J. Math. Kyoto. Univ.
4-2 (1965) 327-353

Sur les arêtes principales relatives à un espace fibré.

Par

Jôyô KANITANI

(Reçu le 1 décembre, 1964)

Comme nous l'avons remarqué dans un mémoire précédent[1], une structure projective d'espace fibré est déterminée si l'on se donne deux champs de tenseurs covariants dont l'une est du second ordre, et l'autre troisième. Nous pouvons la particulariser de telle sorte qu'on ait

$$R_{l\cdot is}^{s}=0, \quad R_{\cdot lis}^{s}=0, \quad R_{n+1\cdot is}^{s}=R_{\cdot\cdot is}^{so}$$
$$(l,\ i=1,\ \cdots,\ n;\ s\colon 1\rightarrow n),$$

où $R_{\sigma\cdot ij}^{\tau}$ est le tensuer de courbure. D'ailleurs, la détermination devient unique par cette condition lorsque $n\geqq 3$. L'objet de cet article est d'interpréter la condition géométriquement.

Nous considérons une homographique

$$\rho\xi'^{\sigma}=\Omega_{\tau\cdot}^{\sigma}\xi^{\tau} \qquad (\Omega_{\tau\cdot}^{\sigma}=R_{\tau\cdot ij}^{\sigma}t^{i}t'^{j})$$

qui représente un élément d'algèbre du groupe d'holonomie. En utilisant l'espace singulier de cette transformation nous introduisons trois étoiles au moyen desquelles l'interprétation géometrique est faite.

Nous nous occupons principalement du cas où n=4. Concernant le cas où $n=3$, nous avons donné une généralisation de la directrice de Wilczynski dans un mémoire précédent [2]. Mais nous donnons ici une autre configration géométrique au processus de l'interprétation géométrique. Bien que nous ayons pris dans le mémoire [1] comme groupe de la structure projective d'espace fibré un sous-groupe du groupe des transformations projectives, nous ferons usage ici du groupe des applications linéaires générales. C'est plus commode pour déduire une connexion dont les composants sont sous la forme plus désirable, si l'on veut mettre l'espace fibré bien affine à l'hypersurface dans l'espace projectif à $n+1$ dimensions.

1. Considérons d'abord l'ensemble $\mathfrak{L}$ des applications linéaires générales

$$(p^\sigma_\tau):\ \mathfrak{x}'^\sigma = p^\sigma_\tau \mathfrak{x}^\tau \quad |(p^\sigma_\tau)| \neq 0 \qquad (\sigma, \tau = 0,\ 1,\ \cdots,\ n+1).$$

Introduisons, dans $\mathfrak{L}$, une relation d'équivalence définie par

$$(p'^\sigma_\tau) \sim (p^\sigma_\tau) \iff p'^\sigma_\tau = \rho p^\sigma_\tau \quad (\rho \neq 0).$$

La classe dans cette équivalence sera dite géométrique et celle contenant (p^σ_τ) sera notée par $(p^\sigma_\tau)_g$. Elle donne une homographique générale

$$(p^\sigma_\tau)_g:\ \lambda \xi'^\sigma = p^\sigma_\tau \xi^\tau.$$

Cela étant posé, considérons une variété différentiable M à n dimensions. Supposons qu'on se donne, sur M, une forme quadrique σ (un champ de tenseurs covariants du second ordre définis positifs) qui s'exprime par

$$\sigma = a_{ij}(x) du^i \otimes du^j \quad (x \in U;\ i,\ j = 1, \cdots, n)$$

dans un domaine U d'un système des coordonnées locales $u^1, \cdots, u^n$. Posons

$$H_{ij} = \frac{a_{ij}}{\kappa} \quad (\kappa = \sqrt[n]{|(a_{ij})|}). \tag{1. 1}$$

En supposant que $x \in U \cap U'$ (U, U': des voisinages coordonnées), posons

$$\begin{cases} P^0_0 = 1,\ P^K_0 = 0 \quad (K = 1,\ \cdots.\ n+1), \\ P^0_i = -(\log \nu)_i = -\dfrac{\partial \log \nu}{\partial u^i},\ P^j_i = \dfrac{\partial u'^j}{\partial u^i},\quad P^{n+1}_i = 0, \\ P^0_{n+1} = \dfrac{1}{2} P_s{}^0 P_t{}^0 H^{st},\quad P^j_{n+1} = P_s{}^0 P^j_t H^{st},\quad P^{n+1}_{n+1} = \nu\nu, \end{cases} \tag{1. 2}$$

$$((H^{ij}) = (H_{lm})^{-1},\quad \nu = \sqrt[n]{\eta |(P_i{}^j)|},\quad \eta = \pm 1,\quad \eta |(P_i{}^j)| > 0).$$

Soit $(Q^\alpha_\beta) = (P^\sigma_\tau)^{-1}$, à savoir,

$$Q_0^0=1,\ Q_o{}^K=0,\ Q_i{}^j=\frac{\partial u^j}{\partial u'^i},\ Q_i^{n+1}=0,\ Q_{n+1}^{n+1}=\frac{1}{\nu\nu},$$

$$Q_i{}^o=\frac{\partial log\nu}{\partial u'^i},\ Q^j{}_{n+1}=\frac{1}{\nu\nu}\frac{\partial log\nu}{\partial u^s}H^{sj},\ Q^o{}_{n+1}=\frac{1}{\nu\nu}P^o{}_{n+1}.$$

Concernant les étendues des indices nous ferons, d'ores et déjà, la conventions suivante

$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \cdots$(*lettres greques*)$=0,\ 1,\ \cdots,\ n+1,$
$a,\ b,\ c,\ \cdots$(*lettres latines minuscules*)$=1,\ \cdots,\ n,$
$A,\ B,\ C,\ D=0,\ \cdots,\ n\ ;\ J,\ K,\ L,\ M=1,\ \cdots,\ n+1.$

Nous avons une application

$$(P^\alpha_\beta):\ U\cap U\to\mathfrak{L}$$

et lorsque $x\in U\cap U'\cap U''$ la relation

$$(P''^\alpha_\beta)=(P'^\sigma_\tau)(P^\tau_\mu)$$
$$(P'^j_i=\frac{\partial u''^j}{\partial u'^i},\qquad P'^{n+1}_{n+1}=\sqrt[n]{|(P'^j_i)|^2}\ etc.;$$
$$P''^j_i=\frac{\partial u''^j}{\partial u^i},\qquad P''^{n+1}_{n+1}=\sqrt[n]{|(P''^j_i)|^2}\ etc.)$$

est vérifiée.

