MEMOIRS OF THE COLLEGE OF SCIENCE, UNIVERSITY OF KYOTO, SERIES A
Vol. XXXII, Mathematics No. 2, 1959.

Le problème de Cauchy pour les systèmes hyperboliques et paraboliques

Par

Sigeru MIZOHATA

(Reçu le 3 juillet, 1959)

---

§1. Introduction. Cet article a pour but d'étendre les résultats de M. I. G. Petrowsky exposés dans [10] aux cas où les coefficients sont variables. Nous allons traiter d'abord les systèmes hyperboliques au sens généralisé. Ce traitement est une suite de mes travaux antérieurs [8] et [9]. Ensuite, nous traiterons les systèmes paraboliques en nous basant sur le même principe. Comme on verra dans la suite, notre traitement est une extension directe des méthodes employées par Petrowsky dans les cas où les coefficients ne dépendent que de t. L'extension est faite d'une manière naturelle. A savoir, grâce à la théorie des opérateurs d'intégrale singulière due à MM, Calderón et Zygmund [1], nous sommes en état de transplanter le raisonnement fait dans le cas où les coefficients sont constants au domaine des coefficients variables. Mais, comme nous avons signalé dans [8], l'emploie des opérateurs d'intégrale singulière nous nécessite quelque-fois des connaissances assez approfondies de ces opérateurs. Nous en exposons dans le §2. Comme nous avons déjà préparé quelques lemmes dans [8] et [9], nous nous limiterons à énoncer les lemmes nécessaires avec quelques commentaires, en renvoyant le lecteur à mes travaux antérieurs.

Qu'il me soit permis de profiter de cette occasion pour faire quelques précisions de mes travaux antérieurs [8], [9]:
1) Nous avons insisté dans [9] sur l'impossibilité de construire une matrice $\sigma\mathfrak{N}(x, t, \xi)$ dans le cas où $n=2$ (où n est la dimension de l'espace). M. T. Shirota m'a communiqué oralement que cette situation découle du fait que nous avons limité $\sigma\mathfrak{N}(x, t, \xi)$ à valeurs

réelles, à savior, nous avons limité l'espace d'eigen-vecteurs de $\sigma\mathcal{H}(x, t, \xi)$ à vecteurs réels. C'est vrai. Mais, d'étendre l'espace d'eigen-vecteurs seulement dans le cas où $n=2$ est, nous semble-t-il artificiel.

2) Nous avons montré dans [9] que le résultat de Calderòn sur l'unicite [2] est vrai indépendamment de la dimension de l'espace. Dans ce cas nous avons supposé que les coefficient des parties principales des systèmes kowalewskiens sont indéfiniment différentiables. Mais ce résultat est vrai en les supposant seulement de classe C_β $\beta>1$. En effet, on peut remplacer avantageusement le Lemme 2.1 de [9], par le Lemme 2.8 de cet article. A savoir, on n'a pas besion de modifier une partition de l'unite $\hat{\alpha}_i(\xi)$ $(i=1, 2, \cdots, p)$ en multipliant $\beta(\xi)$.

§ 2. Quelques lemmes sur les opérateurs d'intégrale singulière.

Nous supposons connue la théorie des opérateurs d'intégrale singulière exposée dans [1]. Nous avons exposé dans [8] quelques proprietés de ces opérateurs. Outre ces propriétés, nous allons utiliser quelques unes qui vont suivre.

DÉFINITION 2.1. *Un ensemble d'opérateurs d'intégrale sigulière* $\{H_\gamma\}_{\gamma\in I}$ *est dit borné, si tous les* H_γ *sont du type* C_β^∞, *avec* $\beta=\infty$, *et de plus qu'ils vérifient la condition suivante: pour tout* (α, β),

$$\sup_{\substack{x\in R^n\\ |\xi|>1}} \left| \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\beta \sigma(H_\gamma)(x, \xi) \right| \text{ est borné lorsque } \gamma \text{ parcourt } I.$$

DÉFINITION 2.2. *Un ensemble de matrices du type* (N, N) *d'opérateurs d'intégrale singulière* $\{\mathcal{H}_\gamma\}_{\gamma\in I}$ *est dit borné, si tous les éléments figurant dans* $\{\mathcal{H}_\gamma\}$ *forment un ensemble borné au sens de la définition* 2.1.

Nous dirons désormais que, si un ensemble d'opérateurs d'intégrale singulière ou bien un ensemble de matrices d'opérateurs d'intégrale singulière est borné au sens de la définition ci-dessus, il est *borné dans l'espace des opérateurs d'intégrale singulière.*

On sait que, H_1 et H_2 étant deux opérateurs d'intégrale singulière du type C_β^∞, avec $\beta=\infty$, alors les opérateurs

$$H_1\Lambda-\Lambda H_1,\ H_1^*\Lambda-\Lambda H_1^*,\ (H_1^*-H_1^\sharp)\Lambda,\ \Lambda(H_1^*-H_1^\sharp),\ (H_1\circ H_2-H_1H_2)\Lambda,$$
$$\Lambda(H_1\circ H_2-H_1H_2)$$

sont des opérateurs continus de L^2 dans lui-même ([2], Théorème 3). Nous énonçons ce thérème sous une forme plus précise:

LEMME 2.1. *Lorsque H_1 et H_2 parcourent deux ensembles bornés dans l'espace des opérateurs d'intégrale singulière (à savoir au sens de la définition* 2.1), *alors les opérateurs énumérés ci-dessus forment des ensembles bornés dans l'espace des applications continues de L^2 dans lui-même.*

On sait que pour tout entier positif m, on peut definir une décomposition

$$\Lambda^m H = H\Lambda^m + H_1\Lambda^{m-1} + H_0 \tag{2,1}$$

telle que l'application : $H \to (H_1, H_0)$ soit linéaire et que H_1, H_0 soient des opérateurs bornés de L^2 dans lui-même (Lemme 2.4 de [8]). On peut dire même plus:

LEMME 2.2. *Lorsque H parcourt un ensemble borné dans l'espace des opérateurs d'intégrale singulière, alors H_1 et H_0 forment des ensembles bornés dans l'espace des applications continues de L^2 dans lui-même.*

La démonstration est presque évidente, vu celle du lemme 2.3 dans [8], nous ne la donnons pas.

Comme nous avons fait au début de l'appendice dans [8], nous utiliserons une partition de l'unité dans l'espace R^n: $\sum_{i=0}^{\infty}\beta_i(x)^2 \equiv 1$, où les $\beta_i(x) \geqslant 0$, sont des fonctions indéfiniment différentiables à support compact. Supposons en outre que les $\beta_i(x)$ sont formées de la manière suivante: soit $\{x^{(i)}\}_{i=0,1,2,\dots} x^{(0)} = (0)$, la suite des points dont les coordonnées soient des multiples de η, η étant un nombre positif quelconque, on a alors $\beta_i(x) = \beta_0(x - x^{(i)})$ $(i = 1, 2, \cdots)$. Enonçons-le.

LEMME 2.3.

$$\sum_{i=0}^{\infty} \|[\beta_i(x)\Lambda^m - \Lambda^m\beta_i(x)]v\|^2 \leqslant C\|(\Lambda+1)^{m-1}v\|^2,$$

pour toute $v(x) \in \mathcal{D}^m$, où C est une constante indépendante de v.

Nous avons déjà donné cette démonstration au cas où $m=1$, dans l'appendice (l'inégalité ii). Comme la démonstration s'achève de la même manière que dans le cas $m=1$, nous n'en donnons pas la démonstration.

LEMME 2.4. *Soit $\{\mathcal{H}_i\}$ une suite de matrices d'ordre N d'opérateurs d'intégrale singulière, qui est borné au sens de la définition* 2.2, *alors on a*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \|[\beta_i(x)\mathcal{H}_i - \mathcal{H}_i\beta_i(x)]\Lambda u\|^2 \leqslant C\|u\|^2$$

pour toute $u \in \mathcal{D}^1$.

Compte tenu du lemme 2.3, il suffit de montrer que

$$\sum_{i=0}^{\infty} \|[\beta_i(x)\mathcal{H}_i\Lambda - \mathcal{H}_i\Lambda\beta_i(x)]u\|^2 \leqslant C'\|u\|^2.$$

Or, nous avons montré dans [8] (inégalité iii) au début de l'appendice)

$$\sum_{i=0}^{\infty} \|[\beta_i(x)P\Lambda - P\Lambda\beta_i(x)]u\|^2 \leqslant C\|u\|^2,$$

et notre démonstration à faire est presque la même que celle de la dernière inégalité.

DÉFINITION 2.3. *Une famille de matrices d'ordre N d'opérateurs d'intégrale singulière* $\{\mathcal{N}_\gamma\}_{\gamma\in I}$ *est dite* uniformément régulière, *s'il existe une constante* $\sigma > 0$ *telle que*

$$|\sigma(\mathcal{N}_\gamma)X| \geq \sigma|X|,$$

pour toute $\mathcal{N}_\gamma$ *et pour tout.* X, *vecteur complexe à N composants, où* $|X| = (\sum|X_i|^2)^{1/2}$, $X = (X_1, \cdots, X_N)$.

On peut alors énoncer le lemme 2.2 de [8] sous une forme plus précise :

LEMME 2.5. *Soit* $\{\mathcal{N}_\gamma\}_{\gamma\in I}$ *une famille de matrices d'opérateurs d'intégrale singulière, qui est borné (au sens de la définition 2.2) et uniformément régulière, à savoir vérifie la condition ci-dessus, alors il existe deux constantes* $\sigma' > 0$ *et C telles que*

$$\|\mathcal{N}_\gamma\Lambda u\|^2 \geqslant \sigma'^2\|\Lambda u\|^2 - C\|u\|^2,$$

où $\sigma'(<\sigma)$ *est une constante qu'on peut prendre aussi proche de* σ *qu'on le veut, (en prenant alors C plus grand), et les constantes ci-dessus* σ' *et C sont communes pour toutes les* $\mathcal{N}_\gamma$.

Nous avons donné une démonstration dans l'appendice de [8] dans le cas où $\mathcal{N}_\gamma$ est une seule matrice. Mais la démonstration à faire est presque évidente d'après l'analyse faite là-dedans.

Nous énonçons un lemme qui est une conséquence immédiate du précédent (voir le lemme dans l'appendice de [8]) :

LEMME 2.6. *Soit H un opérateur d'intégrale singulière de classe* C_β^∞ *avec* $\beta > 0$. *Supposons que*

(2, 2) *partie réelle* $\sigma(H)(x, \xi) \leqslant -\delta$, *pour tout* $\xi \in R_\xi^n$, *et tout* $x \in R_x^n$. *On a alors*

$$((H+H^*)\Lambda u,\ \Lambda u) \leqslant -2\delta' \|\Lambda u\|^2 + \gamma \|u\|^2,$$

$\delta'(<\delta)$ pouvant être prise aussi proche de δ qu'on le veut (en prenant alors γ plus grand). De plus, lorsque H parcourt un ensemble borné (au sens de la définition 2. 1) *en vérifiant* (2, 2), *on peut prendre une γ commune pour tous les H appartenant au borné.*

Nous renvoyons le lecteur à [8]. Remarquons un fait : nous avons utilisé exclusivement l'inégalité :

$\|u+v\|^2 \leqslant 2(\|u\|^2+\|v\|^2)$. Mais on utilise ici l'inégalité

$$\|u+v\|^2 \leqslant \sigma\|u\|^2 + \frac{\sigma}{\sigma-1}\|v\|^2, \quad \text{où} \quad \sigma>1\,,$$

cette inégalité découle de $(|a|+|b|)^2 \leqslant \sigma|a|^2 + \frac{\sigma}{\sigma-1}|b|^2$.

Enfin, la deuxième inégalité signifie que

$$\|u\|^2 \geqslant \frac{1}{\sigma}\|u+v\|^2 - \frac{1}{\sigma-1}\|v\|^2.$$

De même que le lemme 2. 7, on a le

LEMME 2. 7. *Soit H un opérateur d'intégrale singulière de classe C_β^∞, $\beta>0$; soit*

$$\eta = \sup_{x,\xi} |\sigma(H)(x,\xi)|, \quad \textit{on a alors} \tag{2, 3}$$

$$\|H\Lambda u\|^2 \leqslant \eta'^2 \|\Lambda u\|^2 + \gamma \|u\|^2\,,$$

$\eta'(>\eta)$ pouvant être prise aussi proche de η qu'on le veut (en prenant alors γ plus grand). De plus, lorsque H parcourt un ensemble borné en vérifiant la condition (2, 3), *on peut prendre une γ commune pour tous les H.*

Nous avons utilisé dans [9] une partition de l'unité de l'espace R_ξ^n : $\sum \hat{\alpha}_i(\xi)^2 \equiv 1$, où $\hat{\alpha}_i(\xi)$ sont des fonctions indéfiniment différentiables en dehors de l'origine, de plus elles sont des fonctions homogènes de degré 0 : $\hat{\alpha}_i(\lambda\xi) = \hat{\alpha}_i(\xi)$ pour tout $\lambda>0$.

DÉFINITION 2. 4. *Soit α la distribution telle que $\hat{\alpha}(\xi) \underset{\mathcal{F}}{\rightarrow} \alpha$, à savoir α est l'image réciproque de Fourier de $\hat{\alpha}(\xi)$. On désigne par αf, f étant dans L^2, ou bien plus généralement une distribution tempérée, l'opérateur*

$$\alpha f = \alpha * f\,.$$

L'opérateur α ainsi defini est bien un opérateur d'intégrale singulière très simple. Nous avons donc

LEMME 2.8. *Soit H un opérateur d'intégrale singulière de classe C_β^∞, avec $\beta=+\infty$. Alors l'opérateur $(\alpha H-H\alpha)\Lambda$ est un opérateur borné de $\mathcal{D}^s$ dans lui-même, s étant un entier quelconque (positif,* 0, *ou négatif).*[1]

§ 3. Systèmes hyperboliques.

