(s_1, \cdots, s_{n-1})}{\partial(u_1, \cdots, u_{n-2}, l)} \varphi_i(s)\, du_1 \cdots du_{n-2} dl \\ & + \int_{\xi \geqslant 1} \xi^{|\nu|+n-1}\, d\xi \int \exp(il\xi)\,[1-\beta(l)]\, \psi_\nu(\omega)\, d\omega\,, \end{aligned} \tag{2, 12}$$

où $\psi_\nu(\omega) = \omega^{\nu'} \lambda_j^{\nu_{n+1}} \psi(\omega)$, $\varphi_i(s)$ est une fonction analytique en s.

Nous avons supposé (x, t) fixé. Maintenant supposons que (x, t) parcourt un petit voisinage U de (x_0, t_0). Montrons comment (x, t) intervient dans la paramétrisation précédente. D'abord, $l(s\,; x, t)=0$, $l'_s(s\,; x_0, t_0) \neq 0$ entraîne que, si U est assez petit, on a, par exemple $s_{n-1} = f(s_1, \cdots, s_{n-2}\,; x, t)$ où f est une fonction analytique en (s, x, t). Ceci signifie que, si U est assez petit, la sous-variété $V_{x,t} = \{s\,;$

$l(s\,;\,x,\,t)=0\}$ s'exprime par $s_i=s_i(u_1,\,\cdots,\,u_{n-2}\,;\,x,\,t)$ $(i=1,2,\cdots,n-2)$ où s_i sont des fonctions analytiques en $(u,\,x,\,t)$. D'après la formule (2, 11), au voisinage de $V_{x,t}$, s_i $(i=1,\,\cdots,\,n-1)$ sont représentés biunivoquement par $(u_1,\,\cdots,\,u_{n-2},\,l)$. Précisément, $s_i=s_i(u_1,\,\cdots,\,u_{n-2}\,;\,x,\,t)$. Pour $(x,\,t)$ fixé dans U, $(u_1,\,\cdots,\,u_{n-2},\,l)\to(s_1,\,\cdots,\,s_{n-1})$ est biunivoque. De plus s_i sont des fonctions analytiques en $(u,\,l\,;\,x,\,t)$. Alors toute fonction analytique en s se transforme en une fonction analytique en $(u_1,\,\cdots,\,u_{n-2},\,l,\,x,\,t)$.

Rappelons que la distribution (2, 7) s'exprime à l'aide du facteur de convergence $\exp(-\varepsilon\xi)$, $\varepsilon>0$.

$$u(x,\,t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int \exp(il\xi-\varepsilon\xi)\,\psi(\omega)\,\xi^{n-1}\,d\xi\,d\omega\,. \tag{2, 13}$$

Cette limite est à prendre au sens de distribution $(\mathcal{D}')_x$. D'où, il en est de même de la distribution (2, 12). Nous allons montrer que $D^\nu u(x,\,t)$ est une fonction continue *sur le voisinage* U de $(x_0,\,t_0)$ et cette vérification montre en même temps son évaluation sur U. Envisageons d'abord le second terme.

$$\begin{aligned}\int_{\xi\geqslant 1}\xi^{m+n-1}\exp(il\xi-\varepsilon\xi)\,d\xi &= \exp(il-\varepsilon)\Big\{-\frac{1}{il-\varepsilon}+\frac{m+n-1}{(il-\varepsilon)^2}\\ &-\frac{(m+n-1)(m+n-2)}{(il-\varepsilon)^3}+\cdots+(-1)^{m+n-1}\frac{(m+n-1)!}{(il-\varepsilon)^{m+n-1}}\\ &+(-1)^{m+n}\frac{(m+n-1)!}{(il-\varepsilon)^{m+n}}\Big\}, \qquad \text{où } m=|\nu|.\end{aligned} \tag{2, 14}$$

Compte tenu de ce que $|l|\geqslant\delta'$, où $\beta(l)\neq 1$, on a

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_0}\frac{\exp(il-\varepsilon)}{(il-\varepsilon)^k}[1-\beta(l)]\,\psi_\nu(\omega)\,d\omega\\ &\qquad=\frac{1}{i^k}\int_{\Omega_0}\frac{\exp[il(\omega\,;\,x,\,t)]}{l(\omega\,;\,x,\,t)^k}[1-\beta(l)]\,\psi_\nu(\omega)\,d\omega\,,\end{aligned}$$

la convergence est uniforme pour $(x,\,t)\in U$. D'où

$$\begin{aligned}&|\text{second terme de } (2,12)|\\ &\qquad\leqslant\left[\frac{1}{\delta'}+\frac{m+n-1}{\delta'^2}+\cdots+\frac{(m+n-1)!}{\delta'^{m+n}}\right]\int_{\Omega_0}|\psi_\nu(\omega)|\,d\omega\\ &\qquad\leqslant\frac{(m+n)!}{\delta'^{m+n}}\int_{\Omega_0}|\psi_\nu(\omega)|\,d\omega\,, \qquad \text{où } m=|\nu|\,.\end{aligned} \tag{2, 15}$$

Envisageons le premier terme ; on considère

$$\psi_i^{(\nu)}(x, t) = \int_{\xi\geqslant 1} \xi^{|\nu|+n-1} d\xi \int \exp(il\xi)\beta(l)\alpha_i(u)\psi_\nu(\omega)$$
$$\times \frac{\partial(s_1, \cdots, s_{n-1})}{\partial(u_1, \cdots, l)} \varphi_i(s) du_1 \cdots du_{n-2} dl .$$

Il faut, bien entendu, calculer à l'aide du facteur de convergence $\exp(-\varepsilon\xi)$. Mais nous l'omettons ici, car la vérification est facile d'après ce qui précède.

Le facteur $\frac{\partial(s_1 \cdots)}{\partial(u_1 \cdots)}\varphi_i(s)$ est une fonction analytique en $(u_1, \cdots, u_{n-2}, l ; x, t)$. Alors il existe des constantes positives $M_1, \cdots, M_{n+1}$, M_ψ, A et ρ telles que

$$\text{(2, 16)} \qquad \left|\left(\frac{\partial}{\partial l}\right)^k \left[\psi_\nu(\omega)\frac{\partial(s_1 \cdots)}{\partial(u_1 \cdots)}\varphi_i(s)\right]\right| \leqslant \frac{k!}{\rho^k} M_1^{\nu_1} \cdots M_{n+1}^{\nu_{n+1}} M_\psi A ,$$
$$k = 0, 1, 2, \cdots ; \nu \geqslant 0 , \qquad \text{pour} \quad (x, t) \in U .$$

(Ici, il faut remarquer que s_i sont des fonctions analytiques en $(u, l ; x, t)$).

