J. Math. Kyoto Univ.
1-3 (1962) 357-377.

Sur les familles de surfaces analytiques

Par

Toshio NISHINO

(Communiqué par Prof. A. Kobori, le 5 mars, 1962)

Introduction. En 1926, *G. Julia*[1] a eu l'idée de considérer les familles formées de fonctions holomorphes de plusieurs variables, pour d'élucider complètement le sujet qu'un domaine dans lequel une fonction est holomorphe ou méromorphe est assujetti à curieuses restrictions, et a montré que l'ensemble de points où une famille de fonctions cesse d'être normale satisfait au théorème de la continuité tout comme la frontière naturelle d'une fonction holomorphe ou méromorphe. En 1931, *W. Saxer*[2] a adjouté qu'il en est de même pour les familles de fonctions méromorphes. Ensuite, en 1934, *K. Oka*[3] a introduit la notion de la famille et la normalité dans le champ des surfaces analytiques. Une famille (S) de surfaces analytiques dans un domaine de l'espace (x, y) est dite normale en un point du domaine, si l'on peut trouver un voisinage du point suffisamment petit pour que l'on puisse choisir une famille de fonctions adjointes holomorphes de la famille (S) dans ce voisinage soit normale et de plus qu'il n'y ait pas de constant zéro parmi les fonctions limites. Une surface analytique dans l'espace (x, y), étant une variété de deux dimensions (réelle), a toujours l'aire d'elle-même. Dans cette circonstance, *K. Oka* a

---

1) G. Julia, Sur les familles de fonctions analytiques de plusieurs variables (Acta Mathematica).

2) W. Saxer, Sur les familles de fonctions méromorphes de plusieurs variables (C.R., Paris).

3) K. Oka, Note sur les familles de fonctions analytiques multiformes etc. (Journal of Science of the Hiroshima Univ.). Malgré la note au bas de la page, "Les détails seront publiés tout prochainement" les démonstrations des théorèmes qui sont indiqués dans cette note n'a pas été publié jusqu'ici,

indiqué que *pour qu'une famille* (S) *de surfaces analytiques dans un domaine de l'espace* (x, y) *soit normal au point* p *du domaine, il faut et il suffit que la famille* (S) *soit bornée en l'aire au voisinage de* p. Il a de plus montré, comme développement de la théorie de G. Julia, que *l'ensemble de tous les points où une famille de surfaces analytiques cesse d'être normale aussi satisfait au théorème de la continuité.* C'est à démontrer complètement ces résultats et à faire les avancer quelque peu que le present mémoire est destiné. Nous traitons le sur la variété analytique de deux dimensions bien que nous nous servons les terminologies générales.

1. Sruface analytique. Soit $\mathfrak{M}$ une variété analytique complexe de deux dimensions[4]. Pour tout point p de la variété $\mathfrak{M}$ il correspond un connexe ouvert $\mathfrak{V}$ sur $\mathfrak{M}$ qui est homéomorphe à un dicylindre autour de l'origine dans l'espace des deux variables complexes x, y de manière que le point p correspond à l'origine par cet homéomorphisme. Les coordonnées d'un point de l'espace (x, y) sont *un système de coordonnées locales en* p; $\mathfrak{V}$ s'appelle *un voisinage des coordonnées en* p. On employera dans la suite les mêmes lettres et les mêmes mots pour deux choses qui correspondent par la homéomorphisme l'un l'autre à moins qu'il ne fasse ambïguité. Un connexe ouvert sur la variété $\mathfrak{M}$ sera dit généralement *un domaine sur* $\mathfrak{M}$. Une fonction continue $f(p)$ dans un domaine Δ sur $\mathfrak{M}$ à valeurs numériques complexes et univoque est appelé *une fonction holomorphe dans* Δ, si elle est holomorphe par rapport au système de coordonnées locales en tout point de Δ au sens usuel.

On appelle l'ensemble S de points dans un domaine Δ sur $\mathfrak{M}$ *une surface analytique dans* Δ, si pour tout point p' de Δ, il existe un voisinage U du point p' et une fonction $f(p)$ holomorphe dans U de façon que $S \cap U$ est déterminé par l'équation $f(p)=0$; on dit, pour abréger, la fonction $f(p)$ *une fonction adjointe holomorphe* de la surface analytique S dans un domaine U.

Soit S une surface analytique dans un domaine Δ sur $\mathfrak{M}$. On dit que S est *réductible dans* Δ, s'il y a deux surfaces analy-

4) Nous supposons dans ce mémoire qu'elle est réunion dénombrable de compacts.

tiques différentes non vides S_1 et S_2 telles que $S=S_1\cup S_2$ dans Δ. Au cas contraire, on dit que S est *irréductible dans* Δ. Pour une surface irréductible, on peut uniquement déterminer son ordre de zéro. On dit brievement cet ordre *sa ordre.* S s'appelle *irréductible en point* p s'il y a un voisinage U de p tel que $S\cap U$ soit irréductible dans U.

Soit (x, y) un système de coordonnées locales en point p du domaine Δ, et $\mathfrak{B}$ le voisinage de ces coordonnées, et soit Γ un dicylindre de la forme $|x|\leqq r$, $|y|\leqq r'$ situé dans $\mathfrak{B}\cap\Delta$, dont r, r' sont des nombres réels positifs suffisamment petits. Alors, grâce à *Cousin*[5], on peut dire qu'il existe toujours une fonction adjointe holomorphe d'une surface analytique quelconque S dans Γ. D'après *Weierstrass*, nous savons donc que la partie de S située dans Γ consiste d'un nombre fini d'éléments qui sont aussi des surfaces analytiques et irréductibles dans Γ avec leur ordre, et on peut le représenter, en négligeant leur ordre, ou bien par une équation de la forme $y=f(x)$, dont $f(x)$ est une fonction analytique multiforme ou non de la variable x qui peut être une constante, ou bien par $x=$constant: cette élément s'appelle *un composant analytique local de S dans* Γ.

Toute partie d'une surface analytique S dans Δ est appelée *un composant analytique dans* Δ si elle est aussi une surface analytique et irréductible dans Δ. On dira qu'une famille de surfaces analytiques *s'accumule elle-même dans* Δ si l'on peut extraire des points de chaque surface analytique de la famille de manière que l'ensemble des points a au moins un point limite dans Δ. On peut alors dire qu' *une surface analytique* dans Δ *est une famille de surfaces irréductibles dans* Δ *avec leur ordre d'un nombre dénombrable quelconque qui ne s'accumule pas elle-même dans* Δ.