Introduisons un espace fibré principal $B(M,\ \mathfrak{L})$ au moyen de cette application. Soit φ_α l'homeomorphism local:

$$\varphi_\alpha:\ U_\alpha\times\mathfrak{L}\to p^{-1}(U_\alpha)\quad (\bigcup_{\alpha\in J}U_\alpha=M).$$

Prenons les points

$$x_o\subset U_\alpha,\quad y_o=(a^\sigma_\tau)\in\mathfrak{L},\quad b_o=\varphi_\alpha(x_o,\ y_o)\in B.$$

Les éléments dans le voisinage V_e de l'élément neutre $e=(\delta^\sigma_\tau)$ de $\mathfrak{L}$ s'expriment sous la forme $(\delta^\sigma_\tau+\lambda^\sigma_\tau)$ tandis que ceux dans le voisinage $V_{y_0}=y_oV_e$ de l'élément $y_o=(a^\sigma_\tau)$ s'expriment sous la forme

$$(p^\sigma_\tau)=(a^\sigma_\tau+a^\sigma_\gamma\lambda^\gamma_\tau).$$

Nous pouvons prendre u^i ($i=1,\ \cdots,\ n$), p^σ_τ ($\sigma,\ \tau=0,\ 1,\ \cdots,n+1$) comme coordonnées d'un point b dans le voisinage du point b_o.

Considérons une fonction différentiable $f^*(b)=f(u^i,\ p^\sigma_\tau)$ définie dans ce voisinage. Nous avons

$$\frac{\partial f^*}{\partial \lambda^\sigma_\tau}=\frac{\partial f^*}{\partial p^\lambda_\mu}a^\lambda_\sigma \delta^\tau_\mu.$$

Lorsque

$$\left(\frac{\partial f^*}{\partial u^i}\right)_0=\left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial u^i}\right)_0, \quad \left(\frac{\partial f^*}{\partial \lambda^\sigma_\tau}\right)_0=\left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial \lambda^\sigma_\tau}\right)_0 \tag{1. 4}$$

les fonctions f, φ définies dans le voisinage du point b_0 sont dite équivalentes par rapport au point b_0. Nous désignons par df la classse d'équivalence à laquelle appartient la fonction f. En faisant

$$df+d\varphi=d(f+\varphi), \quad \alpha df=d(\alpha f) \quad (\alpha: \textit{nombre réel}),$$

nous obtenons un espace vectoriel $T^*(b_0)$ formé par ces classes i.e. les covecteurs tangents en point b_0,

En particulier, nous avons

$$df=\left(\frac{\partial f}{\partial u^i}\right)_0 du^i+\left(\frac{\partial f}{\partial p^\lambda_\mu}\right)_0 dp^\lambda_\mu$$

ce qui nous montre que du^i, dp^σ_τ se forment un système de base de $T^*(b_0)$, car les λ^σ_τ $(\sigma, \tau=0, 1, \cdots, n+1)$ sont indépendants.

Si f et φ sont des fonctions homogènes de même degré par rapport à p^σ_τ la relation (1. 4) est conservée même quand on remplaçe a^σ_τ par ρa^σ_τ et par conséquent, p^σ_τ par ρp^σ_τ. Autrement dit, elle ne dépend que la classe géometrique $(a^\sigma_\tau)_g$.

2. Soit

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial p^\sigma_\tau}\right)$$

le système de base de $T(b_0)$ qui est dual à (du^i, dp^σ_τ) : on a

$$\begin{cases} <\frac{\partial}{\partial u^i}\, du^j>=\delta^j{}_i, & <\frac{\partial}{\partial u^i}\, dp^\lambda_\mu>=0, \\ <\frac{\partial}{\partial p^\sigma_\tau}\, du^j>=0, & <\frac{\partial}{\partial p^\sigma_\tau}\, dp^\lambda_\mu>=\delta^\lambda_\sigma\delta^\tau_\mu. \end{cases} \tag{2. 1}$$

Lorsque $x\epsilon U\cap U'$, d'après la définition même de la structure de l'espace fibré $B(M, \mathfrak{L})$, nous avons

$$du'^i=P^i_j du^j, \quad p'^\alpha_\beta=P^\alpha_\gamma p^\gamma_\beta. \tag{2. 2}$$

et, par suite, grâce à (2. 1)

$$(2.\ 3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial p'^{\lambda}_{\mu}}=Q^{\nu}_{\lambda}\dfrac{\partial}{\partial p^{\nu}_{\mu}}, \\ \dfrac{\partial}{\partial u'^{t}}=Q^{s}_{t}\dfrac{\partial}{\partial u^{s}}+p'^{\gamma}_{\beta}\dfrac{\partial Q^{\alpha}_{\gamma}}{\partial u'^{i}}\dfrac{\partial}{\partial p^{\alpha}_{\beta}}. \end{cases}$$

Si l'on pose $(q^{\lambda}_{\mu})=(p^{\sigma}_{\tau})^{-1}$, il vient

$$(2.\ 4)\qquad q'^{\lambda}_{\mu}=q^{\lambda}_{\nu}Q^{\nu}_{\mu}.$$

3. Si l'on effectue la translation à gauche

$$L_c:\ \ \bar{p}^{\beta}_{\alpha}=c^{\beta}_{\gamma}p^{\gamma}_{\alpha}\quad ((c^{\beta}_{\alpha})\epsilon\mathfrak{L}),$$

il vient

$$dL_c^*(d\bar{p}^{\beta}_{\alpha})=c^{\beta}_{\gamma}dp^{\gamma}_{\alpha},$$
$$dL_c\left(\frac{\partial}{\partial p^{\beta}_{\alpha}}\right)=c^{\gamma}_{\beta}\frac{\partial}{\partial \bar{p}^{\gamma}_{\alpha}}.$$

Donc, si l'on pose

$$(3.\ 1)\qquad \Lambda^{\beta}_{\alpha}=p^{\gamma}_{\alpha}\frac{\partial}{\partial p^{\gamma}_{\beta}},$$

il vient

$$dL_c\Lambda^{\beta}_{\alpha}=\bar{\Lambda}^{\beta}_{\alpha},$$

à savoir, les Λ^{β}_{α} sont des invariants à gauche.

Nous voyons ainsi que si nous regardons p^{β}_{α} comme les coordonnées d'un point générateur du group $\mathfrak{L}$, les Λ^{β}_{α} se forment un système de base d'algèbre de $\mathfrak{L}$, car on a

$$(\Lambda^{\beta}_{\alpha})_e=\left(\frac{\partial}{\partial p^{\beta}_{\alpha}}\right)_e.$$

Si l'on multiplie un facteur commun ρ à p^{α}_{β}, dp^{α}_{β} et $\partial/\partial p^{\alpha}_{\beta}$ se transforment respectivement en ρdp^{α}_{β} et $(1/\rho)(\partial/\partial p^{\alpha}_{\beta})$. Donc, les coordonnées d'un élément de cet algèbre ne dépendent que de la classe géometrique $(p^{\alpha}_{\beta})_g$.

Si nous regardons p^{α}_{β} comme les coordonées d'un point b de la fibre sur $x\epsilon M$, les Λ^{β}_{α} dépendent différentiablement de b et déterminent l'espace $\mathfrak{V}_b \subset T(b)$ des vecteurs tangents verticaux.