1. Nous allons expliciter les systèmes hyperboliques au sens généralisé (d'après Petrowsky) (voir [10], p. 65-66).
Soit

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^{n_i} u_i(x,t)=\sum_{j=1}^{N}\Big(\sum_{(k)} a_{ij}^{(k_0,k_1,\cdots,k_n)}(x,t)\left(\frac{d}{dt}\right)^{k_0}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{k_n} u_j(x,t)\Big) + f_i(x,t) \qquad (i=1,2,\cdots,N) \tag{3, 1}$$

un système kowalewskien. On suppose, pour simplifier le raisonnement, que tous les coefficients sont des fonctions une fois continuement différentiables en t à valeurs dans $\mathcal{B}_x$.

Comme nous avons fait dans [8], en ajoutant les inconnues on remplace cette équation par une équation équivalente de la manière suivante:

$$u_{j,p}=i^{n_j-(p+1)}(\Lambda+1)^{n_j-(p+1)}\left(\frac{d}{dt}\right)^{p} u_j, \qquad 0\leqslant p\leqslant n_j-1, \qquad j=1,2,\cdots,N. \tag{3, 2}$$

Par le procédé montré dans [8], on arrive à une équation écrite par opérateurs d'intégrale singulière:

$$\frac{d}{dt}u(t)=i\mathcal{H}(t)\Lambda u(t)+\mathcal{B}(t)u(t)+f(t)\,. \tag{3, 3}$$

On suppose ici que

1°. Soit

$$\sigma\mathcal{H}(t)=(\sigma(H_{ij})(x,t,\xi))\,. \tag{3, 4}$$

Alors toutes les racines de l'équation caractéristique

$$\text{dét}\,(\lambda I-\sigma\mathcal{H}(t))=0 \tag{3, 5}$$

sont toujours réelles pour tout (x, t, ξ). Cela revient au même que toutes les racines de l'équation en λ déduite en prenant le déterminant de la matrice

1) On peut dire même plus: Soit H un opérateur d'integrale singulière de class C_β^∞, $\beta>1$. Alors $(\alpha H-H\alpha)\Lambda$ est un opérateur borné de L^2 dans lui-même ([2], Théorème 3).

$$\begin{pmatrix} \lambda^{n_1} & & & \\ & \lambda^{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda^{n_N} \end{pmatrix} - \left(\sum_{((k))} a_{ij}^{(k_0 \cdots k_n)}(x, t) \lambda^{k_0} (i\xi)^{k_1} \cdots (i\xi_n)^{k_n} \right) \tag{3, 6}$$

prennent toujours des valeurs imaginaires pures (voir [10], p. 27).

2°. $\sigma\mathcal{H}(t) = (\sigma(H_{ij})(x, t, \xi))$ est diagonalisable pour tout (x, t, ξ) fixé. C'est-à-dire que le polynome minimal de la matrice $(\lambda I - \sigma\mathcal{H}(t))$ se factorise de la forme $(\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_s)$, $\lambda_i \neq \lambda_j$. De plus, on suppose que la multiplicité de chaque racine de l'équation (3, 5) (ou ce qui revient au même de (3, 6)) est invariants lorsque (x, t, ξ) parcourt $R_x^n \times [0, T] \times S_\xi^n$.

3°. La différence entre deux racines distinctes est toujours supérieure à une constante positive, lorsque (x, t, ξ) parcourt l'ensemble ci-dessus.

Remarque. 1° Le cas traité dans [8], c'est-à-dire le cas où $\sigma\mathcal{H}(t)$ est somme directe de matrices dont chacune admet des racines distinctes essentiellement entre dans le cas actuel. Notons que dans le cas actuel les coefficients sont à valeurs complexes, alors que dans [8], nous avons supposé que les coefficients sont réels.

2°. Le cas où la multiplicité n'est pas invariante pour (x, t, ξ), n'entre pas dans notre cadre. Remarquons toutesfois que l'invariance est essentielle pour notre raisonnement qui va suivre. L'exemple donné par Petrowsky ([10], p. 67–69) montre que les conditions 1° et la propriété d'être ponctuellement diagonalisable seules ne sont pas suffisantes pour traiter le problème de Cauchy. D'autre part, il faut remarquer que dans le cas où $\sigma\mathcal{H}(t)$ est hermitien, la condition 1° seule est suffisante pour traiter le problème de Cauchy (voir [6]).

Il n'est pas toujours possible de diagonaliser la matrice $\sigma\mathcal{H}(x, t, \xi)$ globalement. Mais le travail de Petrowsky dit que les matrices $\sigma\mathcal{H}(x, t, \xi)$ vérifiant les conditions ci-dessus sont localement diagonalisables (voir [12], p. 271–272). Cela nous suggère une possibilité d'étendre directement le travail ci-dessus au cas où les coefficient sont variables. Les méthodes et les résultats dans [10], p. 56–63, sont un peu compliqués, et comme il s'agit ici des cas où les coefficients dépendent de (x, t, ξ), nous allons les reproduire ici en ajoutant quelques précisions.

2. *Une conséquence de l'analyse de Petrowsky.*

Désignons par P les points $(\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_m)$ dans l'espace R^{m+1}.

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert relativement compact dans R^{m+1}.

DÉFINITION 3. 1. Nons dirons qu'une fonction $c(\beta_0, \cdots, \beta_m)=c(P)$ appartient à $\mathcal{E}(\overline{\mathcal{O}})$, si $c(\beta)$ est définie au voisinage de $\overline{\mathcal{O}}$ et y indéfiniment différentiable en $(\beta_1, \cdots, \beta_m)$ avec $\frac{\partial c}{\partial \beta_0}$. Un ensemble de $c(P)$ sera appelé borné dans $\mathcal{E}(\overline{\mathcal{O}})$, si pour tout $\nu=(\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_m)$ les dérivéees $\left(\frac{\partial}{\partial \beta_1}\right)^{\nu_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial \beta_m}\right)^{\nu_m} c(\beta)$ et $\left(\frac{\partial}{\partial \beta_1}\right)^{\nu_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial \beta_m}\right)^{\nu_m} \left(\frac{\partial}{\partial \beta_0}\right) c(\beta)$ sont bornés lorsque $c(\beta)$ parcourt l'ensemble.

DÉFINITION DE $\mathcal{E}(\overline{\mathcal{O}}; \mathcal{M}_N(\delta; p_1, \cdots, p_s))$.

Désignons par $\mathcal{E}(\overline{\mathcal{O}}; \mathcal{M}_N)$ l'ensemble des matrices d'ordre N dont les éléments appartiennent à $\mathcal{E}(\overline{\mathcal{O}})$.

Désingnons par $\mathcal{M}_N(\delta; p_1, \cdots, p_s)$ l'ensemble des matrices $M(\beta)$ vérifiant la condition suivante: $M(\beta)$ est d'ordre N et elle est *diagonalisable* pour tout β fixé, et dont le polynome caractéristique est de la forme $(\lambda-\lambda_1)^{p_1} \cdots (\lambda-\lambda_s)^{p_s}$ où $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_s$ (λ_i étant réels), et de plus $\lambda_j - \lambda_{j+1} \geqslant \delta$.

Enfin, $\mathcal{E}(\overline{\mathcal{O}}; \mathcal{M}_N(\delta; p_1, \cdots, p_s))$ est l'ensemble des sections $\mathcal{E}(\mathcal{O}; \mathcal{M}_N)$ au dessus de $\overline{\mathcal{O}}$ à valeurs dans $\mathcal{M}_N(\delta; p_1, \cdots, p_s)$.

Un ensemble B de $\mathcal{E}(\overline{\mathcal{O}}: \mathcal{M}_N(\delta; p_1, \cdots, p_s))$ est dit *borné*, si tous les éléments des matrices appartennant à B forment un emsemble borné dans $\mathcal{E}(\overline{\mathcal{O}})$ (au sens de la définition 3. 1), c'est-à-dire que, pour tout ν fixé, $\left(\frac{\partial}{\partial \beta}\right)^{\nu} c_{ij}(\beta)$, $\left(\frac{\partial}{\partial \beta}\right)^{\nu} \left(\frac{\partial}{\partial \beta_0}\right) c_{ij}(\beta)$ sont restés bornés pour $\beta \in \overline{\mathcal{O}}$, lorsque c_{ij} parcourt tous les éléments des matrices appartenant à B.

REMARQUE. Nous avons posé $t=\beta_0$, $(x, \xi)=(\beta_1, \cdots, \beta_m)$.

Ceci fait, nous voulons montrer la

PROPOSITION 3. 1. *Etant donné un borné B dans $\mathcal{E}(\overline{\mathcal{O}}; \mathcal{M}_N(\delta; p_1, \cdots, p_s))$, $\mathcal{O}$ étant un ouvert relativement compact contenant l'origine, on peut trouver un ouvert $\mathcal{O}_1$ contenant l'origine ($\subset \mathcal{O}$) de la manière suivante: Pour chaque élément $M(\beta)$ de B, on peut associer une matrice diagonalisatrice $N(\beta)$ de telle manière que* 1° *$N(\beta)$ appartient à $\mathcal{E}(\overline{\mathcal{O}}_1; \mathcal{M}_N)$, $N(\beta)^{-1} M(\beta) N(\beta) = I$, $\beta \in \overline{\mathcal{O}}_1$.* 2° *L'ensemble des $N(\beta)$ ainsi associées forme un ensemble borné dans $\mathcal{E}(\overline{\mathcal{O}}_1; \mathcal{M}_N)$. De plus $\{N(\beta)\}$ sont uniformément régulières: il existe une constante $\sigma > 0$ telle que*

$$|\text{dét. } N(\beta)| \geq \sigma > 0 \textit{ pour toutes les } N(\beta), \textit{ et pour tout } \beta \in \overline{\mathcal{O}}_1.$$

DÉMONSTRATION. Nous allons suivre le raisonnement de Petrowsky.

1°. Soit $(\lambda_1(\beta), \cdots, \lambda_s(\beta)$ est l'ensemble des valeurs propres de $M \in \mathcal{E}(\overline{\mathcal{O}}; \mathcal{M}_N(\delta; p_1, \cdots, p_s))$. Ces fonctions appartiennent à $\mathcal{E}(\overline{\mathcal{O}})$ au sens de la définition 3.1. De plus, lorsque M parcourt B, l'ensemble des $(\lambda_1(\beta), \cdots, \lambda_s(\beta))$ forme un ensemble borné dans $\mathcal{E}(\overline{\mathcal{O}})$ (au sens de la définition 3.1).

2°. Soit $M(\beta) \in \mathcal{E}(\overline{\mathcal{O}}; \mathcal{M}_N(\cdots))$. On sait que tous les mineurs d'ordre $(N-p_1+1)$ de la matrice $\lambda_1(\beta)-M(\beta)$ sont identiquement nuls. Mais, pour tout point $P \in \overline{\mathcal{O}}$, il existe un mineur d'ordre $(N-p_1)$ non nul en P. On peut dire même plus: Si l'on prend $\mathcal{O}_1$, un ouvert contenant l'origine, très petit, alors il existe un $\eta > 0$ tel que, pour tout $M(\beta) \in B$, au moins l'un des mineurs d'ordre $(N-p_1)$ de la matrice $\lambda_1(\beta)I-M(\beta)$ est toujours supérieur à η en valeur absolue sur $\overline{\mathcal{O}}_1$. Montrons-le. S'il n'était pas vrai, il n'en serait pas vrai quand on restricte β à l'origine. Alors il existerait une suite $M^{(n)}(0)$, $M^{(n)}(\beta) \in B$, telle que $M^{(n)}(0) \to M^*$ (la convergence est au sens habituel), et tandis que tous les mineurs d'ordre $(N-p_1)$ de $\lambda_1^{(n)}-M^{(n)}(0)$ ($\lambda_1^{(n)}$ étant la plus grande des valeur propres), convergent vers 0. Il est alors évident que $M^* \in \mathcal{M}_N(\delta; p_1, \cdots, p_s)$. En effet, soient $\lambda_1^* > \lambda_2^* > \cdots > \lambda_{s'}^*$ les valeurs propres de M^*. On a d'abord $s'=s$, et ensuite $\lambda_i^{(n)}(0) \to \lambda_i^*$ $(i=1, 2, \cdots, s)$, d'où $\lambda_i^*-\lambda_{i+1}^* \geqslant \delta$. De plus dét $(\lambda I-M^*)=(\lambda-\lambda_1^*)^{p_1}\cdots(\lambda-\lambda_s^*)^{p_s}$. Il ne reste qu'à montrer que M^* est diagonalisable. Il suffit de montrer que $d_{N-1}(\lambda)=(\lambda-\lambda_1^*)^{p_1-1}\cdots(\lambda-\lambda_s^*)^{p_s-1}$, en désignant par $d_{N-1}(\lambda)$ le plus grand commun diviseur des mineurs d'ordre $(N-1)$ de la matrice $\lambda I-M^*$. (Remarquons que $d_{N-1}(\lambda)$ ne se divise pas par $(\lambda-\lambda_i^*)^{p_i}$). Il suffit donc montrer que tous les mineurs d'ordre $(N-1)$ de $\lambda I-M^*$ se divise par $(\lambda-\lambda_i^*)^{p_i-1}$ $(i=1, 2, \cdots, s)$. Montrons-le pour $i=1$. Désignons un de ces mineurs par $p(\lambda)$, et les mineurs correspondant à $\lambda I-M^{(n)}(0)$ par $p_n(\lambda)$. On a d'abord $p_n(\lambda) \to p(\lambda)$, de là $\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{p_1-2} p_n(\lambda) \to \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{p_1-2} p(\lambda)$. Comme les $p_n(\lambda)$ ont comme facteur $(\lambda-\lambda_1^{(n)}(0))^{p_1-1}$, on a $\left(\frac{d}{dt}\right)^{p_1-2} p_n(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_1^{(n)}(0)}=0$, et comme $\lambda_1^{(n)}(0) \to \lambda_1^*$ et que les $\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{p_1-2} p_n(\lambda)$ sont équicontinues sur toute partie bornée de λ, on a donc $\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{p_1-2} p(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_1^*}=0$. Nous avons donc $M^* \in \mathcal{M}_N(\delta; p_1, \cdots, p_s)$.