2. Famille normale et Critérium. Considérons une famille (S) de surfaces analytiques dans un domaine Δ sur une variété analytique $\mathfrak{M}$. Soit Γ un dicylindre comme l'on l'explique dans la section précédente. On peut former, pour la famille (S), une famille de fonctions adjointes holomorphes des toutes surfaces analytiques

5) P. Cousin, Sur les fonction de n variables complexes, 1895 (Acta Mathematica).

appartenants à la famille (S) dans Γ comme on a remarqué déja. Elle sera dit *une famille de fonctions adjointes holomorphes de la famille* (S) *dans* Γ.

On dit qu'une famille de surfaces analytiques (S) dans Δ est *normale en un point* p *du* Δ, avec *K. Oka*[6], si l'on peut trouver un voisinage ω du point p suffisamment petit que l'on puisse tellement choisir une famille de fonctions adjointes holomorphes de la famille (S) dans ω qu'elle soit normale au sens de *Julia*[7] et de plus qu'il n'y ait pas de constante zéro parmi les fonctions limites. La famille (S) s'appelle *normale dans un domaine* Δ si elle est normale en tout point du domaine. Si un point dans Δ n'appartient pas à l'ensemble des points limites de la famille (S), la famille est normale en ce point d'après le mode de la définition.

D'où et d'après *Julia*[8], on a : *soit une famille* (S) *de surfaces analytiques normale dans* Δ, *on peut extraire, de toute suite infinite de surfaces analytiques appartenants à cette famille, une suite partielle de façon que l'ensemble des points limites*[9] S_0 *de la suite définit une nouvelle surface analytique dans* Δ.

En effet, pour tout point p de Δ, il correspond un voisinage U de p de telle manière que l'on peut choisir tellement la famille de fonctions adjointes holomorphes de (S) qu'elle soit normale dans ce voisinage U et n'ait pas de constante zéro parmi les fonctions limites, c'est pour cela que, d'après le théorème de *Borel-Lebesgue*, on peut recouvrir tout domaine avec une infinité dénombrable au plus des voisinages ; et dénotons les par $U_1, U_2, U_3, \cdots$. Choisissons comme ci-dessus dans chaque voisinage U_i la famille de fonctions et la dénotons par (F^i). Considérons une suite infinie

$$S_1,\ S_2,\ S_3, \cdots,$$

de surfaces analytiques appartenantes à la famille (S).

---

6) loc. cit.

7), 8) loc. cit.

9) Cela veut dire qu'au voisinage de tout point de S_0 il y aura, des que n surpasse un certain rang N, des points de tous les surfaces appartenants à la suite.

D'abord, on peut en extraine une suite partielle

$$S_1^1,\ S_2^1,\ S_3^1,\ \cdots$$

de façon que leurs fonctions adjointes dans U_1: F_1^1, F_2^1, F_3^1, $\cdots$ convergent uniformément dans U_1 vers une fonction holomorphe non identiquement nulle, et dénotons la fonction par Φ_1. De celle-ci on peut en extraine une autre suite partielle

$$S_1^2,\ S_2^2,\ S_3^2,\ \cdots$$

de façon que leurs fonctions adjointes dans U_2: F_1^2, F_2^2, F_3^2, $\cdots$ convergent uniformément dans U_2 vers une fonction holomorphe non identiquement nulle, et dénotons la fonction par Φ_2. En continuant ce procédé on obtient une suite de surfaces analytiques

$$S_1^i,\ S_2^i,\ S_3^i,\ \cdots\ ,$$

une suite de fonctions adjoites dans U_i: F_1^i, F_2^i, F_3^i, $\cdots$, et une fonction limite Φ_i holomophe et non identiquement nulle dans U_i. Le processus sera continue indéfiniment. Il est clair que $\Phi_i=0$ $(i=1, 2, 3, \cdots)$ dans U_i définit une surface analytique nouvelle dans Δ, et la désignons par S_0.

On prend la suite diagonale

$$S_1^1,\ S_2^2,\ S_3^3,\ \cdots$$

et on peut dire que cette suite a S_0 comme une et une seule limite puisque la suite de fonctions adjointes de la suite est une suite partielle de la suite F_1^i, F_2^i, F_3^i, $\cdots$ dans chaque voisinage U_i, donc elles convergent aussi uniformément vers Φ_i dans U_i ; d'après *Julia*[10], la suite diagonale a S_0 comme une et une seule limite U_i. Ceci étant vrai pour tout i quel qu'il soit, la propriété est donc démontrée complètement. C.Q.F.D.

Pour obtenir le critérium qui permet d'affirmer qu'une famille de fonctions holomorphes soit normale et il n'y ait pas de constant zéro parmi les fonctions limites, nous considérons la moyenne logarithmique comme suivante. Soit $f(x, y)$ une fonction holomorphe dans un dicylindre fermé Γ de la forme $|x-a|\leqq r$,

10) loc. cit. voir page 62.

$|y-b| \leqq r'$, r, r' étant des nombres réels positifs. On dira que la valeur

$$\frac{1}{V}\int_{\Gamma} log\,|f(x, y)|\,dv$$

la moyenne logarithmique de $f(x, y)$ *dans* Γ, où V est un volume de Γ et dv un élément de volume dans l'espace des variables x, y. Nous la désignons par $A_{\Gamma}[f(x, y)]$.

Si $f(x, y) = f_1(x, y)\cdot f_2(x, y)$, il est évident que l'on a
$$A_{\Gamma}[f(x, y)] = A_{\Gamma}[f_1(x, y)] + A_{\Gamma}[f_2(x, y)]\,.$$

Étant donnée une famille (S) *de surfaces analytiques dans un domaine* Δ *sur* $\mathfrak{M}$. *Pour que* (S) *soit normale au point* p_0 *de* Δ, *il suffit, prenant un système de coordonnées locales* (x, y) *quelconque à* p_0 *at* $\mathfrak{V}$ *étant un voisinage de cette coordonnées locales, que l'on peut trouver une famille* $(f(x, y))$ *de fonctions adjointes holomorphes de la famille* (S) *dans un voisinage* ω *de* p_0, *qui se trouve dans* $\Delta \cap \mathfrak{V}$, *suffisamment petit, de façon que, pour tout dicylindre* Γ *situé dans* ω *de la forme* $|x-a| \leqq r$, $|y-b| \leqq r'$, *dont* (a, b) *est un point qui est suffisamment voisin de* p_0 *mains d'ailleurs quelconque dans* ω *et* r, r' *sont des nombres réels positifs, fixés et suffisamment petits, les moyennes logarithmiques* $A_{\Gamma}[f(x, y)]$ *dans le dicylindre* Γ *soient toujours bornées pour la famille* $(f(x, y))$.