Nous avons

$$\frac{\partial}{\partial p^\lambda_\beta} = \Lambda^\beta_\nu q^\nu_\lambda. \tag{3. 2}$$

La dernière équation de (2. 3) peut s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial u'^i} = Q^s{}_i \frac{\partial}{\partial u^s} + p'^\beta_\tau \frac{\partial Q^\alpha_\beta}{\partial u'^i} q^\sigma_\alpha \Lambda^\tau_\sigma. \tag{3. 3}$$

4. Envisageons ensuite la translation à droite

$$R_c:\ p''^\beta_\alpha = p^\beta_\gamma c^\gamma_\alpha \quad ((c^\beta_\alpha) \in \mathfrak{L}).$$

Nous avons cett fois-ci

$$dR_c{}^*(dp''^\beta_\alpha) = (dp^\beta_\gamma) c^\gamma_\alpha,$$

$$dR_c\left(\frac{\partial}{\partial p^\beta_\alpha}\right) = c^\alpha_\gamma \frac{\partial}{\partial p^\beta_\gamma}.$$

Posons

$$\Phi^\beta_\alpha = p^\beta_\gamma \frac{\partial}{\partial p^\alpha_\gamma}. \tag{4. 1}$$

Il vient alors

$$\frac{\partial}{\partial p^\alpha_\mu} = q^\mu_\nu \Phi^\nu_\alpha, \tag{4. 2}$$

$$dR_c \Phi^\beta_\alpha = \Phi''^\beta_\alpha.$$

C'est à dire que les Φ^β_α sont des invariants à droite et se font un système de base de $\mathfrak{V}_b$.

Donc pour que le vecteur tangent

$$\Phi_i = \frac{\partial}{\partial u^i} - (\Gamma^\beta_{\alpha i} + \frac{1}{2}\delta^\beta_\alpha (\log \kappa)_i) \Phi^\alpha_\beta$$

$$= \frac{\partial}{\partial u^i} - (q^\mu_\beta \Gamma^\beta_{\alpha i} p^\alpha_\lambda + \frac{1}{2}\delta^\mu_\lambda (\log \kappa)_i) \Lambda^\lambda_\mu$$

soit horizontal (un invariant à droite), il faut et il suffit que les $\Gamma^\beta_{\alpha i}$ ne dépendent que de $u^1, \cdots, u^n$.

Introduisons maintenant les 1-formes

$$\omega^{\mu}_{\lambda}=q^{\mu}_{\nu}dp^{\nu}_{\lambda}+q^{\mu}_{\beta}\Gamma^{\beta}_{\alpha j}p^{\alpha}_{\lambda}du^{j}+\frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\lambda}d\log\kappa. \tag{4. 3}$$

Nous avons

$$<\omega^{\mu}_{\lambda}\ \Lambda^{\alpha}_{\beta}>=\delta^{\alpha}_{\lambda}\delta^{\mu}_{\beta},\quad <\omega^{\mu}_{\lambda}\ \Phi_{i}>=0 \tag{4. 4}$$

et, par suite, une 1-forme ω sur B à valeur dans l'algèbre de $\mathfrak{L}$ et satisfaisant à la condition que $<\omega\ \Phi_i>=0$: c'est une combinaison linéaire de ω^{μ}_{λ}.

5. Posons

$$\Lambda_i=p_i^{\ a}\Phi_a,\quad \Gamma^{\beta}_{\alpha o}=\delta^{\beta}_{\alpha}. \tag{5. 1}$$

Moyenant (2. 2), (2. 3). (3. 3), la condition nécessaire et suffisante pour que le vecteur tangent Λ_i dépende différentiablement de b peut s'écrire

$$\Gamma'^{\tau}_{\sigma A}=P^{\tau}_{\beta}(\Gamma^{\beta}_{\alpha B}Q^{\alpha}_{\sigma}Q^{B}_{A}+\frac{\partial Q^{\beta}_{\sigma}}{\partial u'^{A}}) \tag{5. 2}$$

où l'on fait la convention que la dérivée d'une fonction $f(u^1,\cdots,u^n)$ par rapport à u^o soit nulle.

Faisons y $\sigma=0$, $A=j$, il vient grâce à (1. 2), (1. 3)

$$\begin{aligned}
&\Gamma'^{\ n+1}_{o\ j}=\nu\nu\Gamma^{\ n+1}_{ob}Q_j^{\ b},\\
&\Gamma'^{\ k}_{o\ j}=P_L^{\ k}\Gamma^{L}_{ob}Q_j^{\ b},\\
&\Gamma'^{\ o}_{o\ j}=Q_j^{\ o}+\Gamma^{o}_{ob}Q^{b}_{j}+P^{o}_{L}\Gamma^{L}_{ob}Q^{b}_{\ j}.
\end{aligned}$$

Nous pouvons donc faire

$$\Gamma^{n+1}_{oj}=0,\quad \Gamma^{k}_{oj}=\delta_j^{\ k},\quad \Gamma^{o}_{oj}=0. \tag{5. 3}$$

Si l'on fait $\tau=n+1$, $A=j$, il vient

$$\begin{aligned}
&\Gamma'^{n+1}_{ij}=\nu\nu\Gamma^{n+1}_{ab}Q_i^{\ a}Q_j^{\ b}\\
&\Gamma'^{n+1}_{n+1,j}=\Gamma^{n+1}_{n+1,b}Q_j^{\ b}+\nu\nu\Gamma^{n+1}_{ab}Q^{a}_{\ n+1}Q_j^{\ b}-Q_j^{\ o}
\end{aligned}$$

ce qui nous montre que nous pouvons faire

$$\Gamma^{n+1}_{ij}=H_{ij},\quad \Gamma^{n+1}_{n+1,j}=0. \tag{5. 4}$$

Faisons maintenant $\mu=k$, $\lambda=i$, $A=j$ dans (5. 2). Il vient

$$\Gamma'{}_i{}^k{}_j = P_s{}^k(\Gamma_a{}^s{}_b Q_i{}^a Q_j{}^b + \frac{\partial Q_i{}^s}{\partial u'^j}) + \delta_i{}^k Q_j{}^o + \delta_j{}^k Q_i{}^o - H'{}_{ij} Q_s{}^o H'^{sk}.$$

Or, le symbole de Christoffel $\Pi_i{}^k{}_j$ relatif à la forme $H_{ij}du^i du^j$ se transforme par

$$\Pi'{}_i{}^k{}_j = P_s{}^k(\Pi_a{}^s{}_b Q_i{}^a Q_j{}^b + \frac{\partial Q_i{}^s}{\partial u'^j}) + \delta_i{}^k Q_j{}^o + \delta_j{}^k Q_i{}^o - H'{}_{ij} Q_s{}^o H'^{sk}.$$