Or, $M^* \in \mathcal{M}_N(\delta; p_1, \cdots, p_s)$ entraîne qu'il existe au moins un mineur d'ordre $(N-p_1)$ non nul de la matrice $\lambda_1^* I - M^*$. Or, par hypothèse, tous les mineurs d'ordre $(N-p_1)$ de $\lambda_1^{(n)}(0)I - M^{(n)}(0)$ convergent vers 0. Cela contredit l'hypothèse.

3°. D'après 2°, il existe au moins un mineur d'ordre $(N-p_1)$ de la matrice $\lambda_1(\beta)-M(\beta)$, $M(\beta)\in B$, dont la valeur absolue soit supérieure à η sur $\bar{\mathcal{O}}_1$. On fixe une fois pour toutes l'ordre de tous les mineurs d'ordre $(N-p_1)$ de la matrice d'ordre N. On prend alors le premier mineur de tels mineurs. On détermine alors un vecteur propre $(C_1(P), \cdots, C_N(P))$ correspondant à $\lambda=\lambda_1(P)$ par le procédé habituel, on prend ici $C_i(P)\equiv 1$, si $C_i(P)$ sont des composants arbitraires. D'où: *on peut associer, à chaque matrice $M(\beta)\in B$, un vecteur propre $(C_1(P), \cdots, C_N(P))\in\mathcal{E}(\bar{\mathcal{O}}_1)$ correspondant à $\lambda=\lambda_1$ de manière que ces vecteurs ainsi associés forment un ensemble borné dans $\mathcal{E}(\bar{\mathcal{O}}_1)$, M parcourant B.*

4°. Nous allons associer à $(C_1(P), \cdots, C_N(P))$ ainsi construit, des $(N-1)$ vecteurs $(C_1^{(i)}(P), \cdots, C_N^{(i)}(P))$ $(i=2, 3, \cdots, N)$ formant avec $(C_1(P), \cdots, C_N(P))$ des N vecteurs linéairement indépendants. Nous suivons encore le procédé de Petrowsky (voir p. 60-62). Remarquons que $\operatorname{Max}\{|C_1(P)|, \cdots, |C_N(P)|\}\geqslant 1$. Ce qui est important est que, en posant

$$f_i(P)=\varphi(|C_i(P)|)e^{-i\psi(|C_i(P)|)\operatorname{ampl.} C_i(P)} \quad (i=1, 2, \cdots, N)$$

$f_i(P)$ doivent être des fonctions *uniformes*. Pour cela. il suffit de prendre $\mathcal{O}_2$ $(\subset \mathcal{O}_1)$ très petit tel que dans $\bar{\mathcal{O}}_2$, les oscillations des $C_i(P)$ pour toutes les matrices $\in B$ soient inférieures à $\frac{1}{2}\cdot\frac{C}{2\sqrt{N}}\equiv \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{N}}$. (Cela est toujours possible, d'après 3°, parce que $(C_1(P), \cdots, C_N(P))$ forment un ensemble borné dans $\mathcal{E}(\bar{\mathcal{O}}_1)$ $M(\beta)$ parcourant B). En effet, soit $|C_i(0)|\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{N}}$, alors $|C_i(P)|\leqslant \frac{1}{2\sqrt{N}}$, et $\psi(|C_i(P)|)\equiv 0$. Si $|C_i(0)|>\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{N}}$, alors en fixant $0\leqslant \operatorname{ampl.} C_i(0)<2\pi$, $C_i(P)$ devient une fonction uniforme et $-\pi<$ $\operatorname{ampl.} C_i(P)<3\pi$.

On suppose ici que les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$, outre les conditions 1)-4) de la page 61, sont des fonctions indéfiniment différentiables. On voit finalement que, en définissant les $C_j^{(i)}(P)$ $(j=1,$

$2, \cdots, N)$ comme Petrowsky a fait (voir p. 61), $(C_1^{(i)}(P), C_2^{(i)}(P), \cdots, C_N^{(i)}(P))$ $(i=2, 3, \cdots, N)$ appartiennent à $\mathcal{E}(\bar{\mathcal{O}}_2)$, et de plus ils forment un ensemble borné dans $\mathcal{E}(\bar{\mathcal{O}}_2)$, M parcourant B. De plus on a

$$\left\| \begin{matrix} C_1(P) & C_2(P) & \cdots\cdots C_N(P) \\ C_1^{(2)}(P) & C_2^{(2)}(P) & \cdots\cdots C_N^{(2)}(P) \\ C_1^{(N)}(P) & C_2^{(N)}(P) & \cdots\cdots C_N^{(N)}(P) \end{matrix} \right\| \geqslant \delta_1 > 0\,,$$

pour tout $P \in \bar{\mathcal{O}}_2$, et pour toute $M(\beta) \in B$.

5°. Nous suivons le procédé de Petrowsky, indiqué dans le numéro 5 p. 62-63 de [10], c'est-à-dire l'induction sur N. Cela achève notre démonstration. c.q.f.d.

De la proposition 3.1, il n'est pas difficile de voir ceci : si l'on choisit η' et ε assez petits et prend un recouvrement assez fin $\{V'_j\}$ $(j=1, 2, \cdots, p)$ de la sphère unité dans R^n_ξ, la matrice $\sigma\mathcal{H}(x, t, \xi)$ est diagonalisable par $\sigma\mathcal{N}(x, t, \xi) \in C^\infty_\beta$, $\beta=\infty$, dans le domains $|x-x^0| \leqslant \eta'$, $|t-t_0| \leqslant \varepsilon$, $\xi \in V'_j$, où η' et ε sont indépendants de la position x^0 et t^0 et V'_j.

Plus précisément, soient $\{x^{(i)}\}_{i=0,1,2,\cdots}$ les points dont les coordonnées sont des multiples de η ; $x^{(0)}=(0)$. Soit Q'_i la cube de centre $x^{(i)}$ à cotes parallèles aux axes, de longueur 2η ; soit $\Omega_{ij}=Q'_i \times V_j$. alors pour tout $\Omega_{ij} \times [-\varepsilon+t_0, t_0+\varepsilon]$ on peut associer une matrice diagonalisatrice $\sigma\mathcal{N}_{ij}(x, t, \xi)$ de $\sigma\mathcal{H}(x, t, \xi)$, définie au voisinage de ce domaine :

$$(3,7) \qquad \sigma\mathcal{N}_{ij}(x, t, \xi)\sigma\mathcal{H}(x, t, \xi) = \sigma\mathcal{D}_{ij}(x, t, \xi)\sigma\mathcal{N}_{ij}(x, t, \xi)$$

où $\sigma\mathcal{D}_{ij}(x, t, \xi)$ est une matrice diagonale ayant des valeurs propres $\lambda_i(x, t, \xi)$ $(i=1, 2, \cdots, s)$ comme éléments. De plus $\sigma\mathcal{N}_{ij}(x, t, \xi)$ et $\sigma\mathcal{D}_{ij}(x, t, \xi)$ avec leurs dérivées en t forment des ensembles bornés (avec une identification naturelle) au sens de la définition 3.1. (en posant $\beta_0=t$, $(\beta_1, \cdots, \beta_n)=(x_1, \cdots, x_n)$, $(\beta_{n+1}, \cdots, \beta_{2n})=(\xi_1, \cdots, \xi_n)$), $|\xi|=1$.

Nous allons maintenant étendre le domaine de définition $\sigma\mathcal{N}_{ij}(x, t, \xi)$ et $\sigma\mathcal{D}_{ij}(x, t, \xi)$ à l'espace entier : $R^n_x \times R^n_\xi \times [t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]$. Soit Q_i la cube concentrique à Q'_i à côtés $\frac{3}{4}\cdot 2\eta$; soit V_j un ouvert (sur la sphère-unité) tel que $\bigcup V_j=$sphère-unité, $\bar{V}_j \subset V'_j$. Soit $\psi(x)$ une fonction indéfiniment différentiable définie sur R^n_x et borné avec toutes ses dérivées, laissant invariants tous les points de Q_0 : $|x_i| \leqslant \frac{3}{4}\eta$ $(i=1, \cdots, n)$, de plus dont l'image soit contenue dans la cube Q_0' : $|x_i|\leq\eta$ $(i=1, \cdots, n)$; on définit $\psi_i(x)=\psi(x-x^{(i)})$, alors $\psi_i(x)$ applique l'espace R_x^n dans Q_i' et laisse invariants tous les points de Q_i. Soit $\varphi_i(\xi)$ une application indéfiniment différentiable de la sphère unité dans V_i' laissants invariants tous les points de V_i. On étend alors les domaines de définition par

$$\sigma\mathcal{N}_{ij}(x, t, \xi) = \sigma\mathcal{N}_{ij}(\psi_i(x), t, \varphi_j(\xi)),$$
$$\sigma\mathcal{D}_{ij}(x, t, \xi) = \sigma\mathcal{D}_{ij}(\psi_i(x), t, \varphi_j(\xi)).$$

On définit $\sigma\mathcal{H}_{ij}(x, t, \xi)$ par

$$\sigma\mathcal{H}_{ij}(x, t, \xi) = \sigma\mathcal{H}(\psi_i(x), t, \varphi_j(\xi)).$$

Alors on a la relation

$$\sigma\mathcal{N}_{ij}(x, t, \xi)\sigma\mathcal{H}_{ij}(x, t, \xi) = \sigma\mathcal{D}_{ij}(x, t, \xi)\sigma\mathcal{N}_{ij}(x, t, \xi), \tag{3, 8}$$

qui est valable pour $(x, t, \xi)\in R_x^n\times[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]\times R_\xi^n$.

On a finalement le

COROLLAIRE DE LA PROPOSITION 3. 1. *Les familles $\mathcal{N}_{ij}(t)$, $\mathcal{H}_{ij}(t)$, $\mathcal{D}_{ij}(t)$, forment avec leurs dérivées en t $\left(\frac{d}{dt}\mathcal{N}_{ij}(t), \cdots\right)$ des ensembles bornés au sens de la définition* 3. 1, *où t est paramètre. De plus, les $\mathcal{N}_{ij}(t)$ forment un ensemble uniformément régulier* (*au sens de la définition* 2. 3).

Nous utiliserons dans la suite une partition de l'unité dans l'espace R_ξ^n. Nous avons montré dans [9] cette utilité. Nous faisons ici d'une manière plus simple. Soit $\hat{\alpha}_j(\xi)$ une fonction homogène de degré $0: \hat{\alpha}_j(\lambda\xi)=\hat{\alpha}_j(\xi)$ pour $\lambda>0$, indéfiniment différentiable dans $|\xi|\geqslant 1$, dont le support vérifie la condition:

$$\text{support } [\hat{\alpha}_j(\xi)] \text{ sur la sphère-unité } \subset V_j\,;\ \hat{\alpha}_j(\xi)\geqslant 0.$$

Il est évident qu'on peut faire une partition de l'unité $\sum\hat{\alpha}_j(\xi)^2\equiv 1$ où les $\hat{\alpha}_j(\xi)$ vérifient les conditions ci-dessus. De même, on fait une partiton de l'unité dans l'espace R_x^n: support $[\beta_i(x)]\subset Q_i$, $\beta_i(x)=\beta_0(x-x^{(i)})$, $\beta_0(x)$ étant une fonction indéfiniment différentiable, et $\sum_{i=0}^{\infty}\beta_i(x)^2\equiv 1$.

Il faut alors remarquer ceci:

LEMME 3. 1. *Pour toute $u(x)\in L^2(R^n)$, on a*

$$(\beta_i(x)\mathcal{H}(t)\alpha_j u)(x) = (\beta_i(x)\mathcal{H}_{ij}(t)\alpha_j u)(x).$$

En effet,

$$(\beta_i(x)\mathcal{H}(t)\alpha_j u)(x)=\beta_i(x)\int \sigma\mathcal{H}(x,\, t,\, \xi)\exp(2\pi i x\xi)\hat{\alpha}_j(\xi)\hat{u}(\xi)d\xi\,.$$

Il suffit de considérer l'intégrale ci-dessus pour $x\in \operatorname{supp}[\beta_i(x)]$. Comme l'intégale en ξ ne s'étend que sur le support de $\hat{\alpha}_j(\xi)$, cette intégrale se détermine par les valeurs de $\sigma\mathcal{H}(x,\, t,\, \xi)$ sur $(x,\, \xi)\in Q_i \times V_j$, de là on voit que le symbole $\sigma\mathcal{H}(x,\, t,\, \xi)$ peut être remplacé par $\sigma\mathcal{H}_{ij}(x,\, t,\, \xi)$. c.q.f.d.

3. *Problème de Cauchy.*

Nous avons indiqué dans [8] une méthode pour les systèmes strictement hyperboliques. Nous voulons nous appuyer sur le même principe. Limitons-nous donc à indiquer que nous pouvons le faire.