En effet, soit $(f(x, y))$ une de la famille de fonctions adjointes holomorphes dans ω qui satisfait au condition ci-dessus. Il est évident qu'il n'y a pas de constante zéro parmi les fonctions limites de la famille $(f(x, y))$. Supposons, par absurde, que $(f(x, y))$ n'est pas normale en p_0. D'après le théorème bien connu de la famille normale, dans tout voisinage de p_0 les modules $|f(x, y)|$ ne soient pas bornés pour la famille $(f(x, y))$. Écrivons un dicylindre Γ de la forme $|x-a| \leqq r$, $|y-b| \leqq r'$ dans ω. La moyenne logarithmique $A_{\Gamma}[f(x, y)]$ est calculée par l'intégrale suivante,

$$\frac{1}{V}\iiiint_{\Gamma} log\,|f(a+\rho_1 e^{i\theta_1},\ b+\rho_0 e^{i\theta_2})|\cdot\rho_1\rho_2 d\rho_1 d\rho_2 d\theta_1 d\theta_2$$

où $x=a+\rho_1 e^{i\theta_1}$, $y=b+\rho_2 e^{i\theta_2}$, (i signifiant l'unité imaginaire) et V

est le volume de Γ. La fonction $log\,|f(x, y)|$ étant plurisousharmonique[11], on a facilement

$$A_\Gamma[f(x, y)] \geqq log\,|f(a, b)|\,.$$

Ceci contredit à l'hypothése puisque $|f(a, b)|$ n'est pas borné supérieurement pour la famille $(f(x, y))$, donc ce proposition est démontré. C.Q.F.D.

Remarque. La condition donnée ci-dessus est aussi nécessaire. On le verra plus tard. De plus, il n'est pas suffisant pour décider si la famille (S) soit normale, d'estimer la borne des moyennes logarithmiques dans un dicylindre autour de p_0 seulement.

3. Fonction adjointe holomorphe. Dans ce qui suit nous considérons toujours l'espace des deux variables x, y. Étant donnée une surface analytique S dans un dicylindre fermé (γ_1, γ_2) de la forme $|x| \leqq \rho_1$, $|y| \leqq \rho_2$. Nous allons déterminer une manière de la construction de fonction adjointe holomorphe dans le dicylindre (γ_1', γ_2') situé dans l'intérieur de (γ_1, γ_2) de la forme $|x| \leqq \rho_1'$, $|y| \leqq \rho_2'$, dont $\rho_1' < \rho_1$, $\rho_2' < \rho_2$, grâce à la méthode de *Cousin* pour l'èvaluation de sa moyenne logarithmique que l'on exprime dans la section précédente.

Commençons par le cas où S consiste en une seule composant d'ordre 1 de la forme $y = f_0(x)$, dont $f_0(x)$ est une fonction analytique de x multiforme ou non. Nous la dénotons par S_0.

Soit R_0 une partie de la surface de *Riemann* de la fonction $f_0(x)$ sur le plan d'une variable x limité par des courbes $|x| = \rho_1$ et $|f_0(x)| = \rho_2$. d est la moitié de la différence de ρ_2 et ρ_2', et I l'intervalle $(\rho_2 - d, \rho_2)$ à nombres réels. Soit l_0 une courbe sur R_0 définie par $|f_0(x)| = \rho_0$, dont ρ_0 est un nombre de l'intervalle I que nous pourrons, l_0 ne passant par aucun point critique de R_0, déterminer plus tard. Elle se compose d'un nombre fini de courbes de

11) On dit qu'une fontion réelle et univoque $\varphi(x, y)$ est, dans un domaine D de l'espace des variables complexes x, y, une function plurisousharmonique, si elle satisfait aux conditions suivantes: 1°. $e^{\varphi(x,y)}$ est fini et semi-continu supérieurement par rapport à x, y dans D, 2°. sur tout plan analytique L passant par un point de D, $\varphi(x, y)$ est une fonction subharmonique de x ou de y sur la portion de L dans D. Fonction pseudoconvexe, d'après K. Oka. Voir, K. Oka, Memoire VI, 1942 (Tohoku Mathematical Journal).

Jordan simples sur R_0 partant celle qui est sur $|x|=\rho_1$, jusqu'à celle qui est sur ceci, si elle existe. Les projections de la courbe l_0 dans le plan x réparte γ_1 à un nombre fini de parties, et nous les désignons par $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_\mu$, où μ est un nombre entier positif peut être l, si l_0 n'existe pas. Considérons les parties de S_0 sur γ_1, et soient $P_1, P_2, \cdots, P_{\nu_1}$ les points de R_0 sur un même point x dans δ_1, où ν_1 est un nombre des feuilles de R_0 sur δ_1.

Formons une fonction

$$\Phi_1 = [y-f_0(P_1)] \cdots [y-f_0(P_{\nu_1})]\,.$$

Φ_1 est évidemment une fonction holomorphe dans le domaine cylindrique (δ_1, γ_2) : $x\in\delta_1$, $y\in\gamma_2$ et sa frontiére. Si $\mu=1$. on choit cette fonction comme la fonction adjointe holomorphe de S_0 dans (γ_1', γ_2'). Si non, on forme de même façon la fonction Φ_j comme ci-dessus pour tout δ_j, $j=1, 2, \cdots, \mu$.

Délimitant des variables x, y dans le dicylindre (γ_1', γ_2'), ces fonctions satisfont mutuellement la condition d'équivalence par rapport à produit[12] et on a donc un deuxième problème de Cousin. Alors considérons l'intégrale de *Cousin* comme d'habitude, il est évident que cette intégrale se reduit à la forme suivante

$$\Psi_j = \frac{1}{2\pi i}\int_{l_0} \frac{\log[y-f_0(\zeta)]}{\zeta - x}d\zeta \qquad \begin{array}{l} x\in\delta_j\cap\gamma_1' = \delta_j' \\ y\in\gamma_2' \end{array}$$

où l'intégrale étant prisse suivant toutes les courbes l_0 sur R_0 à direction que $f(\zeta)$ décrit la circonférence $|y|=\rho_0$ au sens positif.

Formons une fonction

$$F_0 = \Phi_j e^{\Psi_j} \qquad x\in\delta_j',\ y\in\gamma_2'\,.$$

C'est certainement une fonction adjointe holomorphe de S_0 dans (γ_1', γ_2').

Il s'agit du cas géneral. Supposons que S soit consists actuellement par n composants S_i de la forme $y=f_i(x)$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ dont $f_i(x)$ sont des fonctions analytiques de x multiformes ou non, et

12) Cela veut dire que Φ_i/Φ_j est une fonction holomorphe qui ne prend jamais la valeur zéro à la frontière commune de δ_i et δ_j pour tout paire si δ_i est contigu à δ_j. Voir, K. Oka, Memoire III, 1939 (Journal of Science of the Hiroshima University).

m composants T_j de la forme $x=a_j$ $(j=1, 2, \cdots, m)$, a_j étant des points de γ_2; de plus l'ordre de S_i est e_i et celui de T_j est d_j, dont e_i et d_j sont des nombres entiers positifs quelconques. Pour tout composant S_i on forme des fonctions adjointes holomorphes comme ci-dessus, et les dénote par $F_i(x, y)$.