Ou bien, en désignant par $M = \max(M_1, \cdots, M_{n+1})$, $q_\nu(u, l ; x, t) = \psi_\nu(\omega)\frac{\partial(s_1 \cdots)}{\partial(u_1 \cdots)}\varphi_i(s)$,

$$\text{(2, 16)}' \qquad \left|\left(\frac{\partial}{\partial l}\right)^k q_\nu(u, l ; x, t)\right| \leqslant \frac{k!}{\rho^k} M^{|\nu|} M_\psi A , \qquad \text{pour} \quad (x, t) \in U .$$

L'intégation par parties en l donne

$$\int \exp(il\xi)\beta(l)\alpha_i(u) q_\nu(u, l) du\, dl$$
$$= \frac{(-i)^{m+n+1}}{\xi^{m+n+1}} \int \exp(il\xi)\alpha_i(u)\left(\frac{\partial}{\partial l}\right)^{m+n+1} [\beta(l) q_\nu(u, l)] du\, dl .$$

$$\text{Or,} \quad \left(\frac{\partial}{\partial l}\right)^{m+n+1} [\beta(l) q_\nu(u, l)] = \beta(l)\left(\frac{\partial}{\partial l}\right)^{m+n+1} q_\nu(u, l)$$
$$+ \sum_{p\neq 0} C_p^{m+n+1} \left(\frac{d}{dl}\right)^p \beta(l) \left(\frac{\partial}{\partial l}\right)^{m+n+1-p} q_\nu(u, l) .$$

Envisageons les termes sous le signe $\sum$:

$$\int \exp(il\xi)\alpha_i(u)\left(\frac{\partial}{\partial l}\right)^p \beta\cdot\left(\frac{\partial}{\partial l}\right)^{m+n+1-p} q_\nu(u,l)du\,dl$$
$$= (-1)^p \int \alpha_i(u)\beta(l)\left(\frac{\partial}{\partial l}\right)^p\left[\exp(il\xi)\left(\frac{\partial}{\partial l}\right)^{m+n+1-p} q_\nu(u,l)\right]du\,dl$$
$$= (-1)^p \sum_{k\leqslant p} C_k^p (i\xi)^k \int \alpha_i(u)\beta(l)\exp(il\xi)\left(\frac{\partial}{\partial l}\right)^{m+n+1-k} q_\nu(u,l)du\,dl\,.$$

Ces termes interviennent dans l'intégaration envisagée sous la forme (à puissances de i près)

$$\int_{\xi\geqslant 1} \xi^{k-2}d\xi \int \exp(il\xi)\alpha_i(u)\beta(l)\left(\frac{\partial}{\partial l}\right)^{m+n+1-k} q_\nu(u,l)du\,dl\,.$$

Ici, il faut souligner que l'intégration en $dudl$ s'étend sur le domaine du (u, l) vérifiant $\beta'(l)\neq 0$. Donc, dans ce domain $|l|\geqslant\delta'$.

Or, d'après ce qui précède, on voit facilement que cette intégrale se majore par

$$\frac{2\cdot k!}{\delta'^k}\int\left|\left(\frac{\partial}{\partial l}\right)^{m+n+1-k} q_\nu(u,l)\right|du\,dl \leqslant \frac{2\cdot k!}{\delta'^k}\,\frac{(m+n+1-k)!}{\rho^{m+n+1-k}}\,M^{|\nu|}M_\psi A S_i\,,$$

de là

$$|\psi_i^{(\nu)}(x,t)| \leqslant M^{|\nu|}M_\psi A S_i$$
$$\times\left\{\frac{(m+n+1)!}{\rho^{m+n+1}} + \sum_{p\neq 0} C_p^{m+n+1}\left(\sum_{k\leqslant p} C_k^p 2\frac{k!}{\delta'^k}\,\frac{(m+n+1-k)!}{\rho^{m+n+1-k}}\right)\right\}.$$

On désigne $\rho'=\min(\delta',\rho)$. Alors,

$$\sum_{k\leqslant p}\cdots \leqslant \frac{2\cdot p!}{\rho'^{\,m+n+1}}\sum_{k\leqslant p}\frac{(m+n+1-k)!}{(p-k)!} \leqslant \frac{2\cdot p!}{\rho'^{\,m+n+1}}\cdot\frac{(m+n+1)!}{p!}(p+1)^{5)}$$
$$\leqslant 2\frac{(p+1)\cdot(m+n+1)!}{\rho'^{\,m+n+1}} \leqslant 2\frac{(m+n+2)!}{\rho'^{\,m+n+1}}\,.$$

D'où, finalement,

$$(2,17)\qquad |\psi_i^{(\nu)}(x,t)| \leqslant \frac{M^{|\nu|}M_\psi A S_i}{\rho'^{\,m+n+1}}(m+n+2)!\,2^{m+n+2}\,,\qquad m=|\nu|\,.$$

En ajoutant cette inégalité par i, et compte tenu de (2, 15), on aura l'inégalité de la forme

5) $\dfrac{(m+n+1-k)!}{(p-k)!} \leqslant \dfrac{(m+n+1)!}{p!}$

(2, 18) $|D^{\nu}u(x, t)|\leqslant\dfrac{2^{|\nu|+n+2}}{\rho'^{|\nu|+n+1}}M'^{|\nu|}M'_{\psi}k|\Omega_0|\cdot(|\nu|+n+2)!$ pour $(x, t)\in U$,

où M' est une constante ne dépendant que de ω et $\lambda_i(\omega)$ $(i=1, 2, \cdots, N)$, et M'_{ψ} ne dépend que de $\psi(\omega)$, k est une constante $\geqslant 2$ et $|\Omega_0|$ est la mesure superficielle de Ω_0.

L'évaluation (2, 18) montre que la distribution définie par (2, 7) est une fonction analytique en (x, t) au voisinage du point (x_0, t_0) n'appartenant pas à (B). Cela achève notre démonstration.

3. Dans ce numéro, nous allons envisager le cas général, à savoir le cas où $B\neq 0$, en supposant les racines $\lambda_j(\omega)$ réelles et distinctes.

Posons

$$\hat{u}(\omega\xi, t) = \sum_{j=1}^{N}\exp(i\lambda_j(\omega)\xi t)\left\{v_0^{(j)}(\omega, t)+\frac{v_1^{(j)}(\omega, t)}{\xi}+\cdots+\frac{v_n^{(j)}(\omega, t)}{\xi^n}+\cdots\right\}.$$

Notre premier but est de montrer que, si ξ est assez grand, cette série uniformément (par rapport à ω, t) converge.