Nous avons défini dans [8] une matrice

$$B_m(t)=\Lambda^m\mathcal{N}^*(t)\mathcal{N}(t)\Lambda^m+\beta_m I\,.$$

Dans le cas actuel, nous remplaçons cette matrice par

$$B_m(t)=\Lambda^m\Big(\sum_{i=0,\, j=1}^{\infty,\, p}\alpha_j\beta_i(x)\mathcal{N}^*_{ij}(t)\mathcal{N}_{ij}(t)\beta_i(x)\alpha_j\Big)\Lambda^m+\beta_m I \tag{3, 9}$$
$$t_0-\varepsilon\leqslant t\leqslant t_0+\varepsilon\,.$$

Montrons que

1°) $B_m(t)$ définit dans $\mathcal{D}^m$ une norme équivalente. Pour $u\in\mathcal{D}^m$, on a

$$\sum_{i,j}\|\mathcal{N}_{ij}\beta_i(x)\alpha_j\Lambda^m u\|^2\geqslant\frac{1}{2}\sum\|\mathcal{N}_{ij}\Lambda^m\beta_i(x)\alpha_j u\|^2-\sum\|\mathcal{N}_{ij}(\beta_i(x)\Lambda^m - \Lambda^m\beta_i(x))\alpha_j u\|^2\,. \tag{3, 10}$$

Ici le second terme se majore par

$$c\sum_{i,j}\|(\beta_i(x)\Lambda^m-\Lambda^m\beta_i(x))\alpha_j u\|^2$$

En effet, $\{\mathcal{N}_{ij}\}$ forment un ensemble borné (corollaire de la prop. 3. 1), d'où $\|\mathcal{N}_{ij}(t)\|_{\mathcal{L}(L^2;\, L^2)}\leqslant c$.
Ensuite, compte tenu du lemme 2. 3, et du fait que

$$\sum_{j=1}^{p}\|\alpha_j v\|^2=\|v\|^2\,,$$

le terme ci-dessus se majore par

$$C'\|(\Lambda+1)^{m-1}u\|^2\,.$$

Envisageons le premier terme. Compte tenu du corollaire de la prop. 3.1 et le lemme 2.5, il se *minore* par

$$\frac{\sigma'^2}{2}\sum_{i,j}\|\Lambda^m\beta_i(x)\alpha_j u\|^2 - C\sum_{i,j}\|\Lambda^{m-1}\beta_i(x)\alpha_j u\|^2 .$$

Ce premier terme se minore par

$$\frac{\sigma'^2}{4}\sum_{i,j}\|\beta_i(x)\Lambda^m\alpha_j u\|^2 - \frac{\sigma'^2}{2}\sum_{i,j}\|(\Lambda^m\beta_i(x)-\beta_i(x)\Lambda^m)\alpha_j u\|^2 .$$

Compte tenu du lemme 2.3, il vient

$$\sum_{i,j}\|\mathcal{N}_{ij}\beta_i(x)\alpha_j\Lambda^m u\|^2 \geqslant \frac{\sigma'^2}{4}\|\Lambda^m u\|^2 - C'\|(\Lambda+1)^{m-1}u\|^2 , \tag{3, 11}$$

où nous avons utilisé l'égalité :

$$\sum_{i,j}\|\beta_i(x)\Lambda^m\alpha_j u\|^2 = \sum_j\|\Lambda^m\alpha_j u\|^2 = \|\Lambda^m u\|^2 .$$

(3, 11) montre que, si l'on prend β_m assez grand, $B_m(t)$ définit dans $\mathcal{D}^m$ une norme équivalente. En effet, on a, d'autre part,

$$\sum_{i,j}\|\mathcal{N}_{ij}\beta_i(x)\alpha_j\Lambda^m u\|^2 \leqslant c\sum_{i,j}\|\beta_i(x)\alpha_j\Lambda^m u\|^2 = c\|\Lambda^m u\|^2 . \tag{3, 12}$$

2°) On va montrer maintenant

$$-\gamma_m B_m \leqslant B_m A + A^* B_m \leqslant \gamma_m B_m .$$

Considérons

$$\mathcal{N}_{ij}\beta_i(x)\alpha_j\Lambda^m\mathcal{H}\Lambda = \mathcal{N}_{ij}\beta_i(x)\alpha_j\mathcal{H}\Lambda\Lambda^m + \mathcal{N}_{ij}\beta_i(x)\alpha_j(\Lambda^m\mathcal{H}-\mathcal{H}\Lambda^m)\Lambda .$$

ici le second terme peut être négligé pour la raison suivante :

$$\begin{aligned} 2|(\mathcal{N}_{ij}\beta_i(x)\alpha_j(\Lambda^m\mathcal{H}-\mathcal{H}\Lambda^m)\Lambda u,\ \mathcal{N}_{ij}\beta_i(x)\alpha_j\Lambda^m u)| \\ \leqslant \|\mathcal{N}_{ij}\beta_i(x)\alpha_j(\cdots)\Lambda u\|^2 + \|\mathcal{N}_{ij}\beta_i(x)\alpha_j\Lambda^m u\|^2 . \end{aligned}$$

Or, la somme $\sum_{i,j}$ par rapport aux premiers termes, se majore par

$$c\sum_{i,j}\|\beta_i(x)\alpha_j(\Lambda^m\mathcal{H}-\mathcal{H}\Lambda^m)\Lambda u\|^2 = c\|(\Lambda^m\mathcal{H}-\mathcal{H}\Lambda^m)\Lambda u\|^2 \leqslant C'\|(\Lambda+1)^m u\|^2.$$

En effet, $\Lambda^m\mathcal{H}-\mathcal{H}\Lambda^m = \mathcal{H}_1\Lambda^{m-1}+\mathcal{H}_0$, et d'après le lemme 2.2 on a l'inégalité demandée. Et le deuxième terme s'évalue par (3, 12).

Nous allons écrire telle relation par $\equiv$. Dans cette convention, on a

$$\mathcal{N}_{ij}\beta_i(x)\alpha_j\Lambda^m\mathcal{H}\Lambda \equiv \mathcal{N}_{ij}\beta_i(x)\alpha_j\mathcal{H}\Lambda\Lambda^m \equiv \mathcal{N}_{ij}\beta_i(x)\mathcal{H}\alpha_j\Lambda\Lambda^m$$

(d'après le lemme 2.8).

Or, d'après le lemme 3.1, $\beta_i(x)\mathcal{H}\alpha_j = \beta_i(x)\mathcal{H}_{ij}\alpha_j$. D'où la dernière expression ci-dussus

$= \mathcal{N}_{ij}\beta_i(x)\mathcal{H}_{ij}\alpha_j\Lambda\Lambda^m = \mathcal{N}_{ij}\beta_i(x)\mathcal{H}_{ij}\Lambda\alpha_j\Lambda^m$

$\equiv \mathcal{N}_{ij}\mathcal{H}_{ij}\beta_i(x)\Lambda\alpha_j\Lambda^m$ (d'après le lemme 2.4. En effet, $\mathcal{H}_{ij}$ forment un ensemble borné au sens de la définition 2.2.). Finalement,

(3, 13) la dernière expression $\equiv \mathcal{N}_{ij}\mathcal{H}_{ij}\Lambda\beta_i(x)\alpha_j\Lambda^m$ (d'après le lemme 2.3).

Comme $\mathcal{N}_{ij}\circ\mathcal{H}_{ij} = \mathcal{D}_{ij}\circ\mathcal{N}_{ij}$, on a

$$\mathcal{N}_{ij}\mathcal{H}_{ij}\Lambda = \mathcal{D}_{ij}\mathcal{N}_{ij}\Lambda + \mathcal{R}_{ij}$$

où $\mathcal{R}_{ij}$ est une application bornée de L^2 dans lui-même. De plus les $\mathcal{R}_{ij}$ forment un ensemble borné dans l'espace des applications coutinues de L^2 dans lui-même: $\|\mathcal{R}_{ij}\|_{\mathcal{L}(L^2;L^2)} \leqslant C$. En effet

$$(\mathcal{N}_{ij}\mathcal{H}_{ij} - \mathcal{D}_{ij}\mathcal{N}_{ij})\Lambda = (\mathcal{N}_{ij}\mathcal{H}_{ij} - \mathcal{N}_{ij}\circ\mathcal{H}_{ij})\Lambda - (\mathcal{D}_{ij}\mathcal{N}_{ij} - \mathcal{D}_{ij}\circ\mathcal{N}_{ij})\Lambda .$$

D'après le lemme 2.1 et le corollaire de la proposition 3.1, on voit notre assertion.

D'où,

$$\mathcal{N}_{ij}\mathcal{H}_{ij}\Lambda\beta_i(x)\alpha_j\Lambda^m \equiv \mathcal{D}_{ij}\mathcal{N}_{ij}\Lambda\beta_i(x)\alpha_j\Lambda^m \equiv \mathcal{D}_{ij}\Lambda\mathcal{N}_{ij}\beta_i(x)\alpha_j\Lambda^m . \tag{3, 14}$$

Finalement, on a

$$B_mA + A^*B_m \equiv i\Lambda^m\Big(\sum_{i,j}\alpha_j\beta_i(x)\mathcal{N}^*_{ij}[\mathcal{D}_{ij}\Lambda - \Lambda\mathcal{D}^*_{ij}]\mathcal{N}_{ij}\beta_i(x)\alpha_j\Big)\Lambda^m .$$

Considérons les opérateurs $(\mathcal{D}_{ij}\Lambda - \Lambda\mathcal{D}^*_{ij})$. Ils sont tous des opérateurs bornés de L^2 dans lui-même, puisque les $\mathcal{D}_{ij}$ sont des matrices diagonales et dont les symboles sont à valeurs réelles. Nous pouvons dire même plus: d'après le corollaire de la proposition 3.1, les $\mathcal{D}_{ij}$ forment un ensemble borné au sens de la définition 2.2, donc d'après le lemme 2.1, les $(\mathcal{D}_{ij}\Lambda - \Lambda\mathcal{D}^*_{ij})$ forment un ensemble borné dans l'espace des applications continues de L^2 dans lui-même.

REMARQUE 1. Nous avons montré dans [8], que

$$B_{-m}(t) = (\Lambda+1)^{-m}\mathcal{N}^*\mathcal{N}(\Lambda+1)^{-m} + \beta(\Lambda+1)^{-2(m+1)}$$

définit dans $\mathcal{D}^{-m}$ $(m \geqslant 0)$ une norme équivalente, si β est assez grand. Dans le cas actuel, il en est de même en posant

$$B_{-m}(t) = (\Lambda+1)^{-m}\Big(\sum_{i,j}\alpha_j\beta_i(x)\mathcal{N}^*_{ij}\mathcal{N}_{ij}\beta_i(x)\alpha_j\Big)(\Lambda+1)^{-m} + \beta(\Lambda+1)^{-2(m+1)} .$$

De plus on a

$$-\gamma_{-m}B_{-m} \leqslant B_{-m}A + A^*B_{-m} \leqslant \gamma_{-m}B_{-m} .$$

Nous laissons la démonstration au lecteur.

REMARQUE 2. Nous avons envisagé $B_m(t)$ dans $t \in [t_0-\varepsilon,\ t_0+\varepsilon]$.

On peut la construire, si l'on veut, dans tout intervalle $[0, T]$. En effet, ε étant indépendant de la position de t_0, on recouvre $[0, T]$ par un nombre fini d'intervalles ouverts I_i $(i=1, 2, \cdots, k)$ dont les longueurs soient inférieures à ε. Soit $\varphi_i(t)$ une partition de l'unité subordonnée à ce recouverment: $\sum_{i=1}^{k} \varphi_i(t) \equiv 1$, sur $t \in [0, T]$, supp $[\varphi_i(t)] \subset I_i$, $\varphi_i(t)$ est une fonction non négative indéfiniment différentiable. Dans chaque intervalle, on a un opérateur $B_m^{(i)}(t)$, vérifiant les conditions ci-dessus, et

$$B_m(t) = \sum_i \varphi_i(t) B_m^{(i)}(t)$$

répond à notre demande.

3°) *Inégalité d'énergie.*

D'après le numéro 1°), l'inégalité d'énergie est évidente. Il suffit de remarquer que $\frac{d}{dt} B_m(t)$ est un opérateur vérifiant l'inégalité

$$-cB_m(t) \leqslant \frac{d}{dt} B_m(t) \leqslant cB_m(t),$$

où c est une constante convenablement choisie. Or, cela est évident, vu que $\mathcal{N}_{ij}(t)$ et $\frac{d}{dt} \mathcal{N}_{ij}(t)$ forment des ensembles bornés au sens de la définition 2.2 (corollaire de la prop. 3.1).

4°) On a montré dans [8] que, t étant fixé, en prenant $\mathcal{D}_A$ (domaine de définition de $A(t)) = \{u\,; u \in \mathcal{D}^m, A(t)u \in \mathcal{D}^m\}$, $(I - \lambda A(t))$ définit un isomorphime algébrique de $\mathcal{D}_A$ *sur* $\mathcal{D}^m$. Pour le montrer, il suffit de montrer l'existence d'une matrice $C_1(t)$ vérifiant les conditions suivantes:

a) $C_1(t)$ définit dans $\mathcal{D}^1$ une norme équivalente.

b) $-\gamma_1 C_1(t) \leqslant A(t)C_1(t) + C_1(t)A^*(t) \leqslant \gamma_1 C_1(t)$.

On définit ici

$$C_1 = \Lambda\Big(\sum_{i,j} \alpha_j \beta_i(x) \mathcal{M}_{ij}^* \mathcal{M}_{ij} \beta_i(x) \alpha_j\Big)\Lambda + \beta I,$$

où les $\mathcal{M}_{ij}$ sont des matrices d'opérateurs d'intégrale singulière définies par

$$\sigma(\mathcal{M}_{ij}) = \overline{{}^t\sigma(\mathcal{N}_{ij})^{-1}}.$$

D'après la démonstration du numéro 1°, la propriété a) est manifestement vérifiée (si l'on prend β assez grand). Montrons maintenant la propriété b).