Alors on choit comme la fonction adjointe holomorphe de S dans (γ_1', γ_2') une fonction de la forme suivante

$$F(x, y) = (x-a_1)^{d_1} \cdots (x-a_m)^{d_m} [F_1(x, y)]^{e_1} \cdot \cdots \cdot [F_n(x, y)]^{e_n}.$$

4. Évaluation. On fait l'usage de même mot que dans la section précédente. À nouveau, sous le mot *une projection d'une surface analytique S^* dans un domaine D sur le plan d'une variable x*, on entend par soit la partie de la surface de *Riemann* de la fonction $f(x)$ correspondant à S^* si S^* est représenté par l'équation $y=f(x)$, où $f(x)$ est une fonction analytique de x, soit le point a si S^* est représenté par $x=a$, soit la réunion de la projection de ces composants si S^* se compose de la réunion des quelque composants comme ci-dessus. De plus, si l'ordre d'un composant de S^* est e, on dit que la projection de S^* contient la projection de ce composant e fois. On peut de la même façon déterminer la projection de la surface analytique S^* sur le plan d'une variable y par la représentation de S^* de la forme $x=g(y)$, dont $g(y)$ est une fonction analytique de y, ou $y=b$. Ces projections sont naturellement les espaces métriques au sens usuel. Nous allone évaluer la moyenne logarithmique de la fonction $F(x, y)$ dans la section précédente adjointe de S avec l'aire totale des projections de S sur le plan x et celle sur le plan y.

Commençons, comme précédent, par le cas où S consiste en un seul composant S_0 d'ordre 1; et dénotons respectivement les projections de S_0 sur le plan x et le plan y par σ_x^0 et σ_y^0.

Supposons que l'aire de σ_x^0 et celle de σ_y^0 soient l'un et l'autre plus petites qu'un certain nombre positif M. Alors la moyenne logarithmique de la fonction $F_0(x, y)$ dans un dicylindre Γ_0: (γ_1^0, γ_2^0) situé dans le dicylindre (γ_1', γ_2') de la forme $|x-a| \leqq \varepsilon_1$, $|y-b| \leqq \varepsilon_2$, dont (a, b) est un point qui est suffisamment voision de l'origine mais *d'ailleurs quelconque dans* (γ_1', γ_2') *et* ε_1, ε_2 *sont des nombres réels positifs, fixés et suffisamment petits, est toujours plus petite que* $K(M)$, $K(M)$ *étant une constante positive et indépendente de* S_0.

En effect, on peut montre, d'abord, qu'il existe une infinité de nombres ρ dans l'intervalle I, pour lesquels la longuer totale des courbes $|f_0(x)|=\rho$ sur σ_x^0 et des courbes $|y|=\rho$ sur σ_y^0 sont plus petits que $K_1 \cdot M$ et $K_2 \cdot M$ respectivement, K_1 et K_1 étant des constantes positives indépendentes de S_0. Un ensemble de tous les nombres ρ dans I pour que la longueur totale des courbes $|y|=\rho$ sur σ_y^0 soit plus grande que $3M/d$ n'est jamais plus grand que $d/3$ en mesure linéaire, puisque l'aire de σ_y^0 est plus petite que M; et désignons l'ensemble de tels nombres par τ. Ensuite, soit $g_0(y)$ la fonction inverse de $f_0(x)$[13], un ensemble de tous les nombres ρ dans I pour que la valeur d'intégrale linéaire de la fonction $|g_0'(y)|^2$, où $g_0'(y)$ est la dérivée de $g_0(y)$, prise le long de toutes les courbes $|y|=\rho$ sur σ_y^0 soit plus grand que $3M/d$ n'est jamais plus grand que $d/3$ en mesure linéaire, puisque l'intégrale double de la fonction $|g_0'(y)|^2$ dans une partie α sur σ_y^0 est l'aire de la partie sur σ_x^0 correspondant à α par l'équation $x=g_0(y)$ et elle est donc plus petite que M; et désignons l'ensemble de tels nombres par τ'. Il y a donc certainement une infinité de nombres ρ qui n'appartient pas aux deux ensembles τ et τ' à la fois, et pour tel nombre, la longueur total de courbes $|f(x)|=\rho$ sur σ_x^0 est plus petite que $6M/d$ car ceci est calculé par l'intégrale linéaire de la fonction $|g'(y)|$ pris long toutes les courbes $|y|=\rho$ sur σ_y^0. Dénotons $6/d$ par K_1 et $3/d$ par K_2. Cette propriété est donc démontré.

Soit ρ_0 un nombre de I qui satisfait aux conditions indiquées et pour quoi les courbes $|f(x)|=\rho_0$ sur σ_x^0 ne passe aucune points critiques de σ_x^0. Il est possible certainement puisqu'il existe qu'un nombre fini de points critiques de σ_x^0 au plus. Dénotons cette courbe par l_0 et une courbe $|y|=\rho_0$ sur σ_y^0 par l_0'. Alors choisissant une détermination de la fonction logarithmique convenablement, autant que $x\in l_0$ et $y\in\gamma_2'$, on peut avoir toujours

13) Autrement dit, S_0 est représenté par l'équation $x=g_0(y)$. De plus, si $f_0(x)$ est constant, on n'a pas besoin de faire cette raisonnement.

$$|log\,(y-f(x))|\leqq K_3 \cdot M+K_4$$

où $K_3=K_2/2\pi\rho_0$ et $K_4=max\,[|log\,d|,\ |log\,2\rho_2|]$.

Or traçons un dicylindre Γ_0: $(\gamma_1^0,\ \gamma_2^0)$ de la forme $|x-a|\leqq\varepsilon_1$, $|y-b|\leqq\varepsilon_2$, dont (a, b) est un point dans le dicylindre $(\gamma_1',\ \gamma_2')$ et, ε_1, ε_2 sont des nombres positifs suffisamment petits, situé dans le dicylindre $(\gamma_1',\ \gamma_2')$, mais d'ailleur quelconque.

