J. Math. Kyoto Univ.
1-3 (1962) 379-384.

Les ensembles analytiques et les domaines

Par

Toshio NISHINO

(Communiqué par Prof. A. Kobori, le 5 mars, 1962)

---

1. Dans l'espace des n variables complexes $x_1, x_2, \cdots, x_n$, considérons un ensemble analytique[1] Σ. Supposons que Σ est irréductible et de dimension λ $(\lambda < n)$. Alors, on sait bien, grâce à *Weierstrass*, le théorème suivant:

Pour tout point P de Σ, en changeant le système de coordonnées à $(x'_1, x'_2, \cdots, x'_n)$ par une transformation linéaire convenable, on peut trouver un voisinage U de P de façon que Σ y s'exprime de la forme suivante:

$$x'_p = \xi_p(x'_1, x'_2, \cdots, x'_\lambda) \qquad p=\lambda+1, \lambda+2, \cdots, n,$$

où ξ_p sont des fonctions analytiques multiformes ou non dans un voisinage de la projection[2] de P sur l'espace des variables complexes $x'_1, x'_2, \cdots, x'_\lambda$.[3]

Dans la présente note, on démontre qu'il existe une infinité de transformations linéaires qui permettent, à tout point de Σ, l'expression donnée ci-dessus s'établit à la fois.[4] Il joue, je crois, un rôle fondamental dans les relations entre les ensembles analytiques et les domaines.

2. Une droite analytique qui passe par un point (x') dans l'espace (x) est exprimée en utilisant un paramètre complexe t par la

---

1) Un ensemble analytique est un ensemble des points qui sont exprimés localement par l'ensemble des zéros communs d'un nombre fini de fonctions holomorphes.

2) Pour un point $(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$ dans l'espace $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_\lambda^0)$ est dit la projection de $(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$ sur l'espace $(x_1, x_2, \cdots, x_\lambda)$.

3) cf., W. F. Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie II, 1929, p. 88.

4) Ce fait a indiqué dans le mémoire de Monsieur H. Grauert: Characterisierung der holomorph vollständigen komplexen Räume, 1955 (Math. Annalen).

forme suivante :

$$x_i = x'_i + a_i t \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

où (a) est un système de nombres complexes quelconques mais ne s'annulent pas à la fois, sera dit *une direction* de la droite. (a) et (a') expriment la même direction si et seulement s'il existe un nombre complexe α tel que $a'_i = \alpha a_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$, donc on peut supposer que (a) est un point dans un polycylindre fermé $A: |a_i| \leqq 1$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ de l'espace (a).

On suppose que $f(x)$ soit une fonction holomorphe dans un polycylindre $|x_i| < 2r_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ de l'espace (x), où r_i désignent des nombres positifs, et que S soit une surface analytique définie par l'équation $f(x)=0$ dans le polycylindre et que X soit un polycylindre fermé $|x_i| \leqq r_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$.

L'ensemble de toutes les directions des droites analytiques (precisement dit, quelconques de ses parties) qui sont contenues dans S et passent par un point au plus de X, est de la première catégorie au sens de Baire[5] *dans A.*

En effet, par une droite analytique $L: x_i = x'_i + a'_i t$, où $(x') \in X$, $(a') \in A$, formons une fonction $f(x'_i + a'_i t)$. Si et seulement si $L \subset S$, cette fonction s'annule identiquement par rapport à la variable t. Considéron-la comme une fonction des $2n+1$ variables complexes (x), (a) et t et désignons-la par $F(x, a, t)$, où la prime s'omettre pour simplifier l'écriture. Soit T un cercle $|t| \leqq r_0$ sur le plan t, où $r_0 = min(r_1, r_2, \cdots, r_n)$, F est holomorphe dans le polycilindre (X, A, T) et s'exprime comme suivante :

$$F(x, a, t) = \alpha_0(x, a) + \alpha_1(x, a)t + \alpha_2(x, a)t^2 + \cdots$$

où $\alpha_i(x, a)$ sont des fonctions holomorphes dans le polycylindre (X, A). Soit Σ l'ensemble de tous les zéros communs de $\alpha_i(x, a)$ $(i=0, 1, 2, \cdots)$ dans (X, A), il est un ensemble analytique dans (X, A) ; soit σ la projection de Σ dans l'espace (a).

Or supposons, par absurde, que σ contient un ouvert $\mathfrak{a}$ dans A. On peut d'abord supposer sans restreindre la généralité qu'il y a un composant irréductible de Σ, que l'on désigne par Σ', tel que

5) cf., R. Baire, Leçons sur les fonctions discontinues.

sa projection σ' contienne $\mathfrak{a}$ (si nécessaire, diminuant $\mathfrak{a}$) ; soit $n+r$ la dimension[6] de Σ' ; évidement $0 \leqq r < n$.