Suivons le procédé montré par P. D. Lax dans [1].

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\sum_j A_j\frac{\partial}{\partial x_j}-B\right)u(x, t) = 0 \qquad \text{équivaut à}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-iA\cdot\omega\xi-B\right)\hat{u}(\omega\xi, t) = 0\,.$$

Ceci entraîne

(3, 1) $\qquad (\lambda_i(\omega)-A\cdot\omega)v_0^{(i)} = 0 \qquad (i=1, 2, \cdots, N)\,;$

(3, 2) $\qquad (\lambda_i(\omega)-A\cdot\omega)v_n^{(i)} = -\sqrt{-1}\{(v_{n-1}^{(i)})'_t-Bv_{n-1}^{(i)}\}$

$n=1, 2, \cdots;\ i=1, 2, \cdots, N.$

Posons

(3, 3) $$BR_i(\omega) = \sum_j b_{ij}(\omega)R_j(\omega)\,.$$

Remarquons que les $b_{ij}(\omega)$ sont des fonctions analytiques.

Posons

(3, 4) $$v_n^{(i)} = \sum_j \sigma_n^{ij}(\omega, t)R_j(\omega)\,.$$

Alors

$$Bv_n^{(i)} = \sum_j \sigma_n^{ij}BR_j = \sum_{j,k}\sigma_n^{ij}b_{jk}R_k = \sum_j\Big(\sum_k\sigma_n^{ik}b_{kj}\Big)R_j\,.$$

L'équation (3, 2) devient

(3, 5) $$\sigma_n^{ij}(\omega, t) = \frac{\sqrt{-1}}{\lambda_j - \lambda_i}\{(\sigma_{n-1}^{ij})'_t - \sum_k \sigma_{n-1}^{ik} b_{kj}\} \qquad i \neq j\,;$$

(3, 6) $$(\sigma_{n-1}^{ii})'_t - \sum_k \sigma_{n-1}^{ik} b_{ki} = 0 \qquad \text{ou bien}$$

(3, 6)′ $$(\sigma_{n-1}^{ii})'_t - b_{ii}\sigma_{n-1}^{ii} = \sum_{k \neq i} \sigma_{n-1}^{ik} b_{ki}\,.$$

D'après la condition (3, 1), on pose

$$v_0^{(i)} = \sigma_0^{(i)}(\omega, t) R_i(\omega)\,,$$

alors la condition (3, 6)′ implique

(3, 6)$_0$ $$(\sigma_0^{(i)})'_t - b_{ii}\sigma_0^{(i)} = 0 \qquad \text{avec la condition initiale}$$
$$\sigma_0^{(i)}(\omega, 0) = \sigma_i(\omega) \qquad (i = 1, 2, \cdots, N)\,.$$

Ensuite, pour $v_n^{(i)}(\omega, t)$ on pose la codition initiale

$$v_n^{(i)}(\omega, 0) = 0 \qquad n = 1, 2, \cdots\,.$$

Cette condition équivaut à

$$\sum_i \sigma_n^{ij}(\omega, 0) = 0 \qquad (j = 1, 2, \cdots, N) \quad (n = 1, 2, \cdots)\,,$$

ou bien

(3, 7) $$\sigma_n^{ii}(\omega, 0) = -\sum_{j \neq i} \sigma_n^{ji}(\omega, 0)\,.$$

Pour évaluer $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^p \sigma_n^{ij}(\omega, t)$, commençons par

LEMME 3, 1. *Soit $x(t)$ la solution de l'équation différentielle $x' - dx = k(t)$ où d est une constante. On a pour $t \geqslant 0$,*

$$|x(t)| \leqslant a(|x(0)| + \max_{0 \leqslant \tau \leqslant t} |k(\tau)|) \quad \text{où} \quad a = \exp(|d|t)\,;$$
$$x^{(p)}(t) = d^p \cdot x(t) + \sum_{q=0}^{p-1} d^{p-q-1} k^{(q)}(t) \qquad p \geqslant 1\,.$$

Ceci remarqué, désignons

$$M_n^{(p)} = \max_{i,j=1,\cdots,N} \left\{ \sup_{\omega \in \Omega_0,\, 0 \leqslant t \leqslant T} \left| \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^p \sigma_n^{ij}(\omega, t) \right| \right\},$$

$$M_n'^{(p)} = \max_{i \neq j} \left\{ \sup \left| \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^p \sigma_n^{ij}(\omega, t) \right| \right\},$$

$$'M_n^{(p)} = \max_{i=1,2,\cdots,N} \left\{ \sup \left| \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^p \sigma_n^{ii}(\omega, t) \right| \right\};$$

$$\delta \leqslant \min_{\omega \in \Omega_0} |\lambda_i(\omega) - \lambda_j(\omega)| \qquad i \neq j, \text{ de plus } \delta < 1,$$
$$K = \max_{i,j} \{\max_{\omega \in \Omega_0} |b_{ij}(\omega)|\}\,; \qquad a = \exp(KT).$$

On a alors, d'après (3, 5)

$$M_n'^{(p)} \leqslant \frac{1}{\delta}(M_{n-1}'^{(p+1)} + NKM_{n-1}^{(p)}). \tag{3, 8}$$

D'après (3, 6)′, (3, 7) et le lemme 3, 1, on a

$$'M_n^{(0)} \leqslant a(NM_n'^{(0)} + NKM_n'^{(0)}) = a(1+K)NM_n'^{(0)}, \tag{3, 9}$$

$$'M_n^{(p)} \leqslant K^p\, 'M_n^{(0)} + \sum_{q=0}^{p-1} K^{p-q-1} NK\, M_n'^{(q)}. \tag{3, 10}$$

On a alors le

LEMME 3, 2.

$$M_n^{(p)} \leqslant c_1^n (cNK)^{n+p} \left(\frac{a}{\delta}\right)^{n+1} M,$$

où $M = \max_{i=1,2,\cdots,N} \{\max_{\omega \in \Omega_0} |\sigma_i(\omega)|\}$; *les* $\sigma_i(\omega)$ *étant définies par* (2, 4) ; c *est une constante positive quelconque* $\geqslant 2$; c_1 *est aussi une constante quelconque vérifiant* $c_1 \geqslant 2(1+K)N\dfrac{c+1}{c}$.

DÉMONSTRATION. D'après $(3, 6)_0$, l'inégalité à démontrer est vraie pour $n=0$. Nous allons montrer par récurrence en n. Supposons l'inégalité vraie pour $n-1$, montrons-la pour n.