La relation

$$\sigma(\mathcal{N}_{ij})\sigma(\mathcal{H}_{ij}) = \sigma(\mathcal{D}_{ij})\sigma(\mathcal{N}_{ij}) \qquad \text{entraîne}$$
$$\sigma(\mathcal{H}_{ij})\sigma(\mathcal{N}_{ij})^{-1} = \sigma(\mathcal{N}_{ij})^{-1}\sigma(\mathcal{D}_{ij}) .$$

La définition $\sigma(\mathcal{N}_{ij})^{-1} = \overline{{}^t\sigma(\mathcal{M}_{ij})}$ entraîne

$$\overline{\sigma(\mathcal{H}_{ij})} \cdot {}^t\sigma(\mathcal{M}_{ij}) = {}^t\sigma(\mathcal{M}_{ij})\overline{\sigma(\mathcal{D}_{ij})} = {}^t\sigma(\mathcal{M}_{ij})\sigma(\mathcal{D}_{ij}) .$$

En prenant le transposé, on a

$$\sigma(\mathcal{M}_{ij})\overline{{}^t\sigma(\mathcal{H}_{ij})} = \sigma(\mathcal{D}_{ij})\sigma(\mathcal{M}_{ij}) .$$

En désignant par $\mathcal{H}^\sharp_{ij}$ l'opérateur d'intégrale singulière défini par

$$\sigma(\mathcal{H}^\sharp_{ij}) = \overline{\sigma(\mathcal{H}_{ij})} , \qquad \text{on a}$$
$$\mathcal{M}_{ij} \circ {}^t\mathcal{H}^\sharp_{ij} = \mathcal{D}_{ij} \circ \mathcal{M}_{ij} .$$

Or, d'après le lemme 2. 1 et le corollaire de la proposition 3. 1, les opérateurs $(\mathcal{M}_{ij}\,{}^t\mathcal{H}^\sharp_{ij} - \mathcal{D}_{ij}\mathcal{M}_{ij})\Lambda$ forment un ensemble borné dans l'espace des applications continues de L^2 dans lui-même. Ceci fait, on a (en utilisant la convention de 1°)),

$$\mathcal{M}_{ij}\beta_i(x)\alpha_j\Lambda\Lambda\mathcal{H}^* \equiv \mathcal{M}_{ij}\beta_i(x)\alpha_j\mathcal{H}^*\Lambda^2 \equiv \mathcal{M}_{ij}\beta_i(x)\mathcal{H}^*\Lambda\alpha_j\Lambda$$
$$\equiv \mathcal{M}_{ij}\beta_i(x)\ {}^t\mathcal{H}^\sharp\Lambda\alpha_j\Lambda$$

(comme $\beta_i(x)\,{}^t\mathcal{H}^\sharp\alpha_j = \beta_i(x)\ {}^t\mathcal{H}^\sharp_{ij}\alpha_j)$, $\equiv \mathcal{M}_{ij}\beta_i(x)\ {}^t\mathcal{H}^\sharp_{ij}\Lambda\alpha_j\Lambda$

(d'après le lemme 2. 4) $\equiv \mathcal{M}_{ij}\ {}^t\mathcal{H}^\sharp_{ij}\beta_i(x)\Lambda\alpha_j\Lambda$

(d'après le lemme 2. 3) $\equiv \mathcal{M}_{ij}\ {}^t\mathcal{H}^\sharp_{ij}\Lambda\beta_i(x)\alpha_j\Lambda$

(d'après le fait ci-dessus) $\equiv \mathcal{D}_{ij}\mathcal{M}_{ij}\Lambda\beta_i(x)\alpha_j\Lambda$

(d'après le lemme 2. 1) $\equiv \mathcal{D}_{ij}\Lambda\mathcal{M}_{ij}\beta_i(x)\alpha_j\Lambda$.

Cela suffit de montrer notre but.

5°). En résumé, notre cas actuel se traite de la même manière que les systèmes strictement hyperboliques. Rappelons-nous que nous nous sommes appuyés toujours sur le corollaire de la prop. 3. 1. On aura les théorèmes 3. 1 et 3. 2 dans [8]. Reproduisons le théorème 3. 1.

Supposons que l'équation (3, 3) vérifie les conditions 1°, 2° et 3° au début de § 3, alors on a

TÉHORÈME 3. 1. *Pour tout* $t_0 \in [0, T]$, *et pour les données* $u^0 \in \mathcal{D}^{m+1}$, $f(t) \in \mathcal{D}^{m+1}[0, T]$ (*fonction continue en t à valeurs dans* $\mathcal{D}^{m+1}$), *il existe une et une seule solution* $u(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, *de l'équation* (3, 3), *continue en t à valeurs dans* $\mathcal{D}^{m+1}$, *une fois continuement différentiable en t à valeurs dans* $\mathcal{D}^m$, *prenant la donnée initiale pour* $t = t_0$. *De plus,* *l'application* $(u^0, f(t)) \to u(t)$ *de* $\mathcal{D}^m \times \mathcal{D}^m[0, T]$ *dans* $\mathcal{D}^m[0, T]$ *est continue.*

§ 4. Systèmes paraboliques.

1. Nous allons traiter les systèmes paraboliques au point de vue de semi-groupe. Ce traitement nous avons déjà montré dans [7], pour les équations paraboliques. Là-dedans les construction des matrices $B_m(t)$ ont été faites par des expressions explicites. Mais cette méthode est, nous semble-t-il, difficile à étendre aux systèmes paraboliques. Nous reviendrons ici au mémoire de Petrowsky [10], et montrerons une extension directe de ce travail aux cas où les coefficients sont variables. Remarquons que M. S. O. Eidelman a publié un beau mémoire sur les systèmes paraboliques ([3]). Mais son point de vue est différent du nôtre. Nous donnons d'abord la définition des systèmes paraboliques [10] p. 3.

Etant donné un système d'équations aux dérivées partielles mis sous la forme d'équation d'évolution :

$$(4, 1) \qquad \left(\frac{d}{dt}\right)^{n_i} u_i(x, t)$$
$$= \sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{(k)} a_{ij}^{(k_0 \cdots k_n)}(x, t) \left(\frac{d}{dt}\right)^{k_0} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{k_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{k_n} \right) u_j(x, t) + f_i(x, t)$$
$$(i = 1, 2, \cdots, N).$$

Nous dirons que le système (4, 1) est p-parabolique, si

1°. il existe un nombre entier p tel que

$$(4, 2) \qquad pk_0 + k_1 + \cdots + k_n \leqslant pn_j\,;\ k_0 < n_j\,.$$

2°. Considérons la matrice d'ordre N:

$$(4, 3) \qquad \begin{pmatrix} \lambda^{n_1} & & & \\ & \lambda^{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda^{n_N} \end{pmatrix} - \left(\sum_{((k))} a_{ij}^{(k_0 \cdots k_n)}(x, t) \lambda^{k_0} (2\pi i \xi_1)^{k_1} \cdots (2\pi i \xi_n)^{k_n} \right),$$

où $\sum_{((k))}$ signifie la sommation sur tous les termes vérifiant $pk_0 + \cdots k_n = pn_j$; lorsque ξ, x, t parcourent la sphère unité dans R^n_ξ, l'espace R^n_x, et $[0, T]$ respectivement, les parties réelles de toutes les racines du déterminant de (4, 3) sont restées toujours inférieures à une constante négative $-\delta$.

Cela fait, nous supposons que tous les coefficients sont des fonctions continues en t à valeurs dans $\mathcal{B}_x$.

Comme dans le cas hyperbolique, nous traiterons (4, 1) sous une équation équivalente. Posons

$$(4, 4)\quad u_{j,k}=(\Lambda+1)^{(n_j-1-k)p}\left(\frac{d}{dt}\right)^k u_j\,,\quad 0\leqslant k\leqslant n_j-1\,,\quad j=1, 2, \cdots, N,$$

en ajoutant ainsi les fonctions inconnues, on a un système équivalent :

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_{N'}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} & & \\ & H_{ij}(t) & \\ & & \end{pmatrix}\Lambda^p\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_{N'}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} & & \\ & B_{ij}(t) & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_{N'}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}f_1(t)\\ \vdots\\ f_{N'}(t)\end{pmatrix}.$$

En posant $\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_{N'}\end{pmatrix}$ simplement u, et en écrivant N' de nouveau N on a une forme matricielle

$$(4, 5)\qquad \frac{d}{dt}u(t)=\mathcal{H}(t)\Lambda^{2b}u(t)+[\mathcal{B}_1(t)\Lambda^{2b-1}+\cdots+\mathcal{B}_{2b}(t)]u(t)+f(t)\,,$$

où $p=2b$ et $\mathcal{B}_1(t), \cdots, \mathcal{B}_{2b}(t)$ sont des opérateurs continus de $\mathcal{D}^s$ dans lui-même, s étant un entier quelconque, positif, 0, ou négatif. Nous écrivons encore, en posant

$$(4, 6)\qquad \mathcal{B}(t)=\mathcal{B}_1(t)\Lambda^{2b-1}+\mathcal{B}_2(t)\Lambda^{2b-2}+\cdots+\mathcal{B}_{2b}(t)\,,$$

$$(4, 7)\qquad \frac{d}{dt}u(t)=[\mathcal{H}(t)\Lambda^{2b}+\mathcal{B}(t)]u(t)+f(t)=A(t)u(t)+f(t)\,.$$

Il est connu que le déterminant de la matrice

$$(4, 8)\qquad \lambda I-\sigma\mathcal{H}(x, t, \xi)$$

et celui de (4, 3) coïncide ([10], p. 27).

2. *Construction de $B_m(t)$.* Nous partons du lemme suivant dû à Petrowsky ([1], Lemme 5, p. 24).

LEMME 4. 1. *Etant donnée une matrice d'ordre N, $A=[a_{ij}]$. Soit*

$$(4, 9)\qquad |a_{ij}|<K\,.$$

Alors, il existe une matrice $C=[c_{ij}]$ telle que

$$(4,10)\qquad CAC^{-1}=\begin{pmatrix}a_{11}^* & & & \\ a_{21}^* & a_{22}^* & & 0\\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \\ a_{N1}^* & \cdots\cdots & \cdots\cdots & a_{NN}^*\end{pmatrix}$$

où $a^*_{ii}=\lambda_i$, λ_i *étant les valeurs caractéristiques de* A ; $a^*_{ij}=0$, *pour* $j>i$. *De plus, on peut disposer que toutes les valeurs absolues des* $a^*_{ij}(j<i)$ *soient moindres que* ε *donné à l'avance* (ε *étant supposé* $\leqslant(N-1)!\,2^N K$). *Alors que la matrice vérifie*

$$|\text{dét.}\, C|=((N-1)!\,2^N K/\varepsilon)^{N(N-1)/2} \tag{4, 11}$$

$$|C_{ij}|\leqslant((N-1)!\,2^N K/\varepsilon)^{N-1}. \tag{4, 12}$$

Nous allons appliquer ce lemme à la matrice parabolique $\sigma\mathcal{H}(x, t, \xi)$, nous avons alors

PROPOSITION 4. 1. *Etant donné* $\eta>0$, *il existe deux constantes positives* ε, M_0 *vérifiant les conditions suivantes : pour tout point* (x^0, ξ^0, t^0) *dans* $R^n_x\times S_\xi\times[0, T]$, *on peut associer à* $\sigma\mathcal{H}(x, t, \xi)$ *une matrice* $\sigma\mathfrak{N}$ *non-singulière à éléments constants de telle manière que, en posant*

$$\sigma\mathfrak{N}\cdot\sigma\mathcal{H}(x, t, \xi)=\sigma\mathcal{D}(x, t, \xi)\cdot\sigma\mathfrak{N}, \tag{*}$$

$\sigma\mathcal{D}(x, t, \xi)$ *vérifie dans le domaine* $|x-x^0|\leqslant\varepsilon$, $|\xi-\xi^0|\leqslant\varepsilon$, $|t-t^0|\leqslant\varepsilon$, *les conditions suivantes : soient* $a_{11}(x, t, \xi)$, $a_{22}(x, t, \xi)$, $\cdots$, $a_{NN}(x, t, \xi)$ *les éléments à la diagonale, alors* $a_{ii}(x, t, \xi)$ *vérifient*

$$\begin{aligned}&\textit{partie réelle}\ \ a_{ii}(x, t, \xi)\leqslant-\delta+\eta\quad(i=1, 2, \cdots, N);\\ &|a_{ij}(x, t, \xi)|\leqslant\eta\qquad(i\neq j),\end{aligned} \tag{4, 13}$$

alors que

$$1\leqslant|\text{dét.}\,\sigma\mathfrak{N}|\leqslant M_0,\quad |\textit{éléments de }\sigma\mathfrak{N}|\leqslant M_0. \tag{4, 14}$$

REMARQUE. ε et M_0 sont des constantes indépendantes de la position de (x^0, t^0, ξ^0).

De cette proposition, on voit que, comme dans § 3, il existe un recouvrement de la sphère unité $\{V'_j\}_{j=1,2,\cdots,p}$ et un recouvrement de l'espace R^n_x : $[Q'_i]_{i=0,1,2,\cdots}$ et un nonmbre ε positif tels que dans $\Omega_{ij}=Q'_i\times V'_j\times[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]$, on peut associer une matrice $\sigma\mathfrak{N}_{ij}$ à éléments constants telle que

1) $\sigma\mathfrak{N}_{ij}$ sont uniformément régulières : $|(\sigma\mathfrak{N}_{ij})\cdot X|\geqslant\gamma|X|$ pour tout X, vecteur complexe à N composants, et forment un ensemble borné (d'après (4, 14)),
2) les $\sigma\mathcal{D}_{ij}(x, t, \xi)$ définies par (*) vérifient la condition (4, 13).

Il est évident alors que

3) $\sigma\mathcal{D}_{ij}(x, t, \xi)$ avec $\dfrac{d}{dt}\sigma\mathcal{D}_{ij}(x, t, \xi)$ forment un ensemble borné au sens de la définition 2. 2.

On étend, comme nous avons fait dans le cas hyperbolique, les domaines de définition des $\sigma\mathcal{D}_{ij}(x, t, \xi)$ en modifiant $\sigma\mathcal{H}(x, t, \xi)$. Finalement on a

PROPOSISION 4.2. *Pour tout* $t_0 \in [0, T]$ *et* η *donné* >0, *il existe des recouvrements* $\{V'_j\}_{j=1,2,\dots p}$, *et* $\{Q'_i\}_{i=0,1,2,\dots}$ *de la sphère unité dans* R^n_ξ *et de l'espace* R^n_x *respectivement, et des matrices* $\sigma\mathcal{N}_{ij}$, $\sigma\mathcal{D}_{ij}(x, t, \xi)$, $\sigma\mathcal{H}_{ij}(x, t, \xi)$ *tels que*:

$$1^\circ. \qquad \sigma\mathcal{N}_{ij}\cdot\sigma\mathcal{H}_{ij}(x, t, \xi) = \sigma\mathcal{D}_{ij}(x, t, \xi)\cdot\sigma\mathcal{N}_{ij},$$

où $\sigma\mathcal{H}_{ij}(x, t, \xi) \equiv \sigma\mathcal{H}(x, t, \xi)$ *pour* $(x, t, \xi) \in Q_i \times [t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon] \times V_j$, *et* $\sigma\mathcal{D}_{ij}(x, t, \xi)$ *vérifient la condition* (4, 13).