En considérant généralement, soit Σ^* un ensemble analytique irréductible dans le polycylindre (X, Y), dont X et Y étant deux polycylindres dans l'espace des variables complexes $x_1, x_2, \cdots, x_n$ et celui des $y_1, y_2, \cdots, y_m$. Alors, grâce à *Weierstrass* on a : si, pour tout point (y^0) dans Y, la section de Σ^* par un plan analytique $y_i = y_i^0$ $(i=1, 2, \cdots, m)$ est toujours de dimension $\geqq p$, et celle de la plus petite est exactement p, Σ^* est de dimension $m+p$.

D'où, dans le cas actuel, prenant un point (a^0) convenable dans $\mathfrak{a}$, la section de Σ' par un plan analytique $a_i = a_i^0$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ est de dimension r. On peut donc trouver un point (x^0, a^0) dans la section tel que Σ' soit exprimé dans un voisinage suffisamment petit de (x^0, a^0) (si nécessaire, faisant la transformation linéaire convenable dans l'espace (x)) par la forme suivante :

$$x_p = \xi_p(x_1, \cdots, x_r ; a_1, \cdots, a_n) \qquad p = r+1,\ r+2, \cdots, n$$

où ξ_p sont généralement des fonctions analytiques multiformes de $x_1, x_2, \cdots, x_r$ et (a), mais traçant un voisinage δ dans la partie où tout ξ_p sont définies de manière que tout ξ_p n'a aucun point critique dans δ et choisissant leurs déterminations convenables on regarde que ξ_p sont des fonctions holomorphes dans δ.

Considérons n fonctions des $r+n+1$ variables complexes,

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + a_1 t \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_r &= x_r + a_r t \\ y_{r+1} &= \xi_{r+1}(x_1, \cdots, x_r, a_1, \cdots, a_n) + a_{r+1} t \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n &= \xi_n(x_1, \cdots, x_r, a_1, \cdots, a_n) + a_n t\,. \end{aligned}$$

Elles satisfont évidement indépendent de t une relation $f=0$. Mais c'est impossible puisque la déterminante

6) Sur les terminologies concernant l'ensemble analytique voir, par exemple, R. Remmert et K. Stein, Über die wesentlichen Singularitäten analytischen Mengen, 1953 (Math. Annalen).

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial a_1}, & \cdots, & \dfrac{\partial y_1}{\partial a_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial y_n}{\partial a_1}, & \cdots, & \dfrac{\partial y_n}{\partial a_n} \end{vmatrix}$$

est un polynôme de t, tel que le coefficient de la plus haute puissance soit 1. C.Q.F.D.

D'après ce que nous avons vu, on a :

Soit $f(x)$ une fonction holomorphe dans un domaine fermé U, il existe alors une $(n-n)$-matrice non singulier T dont éléments étant des nombres complexes, de manière que quand on fait la transformation linéaire correspondante à T, $f(x)$ ne s'annule rien identiquement par rapport à la variable x_n dans l'espace nouveau. De plus, T est quelconque dans l'espace de $(n-n)$-matrices sauf un ensemble de la première catégorie au plus.

3. Théorème I. *Soit $\mathfrak{M}$ un ensemble analytique générale dans l'espace (x)*[7] *tel que tous les composants irréductibles soient de dimension λ $(0 \leqq \lambda < n)$. Alors il existe une $(n-n)$-matrice non singulière T dont éléments étant des nombres complexes, de manière que la section de $\mathfrak{M}$ par le plan analytique de la forme $x_i = a_i$ $(i=1, 2, \cdots, \lambda)$ sont toujours de dimension null dans l'espace nouveau quand on fait la transformation linéaire correspondante à T, pour tout point (a) dans l'espace des variables complexes $x_1, x_2, \cdots, x_\lambda$. De plus, T est quelconque dans l'espace de $(n-n)$-matrices sauf un ensemble de la première catégorie au plus.*

Nous allons démontrer ce théorème par la recurrence par rapport à la dimension de l'espace. Il est évidement vrai pour $n=1$. Soit U un domaine fermé dans l'espace (x) de dimension n et σ un ensemble analytique dans U définie par le zéro commune de nombre fini des fonctions $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_p(x)$, holomorphes dans U. Pour la démonstration il suffit de voir seulement tel ensemble puisqu'on peut regarder $\mathfrak{M}$ la somme d'une infinité dé-

7) Sous le mot "un ensemble analytique générale dans l'espace (x)" on entend un ensemble obtenue par la prolongement analytique d'un germe d'un ensemble analytique à l'espace (x) autant que possible.

nombrable de tels ensembles et la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles de première catégorie est aussi ainsi. Donc, si $\lambda = n-1$, il s'ensuit immédiatement de la proposition dans la section précédente.