D'après (3, 8),

$$\begin{aligned} M_n'^{(p)} &\leqslant \frac{1}{\delta}(M_{n-1}^{(p+1)} + NKM_{n-1}^{(p)}) \\ &\leqslant \frac{1}{\delta} c_1^{n-1} (cNK)^{n+p-1} (c+1) NK \left(\frac{a}{\delta}\right)^n M. \end{aligned} \tag{3, 11}$$

D'après la condition sur c_1, on a $(c+1) \leqslant cc_1$, et $a \geqslant 1$, de là l'inégalité voulue. Passons à $'M_n^{(p)}$. D'abord d'après (3, 9) et (3, 11), on a

$$'M_n^{(0)} \leqslant a(1+K)Nc_1^{n-1}(cNK)^{n-1}(c+1)NK\frac{1}{\delta}\left(\frac{a}{\delta}\right)^n M,$$

d'aprés la condition sur c_1, $(1+K)N(c+1) \leqslant cc_1$, de là

$$'M_n^{(0)} \leqslant c_1^n (cNK)^n \left(\frac{a}{\delta}\right)^{n+1} M.$$

Ensuite, d'après (3, 10) et (3, 11)

$$'M_n^{(p)} \leqslant K^p\, 'M_n^{(0)} + NK \sum_{q=0}^{p-1} K^{p-q-1} c_1^{n-1} (cNK)^{n+q-1} (c+1) NK \left(\frac{a}{\delta}\right)^{n+1} M, \quad p \geqslant 1 .$$

D'abord,

$$K^p\, 'M_n^{(0)} \leqslant c_1^n K^p (cNK)^n \left(\frac{a}{\delta}\right)^{n+1} M, \qquad \text{comme} \quad c \geqslant 2,$$

a fortiori $cN \geqslant 2$, de là $K^p\, 'M_n^{(0)} \leqslant \frac{1}{2} c_1^n (cNK)^{n+p} \left(\frac{a}{\delta}\right)^{n+1} M$.
Ensuite, le second terme sous le signe $\sum$ devient

$$c_1^{n-1} (cNK)^{n-1} (c+1)(NK)^2 \left(\frac{a}{\delta}\right)^{n+1} M \sum_{q=0}^{p-1} K^{p-q-1} (cNK)^q ;$$

compte tenu de ce que $\sum_{q=0}^{p-1} K^{p-q-1} (cNK)^q = K^{p-1}\{1 + cN + \cdots + (cN)^{p-1}\}$ $\leqslant 2(cNK)^{p-1}$, puisque $cN \geqslant 2$, de là il se majore par $2c_1^{n-1} (cNK)^{n+p-2} (c+1)(NK)^2 \left(\frac{a}{\delta}\right)^{n+1} M$.
D'après la condition sur c_1 et c, on a $2(c+1) \leqslant \frac{1}{2} c_1 c^2$, d'où le dernier se majore par
$\frac{1}{2} c_1^n (cNK)^{n+p} \left(\frac{a}{\delta}\right)^{n+1} M$. Cela achève notre démonstration.

Dans le lemme 3, 2, nous avons évalué en supposant ω réels. Mais, comme on s'aperçoit aisément, notre évaluation est même vraie dans un domaine complexe contenant les points réels. A savoir, on a le

LEMME 3, 3. *Soit* $(s) = (s_1, \cdots, s_{n-1})$ *une carte locale analytique de* Ω_0. *Pour toute partie compacte* K_s *des* (s), *il existe une constante* $\tilde{\rho} > 0$ *telle que* $\sigma_m^{ij}(\omega(s), t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$ $(m = 0, 1, 2, \cdots)$ *peuvent être prolongées analytiquement dans les polydisques de rayon* $\tilde{\rho}$ *ayant comme centre les points (réels) de* K_s. *De plus on y a l'inégalité de la forme du lemme* 3, 2:

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^p \sigma_m^{ij}(\omega(s+is'), t)\right| \leqslant C^{m+p} M', \qquad \textit{pour} \ |s_i'| \leqslant \tilde{\rho} \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

$$s \in K_s, \quad m = 0, 1, 2, \cdots \quad p = 0, 1, 2, \cdots .$$

On va envisager maintenant

$$(3, 12) \qquad u(x, t) = \sum_{j=1}^{N} \int_{\xi \geqslant \xi_0} \xi^{n-1} d\xi \int_{\Omega_0} \exp(il_j \xi) \{v_0^{(j)}(\omega, t) + \cdots + v_m^{(j)}(\omega, t)/\xi^m + \cdots\} d\omega ,$$

où $l_j = x\cdot\omega + t\lambda_j(\omega)$, et ξ_0 est un nombre assez grand qu'on va déterminer. Compte tenu de (3, 4), il suffit d'envisager une distribution de la forme:

$$(3,13)\qquad u(x, t) = \int_{\xi\geq\xi_0} \xi^{n-1}d\xi \int_{\Omega_0} \exp(il_j\xi)\{\sigma_0^{(j)}(\omega, t) + \sigma_1^{jk}(\omega, t)/\xi + \cdots + \sigma_m^{jk}(\omega, t)/\xi^m + \cdots\}\psi(\omega)d\omega\,,$$

où $\psi(\omega)$ est une fonction analytique en ω.

Posons

$$(3,14)\qquad u_m(x, t) = \int_{\xi\geqslant\xi_0} \xi^{n-1}d\xi \int \exp(il\xi)\frac{\psi_m(\omega, t)}{\xi^m}d\omega$$

$$\text{où}\quad l = l_j\,,\ \psi_m = \sigma_m^{jk}\psi\,.$$

$$(3,15)\qquad u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + \cdots + u_m(x, t) + \cdots\cdots.$$

Prenons (x_0, t_0) n'appartenant pas à (B). Comme au n^0 3, on considère $u_m(x, t)$ au voisinage U de (x_0, t_0). La dérivation de $u_m(x, t)$ donne[6] pour

$$D^\nu = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\nu_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\nu_n}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\nu_{n+1}},\quad \nu = (\nu_1, \cdots, \nu_n, \nu_{n+1}) = (\nu', \nu_{n+1})$$

$$(3,16)\qquad D^\nu u_m(x, t) = \sum_r C_r^{\nu_{n+1}} \int_{\xi\geqslant\xi_0} \xi^{n-1+|\nu'|+r}d\xi \times \int \frac{\exp(il\xi)(i\omega)^{\nu'}(i\lambda_j)^r\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\nu_{n+1}-r}\psi_m(\omega, t)}{\xi^m}d\omega\,.$$