Il s'agit maintenant de la moyenne logarithmique $A_{\Gamma_0}[F_0(x, y)]$. Rappelons la fonction $F_0(x, y)$ dans la section précédente. On a évidement

$$log|\Phi_j| - |\Psi_j| \leqq log|F_0(x, y)| \leqq log|\Phi_j| + |\Psi_j| \qquad x\in\delta_j'$$

et par une calcul d'intégral on a facilement

$$-\frac{2M}{\pi e\varepsilon_1^2\varepsilon_2}\leqq\frac{1}{V}\sum_j\int\limits_{(\delta_j\gamma_2^0)} log|\Phi_j(x, y)|\,dv\leqq\frac{M}{\pi\varepsilon_1^2}\,log 2\rho_2$$

$$\frac{1}{V}\sum_j\int\limits_{(\delta_j\gamma_2^0)}|\Psi_j(x, y)|\,dv\leqq\frac{1}{\varepsilon_1}2K_1K_4M+\frac{1}{\varepsilon_1}2K_1K_3M^2 \text{ [14]}$$

où V est un volume du dicylindre $(\gamma_1^0,\ \gamma_2^0)$ et dv est un élément de volume dans l'espace (x, y). D'où on a

$$|A_{\rho_0}[F_0(x, y)]|<B_1M+B_2M^2$$

où $B_1=2K_1K_4/\varepsilon_1+log\,2\rho_2/\pi\varepsilon_1^2+2/e\pi\varepsilon_1^2\varepsilon_2$, et $B_2=2K_1K_3/\varepsilon_1$. Dénotons le deuxième membre de cette inégalité par $K(M)$, cette propriété est donc démontrée. C.Q.F.D.

Remarquons d'ailleurs que un nombre $K(M)$ satisfait comme une fonction de M à la condition suivante :

$$K(M_1)+K(M_2)\leqq K(M_1+M_2)\,.$$

---

14) Écrivons un cercle γ autour de l'origine sur le plan x, $x=x_1+ix_2$, de rayon ρ et soit ζ un point quelconque de γ. De plus écrivons autre cercle γ_0 de la forme $|x-\zeta|\leqq\varepsilon$ dans γ, alors on a

$$\frac{\pi\varepsilon^2}{2\rho}\leqq\iint\limits_{\gamma_0}\frac{1}{|x-\zeta|}\,dx_1dx_2\leqq 2\pi\varepsilon\,,$$

$$-\frac{2\pi\varepsilon}{e}\leqq\iint\limits_{\gamma_0} log\,|x-\zeta|\,dx_1dx_2\leqq\pi\varepsilon^2\,log\,2\rho\,,$$

dont $e=2.718\cdots$.

On peut la démontrer facilement par la formule concrète de $K(M)$, puisque, pour le raisonnement ci-dessus, il n'est pas necéssaire que σ_x^0 et σ_y^0 soient toujours connexe.

Ensuite, on a, pour le composant T_j de la forme $x=a_j$

$$|A_{\Gamma_0}[x-a_j]|<K^*$$

où $K^*=max\,[2/e\varepsilon_1,\ |log\,2\rho_1|]$ par un calcul d'intégral.

Or il s'agit du cas générale.

Supposons que deux aires totales des projections de S sur le plan x et le plan y sont l'un et l'autre plus petites qu'un nombre positif quelconque M. Alors la moyenne logarithmique de $F(x, y)$ dans un dicylindre (γ_1^0, γ_2^0) ci-dessus est plus petite qu'un nombre positif qui est indépendent de S.

En effet, on sais d'abord que le nombre de composantes T_j de la forme $x=a_j$ avec leur ordre d_j est borné par un nombre N supérieurement indépendent de S, car l'aire de sa projection sur le plan y est $\pi\rho_2^2$. Soit M_i le plus grand nombre entre l'aires des projection de S_i sur le plan x et le plan y, alors on a

$$\sum e_i M_i \leqq 2M$$

dont e_i sont des ordre de S_i. D'après ce qui précède, on a

$$\begin{aligned} A_{\Gamma_0}[F(x, y)] &= \sum d_j A_{\Gamma_0}[x-a_j] + \sum e_i A_{\Gamma_0}[F_i(x, y)] \\ &\leqq N\cdot K^* + K[2M] \end{aligned}$$

Donc cette propriété est démontré. C.Q.F.D.

5. L'aire de surface analytique. Considérons dans l'espace des quatre variables réeles x_1, x_2, x_3, et x_4 une surface T de deux dimensions représentée par l'équation $x_i=\varphi_i(u, v)$ $(i=1, 2, 3, 4)$, où $\varphi_i(u, v)$ sont des fonctions continues admettants des dérivées aux partielles du premier ordre continues dans un domaine D sur le plan (u, v). On sait bien que l'aire de la surface T s'exprime par l'intégrale double suivant,

$$\iint_D \sqrt{EG-F^2}\,dudv$$

où $E=\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{\partial x_i}{\partial u}\right)^2$, $F=\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{\partial x_i}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial x_i}{\partial v}\right)$, $G=\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{\partial x_i}{\partial v}\right)^2$.

Soit maintenant S une surface analytique dans l'espace des deux variables complexes x et y représenté par l'équation $y=f(x)$, d'après l'équations de *Cauchy-Riemann*, on voit facilement que l'intégrale-ci se reduit en une forme suivante

$$\iint_D [1+|f'(x)|^2]\,dx_1dx_2 \qquad x=x_1+ix_2$$

où $f(x)$ est une fonction holomorphe dans un domaine D sur le plan d'une variable x et $f'(x)$ est sa dérivée.

Il signifie que l'aire de la surface analytique S soit la samme de l'aire du domaine D et celle du domaine correspondant à D par l'équation $y=f(x)$ sur le plan d'une variable y, autrement dit la somme de l'aire de deux projections de la surface analytique S sur le plan x et le plan y. On a donc en général une proposition suivante :

Soit S une surface analytique dans un domaine de l'espace (x, y). L'aire de S est la somme de deux aires des projections au sens de la section précédente sur le plan x et le plan y[15].

De cette proposition, on a facilement quelques résultats comme suivant.

Soit $F(x, y)$ une fonction holomorphe dans le domaine fermé de l'espace (x, y) et soit S une surface analytique dans le domaine défini par l'équation $F(x, y)=0$. Alors la projection de S sur le plan x se compose d'une surface de *Riemann* qui est finie en nombre de la feuille et nombre fini de points ; et la projection de S sur le plan y l'est aussi ; on a donc.

L'aire de la surface analytique de la forme $F(x, y)=0$ dans l'intérieur du domaine d'holomorphie de $F(x, y)$ est toujours finie.

Considérons une suite de fonctions holomorphes

$$f_1(x),\quad f_2(x),\quad f_3(x), \cdots$$

15) Cette propriété est indiquée par K. Oka.

dans un domaine fermé D sur le plan x convergant uniformément dans D vers une fonction $f_0(x)$ et soient S_i $(i=0, 1, 2, \cdots)$, les surfaces analytiques définies par les équations $y=f_i(x)$ $(i=0, 1, 2, \cdots)$. Alors la suite des dérivées

$$f_1'(x)\,,\quad f_2'(x)\,,\quad f_3'(x)\,, \cdots\,,$$

comme on sait bien, aussi converge uniformément vers dérivée $f_0'(x)$, on a donc:

La suite de nombres réels qui sont les aires des surfaces analytiques S_i $(i=1, 2, 3, \cdots)$ converge vers celui de S_0.