2°. $\{\mathcal{N}_{ij}\}$, $\{\mathcal{H}_{ij}(t)\}$, $\{\mathcal{D}_{ij}(t)\}$, $t \in [t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]$ *forment des ensembles bornés avec leurs dérivées en t au sens de la définition* 2.2. *De plus,* $\{\mathcal{N}_{ij}\}$ *sont uniformément régulières* (*définition* 2.3).

Il est manifeste que

$$(4, 15) \qquad B_m(t) = \Lambda^m\left(\sum_{i,j}\alpha_j\beta_i(x)\mathcal{N}^*_{ij}\mathcal{N}_{ij}\beta_i(x)\alpha_j\right)\Lambda^m + \beta_m I, \quad m \geqslant 1$$

définit une norme équivalente dans $\mathcal{D}^m$ si β_m est assez grand, vu le cas hyperbolique. Plus précisément, on a

$$(4.16) \qquad B_m(t) \geqslant \rho\Lambda^{2m} + (\beta_m - \kappa_m)I.$$

où ρ est une constante positive indépendante de m, et κ_m est une constante positive convenablement choisie.

On va montrer l'inégalité de la forme:

PROPOSITION 4.3.

$$B_m A + A^* B_m \leqslant -\sigma\Lambda^{2(m+b)} + \gamma'_m(\Lambda+1)^{2(m+b-1)}$$

où σ *est une constante positive indépendante de* m.

DÉMONSTRATION. Occupons-nous de $B_m A$. Posons

$$K_{ij} = \alpha_j\beta_i(x)\mathcal{N}^*_{ij}\mathcal{N}_{ij}\beta_i(x)\alpha_j.$$

Envisageons $\Lambda^m K_{ij}\Lambda^m\mathcal{H}\Lambda^{2b}$. Pour établir la proposition, il suffit de l'établir pour $u \in \mathcal{D}^\infty$. Nous supposons dans la suite, $u \in \mathcal{D}^\infty$. Considérons la forme

$$(\Lambda^m K_{ij}\Lambda^m\mathcal{H}\Lambda^{2b}u, u) = (K_{ij}\Lambda^m\mathcal{H}\Lambda^{2b}u, \Lambda^m u),$$

en posant, $\Lambda^m\mathcal{H} = \mathcal{H}\Lambda^m + \mathcal{H}_1\Lambda^{m-1} + \mathcal{H}_0$ (d'après le lemme 2.2), elle s'écrit

$$(K_{ij}\mathcal{H}\Lambda^{m+2b}u, \Lambda^m u) + (K_{ij}\mathcal{H}_1\Lambda^{m-1+2b}u, \Lambda^m u) + (K_{ij}\mathcal{H}_0\Lambda^{2b}u, \Lambda^m u).$$

Montrons que, pour notre but, le second et le troisième terme sont des quantités négligeables dans le sens suivant : Considérons la forme

$$|(K_{ij}u, v)| = |(\mathcal{N}_{ij}\beta_i(x)\alpha_j u, \mathcal{N}_{ij}\beta_i(x)\alpha_j v)|$$
$$\leqslant \varepsilon ||\mathcal{N}_{ij}\beta_i(x)\alpha_j u||^2_{\mathcal{D}^{-s}} + \frac{1}{\varepsilon} ||\mathcal{N}_{ij}\beta_i(x)\alpha_j v||^2_{\mathcal{D}^s}$$

où ε étant un nombre positif quelconque. Or, on a

$$\sum_{i,j} ||\mathcal{N}_{ij}\beta_i(x)\alpha_j w||^2_{\mathcal{D}^t} || \leqslant C(t) ||w||^2_{\mathcal{D}^t},$$

t étant un nombre entier positif, 0, ou négatif. En effet, on a le

LEMME 4. 2.

$$\sum_{i=0}^{\infty} ||\beta_i(x)u||^2_{\mathcal{D}^s} \leqslant C(s) ||u||^2_{\mathcal{D}^s},$$

où $C(s)$ est une constante positive, s étant un entier quelconque positif, 0, ou négatif.

Nous donnerons cette démonstration dans l'appendice.

De là,

$$\sum_{i,j} |(K_{ij}u, v)| \leqslant \varepsilon C(-s) ||u||^2_{\mathcal{D}^{-s}} + \frac{1}{\varepsilon} C(s) ||v||^2_{\mathcal{D}^s}.$$

Cette inégalité entraîne que

$$\sum_{i,j} |(K_{ij}\mathcal{H}_1\Lambda^{m-1+2b}u, \Lambda^m u)| \leqslant \varepsilon C(-b-1) ||\mathcal{H}_1\Lambda^{m-1+2b}u||^2_{\mathcal{D}^{-(b-1)}}$$
$$+ \frac{1}{\varepsilon} C(b-1) ||\Lambda^m u||^2_{\mathcal{D}^{b-1}}.$$

Evidemment, on a

$||\mathcal{H}_1\Lambda^{m-1+2b}u||_{\mathcal{D}^{-(b-1)}} \leqslant C ||u||_{\mathcal{D}^{m+b}}$, parce que $\mathcal{H}_1$ est une application continue de $\mathcal{D}^{-(b-1)}$ dans lui-même, et on a posé $C = ||\mathcal{H}_1||_{\mathcal{L}(\mathcal{D}^{-(b-1)}; \mathcal{D}^{-(b-1)})}$.

D'autre part, $||\Lambda^m u||_{\mathcal{D}^{b-1}} \leqslant ||u||_{\mathcal{D}^{m+b-1}}$.

En résumé,

$$\sum_{i,j} |(K_{ij}\mathcal{H}_1\Lambda^{m-1+2b}u, \Lambda^m u)| \leqslant \varepsilon C(-(b-1))C ||u||^2_{\mathcal{D}^{m+b}} + \frac{1}{\varepsilon} C(b-1) ||u||^2_{\mathcal{D}^{m+b-1}},$$

et ε peut être pris aussi petit qu'on le veut. Il en est de même du troisième terme. Nous écrivons telle relation de la forme :

$$\mathcal{N}_{ij}\beta_i(x)\alpha_j\Lambda^m\mathcal{H}\Lambda^{2b} \sim \mathcal{N}_{ij}\beta_i(x)\alpha_j\mathcal{H}\Lambda^{m+2b}.$$

Par la même raison $\sim \mathcal{N}_{ij}\beta_i(x)\alpha_j\Lambda^b\mathcal{H}\Lambda^{m+b} \sim \mathcal{N}_{ij}\Lambda^b\beta_i(x)\alpha_j\mathcal{H}\Lambda^{m+b}$.

Pour ce dernier, on utilise le

LEMME 4. 3.

$$\sum_{i=0}^{\infty} ||\beta_i(x)\Lambda^b - \Lambda^b\beta_i(x))u||^2_{\mathcal{D}^s} \leqslant d(b, s)\,||u||^2_{\mathcal{D}^{s+(b-1)}}$$

où b est un entier positif, s étant un entier positif, 0, *ou négatif.*

On donnera cette démonstration dans l'appendice.

Evidemment, on a $\mathcal{N}_{ij}\Lambda^b = \Lambda^b\mathcal{N}_{ij}$, et d'après le lemme 2. 8, et d'après lemme 3. 1, le dernier ci-dessus est égal à

$$\sim \Lambda^b\mathcal{N}_{ij}\beta_i(x)\mathcal{H}_{ij}\alpha_j\Lambda^{m+b} = \Lambda^b\mathcal{N}_{ij}\beta_i(x)\mathcal{H}_{ij}\Lambda^b\alpha_j\Lambda^m$$

$\sim \Lambda^b\mathcal{N}_{ij}\mathcal{H}_{ij}\Lambda^b\beta_i(x)\alpha_j\Lambda^m$ (d'après le lemme 2. 4 et la prop. 4. 2),

$\sim \Lambda^b\mathcal{D}_{ij}\mathcal{N}_{ij}\Lambda^b\beta_i(x)\alpha_j\Lambda^m$ (la prop. 4. 2 et le lemme 2. 1)

$= \Lambda^b\mathcal{D}_{ij}\Lambda^b\mathcal{N}_{ij}\beta_i(x)\alpha_j\Lambda^m$.

Pour l'évaluation de $B_mA + A^*B_m$, il suffit donc d'envisager, en posant

$$\mathcal{N}_{ij}\beta_i(x)\alpha_j\Lambda^m u = v_{ij}\,,$$
$$((\mathcal{D}_{ij} + \mathcal{D}^*_{ij})\Lambda^b v_{ij},\ \Lambda^b v_{ij})\,.$$

Elle se majore par (d'après les lemmes 2. 6 et 2. 7)

$$-(2\delta' - N^2\eta'^2)\,||\Lambda^b v_{ij}||^2 + \gamma\,||(\Lambda+1)^{b-1}v_{ij}||^2\,,$$

où $\delta'(<\delta)$, $\eta'(>\eta)$ sont pris aussi proches de δ et de η respectivement qu'on le veut (il faut alors, bien entendu, prendre γ assez grand), et δ', η' et γ peuvent être pris indépendamment des (i, j). Or,

$$\sum_{i,j} ||\Lambda^b v_{ij}||^2 \geqslant \sigma'\,||\Lambda^{m+b}u||^2 - \gamma'\,||(\Lambda+1)^{m+b-1}u||^2\,.$$

Ce qui achève notre démonstration.

REMARQUE. La proposition 4. 3 est naturellement vraie pour $B_{-m}(t)$, où $m \geqslant 0$,

$$B_{-m}(t) = (\Lambda+1)^{-m}(\sum_{i,j}\alpha_j\beta_i(x)\mathcal{N}_{ij}\mathcal{N}^*_{ij}\beta_i(x)\alpha_j)(\Lambda+1)^{-m} + \beta_{-m}(\Lambda+1)^{-(m+1)}.$$

Explicitement, on a

$$B_{-m}A + A^*B_{-m} \leqslant -\sigma(\Lambda+1)^{2(b-m)} + \gamma'_m(\Lambda+1)^{2(b-1-m)}\,.$$

3. *Problème de Cauchy.* Comme nous avons indiqué dans [7], le problème de Cauchy pour l'avenir se résout au point de vue de la théorie des semi-groupes.

Nous fixons une fois pour toutes l'entier $m > 1$, et voulons montrer l'existence des solutions de l'équation (4, 7) dans l'espace $\mathcal{D}^m$.

1°) *L'inégalité d'énergie.*

Soit $u(t)$ une solution de l'équation (4. 7), une fois continuement différentiable en t à valeurs dans $\mathcal{D}^{m+2b}$, on a alors

$$\frac{d}{dt}(B_m(t)u(t),\ u(t))=((B_mA+A^*B_m)u,\ u)+(B_m'(t)u,\ u)+(B_mf,\ u)+(B_mu, f).$$

D'après la proposition 4. 3, on a

$$\leqslant -\sigma\|\Lambda^{m+b}u\|^2+\gamma_m\|(\Lambda+1)^{m+b-1}u\|^2+C(B_mu,\ u)+2|(B_mf,\ u)|.$$

Or, $$\gamma_m\|(\Lambda+1)^{m+b-1}u\|^2\leqslant\frac{\sigma}{2}\|\Lambda^{m+b}u\|^2+\rho_1^2\|(\Lambda+1)^m u\|^2.$$

Désignons $(B_mw,\ w)^{1/2}$ par $\|w\|_{B_m}$, alors d'après Schwarz $|(B_mf,\ u)|\leqslant\|f\|_{B_m}\|u\|_{B_m}$,

$$c_m'\|w\|_{\mathcal{D}^m}\leqslant\|w\|_{B_m}\leqslant c_m\|w\|_{\mathcal{D}^m}, \qquad \text{pour } 0\leqslant t\leqslant T,$$

c_m et c_m' sont des constantes positives, on a

$$\frac{d}{dt}\{\|u(t)\|^2_{B_m(t)}\}\leqslant\rho'\|u(t)\|^2_{B_m(t)}+\rho''\|f(t)\|^2_{B_m(t)},$$

où ρ' et ρ'' sont des constantes.

Cette inégalité entraîne

$$\|u(t)\|^2_{B_m(t)}\leqslant c(t,\ t_0)[\|u(t_0)\|^2_{B_m(t_0)}+\max_{t_0\leq\tau\leq t}\|f(\tau)\|^2_{\mathcal{D}^m}],$$ [2]

ou bien

$$\|u(t)\|^2_{\mathcal{D}^m}\leqslant c(t,\ t_0)[\|u(t_0)\|^2_{\mathcal{D}^m}+\max_{t_0\leq\tau\leq t}\|f(\tau)\|^2_{\mathcal{D}^m}], \qquad t\geq t_0. \tag{4, 17}$$

2°) *l'opérateur inverse* $(I-\lambda A)^{-1}$, $\lambda>0$, *dans* $\mathcal{D}^m$ $(m\geq1)$.

On prend $\mathcal{D}_A$ (domaine de définition de A)$=\mathcal{D}^{m+2b}$. On va montrer que $(I-\lambda A)$ définit un isomorphisme topologique de $\mathcal{D}^{m+2b}$ *sur* $\mathcal{D}^m$, si $\lambda>0$ est assez petit. Plus précisément, il existe $\lambda_0>0$ tel que pour $0<\lambda<\lambda_0$, et pour tout $t_0\in[0,\ T]$, $(I-\lambda A(t_0))$ définit un isomorphisme topologique de $\mathcal{D}^{m+2b}$ sur $\mathcal{D}^m$.