Nous utiliserons ici la paramétrisation $(u_1, \cdots, u_{n-2}, l)$ comme au n° 2. D'après le lemme 3, 3, correspondant à (2, 16), on aura l'inégalité de la forme:

$$(3,17)\qquad \left|\left(\frac{\partial}{\partial l}\right)^k\left\{\omega_1^{\nu_1}\cdots\omega_n^{\nu_n}\lambda_j^{\nu_{n+1}}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^p\psi_m(\omega, t)\frac{\partial(s_1\cdots)}{\partial(u_1\cdots)}\varphi_i(s)\right\}\right| \leqslant \frac{k!}{\rho^k}M^{|\nu|}M_\sigma^{m+p}A\,.\qquad \nu\geqslant 0,\ p, m = 0, 1, 2, \cdots.$$

Considérons d'abord le cas où $|\nu|+n\geqslant m$, alors dans (3, 16) $|\nu'|+r\leqslant|\nu|$, d'où $n-1+|\nu'|+r-m\geqslant|\nu|+n-1-m$. Donc, correspondant à (2, 18), on aura l'inégalité de la forme:

---

6) Si l'on utilise le théorème de Cauchy-Kowalewsky combiné avec le théorème de Holmgren sur l'unicité, il nous suffira de montrer seulement l'analyticité en x. Dans ce cas, le raisonnement sera plus bref.

$$(3, 18)\qquad |D^\nu u_m(x, t)| \leqslant 2^{|\nu|} \frac{2^{|\nu|+n+2-m}}{\left(\frac{\rho'}{\xi_0}\right)^{|\nu|+n+1-m}} M'^{|\nu|+m}(|\nu|+n+2-m)!\, k|\Omega_0|$$

pour $m \leqslant |\nu|+n$, $(m=0, 1, 2, \cdots;\ \nu \geqslant 0)$, où M' est supposé $\geqslant 1$.

D'autre part, pour $|\nu|+n \leqslant m-1$, on a par l'évaluation très simple,

$$(3, 19)\qquad |D^\nu u_m(x, t)| \leqslant 2^{|\nu|} \frac{M'^{|\nu|+m}}{\xi_0^{m-n-|\nu|}}.$$

On prend

$$(3, 20)\qquad \xi_0 \geqslant 2M'.$$

Maintenant envisageons

$$|D^\nu u(x, t)| \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} |D^\nu u_m(x, t)| = \sum_{m=0}^{|\nu|+n} \cdots + \sum_{m=|\nu|+n+1}^{\infty} \cdots.$$

Dans la première somme, on majore tous les termes par (d'après (3, 18))

$$2^{|\nu|} \frac{2^{|\nu|+n+2}}{\left(\frac{\rho'}{\xi_0}\right)^{|\nu|+n+1}} M'^{2|\nu|+n}(|\nu|+n+2)!\, k|\Omega_0|.$$

D'autre part, le second membre se majore d'après (3, 20) par

$$2^{|\nu|} 2 \frac{M'^{2|\nu|+n+1}}{\xi_0} |\Omega_0|.$$

D'où

$$(3, 21)\quad |D^\nu u(x, t)| \leqslant \frac{2^{2|\nu|+n+2} M'^{2|\nu|+n+1}}{\left(\frac{\rho'}{\xi_0}\right)^{|\nu|+n+1}} (|\nu|+n+3)!\, k|\Omega_0| (|\nu| = 0, 1, 2, \cdots).$$

Ceci établit que $u(x, t)$ est une fonction analytique en (x, t) dans $(x, t) \in U$, de là il en est de même de la distribution $u(x, t)$ définie par (3, 12). Or, $u(x, t)$ est bien la solution de (1, 1) avec la donnée initiale :

$$u(x, 0) \xrightarrow[\mathfrak{F}]{} \sum_{i=1}^{N} (\sigma_i(\omega))_{\xi \geqslant \xi_0} R_i(\omega),$$

où $(\sigma_i(\omega))_{\xi \geqslant \xi_0}$ désigne la fonction qui est zéro pour $\xi < \xi_0$ et égale à $\sigma_i(\omega)$ pour $\xi \geqslant \xi_0$. Pour achever notre démonstration, il ne reste qu'à constater l'analyticité de la solution $u_0(x, t)$ de (1, 1) avec la donnée initiale :

$$u_0(x, 0) \xrightarrow[\mathfrak{F}]{} \sum_i (\sigma_i(\omega))_{\xi<\xi_0} R_i(\omega) ,$$

où $(\sigma_i(\omega))_{\xi<\xi_0}$ est la fonction qui est égale à $\sigma_i(\omega)$ pour $\xi<\xi_0$ et 0 pour $\xi \geqslant \xi_0$. Or, ceci est évident, vu que $\mathfrak{F}(u_0(x, t))$ est la solution de l'équation (1, 2) et que le support de cette image est toujours comprise dans la boule de rayon ξ_0 et elle dépend analytiquement en t.

4. Nous avons supposé que les racines $\lambda_i(\omega)$ sont distinctes. Nous allons montrer que cette hypothèse se généralise, Supposons le système (1, 1) hyperbolique au sens que nous avons énoncé au début de l'Introduction. Comme on sait (voir Petrowsky [3], [5], Mizohata [2]), on peut définir, dans ce cas, *localement* sur la sphère Ω_0, l'ensemble de vecteurs propres $R_{11}(\omega), \cdots, R_{1,p_1}(\omega)$; $R_{21}(\omega), \cdots, R_{2,p_2}(\omega)$; $\cdots$; $R_{s1}(\omega), \cdots, R_{s,p_s}(\omega)$ qui sont *analytiques* en ω, et linéairement indépendants :

$$(4,1) \qquad (\lambda_i(\omega)I - A\cdot\omega)R_{ij}(\omega) = 0 \qquad (i=1, 2, \cdots, s\,;\; j=1, 2, \cdots, p_i) .$$

On pose la solution cherchée sous la forme

$$(4,2) \qquad \hat{u}(\omega\xi, t) = \sum_{j=1}^{s} \exp(i\lambda_j(\omega)\xi t)\{v_0^{(j)}(\omega, t) + \cdots + v_n^{(j)}(\omega, t)/\xi^n + \cdots\} .$$

Posons

$$(4,3) \qquad v_n^{(i)}(\omega, t) = \sum_{j=1}^{s} \Big(\sum_{k=1}^{p_j} \sigma_n^{(i)jk} R_{jk}\Big)$$

$$(4,4) \qquad BR_{jk} = \sum_{\substack{1\leq h\leq s\\ 1\leqslant l\leqslant p_h}} b_{jk}^{hl}(\omega) R_{hl}(\omega) , \quad \text{de là}$$

$$Bv_n^{(i)} = \sum_{j\,k} \Big(\sum_{h,l} \sigma_n^{(i)hl} b_{jk}^{hl}\Big) R_{jk} .$$