Considérons la suite de fonctions

$$F_1(x, y)\,,\quad F_2(x, y)\,,\quad F_3(x, y)\,, \cdots\,,$$

qui sont holomorphes à l'origine de l'espace (x, y), et convergent uniformément vers une fonction $F_0(x, y)$ dans $|x|\leqq\varepsilon$, $|y|\leqq\varepsilon'$, où $\varepsilon, \varepsilon'$ sont des nombres positifs; de plus pour tout ξ, $|\xi|\leqq\varepsilon$ la surface analytique qui est définie par l'équation $F_0(x, y)=0$ a un et un seul point (ξ, η) dont $|\eta|\leqq\varepsilon'$. Dans ces circonstances, d'après *Julia*[16], on a:

Il existe un nombre entier positif N tel que les surfaces analytiques définies par les équation $F_i(x, y)=0$ pour tout $i\geqq N$ satisfont les mêmes conditions que S. et la suite de fonctions $\eta=\varphi_i(\xi)$ s'obtient de $F_i(x, y)=0$ converge vers la fonction s'obtient de $F_0(x, y)=0$ uniformément dans $|\xi|\leqq\varepsilon$.

En combinant ces deux résultats on a facilement:

Soient

$$F_1(x, y)\,,\quad F_2(x, y)\,,\quad F_3(x, y)\,, \cdots$$

une suite infinie de fonctions holomorphes dans un domaine D convergant uniformément vers une fonction holomorphe $F_0(x, y)$, qui n'est pas identiquement null dans l'intérieur de D. La suite de nombres qui sont les aires des surfaces analytiques définies par les équations $F_i(x, y)=0$ converge vers celui de définie par l'équation $F_0(x, y)=0$.

6. Considérons encore une famille de surfaces analytiques (S)

16) loc. cit. voir page 62 et 111.

dans un domaine Δ sur une veriété analytique $\mathfrak{M}$ de deux dimensions. Soit (x, y) un système de coordonnées locales en un point p dans le domaine et $\mathfrak{V}$ le voisinage de cette coordonnées. Si l'on peut prendre un voisinage ω de p dans $\mathfrak{V} \cap \Delta$ suffisamment petit pour que l'aire de la partie de surface appartenant à (S) qui demeure dans ω soient supérieurement borné pour (S), cette condition est évidemment indépendent de la préférence du système de coordonnées locales en p. On dit donc que *la famille* (S) *est bornée supérieurement en l'aire au voisinage de* p, si elle satisfait la condition ci-dessus. Nous allons formuler ici brièvement ce que nous avons vu jusqu'ici :

Théorème I. *Pour que la famille* (S) *soit normale en un point* p, *il faut et il suffit que la famille* (S) *est bornée en l'aire au voisinage de* p.

Remarpue. La condition pour que la famille (S) de surfaces analytiques sur la variété soit normale que l'on a expriqué dans la section 2 est nécessaire, car si (S) est normale en p, les aires de surfaces appartenants à (S) sont bornés supérieurement au voisinage de p. Les moyennes en question sont donc bornées.

7. Ensemble des Points (J). Soit de nouveau (S) une famille de surfaces analytiques dans un domaine Δ sur une variété analytique $\mathfrak{M}$ de deux dimensions. Chaque point p du domaine Δ est dit *un point* (J) *de la famille* (S), si la famille (S) cesse d'être normale en ce point p. Nous allons étudier dans la section qui suit l'ensemble de tous les points (J) de (S), et le désignons par E.

D'abord, l'ensenble E est évidemment fermé relatif au Δ, puisque la famille (S) n'est pas bornée supérieurement en l'aire au voisinage de tout point du E, il en est ainsi au voisinage de tout point d'accumulation du E dans Δ.

Nous allons monter ensuite que l'ensemble E satisfait au *théorème de la continuité*[17] en tout point du E, précisément dit :

Soit P_0 *un point du domaine* Δ *et* (x, y) *un système de coor-*

17) cf., Memoire IX de K. Oka, 1953 (Japanese J. of Math.)

données locales en p_0 et $\mathfrak{B}$ un voisinage de ces coordonnées. On prend un point (a, b) dans l'espace (x, y) qui est différent de l'origine, et une hypersphère σ_1 de centre (a, b) telle que sa frontière passe par l'origine et une hypersphère σ_2 de centre l'origine située dans $\mathfrak{B}\frown\Delta$. Dans cette configuration géométrique, si la famille (S) est normale en tous les points de σ_2 qui sont extérieurs à σ_1, pour n'import quels (a, b) et σ_2, (S) est normale en l'origine, c'est-a-dire en p_0.

En effect, d'abord on ramene par la transformation linéaire de l'espace (x, y) qui fixe l'origine, le point (a, b) à $(-\alpha, 0)$, dont α est un nombre réel positif, et continuons de désigner les images de σ_1, σ_2 par les mêmes lettres. Choisissons nombres réels positifs ε, ρ_1 et ρ_2 convenablement pour qu'un ensembls C: $|x|\leqq\varepsilon$, $\rho_1\leqq|y|\leqq\rho_2$ soit situé dans extérieur à σ_1, autrement dit la famille (S) soit normale en C. Il est possible certainement. Or considérons une suite de surfaces analytiques

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\cdots$$

dont S_i appartient à (S). On peut en extraine, d'après l'hypothèse, la suite partielle

$$S_{i_1},\ S_{i_2},\ S_{i_3},\cdots$$

telle qu'elle converge dans C vers une surface analytique et dénotons la par S_0. On peut supposer sans restreindre la généralité qu'un plan analytique $x=0$ n'est pas contenu à S_0[18], si nécessaire, en faisant transformation analytique biunivoque autour de l'origine dans l'espace (x, y) de la forme $x=x'+\gamma y^2$, dont γ est un nombre réel suffisamment petit. Alors il n'y a qu'un nombre fini de points de S_0 sur le plan analytique $x=0$ dans $\rho_1\leqq|y|\leqq\rho_2$, et l'on peut choisir nombres réels ρ et ε', $\rho_1\leqq\rho\leqq\rho_2$, $\varepsilon'\leqq\varepsilon$ de façon qu'il n'y a aucun point de S_0 sur le plan $x=a$ sur $|y|=\rho$ pour tout nombre a, $|a|\leqq\varepsilon'$. Il existe un nombre entier N tel que S_{i_n} satisfasse la même condition que S_0 pour tout $n\geqq N$. Donc,