Divisons notre raisonnement en plusieurs étapes.

i) pour $u\in\mathcal{D}^{m+2b}$,

---

2) Comme nous avons remarqué dans le cas hyperbolique, on peut supposer qu'une $B_m(t)$ est définie pour $t\in[0,\ T]$.

$$(B_m(t_0)(I-\lambda A(t_0))u,\ (I-\lambda A(t_0))u) = \|(I-\lambda A(t_0))u\|^2_{B_m(t_0)}$$
$$\geqslant \|u\|^2_{B_m(t_0)} - \lambda([B_m A + A^* B_m]u,\ u)\,.$$

D'après la proposition 4. 3, on a

LEMME 4. 4.
$$B_m A + A^* B_m \leqslant -\sigma\Lambda^{2(m+b)} + \gamma'_m B_m \leqslant \gamma'_m B_m\,,$$
où γ'_m est une constante positive indépendante de t. De là

(4, 18) $$\|(I-\lambda A)u\|^2_{B_m} \geq \|u\|^2_{B_m}(1-\lambda\gamma'_m)\,.$$

Cette inégalité montre que $(I-\lambda A)$ est *biunivoque* de $\mathcal{D}^{m+2b}$ dans $\mathcal{D}^m$.

ii) on va montrer que, pour $v\in\mathcal{D}^m$ et $\psi\in\mathcal{D}^{m+2b}$,

(4, 19) $$|\langle B_{m+b}v,\ \overline{\psi}\rangle| \leqslant C\|v\|_{\mathcal{D}^m}\|\psi\|_{\mathcal{D}^{m+2b}}\,.$$

Il suffit de montrer cette inégalité pour $v,\psi\in\mathcal{D}^\infty$. On a alors $\langle B_{m+b}v,\ \overline{\psi}\rangle = (B_{m+b}v,\ \psi)$, puisque deux éléments appartiennent à $\mathcal{D}^\infty$.

$$(B_{m+b}v,\ \psi) = \sum_{i,j}(K_{ij}\Lambda^{m+b}v,\ K_{ij}\Lambda^{m+b}\psi) + \beta_m(v,\ \psi)\,,$$
$$|\ \text{''}\ | \leqslant \sum_{i,j}\|K_{ij}\Lambda^{m+b}v\|_{\mathcal{D}^{-b}}\|K_{ij}\Lambda^{m+b}\psi\|_{\mathcal{D}^b} + \beta_m\|v\|\ \|\psi\|$$
$$\leqslant \Big(\sum_{i,j}\|K_{ij}\Lambda^{m+b}v\|^2_{\mathcal{D}^{-b}} + \beta_m\|v\|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{i,j}\|K_{ij}\Lambda^{m+b}\psi\|^2_{\mathcal{D}^b} + \beta_m\|\psi\|^2\Big)^{1/2}.$$

On va montrer que le premier facteur

$$\sum_{i,j}\|K_{ij}\Lambda^{m+b}v\|^2_{\mathcal{D}^{-b}} + \beta_m\|v\|^2 \leqslant C_1\|v\|^2_{\mathcal{D}^m}\,.$$

D'abord, $$\|K_{ij}\Lambda^{m+b}v\|^2_{\mathcal{D}^{-b}} \leqslant \gamma^2\|\beta_i(x)\alpha_j\Lambda^{m+b}v\|^2_{\mathcal{D}^{-b}}\,,$$

où γ est une constante indépendante de (i,j): $|\sigma(\mathcal{N}_{ij})X| \leqslant \gamma|X|$. D'après le lemme 4. 2,

$$\sum_{i,j}\|\beta_i(x)\alpha_j\Lambda^{m+b}v\|^2_{\mathcal{D}^{-b}} \leqslant C(-b)\sum_j\|\alpha_j\Lambda^{m+b}v\|^2_{\mathcal{D}^{-b}} = C(-b)\|\Lambda^{m+b}v\|^2_{\mathcal{D}^{-b}}$$
$$\leqslant C(-b)\|v\|^2_{\mathcal{D}^m}\,.$$

Il est de même du second facteur :

$$\sum_{i,j}\|K_{ij}\Lambda^{m+b}\psi\|^2_{\mathcal{D}^b} + \beta_m\|\psi\|^2 \leqslant C_2\|\psi\|^2_{\mathcal{D}^{m+2b}}\,.$$

iii) On va montrer que B_{m+b} est une application biunivoque de $\mathcal{D}^m$ dans $\mathcal{D}^{-m-2b}$, si β_{m+b} intervenant dans B_{m+b} est assez grand.

En effet, on a

partie réelle $(B_{m+b}v, (\Lambda+1)^{-2b}v) \geq \frac{\sigma^2}{2} ||\Lambda^m v||^2 + (\beta_{m+b} - C) ||v||^2_{\mathcal{D}^{-b}}$

où C est une constante convenablement choisie, σ est une constante positive vérifiant :

$$|\sigma(\mathcal{N}_{ij}) \cdot X| \geq \sigma |X| .$$

Montrons-le. Posons $w = (\Lambda+1)^{-2b}v$, alors

$$\begin{aligned}(B_{m+b}v, (\Lambda+1)^{-2b}v) &= (B_{m+b}(\Lambda+1)^{2b}w, w) \\ &= (B_{m+b}\Lambda^{2b}w, w) + \sum_{k<2b} \binom{2b}{k} (B_{m+b}\Lambda^k w, w) .\end{aligned}$$

Occupons-nous du premier terme du second membre.

$$\begin{aligned}(4, 19) \quad \sum_{i,j} (K_{ij}\Lambda^{m+3b}w, K_{ij}\Lambda^{m+b}w) &= \sum_{i,j} (K_{ij}\Lambda^{m+2b}w, \Lambda^b K_{ij}\Lambda^{m+b}w) + R_1 \\ &= \sum (K_{ij}\Lambda^{m+2b}w, K_{ij}\Lambda^{m+2b}w) + R_1 + R_2 .\end{aligned}$$

D'où, partie réelle de (4, 19) $\geqslant \sigma^2 ||\Lambda^{m+2b}w||^2 - |R_1| - |R_2|$.

Or,

$$\begin{aligned}|R_1| &\leqslant \sum_{i,j} ||\mathcal{N}_{ij}[\beta_i(x)\Lambda^b - \Lambda^b\beta_i(x)]\alpha_j\Lambda^{m+2b}w||_{\mathcal{D}^{-b}} ||K_{ij}\Lambda^{m+b}w||_{\mathcal{D}^b} \\ &\leqslant \gamma^2 \sum ||[\beta_i(x)\Lambda^b - \Lambda^b\beta_i(x)]\alpha_j\Lambda^{m+2b}w||_{\mathcal{D}^{-b}} ||\beta_i(x)\alpha_j\Lambda^{m+b}w||_{\mathcal{D}^b} \\ &\leqslant \gamma^2 (\sum ||\cdots||^2_{\mathcal{D}^{-b}})^{1/2} (\sum ||\beta_i(x)\alpha_j\Lambda^{m+b}w||^2_{\mathcal{D}^b})^{1/2} \\ &\leqslant \gamma^2 d(b, -s)^{1/2} c(b)^{1/2} (\sum_j ||\alpha_j\Lambda^{m+2b}w||^2_{\mathcal{D}^{-b+b-1}})^{1/2} (||\Lambda^{m+b}w||^2_{\mathcal{D}^b})^{1/2} \\ &\leqslant \gamma^2 c(b)^{1/2} d(b, -s)^{1/2} ||w||_{\mathcal{D}^{m+2b-1}} ||w||_{\mathcal{D}^{m+2b}} \\ &= \gamma^2 c(b)^{1/2} d(b, -s)^{1/2} ||v||_{\mathcal{D}^{m-1}} ||v||_{\mathcal{D}^m} .\end{aligned}$$

Il est de même des termes restes.

iv) Enfin, on veut chercher une solution u dans $\mathcal{D}^{m+2b}$ de l'équation

$$(4, 20) \qquad (I - \lambda A)u = v ,$$

pour v donnée dans $\mathcal{D}^m$. D'après iii), il suffit de trouver $u \in \mathcal{D}^{m+2b}$ de l'équation

$$(4, 21) \qquad B_{m+b}(I - \lambda A)u = B_{m+b}v ,$$

puisque $(I - \lambda A)u \in \mathcal{D}^m$. Comme $B_{m+b}v \in \mathcal{D}^{-m-2b}$, il suffit de trouver la solution vérifiant

$$\langle B_{m+b}(I - \lambda A)u, \overline{\psi} \rangle = \langle B_{m+b}v, \overline{\psi} \rangle$$

pour toute $\psi \in \mathcal{D}^{m+2b}$, ou ce qui revient au même pour toute $\psi \in \mathcal{D}^\infty$. Remarquons que la seconde forme est une forme semi-linéaire en

ψ, et continue pour la topologie de $\mathcal{D}^{m+2b}$. Or, la première forme s'écrit

$$\begin{aligned}&((H_1+iH_2)u,\ \psi)\,, \qquad \text{où}\\ &2H_1 = B_{m+b}(I-\lambda A)+(I-\lambda A)^*B_{m+b}\,,\\ &2H_2 = -i\{B_{m+b}(I-\lambda A)-(I-\lambda A)^*B_{m+b}\}\,.\end{aligned}$$

Or, H_1 et H_2 sont hermitiens, et de plus H_1 définit dans $\mathcal{D}^{m+2b}$ une norme équivalente. D'où, si on désigne $(H_1u,\ \psi)=(u,\ \psi)_{H_1}$, on a

$$((H_1+iH_2)u,\ \psi) = ((I+iH)u,\ \psi)_{H_1}\,,$$

où H est un opérateur hermitien borné.

Comme $||w||_{H_1}$ et $||w||_{\mathcal{D}^{m+2b}}$ sont équivalentes, on voit que pour toute $v\in\mathcal{D}^m$, il existe un et un seul élément $\tilde{v}$ de $\mathcal{D}^{m+2b}$ tel que

$\langle B_{m+b}v,\ \psi\rangle=(\tilde{v},\ \psi)_{H_1}$ pour toute $\psi\in\mathcal{D}^{m+2b}$. De plus, d'après ii), $||\tilde{v}||_{\mathcal{D}^{m+2b}}\leqslant C'||v||_{\mathcal{D}^m}$. En effet, $||\tilde{v}||_{H_1}=\sup\limits_{||\psi||_{H_1}\leqslant 1}|(\tilde{v},\ \psi)_{H_1}|\leqslant\sup\limits_{||\psi||_{\mathcal{D}^{m+2b}}\leqslant C}|(v,\ \psi)_{H_1}|$ $=\sup\limits_{||\psi||_{\mathcal{D}^{m+2b}}\leqslant C}|\langle B_{m+b}v,\ \psi\rangle|\leqslant cC||v||_{\mathcal{D}^m}$.

C'est-à-dire que l'application de v dans $\tilde{v}$ de $\mathcal{D}^m$ dans $\mathcal{D}^{m+2b}$ est continue. Il suffit donc de résoudre l'équation (considérée dans l'espace $\mathcal{D}^{m+2b}$ muni de H_1),

$$(I+iH)u = \tilde{v}\,.$$

Comme H est hermitien et borné, on a $u=(I+iH)^{-1}\tilde{v}$. De là, il existe toujours une et une seule solution $u\in\mathcal{D}^{m+2b}$ de l'équation (4, 20) pour toute $v\in\mathcal{D}^m$. De plus l'application $v\to u$ de $\mathcal{D}^m$ dans $\mathcal{D}^{m+2b}$ est continue.

3°) Il est manifeste que l'opérateur A est fermé. Nous pouvons alors utiliser le résultat de Kato [4], plus précisément une légère modification indiquée dans mon travail [7]. Dans ce but, il suffit de montrer ceci: (voir prop. 3 de [7]). Posons d'abord, $S(t)^2=(\Lambda+1)^{-m}B_m(t)(\Lambda+1)^{-m}$, $S(t)$ est alors un opérateur hermitien positif opérant sur L^2 et continuement différentiable en t à valeurs dans $\mathcal{L}(L^2\,;L^2)$. On pose ensuite

$$\begin{aligned}&T(t) = (\Lambda+1)^{-m}S(t)(\Lambda+1)^m\,, \qquad \text{alors on a}\\ &T^*(t)(\Lambda+1)^{2m}T(t) = (\Lambda+1)^mS(t)^2(\Lambda+1)^m = B_m(t)\,.\end{aligned}$$

De là

1) $(B_m(t)u,\ u)=((\Lambda+1)^{2m}T(t)u,\ T(t)u)=||T(t)u||^2_{\mathcal{D}^m}$.

2) $T(t)$ et $T^{-1}(t)$ sont des opérateurs continuement différentiables en t à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{D}^m ; \mathcal{D}^m)$.

D'aprés la proposition 2 de [7], finalement on a la

PROPOSITION 4. 4. *Etant donnés* $u_0 \in \mathcal{D}^{m+2b}$, $f(t) \in \mathcal{D}^{m+2b}[0, T]$, *fonction continue en t à valeurs dans* $\mathcal{D}^{m+2b}$, *et* $t_0 \in [0, T]$, *il existe alors une et une seule solution* $u(t)$, $t \geqslant t_0$, *de l'équation* (4, 7), *continue en t à valeurs dans* $\mathcal{D}^{m+2b}$, *continuement différentiable en t à valeurs dans* $\mathcal{D}^m$, *où m est un entier qulconque positif*, 0, *ou négatif.*

REMARQUE. Précisément parler, ceux qui précèdent n'affirment cette proposition que pour $m \geqslant 1$. Mais, l'inégalité d'énergie et le passage à la limite affirment que la proposition 4. 4 est aussi vraie pour $m \leqslant 0$.