Conformément à la formule (3, 5), on a

$$(4,5) \qquad \sigma_n^{(i)jk} = \frac{\sqrt{-1}}{\lambda_j - \lambda_i}\{(\sigma_{n-1}^{(i)jk})_t' - \sum_{h,l} \sigma_{n-1}^{(i)hl} b_{hl}^{jk}\} \qquad \text{pour} \quad j \neq i .$$

et à (3, 6)′, on a

$$(4,6) \qquad (\sigma_{n-1}^{(i)ik})_t' - \sum_{1\leqslant l\leqslant p_i} \sigma_{n-1}^{(i)il} b_{il}^{ik} = \sum_{\substack{\{h;\, h\neq i\}\\ \{l=1,\cdots p_h\}}} \sigma_{n-1}^{(i)hl} b_{hl}^{ik}$$

$(i=1, 2, \cdots, s\,;\; k=1, 2, \cdots, p_i)$, avec la condition initiale

(4, 7) $$\sigma_{n-1}^{(t)ik}(\omega, 0) = -\sum_{\{i'; i' \neq i\}} \sigma_{n-1}^{(t')ik}.$$

Pour évaluer $\sigma_n^{(t)i1}, \cdots, \sigma_n^{(t)i,p_i}$ d'après le système d'équation différentielle (4, 6), on s'appuie sur le

LEMME 4, 1. *Soit* $X(t)=(x_1(t), \cdots, x_r(t))$ $t \geqslant 0$, *une solution du système* $X'(t)=DX(t)+K(t)$, *où* D *est une matrice d'ordre* r, *on a*

$$|X(t)| \leqslant \exp(\|D\|t)(|X(0)| + \max_{0 \leqslant \tau \leqslant t}|K(\tau)|),$$

où $$|X(t)| = (\sum_i |x_i(t)|^2)^{\frac{1}{2}};$$

$\|D\|$ *est la norme de* D *considéré comme application de* C^r *dans* C^r.

$$X^{(p)}(t) = D^p X(t) + \sum_{q=0}^{p-1} D^{p-q-1}K^{(q)}(t).$$

On aura donc l'évaluation analogue au lemme 3, 2. On aura donc

THEOREME 4, 1. *Soit* $E(x, t)$ *une des solutions élémentaires du système hyperbolique* (1, 1), *alors* $E(x, t)$ *est une fonction analytique* (*à valeurs vectorielles*) *en* (x, t) *sauf sur les bicaractéristiques issues de l'origine.*

Enonçons une conséquence du Théorème. Désignons par $S(x_0, t_0)$, $t_0 \neq 0$, l'intersection des lignes bicaractéristiques issues du point (x_0, t_0) (du système (1, 1)) avec le plan $t=0$.

THEOREME 4, 2. *Soit* $u(x, t)$ *une solution du système* (1, 1). *Si la donnée initiale,* $u(x, 0)$, *est analytique au voisinage de* $S(x_0, t_0)$, *alors* $u(x, t)$ *est analytique en* (x, t) *au voisinage de* (x_0, t_0).

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer l'analyticité en x. En effet, si cela est établi, le théorème de Cauchy-Kowalewsky, combiné avec le théorème de Holmgren (sur l'unicité) nous montre l'analyticité de $u(x, t)$ en (x, t) au voisinage de (x_0, t_0).

Soient $E_1'(x, t), \cdots, E_N'(x, t)$ le système fondamental de solutions élémentaires du système adjoint à (1, 1) :

(4, 8) $$\left(-\frac{\partial}{\partial t} + \sum_j {}^t A_j \frac{\partial}{\partial x_j} - {}^t B\right) E_i'(x, t) = 0$$

vérifiant

$$E_i'(x, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \delta_x \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} i$$

En désignant par $E'_i(x, t\,;\, x_0, t_0) = \tau_{x_0, t_0} E'_i(x, t)$ (translatée de (x_0, t_0) de la distribution $E'_i(x, t)$), on a

$$(4,9) \qquad u(x_0, t_0) = \sum_i \int u_i(x, 0) E'_i(x, 0\,;\, x_0, t_0)dx = \sum_i \int u_i(x, 0) E'_i(x-x_0\,;\, 0, t_0)dx$$

où l'intégration est à prendre au sens de distribution.

Ou encore, en désignant $E_i(\xi - x) = E'_i(\xi - x\,;\, 0, t_0)$, $\varphi_i(x) = u_i(x, 0)$,

$$(4,10) \qquad u(x, t) = \sum_i \int \varphi_i(\xi) E_i(\xi - x) d\xi\,.$$

Remarquons que les bicaractéristiques de (4, 8) sont identiques à celles de (1, 1).

Pour notre but, il suffit de montrer le

LEMME 4, 2. *Soit $u(x)$ la distribution définie par*

$$u(x) = \int f(\xi - x)\varphi(\xi)d\xi\,.$$

On suppose que

i) *$f(x)$ est une distribution à support compact, qui est analytique en dehors de l'ensemble fermé S;*

ii) *$\varphi(x)$ est une distribution, qui est analytique au voisinage de l'ensemble $S_{x_0} = \tau_{x_0} S$ (translatée de S).*

Alors $u(x)$ est une fonction analytique au voisinage du point x_0.

DÉMONSTRATION. Ce qui va suivre est essentiellement le même que [6] Exposé 6, Proposition 1.

On prend $\alpha(\xi)$, $0 \leqslant \alpha(\xi) \leqslant 1$, qui vaut 1 au voisinage de S_{x_0} dont le support soit contenu complètement dans le domaine de l'analyticité de $\varphi(\xi)$. On décompose $u(x)$ en deux:

$$(4,11) \qquad u(x) = u_1(x) + u_2(x) = \int f(\xi - x)[1-\alpha(\xi)]\varphi(\xi)d\xi + \int f(\xi - x)\alpha(\xi)\varphi(\xi)d\xi\,.$$

Sur le support de $[1-\alpha(\xi)]\varphi(\xi) \in \mathscr{E}'$, $f(\xi - x)$ est une fonction analytique en $\xi - x$, si x est assez voisin de x_0. Cela montre que $u_1(x)$ est analytique au voisinage de x_0.