18) cf., W. F. Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie, II, 1929, p. 216.

d'après *Weierstrass*, ceci est représenté dans un dicylindre Γ: $|x| \leqq \varepsilon'$, $|y| \leqq \rho$, de la forme suivante:

$$y^{\nu} + A_1(x) y^{\nu-1} + \cdots + A_{\nu}(x) = 0$$

où $A_i(x)$ $(i=1, 2, \cdots, \nu)$ sont des fonctions holomorphes de x dans $|x| \leqq \varepsilon'$. Or un degré de ce polynome est borné supérieurement pour tout S_{i_n}, $n \geqq N$, puisque la suite

$$S_{i_N},\ S_{i_{N+1}},\ S_{i_{N+2}}, \cdots$$

est normale dans $\Re(x)$[19] >0 de Γ. Alors on peut en extraine la suite partielle telle qu'elle converge vers certaine limite dans Γ, et donc (S) est normale à l'origine. C.Q.F.D.

L'ensemble de tout point de Δ où la famille (S) est normale est un domaine; on dit qu'il est *un domaine de normalité de* (S) *dans* Δ. De plus la frontière de ce domaine satisfait au *théorème de la continuité* et cette propriété est évidemment vraie indépendamment du choix d'un système de coordonnées locales.

Un domaine, sa frontière étant bien définie sur $\mathfrak{M}$ est dit *pseudoconvexe* si tout point frontièr de ce domaine satisfait au *théorème de la continuité* par rapport à tout système de coordonnées locales en ce point[20].

Théorème II. *Soit* (S) *une famille de surfaces analytiques dans un domaine pseudoconvexe* Δ *sur* $\mathfrak{M}$. *Le domaine de la normalité de* (S) *dans* Δ *est aussi un domaine pseudoconvexe.*

8. Représentation de surface limite. Dans cette section nous nous bornons encor à l'espace des variables complexes x, y. Soit Δ un domaine pseudoconvexe univalent et fini et (S) une famille de surfaces analytiques dans Δ définie par l'équation de la forme $f(x, y)=0$, où $f(x, y)$ est une fonction holomorphe dans Δ. Nous désignons par D un domaine de normalité de (S) dans. Δ Grâce au *théorème d'Oka*[21] il est un domaine d'holomorphie puisqu'il est

---

19) $\Re(x)$ signifie la partie réelle d'une variable x.

20) cf., par exemple, Mémoire VI de K. Oka, 1942 (Tohoku Math. J.)

21) Mémoire VI,

un domaine pseudoconvexe ; et de plus, grâce à *H. Cartan* et *P. Thullen,*[22] il est *holomorphe-convexe.*

Nous rappelons ici rapidement quelque propriété d'un domaine holomorphe-convexe.

Dans un domaine D^* univalent et fini, un ensemble fermé $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} \ll D$ est dit polyèdre analytique si l'on peut l'éxprimer par ν fonctions $f_i(x, y)$ qui sont holomorphes dans D^* de la forme suivante,

$$f_i(x, y) \in B_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, \nu)$$

dont B_i sont des domaines fermés univalents et bornés sur le plan.

Si D^* est holomorphe-convexe, on peut construir une suite de polyédres analytiques

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \cdots$$

qui tendre vers D^* de l'intérieur.

Étant donnés des zéros analytiques dans un domaine D^* holomorphe-convexe univalent et fini. S'il est *balayable*[23], grâce à *Oka*, on peut trouver une fonction holomorphe admettant le zéro dans D^*.

Or considérons une suite de surfaces analytiques appartenants à la famille (S)

$$S_1, S_2, S_3, \cdots$$

qui convergent vers une surface limite dans D, et que nous désignons par S_0. Alors voici le problème :

Trouver une fonction holomorphe dans D admettant S_0 *pour zéro.*

Pour cela commençons par une notion analogue à "*valayable*" comme suivant.

---

22) H. Cartan et P. Thullen, Regularitäts und Konvergenzbereiche. 1932 (Math. Annalen).

23) Nous appelons que des zéros $(\mathfrak{z})$ sont balayables, avec Oka, s'il correspond, à tout point P de D^*, un voisinage polycylindrique γ de centre P et une fonction continue $f(x, y, t)$ définie pour $(x, y) \in \gamma$, $0 \leqq t \leqq 1$, satisfaisant aux trois conditions suivantes: 1°. $f(x, y, 0)$ possède les zéros $(\mathfrak{z})$, $f(x, y, 1)$ ne s'annule pas. 2°. $f(x, y, t)$ ne s'annule identiquement à aucune portion à 5 dimensions réelles. 3°. Pour toutes paire de voisinages contiguès γ, γ', les fonctions correspondantes soient équivalentes par rapport au produit à $[\gamma \frown \gamma', 0 \leqq t \leqq 1]$.

Soient S et S' deux surfaces analytiques dans un domaine D^*. On dira que S *peut être ramené continuellement à* S' *dans le domaine* D^*, si pour tout point de D^* il correspond un voisinage δ de ce point et une fonction continue $f(x, y, t)$ sur $[\delta, 0 \leqq t \leqq 1]$ de façon que: 1°. $f(x, y, 0)$ et $f(x, y, 1)$ admettent pour zéro S et S' respectivement, 2°. $f(x, y, t)$ ne s'annule pas identiquement dans aucune portion à 5 dimensions réelles, 3°. pour toute paire de voisinages contiguès δ, δ' les fonctions correspondantes soient équivalentes par rapport au produit à $[\delta \frown \delta', 0 \leqq t \leqq 1]$.

D'où on a facilement la proposition suivante:

Si S peut être ramené continuellement à S' et S' est balayable dans D^*, S est aussi balayable dans D^*.

Il s'agit du problème. D'abord remarquons que l'on peut supposer, sans restreindre la généralité que S_0 ne contient pas un composant de la forme x=constante, si nécessaire faisant transformation linéaire, puisque S n'a que une infinité dénombrable de plans analytiques an plus comme son composant.

Soit D_0 un domaine fermé dans l'intérieur de D mais d'ailleurs quelconque, et désignons la partie de S_i dans D_0 par S'_i $(i=0, 1, 2, \cdots)$.