Revenons à l'équation (4, 1). La proposition 4. 4 montre la

PROPOSITION 4. 5. *Etant donnés la valeur initiale et le second membre* f_i *et* $t_0 \in [0, T] : (u_j^0, u_j^1, \cdots, u_j^{n_j-1}) \in (\mathcal{D}^{m+pn_j}, \mathcal{D}^{m+p(n_j-1)}, \cdots, \mathcal{D}^{m+p})$ $(j=1, 2, \cdots, N)$ *et le second membre* $f_i(t) \in \mathcal{D}^{m+p}[0, T]$ $(i=1, 2, \cdots, N)$, *m étant un entier quelconque positif*, 0, *ou négatif*, *il existe alors une et une seule solution de l'équation* (4. 1), $u_i(t)$, $t \geqq t_0$, $(i=1, \cdots, N)$, $u_i(t)$ *étant* n_i-*fois continuement différentiable en t à valeurs dans* $\mathcal{D}^m$, *telle que*

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^i u_j(t_0) = u_j^i \qquad (i=0, 1, 2, \cdots, n_j-1 ; j=1, \cdots, N) .$$

Appendice.

1. DÉMONSTRATION DU LEMME 4. 2. Dans le cas où $s \geqslant 0$, la démonstration est évidente. Occupons-nous donc du cas où $s < 0$.

Il suffit de montrer l'inégalité

$$\text{(A, 1)} \quad \sum_{i=0}^{\infty} \|[\beta_i(x)(\Lambda+1)^{-s} - (\Lambda+1)^{-s}\beta_i(x)]u\|^2 \leqslant C\|(\Lambda+1)^{-s}u\|^2, \quad \text{pour} \quad u \in \mathcal{D}^{-s} .$$

Nous voulons montrer plus précisément $\leqslant C\|(\Lambda+1)^{-(s+1)}u\|^2$.

En effet, $\|\beta_i(x)u\|^2_{\mathcal{D}^{-s}} = \|(\Lambda+1)^{-s}\beta_i(x)u\|^2 \leqslant 2\|\beta_i(x)(\Lambda+1)^{-s}u\|^2 + 2\|[\beta_i(x)(\Lambda+1)^{-s} - (\Lambda+1)^{-s}\beta_i(x)]u\|^2$.

Posons

$$\text{(A, 2)} \qquad u = (\Lambda^{s+1}+1)v .$$

Alors $v \in L^2$, et l'inégalité (A, 1) devient

(A, 3) $$\sum_{i=0}^{\infty} \|[\beta_i(x)(\Lambda+1)^{-s}-(\Lambda+1)^{-s}\beta_i(x)](\Lambda^{s+1}+1)v\|^2 \leqslant C\|v\|^2 .$$

Soit $\hat{\alpha}(\xi)$ une fonction indéfiniment différentiable à support compact, qui vaut 1 au voisinage de l'origine. Soit α l'image réciproque de Fourier de $\hat{\alpha}(\xi)$. On a alors

$$\sum_{i=0}^{\infty} \|[\beta_i(x)(\Lambda+1)^{-s}\alpha-\alpha(\Lambda+1)^{-s}\beta_i(x)](\Lambda^{s+1}+1)v\|^2 \leqslant C_1\|v\|^2 ,$$

puisque $\alpha(\Lambda+1)^{-s}$ est une distribution dont l'image de Fourier $\dfrac{\hat{\alpha}(\xi)}{(|\xi|+1)^s}$ est bornée et à support compact.

On va donc envisager, en posant

(A, 4) $\Gamma = (\delta-\alpha)(\Lambda+1)^{-s}$, δ étant la mesure de Dirac,

(A, 5) $$\sum_{i=0}^{\infty} \|[\beta_i(x)\Gamma-\Gamma\beta_i(x)](\Lambda^{s+1}+1)v\|^2 \leqslant C_2\|v\|^2 .$$

Considérons $\hat{\Gamma}(\xi)=(1-\hat{\alpha}(\xi))(|\xi|+1)^{-s}$. Elle est une fonction indéfiniment différentiable et vérifie la condition.

(A, 6) $$\left|\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^{\nu}\hat{\Gamma}(\xi)\right| \leqslant \frac{a_\nu}{(1+|\xi|)^{s+|\nu|}}\quad |\nu|\geqslant 0 .$$

Décomposons

(A, 7) $$\varphi_i(x)=([\beta_i(x)\Gamma-\Gamma\beta_i(x)]u)(x)=\sum_{1\leqslant|\nu|\leqslant m-1}\frac{(-1)^{|\nu|}}{\nu\,!}D^\nu\beta_i(x)(x^\nu\Gamma)u$$
$$+\sum_{|\nu|=m}\frac{(-1)^{|\nu|}}{\nu\,!}\int\beta_{i,\nu}(x,y)\Gamma(x-y)(x-y)^\nu u(y)dy .$$

Considérons pour $|\nu|\leqslant m-1$,

$\|D^\nu\beta_i(x)(x^\nu\Gamma)(\Lambda^{s+1}+1)v\|\leqslant\sup_x|D^\nu\beta_i(x)|\,\|(x^\nu\Gamma)(\Lambda^{s+1}+1)v\|_{\omega_i}$, ω_i étant le support de $\beta_i(x)$. Or, $x^\nu\Gamma \xrightarrow[\mathscr{F}]{} \left(-\dfrac{1}{2\pi i}\right)^{|\nu|}\left(\dfrac{\partial}{\partial\xi}\right)^{\nu}\hat{\Gamma}(\xi)$.

D'après (A, 6)

$$\sum_i \|D^\nu\beta_i(x)(x^\nu\Gamma)(\Lambda^{s+1}+1)v\|^2\leqslant C_\nu\|v\|^2 \qquad (|\nu|\leqslant m-1) .$$

Soit Ω_i la boule du centre $x^{(i)}$ avec le rayon 2η ; en posant

$$\varphi_{i,\nu}(x)=\int\beta_{i,\nu}(x,y)(x-y)^\nu\Gamma(x-y)(\Lambda^{s+1}+1)v(y)dy ,$$

on va évaluer $\sum_{i=0}^{\infty}\|\varphi_{i,\nu}(x)\|^2_{\Omega_i}$ $(|\nu|=m)$.

Or, $\varphi_{i,\nu}(x)$ s'écrit (d'après Leibniz)

$$\sum_{|\lambda+\mu|\leqslant s+1} c_{\lambda\mu} \int D_y^\lambda \beta_{i,\nu}(x, y) D_y^\mu[(x-y)^\nu \Gamma(x-y)] R_{\mu\nu} v(y) dy\,,$$

où $R_{\mu\nu}$ est un opérateur borné de L^2 dans lui-même.

Il suffira donc de considérer un des termes ou plutôt leur majorations :

$$\psi^{(1)}(x)_i = \int_{4\Omega_i} |D_y^\mu[(x-y)^\nu \Gamma(x-y)] u(y)|\, dy\,,$$

$$\psi^{(2)}(x)_i = \int_{C4\Omega_i} |D_y^\mu[(x-y)^\nu \Gamma(x-y)] u(y)|\, dy\,.$$

Prenons la fonction $D_x^\mu[x^\nu \Gamma(x)]$, on sait que, si $|\nu|$ est assez grand, cette fonction est bornée, puisque son image de Fourier est

$$\left|(2\pi i\xi)^\nu \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^{|\nu|} \left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\nu \hat{\Gamma}(\xi)\right| \leqslant (2\pi)^{|\mu|-|\nu|} \frac{a_\nu}{(1+|\xi|)^{s+|\nu|-|\mu|}}\,,$$

et comme $|\mu| \leqslant s+1$, $|\nu|=m$, on a

$$\leqslant (2\pi)^{|\mu|-|\nu|} \frac{a_\nu}{(1+|\xi|)^{m-1}}\,,$$

donc si $m-1>n+1$, la fonction $D_x^\mu(x^\nu \Gamma(x))$ est bornée.
D'où

$$|\psi_i^{(1)}(x)| \leqslant \sup |D_x^\mu(x^\nu \Gamma(x))| \int_{4\Omega_i} |v(y)|\, dy$$

$$\|\psi_i^{(1)}(x)\|_{\Omega_i} \leqslant \sup |D_x^\mu(x^\nu \Gamma(x))|\, \|v\|_{4\Omega_i} \operatorname{vol}(4\Omega_i)^{1/2} \operatorname{vol}(\Omega_i)^{1/2}\,.$$

Cela implique

$$\sum_{i=0}^{\infty} \|\psi_i^{(1)}(x)\|_{\Omega_i}^2 \leqslant C\|v\|^2\,.$$

Envisageons ensuite $\psi_i^{(2)}(x)$. En posant $|x|^{2p} D_x^\mu(x^\nu \Gamma) = \Gamma_p(x)$, $x \neq 0$, on a

$$|\psi_i^{(2)}(x)| \leqslant \int_{C4\Omega_i} \frac{|\Gamma_p(x-y)|}{|x-y|^{2p}} |v(y)|\, dy \leqslant \sup |\Gamma_p(x)| \int_{C4\Omega_i} \frac{1}{|x-y|^{2p}} |v(y)|\, dy.$$

Par le même raisonnement qu'à la page 226 de [8], on a

$$\sum \|\psi_i^{(2)}(x)\|_{\Omega_i}^2 \leqslant C'\|v\|^2\,.$$

Il reste à envisager

$$\varphi_i(x) = \int_{\omega_i} \Gamma(x-y) \beta_i(y) (\Lambda^{s+1}+1) v(y) dy\,, \qquad \text{pour} \quad x \in C\Omega_i\,.$$

Cette expression s'écrit comme plus haut

$$\varphi_i(x) = \sum_{|\lambda+\mu|\leq s+1} c_{\lambda\mu} D_y^\lambda \beta_i(y) D_y^\mu \Gamma(x-y) R_{\mu\nu} v(y) dy\,,$$

où $R_{\mu\nu}$ sont des opérateurs bornés de L^2 dans lui-même. Par la même raisonnement qu'à la page 227 de [8], on a

$$\sum_{i=0}^{\infty} \|\varphi_i(x)\|^2_{C\Omega_i} \leqslant C'' \|v\|^2\,.$$

2. Démonstration du Lemme 4. 3.

1) Le cas où $s \geqslant 0$. Il est bien facile. En effet.

$$\|\Lambda^s[\beta_i(x)\Lambda^m - \Lambda^m\beta_i(x)]u\|^2 \leqslant 2\|[\Lambda^s\beta_i(x) - \beta_i(x)\Lambda^s]\Lambda^m u\|^2$$
$$+2\|[\Lambda^{m+s}\beta_i(x) - \beta_i(x)\Lambda^{m+s}]u\|^2\,.$$

Or, d'après le Lemme 2. 3, on a

$$\sum_i \|[\Lambda^s\beta_i(x) - \beta_i(x)\Lambda^s]\Lambda^m u\|^2 \leqslant C\|\Lambda^m u\|^2_{\mathcal{D}^{s-1}} \leqslant C\|u\|^2_{\mathcal{D}^{s+(m-1)}}\,,$$
$$\sum_i \|[\Lambda^{m+s}\beta_i(x) - \beta_i(x)\Lambda^{m+s}]u\|^2 \leqslant C\|u\|^2_{\mathcal{D}^{m+s-1}}\,.$$

3) Le cas où $s < 0$.

$$(\Lambda+1)^{-s}[\Lambda^m\beta_i(x) - \beta_i(x)\Lambda^m]u$$
$$= [(\Lambda+1)^{-s}\beta_i(x) - \beta_i(x)(\Lambda+1)^{-s}]\Lambda^m u + [\Lambda^m(\Lambda+1)^{-s}\beta_i(x)$$
$$-\beta_i(x)\Lambda^m(\Lambda+1)^{-s}]u\,.$$

Il suffit donc de prouver deux inéglités :

$$\sum \|[(\Lambda+1)^{-s}\beta_i(x) - \beta_i(x)(\Lambda+1)^{-s}]\Lambda^m u\|^2 \leqslant C_1\|u\|^2_{\mathcal{D}^{m-1-s}}$$
$$= C_1\|(\Lambda+1)^{m-1-s}u\|^2\,.$$
$$\sum \|[\Lambda^m(\Lambda+1)^{-s}\beta_i(x) - \beta_i(x)\Lambda^m(\Lambda+1)^{-s}]u\|^2 \leqslant C_2\|(\Lambda+1)^{m-1-s}u\|^2\,.$$

Or, la démonstration à faire est la même que la précédente au point de vue du principe, nous ne la reproduisons pas.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. P. Calderón and A. Zygmund, Singular integral operators and differential equations, Amer. J. Math. 79 (1957) p. 901-921.

[2] A. P. Calderón, Uniqueness in the Cauchy problem for partial differential equations, Amer. J. Math. 80 (1958), p. 16-36.

[3] S. O. Eidelman, Sur les solutions fondamentales des systèmes paraboliques (en russe), Math. Sbornik 38 (1956).

[4] T. Kato, Integration of the equation of evolution in a Banach space, J. Math. Soc. Japan 5 (1953), p. 208-234.

[5] J. Leray, Hyperbolic differential equations, Princeton, 1954.

[6] P. D. Lax, On Cauchy problem for hyperbolic equations and the differentiability of solutions of elliptic equations, Comm. Pure Appl. Math. 8 (1955), p. 615-633.

[7] S. Mizohata, Le problème de Cauchy pour les équations paraboliques, J. Math. Soc. Japan, 8 (1956), p. 269-299.

[8] S. Mizohata, Systèmes hyperboliques, J. Math. Soc. Japan 11 (1959), p. 205-233.

[9] S. Mizohata, Une note sur le traitement par les operateurs d'intégrale singulière du problème de Cauchy, J. Math. Soc. Japan 11 (1959), p. 234-240.

[10] I. Petrowsky, Über das Cauchysche Problem für ein System linearer partieller Differentialgleichungen im Gebiete der nichtanalytischen Funktionen, Bull. de L'Université d'Etat de Moscou. Fas. 7 (1937), p. 1-74.

[11] I. Petrowsky, Über das Cauchysche Problem für System von partieller Differentialgleichungen, Math. Sbornik 2 (1937), p. 815-866.

[12] I. Petrowsky, Quelques remarques sur mes travaux relatifs au problème de Cauchy (en russe), Math. Sbornik 39 (1956), p. 267-272.