Donc, $\Gamma_i{}^k{}_j - \Pi_i{}^k{}_j$ est un tenseur du type (1, 2). Prenons un champ τ de tenseurs convariants symétriques du troisième ordre. Soit

$$\tau = b_{ijk} du^i \otimes du^j \otimes du^k$$

son expression dans U. Posons

$$K_{ijk} = \frac{b_{ijk}}{\kappa}$$
$$K_i{}^k{}_j = H^{ks} K_{ijs} = a^{ks} b_{ijs} = b_i{}^k{}_j \quad ((a^{ij}) = (a_{lm})^{-1}).$$

Nous pouvons faire

$$\Gamma_i{}^k{}_j = K_i{}^k{}_j + \Pi_i{}^k{}_j, \tag{5. 5}$$

Nous conviendrons de choisir le champ τ de telle sorte que l'équation

$$b_s{}^s{}_i = 0, \quad i.e. \quad K_s{}^s{}_i = 0 \quad (i = 1, \cdots, n\,;\ s : 1 \to n) \tag{5. 6}$$

soit vérifiée, cela étant possible toujours [2].

6. Désignons maintenant par $;i$ la différentiation absolute par rapport à u^i, où la forme $H_{ij}du^i du^j$ est prise comme forme fondamentale. On tire de (5. 2)

$$\begin{aligned}
\Gamma'{}_i{}^o{}_j &= Q_i{}^a Q_j{}^b(\Gamma_a{}^o{}_b - (\log \nu)_s K_a{}^s{}_b + (\log \nu)_{a;b} - (\log \nu)_a (\log \nu)_b + P_{n+1}^{\;o} H_{ab}),\\
H'{}_{ik}\Gamma'^k_{n+1,\,j} &= Q_i{}^a Q_j{}^b (H_{al}\Gamma^l_{n+1,\,b} + (\log \nu)_s K_a{}^s{}_b\\
&\quad + (\log \nu)_{a;b} - (\log \nu)_a (\log \nu)_b + P_{n+1}^{\;o} H_{ab}).
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
K'{}_i{}^k{}_{j;l} &= P_c{}^k Q_i{}^a Q_j{}^b Q_l{}^d K^c_{ab;d} + \delta_l{}^k Q_r{}^o K'{}_i{}^r{}_j - Q_i{}^o K'{}_j{}^k{}_l - Q_j{}^o K'{}_i{}^k{}_l - Q_l{}^o K'{}_i{}^k{}_j\\
&\quad + H'{}_{il} Q_s{}^o K'{}_j{}^{sk} + H'{}_{jl} Q_s{}^o K'{}_i{}^{sk} - Q_s{}^o H'^{sk} K'{}_{ijl},
\end{aligned}$$

et, par suite, grâce à (5. 6)

$$K'^{k}_{ij;k}=Q_{i}{}^{a}Q_{j}{}^{b}(K^{s}_{ab;s}+n(\log\nu)_{s}K_{a}{}^{s}{}_{b}).$$

Nous pouvons donc faire

$$\Gamma_{i}{}^{o}{}_{j}-H_{ik}\Gamma^{k}_{n+1,\,j}=-\frac{2}{n}K^{s}_{ij;s}. \tag{6. 1}$$

Le tenseur de courbure

$$T^{k}_{l.ij}=\frac{\partial\Pi_{l}{}^{k}{}_{j}}{\partial u^{i}}-\frac{\partial\Pi^{k}_{l\,i}}{\partial u_{j}}+\Pi_{r}{}^{k}{}_{i}\Pi_{l}{}^{r}{}_{j}-\Pi_{r}{}^{k}{}_{j}\Pi_{l}{}^{r}{}_{i}$$

de la forme $H_{ij}du^{i}du^{j}$ se transforme par

$$\begin{aligned}T'^{k}_{l\cdot ij}=P_{s}{}^{k}Q_{l}{}^{c}Q_{i}{}^{a}Q_{j}{}^{b}[\,&T^{s}_{c\cdot ab}+\delta_{b}{}^{s}((\log\nu)_{c;a}-(\log\nu)_{c}(\log\nu)_{a})\\&-\delta_{b}{}^{s}((\log\nu)_{c;b}-(\log\nu)_{c}(\log\nu)_{b})\\&+H_{ca}H^{st}((\log\nu)_{t;b}-(\log\nu)_{t}(\log\nu)_{b})\\&-H_{cb}H^{st}((\log\nu)_{t;a}-(\log\nu)_{t}(\log\nu)_{a})\\&+(\delta_{b}{}^{s}H_{ca}-\delta_{a}{}^{s}H_{cb})(\log\nu)_{r}(\log\nu)_{t}H^{rt}].\end{aligned}$$

On en tire

$$\begin{aligned}T'^{k}_{l\cdot ik}=Q_{l}{}^{c}Q_{i}{}^{a}[\,&T^{s}_{c\cdot as}+(n-2)((\log\nu)_{c;a}-(\log\nu)_{c}(\log\nu)_{a}\\&+H_{ca}H^{st}((\log\nu)_{s;t}-(\log\nu)_{s}(\log\nu)_{t})\\&+(n-1)H_{ca}(\log\nu)_{s}(\log\nu)_{t}H^{st}],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T'^{kl}_{\cdot\cdot kl}=\frac{1}{\nu\nu}[\,&T^{st}_{\cdot\cdot st}+2(n-1)H^{st}((\log\nu)_{s;t}-(\log\nu)_{s}(\log\nu)_{t})\\&+n(n-1)\,(\log\nu)_{s}(\log\nu)_{t}H^{st}],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&T'^{k}_{l\cdot ik}-\frac{1}{2(n-1)}H'_{li}T'^{kl}_{\cdot\cdot kl}\\&=Q_{l}{}^{c}Q^{a}{}_{i}(T^{s}_{c\cdot as}-\frac{H_{ca}}{2(n-1)}T^{st}_{\cdot\cdot st}\;+(n-2)((\log\nu)_{c;a}\\&\qquad-(\log\nu)_{c}(\log\nu)_{a})+\frac{n-2}{2}H_{ca}(\log\nu)_{s}(\log\nu)_{t}H^{st}).\end{aligned}$$

Donc, lorsque $n>2$ nous pouvons faire

$$\begin{aligned}\Gamma_{i}{}^{o}{}_{j}+H_{ik}\Gamma_{n+t}{}^{k}{}_{,j}=&\frac{2}{n-2}(T^{k}_{i\cdot jk}+K_{i}{}^{t}{}_{s}K_{j}{}^{s}{}_{t})\\&-\frac{1}{(n-1)(n-2)}H_{ij}(T^{st}_{\cdot\cdot st}+K^{rst}K_{rst}).\end{aligned}\tag{6. 2}$$