L'analyticité de $u_2(x)$ se démontre de la manière suivante:

$$D^\nu u_2(x) = (-1)^{|\nu|}\int D_\xi^\nu f(\xi-x)\alpha(\xi)\varphi(\xi)d\xi = \int f(\xi-x)D^\nu[\alpha(\xi)\varphi(\xi)]d\xi .$$

Par Leibniz, elle s'écrit

$$(4, 12) \qquad \int f(\xi-x)\alpha(\xi)D^\nu\varphi(\xi)d\xi + \sum_{\mu\neq 0} C_\mu^\nu \int f(\xi-x)D^\mu\alpha(\xi)D^{\nu-\mu}\varphi(\xi)d\xi .$$

Evaluons le premier terme. $f(x)$ s'exprime

$$f = \sum_{|p|\leqslant m} D^p\mu_p \quad \text{où } \mu_p \text{ sont des mesures à support compact.}$$

D'autre part, comme $\varphi(\xi)$ est une fonction analytique au voisinage du support de $\alpha(\xi)$, on a

$$|D^\nu\varphi(\xi)| \leqslant \frac{\nu!\, M_\varphi}{\rho^{|\nu|}} \quad \text{pour } \xi\in \text{ support de } \alpha\,; \text{ on suppose } \rho\leqslant 1 .$$

De là

$$(4, 13) \quad \left|\int f(\xi-x)\alpha(\xi)D^\nu\varphi(\xi)d\xi\right| \leqslant \sum_{|p|\leqslant m}(\max|D^p[\alpha(\xi)D^\nu\varphi(\xi)]|)\cdot\left|\int|d\mu_p|\right.$$

$$\leqslant c_m\alpha(m)K\frac{(|\nu|+m)!}{\rho^{|\nu|+m}}M_\varphi , \quad \text{où } c_m \text{ est une constante qui ne dépend}$$

que de m; $\alpha(m) = \max_{|p|\leqslant m}(\max\ |D^p\alpha(\xi)|)$; $K = \max_{|p|\leqslant m}\int|d\mu_p|$.

Considérons les derniers termes:

$$\int f(\xi-x)D^\mu\alpha(\xi)D^{\nu-\mu}\varphi(\xi)d\xi = (-1)^{|\mu|}\int \alpha(\xi)D_\xi^\mu[f(\xi-x)D^{\nu-\mu}\varphi(\xi)]d\xi ,$$

il faut noter que l'intégration en ξ ne s'étend que sur l'ensemble où $\alpha'_\xi \neq 0$. Comme $f(\xi-x)$ y est analytique en $\xi-x$, si x est voisin de x_0, on a

$|D_\xi^\nu f(\xi-x)| \leqslant \frac{\nu!}{\rho'^{|\nu|}}M_f$. Par Leibniz, $D_\xi^\mu[f(\xi-x)D^{\nu-\mu}\varphi(\xi)] = \sum_{\sigma\leqslant\mu} C_\sigma^\mu D_\xi^\sigma f(\xi-x)D^{\nu-\sigma}\varphi(\xi)$, elle se majore donc par

$$\sum_{\sigma\leqslant\mu} C_\sigma^\mu \frac{\sigma!}{\rho'^{|\sigma|}}M_f\frac{(\nu-\sigma)!}{\rho^{|\nu-\sigma|}}M_\varphi \leqslant \frac{M_fM_\varphi}{\rho''^{|\nu|}}\sum_{\sigma\leqslant\mu} C_\sigma^\mu\sigma!\,(\nu-\sigma)! , \quad \text{où } \rho'' = \min(\rho, \rho').$$

Or, $\sum_{\sigma\leqslant\mu} C_\sigma^\mu\sigma!\,(\nu-\sigma)! = \mu!\sum\frac{(\nu-\sigma)!}{(\mu-\sigma)!}$, en majorant tous les termes sous le signe de $\sum$ par $\frac{\nu!}{\mu!}$, on a $\leqslant \nu!\sum_{\sigma\leqslant\mu} 1 = \nu!\,(\mu_1+1)\cdots(\mu_n+1) \leqslant (|\nu|+n)!$.
De là,

$$(4, 14) \qquad |\text{les derniers termes de } (4, 12)| \leqslant \frac{(|\nu|+n)!}{\rho''^{|\nu|}}M_fM_\varphi 2^{|\nu|} .$$

En ajoutant (4, 13) et (4, 14), on voit facilement que $D^\nu u_2(x)$, $\nu \geqslant 0$, sont majorées par une suite vérifiant bien que $u_2(x)$ est une fonction analytique. c.q.f.d.

Comme un cas très particulier du théorème 4, 2, on a le

COROLLAIRE DU THÉORÈME 4, 2. *Si la donnée initiale $u(x, 0)$ est analytique en tout x, alors la solution $u(x, t)$ est analytique en (x, t) en tous les points (x, t).*

5. Il n'est pas difficile de voir que notre résultat est vrai pour les systèmes hyperboliques d'ordre plus haut qu'un. Limitons-nous d'équation hyperbolique :

$$M[u] = 0\,, \quad \text{où}$$

$$M = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^m + \sum_{\substack{k_0+k_1+\cdots+k_n=m \\ k_0<m}} a^{(k)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{k_0}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{k_n} + \sum_{k_0+\cdots+k_n\leqslant m-1} b^{(k)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{k_0}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{k_n}. \tag{5, 1}$$

On désigne la partie homogène de degré m de l'image de Fourier de M par H:

$$H = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^m + \alpha_1(\omega)(i\xi)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{m-1} + \alpha_2(\omega)(i\xi)^2\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{m-2} + \cdots + \alpha_m(\omega)(i\xi)^m, \tag{5, 2}$$

où $\alpha_i(\omega)$ sont des fonctions homogènes de degré 0 en ω, qui sont évidemment analytiques en ω.

Posons

$$\hat{u}_i(\omega\xi, t) = (i\xi)^{m-1-i}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^i \hat{u}(\omega\xi, t) \qquad (i = 0, 1, 2, \cdots, m-1)\,. \tag{5, 3}$$

En désignant par $\hat{v}(\omega\xi, t) = (\hat{u}_0, \cdots, \hat{u}_{m-1})$, l'équation $\hat{M}[\hat{v}] = 0$ s'écrit, en combinant avec (5, 3), sous la forme matricielle :

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - iA(\omega)\xi - B_0(\omega) - B_1(\omega)/\xi - \cdots - B_{m-1}/\xi^{m-1}\right]\hat{v}(\omega\xi, t) = 0 \tag{5, 4}$$

$$A(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \\ -\alpha_m(\omega) & -\alpha_{m-1}(\omega) & \cdots & & -\alpha_1(\omega) \end{pmatrix}. \tag{5, 5}$$

Comme on sait, les valeurs propres de $A(\omega)$ sont identiques aux racines du polynome caractéristique de (5, 1) :

$$P(\lambda\,;\omega)=\lambda^m+\alpha_1(\omega)\lambda^{m-1}+\cdots+\alpha_m(\omega)=0\,.$$

On suppose que les racines $\lambda_i(\omega)$ sont distinctes et réelles pour tout ω. Les $\lambda_i(\omega)$ sont alors des fonctions analytiques. Dans (5, 4), $A(\omega)$, $B_0(\omega)$, $\cdots$, $B_{m-1}(\omega)$ sont des matrices (d'ordre m) homogènes de degré 0 en ω, et analytiques.