Pour tout point (a, b) de S'_0, il correspond un dicylindre de la forme $|x-a|<\eta$, $|y-b|<\eta'$ dans l'intérieur de D de façon que la projection d'une partie de S_0 située dans le dicylindre sur le plan y est situe dans un cercle $|y-b|<\eta'/2$ et pour tout point x', $|x'-a|<\eta$, il n'y a qu'un et un seul point y', $|y'-b|<\eta'/2$ tel que $(x', y') \in S_0$ sauf pour que (a, b) soit ou bien un point double de S_0, ou bien un point qui correspond à point critique de la projection de S_0 sur le plan x; désignons les points particuliers par (α_i, β_i) $(i=1, 2, 3, \cdots, \nu)$, et les dicylindres correspondent à (α_i, β_i) par (γ_1^i, γ_2^i): $|x-\alpha_i|<\eta_i$, $|y-\alpha_i|<\eta$. D'après le théorème de *Borel-Lebesgue* on peut recouvrir tout S'_0 par un nombre fini de tels dicylindres[24], et désignons les autres qui sont différents de

24) Choisissons de façon que tout $(\delta_1{}^j, \delta_2{}^j)$ ne rencontr aucun dicylindre $|x-\alpha_j|<\eta_j/2$, $|y-\beta_j|<\eta_j/2$ $(j=1, 2, \cdots, \nu)$.

(γ_1^i, γ_2^i) par (δ_1^j, δ_2^j) $(j=1, 2, \cdots, \mu)$. S_0' est représenté dans tout (δ_1^j, δ_2^j) par les équations $y=f_j(x)$, dont $f_j(x)$ sont des fonctions holomorphes dans δ_1^j et dans (γ_1^i, γ_2^i) par les équations $y=\xi_i(x)$, dont $\xi_i(x)$ sont des fonctions analytiques multiformes sur γ_1^i.

Or d'après l'hypothèse on peut dés que i surpasse un certain range N dire que tout surface S_i' est recouverte par (γ_1^i, γ_2^i) et (δ_1^j, δ_2^j) de la même façon que S_0' et tout point particurier de S_i' est situé dans le dicylindre $|x-\alpha_i|<\eta_i/3$, $|y-\beta_i|<\eta/2$ respectivement. Soit S_ν' une surface de cette sort, et dénotons par $y=g_j(x)$ des équations qui représentent S_ν' dans (δ_1^j, δ_2^j) dont $g_j(x)$ sont des fonctions holomorphes dans δ_1^j, et par $y=\zeta_i(x)$ celles dans (γ_1^i, γ_2^i), dont $\zeta_i(x)$ sont des fontions analytiques ayant le même nombre de déterminations que $\xi_i(x)$. Maintenant nous dirons que *S_0' peut être ramené continuellement à S_ν'*. Pour cela il suffit de former des fonctions en question seulement dans tout dicylindre (γ_1^i, γ_2^i) et (δ_1^j, δ_2^j).

Formons une fonction $\lambda(t)$ comme suivant,

$$\begin{aligned}\lambda(t) &= 1 & 0\leqq t\leqq 1/3\\ &= 2-3t & 1/3\leqq t\leqq 2/3\\ &= 0 & 2/3\leqq t\leqq 1\end{aligned}$$

et dans chaque (δ_1^j, δ_2^j), la fonction

$$\Phi_j(x, y, t) = y-\lambda(t)f_j(x)-[1-\lambda(t)]g_j(x)\,.$$

Ensuite, pour chaque γ_1^i formons une fonction $\varphi_i(x, t)$ dans $[\gamma_1^i, 0\leqq t\leqq 1]$ qui est continue et monotone autant que possible de façon que : 1°. $\varphi_i(x, 0)=1$ et $\varphi_i(x, 1)=1$ identiquement dans γ_1^i, 2°. $\varphi_i(x, t)=0$ identiquement dans $1/3\leqq t\leqq 2/3$, $|x-\alpha_i|\leqq\eta_i/3$, 3°. $\varphi_i(x, t)=1$ identiquement dans $0\leqq t\leqq 1$, $2\eta_i/3\leqq|x-\alpha_i|\leqq\eta_i$[25]; et dans chaque (γ_1^i, γ_2^i) la fonction

---

25) Pour cela par exemple formons $\mu_j(x, t)$ dans $[\gamma_1{}^j, 0\leqq t\leqq 1/3]$ comme suivant

$$\begin{aligned}\mu_j(x, t) &= 1-3t, & |x-\alpha_j|\leqq\eta_j/3\\ &= 1-6t+9/\eta_j\cdot|x-\alpha_j|\cdot t, & \eta_j/3\leqq|x-\alpha_j|\leqq 2\eta_j/3\\ &= 1, & 2\eta_j/3\leqq|x-\alpha_j|\leqq\eta_j\end{aligned}$$

et de plus

$$\begin{aligned}\varphi_j(x, t) &= \mu_j(x, t), & 0\leqq t\leqq 1/3\\ &= \mu_j(x, 1/3), & 1/3\leqq t\leqq 2/3\\ &= \mu_j(x, 1-t), & 2/3\leqq t\leqq 1\end{aligned}$$

$$\Psi_i(x, y, t) = \prod^{p} \{y-\lambda(t)[\varphi(x, t)\xi_i^{\nu}(x)+[1-\varphi_i(x, t)]\beta_i] \\ -[1-\lambda(t)][\varphi_i(x, t)\zeta_i^{\nu}(x)+[1-\varphi_j(x, t)]\beta_i]\} ,$$

où $\xi_i^{\nu}(x)$ et $\zeta_i^{\nu}(x)$ sont les déterminations des fonctions $\xi_i(x)$ et $\zeta_i(x)$ respectivement et leurs combinations sont fait de façon que leurs prolongements analytiques viennent toujours au même voisinage (δ_1^t, δ_2^t). Les fonctions sont bien definies et univoques ; et elles ont évidement les propriétés en question. Donc cette propriété est démontrée.

Théorème III. *Soit Δ un domaine pseudoconvexe univalent et fini de l'espace (x, y) et soit (S) une famille de surfaces analytiques de la forme $f(x, y)=0$, où $f(x, y)$ sont des fonctions holomorphes dans Δ, et dénotons par D un domaine de la normalité de (S) dans Δ. La surface analytique définie dans D comme limite de suite des surfaces qui appartiennent à (S) est toujours représentée par la forme $F(x, y)=0$ dans un domaine dans l'intérieur de D mais d'ailleurs quelconque.*

Le problème ne peut être résolu que dans l'intérieur de D. Ce restriction est indispensable, car il existe effectivement des domaine du caractère contraire[26].

Université féminine de Nara

26) On trouvera un exemple dans le mémoire de K. Stein, Analytische Funktion mehrerer komplexer Veränderlichen zu vorgegebenen Periodizitätsmoduln und das zweite Cousinsche Problem, 1951 (Math. Annalen) p. 219.

*) On verra le même thérème que l'on a eu dans la section 6, dans la mémoire de H. Rutishauser, Über Folgen and Scharen von analytischen und meromorphen Funktionen mehrerer Variablen, sowie von analytischen Abbildungen. 1950 (Acta Mathematica).