7. Nous avons enfin

$$\Gamma'{}_{n+1,j}^{\ o}=\frac{1}{\nu\nu}Q_j^b(\Gamma_{n+1,b}^{\ o}+(\log\nu)_r(H^{rs}\Gamma_{s\ b}^{\ o}-\Gamma_{n+1,b}^{\ r})-(\log\nu)_s(\log\nu)_t K^{s\ t}_{\ b})$$
$$=\frac{1}{\nu\nu}Q_j^{\ b}(\Gamma_{n+1,b}^{\ o}-\frac{2}{n}(\log\nu)_t K^{s\ t}_{\ b\ ;s}-(\log\nu)_s(\log\nu)_t K^{s\ t}_{\ b}).$$

Or,

$$K'^{rs}_{i}T'^{\ \ t}_{r\cdot st}=\frac{1}{\nu\nu}Q_i^{\ a}(K^{b\ c}_{\ a}T^{\ \ s}_{b\cdot cs}+(n-2)((\log\nu)_{b;c}-(\log\nu)_b(\log\nu)_c K^{bc}_{a}),$$
$$\begin{aligned}K'^{\ k}_{ij;k;l}=Q_i^{\ a}Q_j^{\ b}Q_l^{\ c}[&K_{a\ b;s;c}^{\ s}+n(\log\nu)_s K^{s}_{ab;c}+n(\log\nu)_{s;c}K^{s}_{ab}\\ &-2(\log\nu)_c(K_{a\ b;s}^{\ s}+n(\log\nu)_t K_{a\ b}^{\ t})\\ &-(\log\nu)_a(K_{c\ b;s}^{\ s}+n(\log\nu)_t K_{c\ b}^{\ t})\\ &-(\log\nu)_b(K_{a\ c;s}^{\ s}+n(\log\nu)_t K_{a\ c}^{\ t})\\ &+H_{ac}(\log\nu)_r(K^{s\ r}_{\ b\ ;s}+n(\log\nu)_t K^{r\ t}_{\ b})\\ &+H_{bc}(\log\nu)_r(K^{s\ r}_{\ a\ ;s}+n(\log\nu)_t K^{r\ t}_{\ a})],\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}&K'^{\ kl}_{i;k;l}-\frac{n}{n-2}K'^{r\ s}_{\ i}T'^{\ \ t}_{r\cdot st}\\ &=\frac{1}{\nu\nu}Q_i^{\ a}[K^{st}_{a;s;t}-\frac{n}{n-2}K^{b\ c}_{\ a}T^{\ \ s}_{b\cdot cs}\\ &\qquad+2(n-1)(\log\nu)_r K_{a\ ;\ s}^{\ s\ r}+n(n-1)(\log\nu)_s(\log\nu)_t K^{s\ t}_{\ a}].\end{aligned}$$

Nous pouvons donc faire, si $n>2$,

$$\Gamma_{n+1,j}^{\ o}=-\frac{1}{n(n-1)}K^{st}_{j;s;t}+\frac{1}{(n-1)(n-2)}K^{p\ q}_{\ j}(T^{\ \ t}_{p\cdot qt}+K_{p\ s}^{\ t}K_{q\ t}^{\ s}).\tag{7. 1}$$

8. L'équation (4. 3) peut s'écrire

$$p^\tau_\nu\omega^\nu_\lambda=dp^\tau_\lambda+p^\alpha_\lambda\Gamma^{\ \tau}_{\alpha\ j}du^j+\frac{1}{2}p^\tau_\lambda d\log\kappa,$$

En la dérivant éxtérieurement, on obtient

$$d\omega^\mu_\lambda+\omega^\mu_\nu\wedge\omega^\nu_\lambda=\frac{1}{2}q^\mu_\tau p^\sigma_\lambda R_{\sigma\cdot ij}^{\ \tau}du^i\wedge du^j,\tag{8. 1}$$

où

$$R_{\sigma\cdot ij}^{\ \tau}=\frac{\partial\Gamma^{\tau}_{\sigma j}}{\partial u^i}-\frac{\partial\Gamma^{\tau}_{\sigma i}}{\partial u^j}+\Gamma^{\tau}_{\gamma i}\Gamma^{\gamma}_{\sigma j}-\Gamma^{\tau}_{\gamma j}\Gamma^{\gamma}_{\sigma i}.\tag{8. 2}$$

Grâce à (5. 3), (5. 4) on a

(8. 3) $$R_{o\cdot ij}^{\cdot\tau}=0,\quad R_{\alpha\cdot ij}^{\cdot n+1}=0.$$

Portons ensuite (5. 5) dans (8. 2). Il vient

$$\begin{aligned}R_{l\cdot ij}^{\cdot k}=&K_{l\ j;i}^{\ k}-K_{l\ i;j}^{\ k}+K_{s\ i}^{\ k}K_{l\ j}^{\ s}-K_{s\ j}^{\ k}K_{l\ i}^{\ s}+T_{l\cdot ij}^{\cdot k}\\&+\delta_i^h\Gamma_{l\ j}^{\ o}-\delta_j^k\Gamma_{l\ i}^{\ o}+\Gamma_{n+1,i}^{k}H_{lj}-\Gamma_{n+1,j}^{k}H_{li}\end{aligned}$$

et, par suite,

(8. 4) $$\begin{aligned}R_{lmij}+R_{mlij}=&2(K_{lmj;i}-K_{lmi;j})\\&+H_{li}(\Gamma_{m\ j}^{\ o}-H_{mk}\Gamma_{n+1,j}^{k})+H_{mi}(\Gamma_{l\ j}^{\ o}-H_{lk}\Gamma_{n+1,j}^{k})\\&-H_{lj}(\Gamma_{m\ i}^{\ o}-H_{mk}\Gamma_{n+1,i}^{k})-H_{mj}(\Gamma_{l\ i}^{\ o}-H_{lk}\Gamma_{n+1,i}^{k}),\end{aligned}$$

(8. 5) $$\begin{aligned}R_{lmij}-R_{mlij}=&2(K_{smi}K_{l\ j}^{\ s}-K_{sli}K_{m\ j}^{\ s}+T_{lmij})\\&+H_{mi}(\Gamma_{l\ j}^{\ o}+H_{lk}\Gamma_{n+1,j}^{k})-H_{li}(\Gamma_{m\ j}^{\ o}+H_{mk}\Gamma_{h+1,j}^{k})\\&-H_{mj}(\Gamma_{l\ i}^{\ o}+H_{lk}\Gamma_{n+1,i}^{k})+H_{lj}(\Gamma_{m\ i}^{\ o}+H_{mk}\Gamma_{n+1,i}^{k}).\end{aligned}$$