Nous allons construire la solution $\hat{v}(\omega\xi, t)$ de (5, 4) vérifiant la condition initiale :

$$\hat{v}(\omega\xi,0)=\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\1\end{pmatrix} \tag{5, 6}$$

en visant à la construction de la solution $u(x, t)$ de (5, 1) vérifiant

$$u(x,0)=\frac{\partial}{\partial t}u(x,0)=\cdots=\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{m-2}u(x,0)=0\,,\quad \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{m-1}u(x,0)=\delta_x\,.$$

Remarquons, en chemin faisant, que les autres solutions élémentaires vérifiant :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{i}u_j(x,0)=\begin{cases}\delta_x & \text{pour } i=j\\ 0 & \text{pour } i\neq j\end{cases}\qquad (0\leqslant j\leqslant m-2)$$

se détermineront de la même manière. Par conséquent, nous n'en donnons pas la démonstration.

On pose, comme auparavant

$$\hat{v}(\omega\xi,t)=\sum_{j=1}^{m}\exp(i\lambda_j\xi t)\{v_0^{(j)}+\cdots+v_n^{(j)}/\xi^n+\cdots\}\,. \tag{5, 7}$$

En posant les coefficients de $\xi^{-(n-1)}$ zéro, on a

$$i(\lambda_j(\omega)I-A(\omega))v_n^{(j)}=-(v_{n-1}^{(j)})'_t+B_0v_{n-1}^{(j)}+B_1v_{n-2}^{(j)}+\cdots+B_{m-1}v_{n-m}^{(j)} \tag{5, 8}$$
$$\text{(on pose}\quad v_{-1}=v_{-2}=\cdots=0)\,.$$

Décomposons la donnée initiale (5, 6) :

$$\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\0\\1\end{pmatrix}=\sum_{j=1}^{m}\sigma_j(\omega)R_j(\omega)\,. \tag{5, 9}$$

Comme dans le cas précédent, on pose

$$v_n^{(i)} = \sum_j \sigma_n^{ij}(\omega, t) R_j(\omega). \tag{5, 10}$$

On pose finalement,

$$B_0 v_{n-1}^{(i)} + \cdots + B_{m-1} v_{n-m}^{(i)} = \sum_j P_j^{(i)}(\omega\,;\, \sigma_{n-1}, \cdots, \sigma_{n-m}) R_j, \tag{5, 11}$$

où $P_j^{(i)}$ sont des formes linéaires en $\sigma_{n-1}^{ij}, \cdots, \sigma_{n-m}^{ij}$ à coefficients dans les fonctions analytiques en ω.

Ceci posé, (5, 8) s'écrit sous la forme

$$\sigma_n^{ij} = \frac{\sqrt{-1}}{\lambda_j - \lambda_i} \{(\sigma_{n-1}^{ij})_t' - P_j^{(i)}(\omega\,;\, \sigma_{n-1}, \cdots, \sigma_{n-m})\} \qquad j \neq i. \tag{5, 12}$$

En écrivant

$$P_i^{(i)} = b_{ii}(\omega) \sigma_{n-1}^{ii} + Q_i^{(i)}(\omega\,;\, \sigma_{n-1}^{ij}, \sigma_{n-2}, \cdots, \sigma_{n-m})$$

où $Q_i^{(i)}$ ne contient pas de terme σ_{n-1}^{ii}, on a

$$(\sigma_{n-1}^{ii})' - b_{ii} \sigma_{n-1}^{ii} = -Q_i(\omega\,;\, \sigma_{n-1}^{ij}, \sigma_{n-2}, \cdots, \sigma_{n-m}), \tag{5, 13}$$

avec la condition initiale

$$\sigma_{n-1}^{ii}(\omega, 0) = -\sum_{\{j\,;\, j \neq i\}} \sigma_{n-1}^{ji}(\omega, 0).$$

Il sera facile de voir qu'on a une inégalité de la forme du Lemme 3, 2. D'où on voit que l'image réciproque de $(\hat{v}_{m-1}(\omega\xi, t))_{\xi \geqq \xi_0}$ est une fonction analytique en (x, t) où (x, t) n'appartient pas à (B). Prenons les autres composants, par exemple $(\hat{v}_0(\omega\xi, t))_{\xi \geqq \xi_0}$. Il en est de même de l'image réciproque de $(i\xi)^{-(m-1)}(\hat{v}_0(\omega\xi, t))_{\xi \geqq \xi_0}$. Ainsi, on voit que l'image réciproque de $\left(\hat{u}(\omega\xi, t), \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{m-1} \hat{u}(\omega\xi, t)\right)_{\xi \geqq \xi_0}$ est analytique en (x, t) dans l'ouvert complémentaire de (B). En ajoutant l'image réciproque de $\left(\hat{u}(\omega\xi, t), \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{m-1} \hat{u}(\omega\xi, t)\right)_{\xi < \xi_0}$, on voit que $u(x, t)$ est une fonction analytique en (x, t) dans l'ouvert envisagé.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. D. Lax, Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems, Duke Math. J. 24 (1957), p. 627–646.

[2] S. Mizohata, Problème de Cauchy pour les systèmes hyperboliques et paraboliques, à paraître.

[3] I. G. Petrowsky, Über das Cauchysche Problem für ein System linearer partieller Differentialgleichungen im Gebiete der nicht-analytischen Funktionen, Bull. de l'Univ. de l'Etat de Moskou (1938), p. 1–74.
[4] ———, On the diffusion of waves and the lacunas for hyperbolic equations, Rec. Math. (Math. Sbornik), 59 (1945), p. 289–370.
[5] ———, Quelques remarques sur mes travaux relatifs au problème de Cauchy (en russe), Ibid. 39 (1956), p. 267–272.
[6] L. Schwartz, Séminaire sur les équations aux dérivées partielles (1954–55), Paris.