Soit $\lambda < n-1$. D'abord prenons une matrice T qui satisfait au proposition dans la section précédente pour la fonction $f_p(x)$, et désignons la transformation par $(x') = T(x)^t$, mais continuons à servir les mêmes lettres pour les images de U et σ. Alors, grâce à *Weierstrass*, on peut dire que la projection σ' de σ dans l'espace des variables complexes $x'_1, x'_2, \cdots, x'_{n-1}$ est contenue dans la somme d'une infinité dénombrable au plus d'ensembles analytiques de dimension λ et pour tout point (b) de σ' il n'y a qu'un nombre fini de points $b^1_n, b^2_n, \cdots, b^r_n$ au plus tels que $(b, b^i_n) \in \sigma$ $(i=1, 2, \cdots, r)$. D'après l'hypothèse il y a une $(n-1, n-1)$-matrice S de manière que la section de σ' par le plan analytique de la forme $x''_i = a_i$ $(i=1, 2, \cdots, \lambda)$ sont toujours de dimension null quand on fait la transformation linéaire $(x''_1, x''_2, \cdots, x''_{n-1}) = S(x'_1, x'_2, \cdots, x'_{n-1})^t$, pour tout point (a) dans l'espace des variables complexes $x''_1, x''_2, \cdots, x''_\lambda$, donc il en est ainsi pour σ dans l'espace $(x''_1, x''_2, \cdots, x''_{n-1}, x'_n)$. Où T et S sont quelconques dans l'espace de $(n-n)$-matrices et celui de $(n-1, n-1)$-matrices sauf un ensemble de première catégorie au plus respectivement, donc ce théorème est démontré. C.Q.F.D.

Théorème II. *Soit $\mathfrak{N}$ un ensemble analytique générale dans l'espace projectif P^n de dimension n, dont le système de coordonnées homogènes étant $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$, tel que tous les composants irréductibles soient de dimension λ $(0 \leqq \lambda < n)$. Alors il existe une $(n+1, n+1)$-matrice non singulière T dont éléments étant des nombres complexes, de manière que la section de $\mathfrak{N}$ par le plan analytique de la forme $x_i = a_i$ $(i=0, 1, \cdots, \lambda)$ sont toujours de dimension null dans l'espace nouveau quand on fait la transformation linéaire de P^n correspondante à T, pour tout point (a) dans l'espace projectif de dimension λ où le système de coordonnées homogènes sont $(x_0, x_1, \cdots, x_\lambda)$. De plus, T est quelconque dans l'espace de $(n+1, n+1)$-matrices sauf un ensemble de la première catégorie au plus.*

En effet, il est évidement vrai pour $n=1$. Nous allons aussi le démontrer par la recurrence par rapport à n. Soit $\mathfrak{N}'$ la section de $\mathfrak{N}$ par un hyperplan $x_0=0$. On peut supposer, faisant une transformation linéaire de P^n, que $\mathfrak{N}'$ est de dimension $\lambda-1$ au plus, puisqu'il y a un hyperplan L: $b_0x_0+b_1x_1+\cdots+b_nx_n=0$ tel que $\mathfrak{N}\cap L$ soit de dimension $\lambda-1$ au plus.[8] Une matrice correspondante à cette transformation est quelconque dans l'espace de $(n+1, n+1)$-matrices sauf un ensemble de la première catégorie. Alors on peut regarder $\mathfrak{N}-\mathfrak{N}'$ un ensemble analytique générale de dimension λ dans l'espace des n variables complexes $x_1/x_0, x_2/x_0, \cdots, x_n/x_0$, et $\mathfrak{N}'$ celui de dimension $\lambda-1$ dans l'espace projectif P^{n-1} dont le système de coordonnées homogènes étant $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Donc d'après le théorème I et l'hypothèse on peut dire qu'il y a une $(n-n)$-matrice T tel que la transformation linéaire $(x_1', x_2', \cdots, x_n') = T(x_1, x_2, \cdots, x_n)^t$ ait la propriété cherchée. De plus, la dernière partie de ce théorème est évidement vraie. C.Q.F.D.

Université féminine de Nara

8) En effet, si l'intersection d'un plan $x_0=0$, $b_1x_1+\cdots+b_nx_n=0$ et $\mathfrak{N}$ est de dimension $\lambda-1$ on peut trouver un nombre complexe b_0 tel que l'intersection du plan $b_0x_0+b_1x_1+\cdots+b_nx_n=0$ et $\mathfrak{N}$ soit de dimension $\lambda-1$, et l'intersection d'un plan $x_0=\cdots=x_{n-r-1}=0$, $b_{n-r}x_{n-r}+\cdots+b_nx_n=0$ et $\mathfrak{N}$ est toujours de dimension $\lambda-1$.