Portons-y les valeurs de $\Gamma_{i\ j}^{\ o}-H_{ik}\Gamma_{n+1,j}^{k}$, $\Gamma_{i\ j}^{\ o}+H_{ik}\Gamma_{n+1,j}^{k}$ données par (6. 1), (6. 2), multiplions H^{mj}, sommons par rapport à m, j. Nous avons alors

$$R_{l\cdot is}^{\cdot s}+R_{\cdot lis}^{s}=0,\quad R_{l\cdot is}^{\cdot s}-R_{\cdot lis}^{s}=0,$$

c'est-à-dire,

(8. 6) $$R_{l\cdot is}^{\cdot s}=0,\quad R_{\cdot lis}^{s}=0.$$

Moyenant ces valeurs de $\Gamma_{i\ j}^{\ o}-H_{ik}\Gamma_{n+1,j}^{k}$, $\Gamma_{i\ j}^{\ o}+H_{ik}\Gamma_{n+1,j}^{k}$ on tire de (8. 2)

$$\begin{aligned}R_{h\cdot ij}^{\cdot o}-H_{hk}R_{n+1\cdot ij}^{\cdot k}=&-\frac{2}{n}K_{hj;s;i}^{s}+\frac{2}{n}K_{hi;s;j}^{s}\\&+\frac{2}{n-2}K_{h\ j}^{\ r}(T_{r\cdot ik}^{\cdot k}+K_{r\ s}^{\ t}K_{it}^{s})-\frac{2}{n-2}K_{h\ i}^{\ r}(T_{r\cdot jk}^{\cdot k}+K_{r\ s}^{\ t}K_{jt}^{s})\\&+2H_{hj}\Gamma_{n+1,i}^{0}-2H_{hi}\Gamma_{n+1,j}^{0}\end{aligned}$$

ce qui nous donne, grâce à (7. 1)

(8. 7) $$R_{\cdot\cdot is}^{so}=R_{n+1\cdot is}^{\cdot s}.$$

9. Prenons un point x_o de M. Soit μ la carte locale de M dont le domain U_α contient x_0. Nous pouvons toujours supposer que μx_o est en coincidence avec l'origine O de E^n. Considérons le voisinage $U_1=\mu^{-1}\mathfrak{S}(O,\ a_1)\subset U_\alpha$ en choisissant convenablement a_1

>0. Un point $x \epsilon U_1$ peut se déterminer par la distance s de O à μx et le point d'extrémité $(\zeta^1, \cdots, \zeta^n)$ du rayon L passant par μx de la boule $\mathfrak{S}(O, a_1)$: nous pouvons prendre $u^i = s\zeta^i$ $(i=1,\cdots,n)$ comme coordonnées locales du point x. Nous avons, au dessus de U_1 une section locale $\varphi_\alpha(U_1 \times e)$ passant par le point $z_o = \varphi_\alpha(x_o, e)$ où on désigne par φ_α l'homéomorphisme local $U_\alpha \times \mathfrak{L} \rightarrow p^{-1} U_\alpha$. Soit $\lambda(x)$ le chemin sur cette section, au dessus du chemin radial $l(x) = \mu^{-1} L$ sur U_1 : $\lambda(x) = \varphi_\alpha(l(x) \times e)$. Nous pouvons prendre, dans $\varphi_\alpha(U_1 \times \mathfrak{L}) \subset B$, $u^i = s\zeta^i$ et p^β_α comme coordonnées locales et nous avons $p^\beta_\alpha = const. = \delta^\beta_\alpha$ le long de $\lambda(x)$. Soit $f(x) = f^*(u^k, p^\beta_\alpha)$ une fonction différentiable à un point $z(x)$ du chemin $\lambda(x)$. Nous avons le long de $\lambda(x)$

$$\frac{df}{ds} = \zeta^i \frac{\partial f^*}{\partial u^i} = \left(\zeta^i \frac{\partial}{\partial u^i}\right) f^*.$$

Cela revient à dire que le vecteur tangent à $\lambda(x)$ en point $z(x)$ s'exprime par $\left(\zeta^i \frac{\partial}{\partial u^i}\right)_{z(x)}$. D'après (4. 4) les coordonnées de l'-élément d'algèbre de $\mathfrak{L}$ engendré par ce vecteur sont données par

$$< \omega^\mu_\lambda \quad \zeta^i \frac{\partial}{\partial u^i} > = \Gamma^\mu_{\lambda j} + \frac{1}{2} \delta^\mu_\lambda (log\, \kappa)_j.$$

Donc, les coordonnées p^β_α d'un point courant du développement de $\lambda(x)$ sont données par

$$\frac{dp^\beta_\alpha}{ds} = p^\beta_\gamma \{\Gamma^\gamma_{\alpha j}(s\zeta^1, \cdots, s\zeta^n) + \frac{1}{2} \delta^\gamma_\alpha (log\, k)_j (s\zeta^1, \cdots, s\zeta^n)\} \zeta^j.$$

Les intégrales p^β_α de ce système d'équations différentielles sont des fonctions différentiables de $s, \zeta^1, \cdots, \zeta^n$ $(o \leqq s \leqq a \leqq a_1)$. Nous pouvons les écrire

$$p^\beta_\alpha = f^\beta_\lambda(s\,; u^1, \cdots, u^n) \quad (u^i = s\zeta^i\,;\ s>0).$$

Pour les intégrales prenant les valeurs initiaux δ^β_α à $s=0$, on a

$$f^\beta_\alpha \rightarrow \delta^\beta_\alpha \quad (s \rightarrow 0).$$

Si l'on effectue la transformation

$$t = ks, \qquad \zeta'^i = \frac{\zeta^i}{k} \quad (k \neq 0)$$

il vient

$$u^i = s\zeta^i = t\,\zeta'^i,$$

$$\frac{dp^\beta_\alpha}{dt} = p^\beta_\gamma \{\Gamma^\gamma_{\alpha j}(t\zeta'^1, \cdots, t\zeta'^n) + \frac{1}{2}\delta^\gamma_\alpha (\log k)_{,j}(t\,\zeta'^1, \cdots, t\zeta'^n)\}\zeta'^j.$$

Nous avons donc

$$p^\beta_\alpha = f^\beta_\alpha(s; u^1, \cdots, u^n) = f^\beta_\alpha(t, u^1, \cdots, u^n) = f^\beta_\alpha(ks; u^1, \cdots, u^n)$$

d'où

$$0 = \frac{\partial f^\beta_\alpha}{\partial k} = \frac{\partial f^\beta_\alpha}{\partial t} s.$$

Donc,

$$p^\beta_\alpha = f^\beta_\alpha(u^1, \cdots, u^n). \tag{9. 1}$$

C'est à dire que le chemin horizontal passant par le point $z_0 = \varphi_\alpha(x_0, e)$ au dessus de $\lambda(x)$ se trouve torujours sur la section local

$$F = \varphi_\alpha(x, f^\tau_\sigma(x))$$

au dessus de $U = \mu^{-1}\mathfrak{S}(O, a) \subset U_1$.

10. Les groupes d'holonomie $\sigma_{z(x)}$ (U) en tous les points de la section F coïncident avec un group σ. Le point d'extremité du developpement issue de l'élément neutre e d'un lacet en z_0 dont la projection se trouve dans U est un élément de σ. Ainsi tout point (p^β_α) du développement γ d'un chemin quelconque θ sur F est un élément de σ, car il existe, sur F, un chemin horizontal $\lambda(x)$ partant de z_0 et aboutissant au point z de θ correspondant au point (p^β_α) (la projection de $\lambda(x)$ est un chemin radial sur U).

Nous voyons ainsi que les points (p^β_α) donnés par (9. 1) sont les éléments de σ et que, τ étant un vecteur tangent à F en un point quelconque z, les $\omega^\beta_\alpha(\tau)$ devient les coordonnées d'un élément de $d\sigma$.

Supposons que la projection du chemin θ soit définie par $u^i = \varphi^i(t)$. Les coordonnées W^β_α de $d\sigma$ qui donne le vecteur tangent à γ en point (p^β_α) sont données alors par

$$W^\beta_\alpha = g^\beta_\gamma \frac{\partial f^\gamma_\alpha}{\partial u^i}\varphi^i(t) \quad ((g^\mu_\lambda) = (f^\beta_\alpha)^{-1}).$$

Celles correspondannt au chemin $u'^{i}=c\varphi^{i}(t)$ s'exprime par cW^{β}_{α}. Si l'on introduit, dans $d\sigma$, une équivalence définie par

$$((W'^{\beta}_{\alpha})\cong(W^{\beta}_{\alpha})) \Longleftrightarrow (W'^{\beta}_{\alpha}=cW^{\beta}_{\alpha}),$$

la classe dans cette équivalence que nous appelerons la classe géo métrique ne dépend que du chemin radial sur lequel la projection du point (p^{β}_{α}) se trouve, car losqu'on fait varier c en laissant t constant, le pont $c\varphi^{i}(t)$ décrit un chemin radial.

En portant (9. 1) dans ω^{α}_{β}, nous obtenons, sur U, les 1-formes $\omega_{U}{}^{\alpha}_{\beta}$ telles que, ζ étant un vecteur tangent à U, les $\omega_{U}{}^{\alpha}_{\beta}(\zeta)$ deviennent les coordonnées d'un élément de $d\sigma$. En particulier, on a $\omega_{U}{}^{\alpha}_{\beta}=0$ en point x_{o}.

Considérons maintenant, dans U, deux champs de vecteurs Z_{o}, Z_{1}. Nous avons, le long du chemin radial pour lequel $(Z_{o})_{xo}$ est le vecteur tangent en point x_{o},

$$[\omega_{U}(Z_{1})]_{x}=s([Z_{o}\omega_{U}(Z_{1})]_{xo}+\eta) \quad (\eta\rightarrow 0\ (s\rightarrow 0)).$$

Donc $(Z_{o}\omega_{U}(Z_{1}))_{x_{o}}$ ainsi que $(Z_{o}\omega_{U}(Z_{1}))_{x_{o}}+\eta$ donne un élément de $d\sigma$. Il en est de même pour $[Z_{1}\omega_{U}(Z_{o})]_{x_{o}}$.

Nous voyons ainsi que les $[(d\omega^{\alpha}_{\beta}+\omega^{\alpha}_{\gamma}\wedge\omega^{\gamma}_{\alpha})(\tau_{1},\ \tau_{o})]_{x_{o}}$ deviennent les coordonnées d'un élément de $d\sigma$ pour tous les couples de vecteurs tangents $(\tau_{o},\ \tau_{1})$ en point z_{o}. Autrement dit $t^{i}\Phi_{i}$, $t'^{i}\Phi_{i}$ étant deux vecteurs horizontaux arbitraires en z_{o}, $R^{\beta}_{\alpha\cdot ij}t^{i}t'^{j}A^{\alpha}_{\beta}$ est un élément de $d\sigma$.

Inversement, un élément quelconque de $d\sigma$ peut se mettre sous cette forme [3].

Nous pouvons donc représenter une classe géométrique de $d\sigma$ par une homographique de la forme

$$\rho\xi'^{\sigma}=\Omega_{\tau}{}^{\sigma}_{\cdot}\xi^{\tau} \quad (\Omega_{\tau}{}^{\sigma}_{\cdot}=R^{\sigma}_{\tau\cdot ij}t^{i}t'^{j}) \tag{10. 1}$$

dans un espace projectif S^{n+1} à $n+1$ dimensions. Soit $[A_{o},\ A_{1},\ \cdots,\ A_{n+1}]$ un repère fixe dans cet espace.

Puisque $R^{\sigma}_{o\cdot ij}=0$, $R_{\tau}{}^{n+1}_{\cdot}{}_{ij}=0$, l'homographique (10. 1) porte tout point de S^{n+1} à un point de l'hyperplan $A_{o}A_{1}\cdots A_{n}$. Elle renferme donc comme un sous-transformation une homographique dans cet hyperplan :

(10. 2) $\rho\xi'^{A}=\Omega_{s\cdot}^{\ A}\xi^{s}\quad (A=0,\cdots,n\,;\,s:1\to n).$

Celle-ci est encore singulière. Supposons qu'elle soit de spécialité 1. Elle définit alors une transformation projective régulière portant l'espace $A_1A_2\cdots A_n$ à l'espace singulier de la transformation (10. 2) déterminé par les n points

(10. 3) $(\Omega_{i\cdot}^{\ o},\cdots,\Omega_{i\cdot}^{\ n},\ 0)\quad (i=1,\cdots,n).$

La correspondance entre les hyperplans dans la transformation (10. 1) est donnée par

(10. 4) $\lambda u'_{\tau}=\Omega_{\tau\cdot}^{\ \sigma}u_{\sigma}$

de sorte que tout hyperplan dans S^{n+1} a pour son image un hyperplan passant par le point A_o. On obtient ainsi une transformation projective des hyperplans appartenant à l'étoile à dimensions n de centre A_o:

(10. 5) $\lambda u'_{K}=\Omega_{K\cdot}^{\ s}u_{s}\quad (K=1,\cdots,n+1;\,s:\ 1\to n).$

C'est une transformation projective sigulière qui définit une transformation projective régulière portant l'étoile d'axe A_oA_{n+1} à l'étoile singulière de la transformation (10. 5) dont l'axe est la droite d'intersection des n hyperplans

$$(0,\ \Omega_{1\cdot}^{\ i},\cdots,\ \Omega_{n\cdot}^{\ i},\Omega_{n+1\cdot}^{\ i})$$

qu'on peut regarder aussi comme la droite d'intersection des hyperplans

(10. 6) $(0,\ \Omega_{1i},\ldots,\ \Omega_{ni},\ \Omega_{n+1,i})\quad (i=1,\ldots,n).$

Grâce à (1. 2), (1. 3), (2. 3) les quantités

$$\kappa l_{\alpha\beta}=\kappa(p_{\alpha}^{0}p_{\beta}^{\ n+1}+p_{\alpha}^{\ n+1}p_{\beta}^{\ o}-H_{st}p_{\alpha}^{\ s}p_{\beta}^{\ t})$$

dépendent différentiablement du point $b(u^{\iota},p_{\mu}^{\lambda})\in B$ et, par suite, il en est de meme pour l'hyperquadrique dans S^{n+1} définie par l'-équation

$$l_{\alpha\beta}\xi^{\alpha}\xi^{\beta}=0.$$

Nous l'appellerons *l'hyperquadrique de Lie en point b.* En particulier, celle en point z_0 s'exprime par

$$2\,\xi^0\xi^{n+1}=H_{ij}\xi^i\xi^j.$$

Les hyperplans polaires par rapport à cette hyperquadrique des points de l'espace singulier de la transformation (10. 2) appartiennent à l'étoile déterminée par les n hyperplans

$$(10.\ 7)\qquad (0,\ \Omega_{i1},\ldots,\Omega_{in},-\Omega_{i\cdot}^{\ o}).$$

L'hyperplan polaire de l'image ξ'^k dans la transformation (10. 1) est donnée par

$$\begin{aligned} u_0&=0,\\ \rho u_i&=\Omega_{Ki}\xi^K,\\ \rho u_{n+1}&=-\Omega_{K\cdot}^{\ o}\xi^K. \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi une transformation projective portant les point de l'hyperplan $A_1A_2\ldots A_{n+1}$ aux hyperplans appartenant à l'étoile de centre A_0. Le lieu des éléments d'incidence dans cette transformation est le cône

$$(\Omega_{ij}+\Omega_{ji})\xi^i\xi^j+(\Omega_{n+1,i}-\Omega_{i\cdot}^{\ o})\xi^i\xi^{n+1}-2\,\Omega_{n+1\cdot}^{\ \ o}(\xi^{n+1})^2=0.$$

Nous appellerons le conjugué de l'espace $A_1A_2\ldots A_n$ par rapport à ce cône *l'arête principale en* z_0. C'est la droite d'intersection des n hyperplans

$$(0,\ \Omega_{1i}+\Omega_{i1},\ \ldots,\ \Omega_{1n}+\Omega_{n1},\ \ \Omega_{n+1,i}-\Omega_{i\cdot}^{\ o})\quad(i=1,\ldots,n).$$

L'étoile déterminée par ces n hyperplans sera nommée *l'etoile principale en* z_0

11. Posons

$$\Sigma_{lmij}=R_{lmij}-R_{mlij}.$$

Il vient d'apès (8. 5), (8. 6)

$$\Sigma_{mlij}=-\Sigma_{lmij},\quad \Sigma_{lmji}=-\Sigma_{lmij},\quad \Sigma_{ijlm}=\Sigma_{lmij},$$
$$H^{mj}\Sigma_{lmij}=0.$$

Lorsque $n=3$ en faisant, dans la dernière équation, $l=1$, $i=1, 2, 3$, nous avons

$$H^{22}\sum_{1212}+2H^{23}\sum_{1213}+H^{33}\sum_{1313}=0,$$
$$H^{21}\sum_{1221}+H^{31}\sum_{1321}+H^{23}\sum_{1223}+H^{33}\sum_{1323}=0,$$
$$H^{21}\sum_{1231}+H^{31}\sum_{1331}+H^{22}\sum_{1232}+H^{32}\sum_{1332}=0.$$

Ajoutons ces équations multipliées respectivement par H^{i1}, H^{i2}, H^{i3} $(i=1, 2, 3)$. Nous obtenons

$$H_{21}\sum_{3123}+H_{22}\sum_{3131}+H_{23}\sum_{3112}+H_{31}\sum_{1223}+H_{32}\sum_{1231}+H_{33}\sum_{1212}=0,$$
$$H_{11}\sum_{3123}+H_{12}\sum_{3131}+H_{13}\sum_{3112}=0,$$
$$H_{11}\sum_{1223}+H_{12}\sum_{1231}+H_{13}\sum_{1212}=0.$$

De même, en faisant $l=2, 3$, on tire

$$H_{31}\sum_{1223}+H_{32}\sum_{1231}+H_{33}\sum_{1212}+H_{11}\sum_{2323}+H_{12}\sum_{2331}+H_{13}\sum_{2312}=0,$$
$$H_{21}\sum_{1223}+H_{22}\sum_{1231}+H_{23}\sum_{1212}=0,$$
$$H_{21}\sum_{2323}+H_{22}\sum_{2331}+H_{23}\sum_{2312}=0,$$
$$H_{11}\sum_{2323}+H_{12}\sum_{2331}+H_{13}\sum_{2312}+H_{21}\sum_{3123}+H_{22}\sum_{3131}+H_{23}\sum_{3112}=0,$$
$$H_{31}\sum_{2323}+H_{32}\sum_{2331}+H_{33}\sum_{2312}=0,$$
$$H_{31}\sum_{3123}+H_{32}\sum_{3131}+H_{33}\sum_{3112}=0.$$

En adjoutant les premières équations dans ces trois systèmes d'équations, on obtient

$$H_{11}\sum_{2323}+H_{12}\sum_{2331}+H_{13}\sum_{2312}+H_{21}\sum_{3121}+H_{22}\sum_{3131}$$
$$+H_{23}\sum_{3112}+H_{31}\sum_{1223}+H_{32}\sum_{1231}+H_{33}\sum_{1212}=0$$

et, par suite,

$$H_{11}\sum_{2323}+H_{12}\sum_{2331}+H_{13}\sum_{2312}=0,$$
$$H_{21}\sum_{3123}+H_{22}\sum_{3131}+H_{23}\sum_{3112}=0,$$
$$H_{31}\sum_{1223}+H_{32}\sum_{1231}+H_{33}\sum_{1212}=0.$$

En somme, nous avons

$$H_{i1}\sum_{lm23}+H_{i2}\sum_{lm31}+H_{i3}\sum_{lm12}=0 \quad (i,\ l,\ m=1,\ 2,\ 3).$$

Nous avons ainsi

$$\sum_{lmij}=0, \quad i.e. \quad R_{lmij}=R_{mlij} \quad (l, m, i, j=1, 2, 3)$$

ce qui nous montre que, *si $n=3$, l'étoile singulière de la transformation* (10. 5), *l'étoile formée par les hyperplans polaires par rapport à l'hyperquadrique de Lie en z_0 des points de l'espace* *singulier de la transformation* (10. 2) *et l'étoile principale en* z_0 *sont en perspectivité, les trois hyperplans homologues se coupant en un plan situé dans l'hyperplan* $A_0A_1A_2A_3$. *Les trois axes de ces étoiles se trouvent dans un plan dont l'intersection avec l'hyperplan* $A_0A_1A_2A_3$ *est le conjugué harmonique de la première axe par rapport aux deux autres axes.*

Puisque le $\Omega_{\alpha\cdot}^{\beta}$ s'écrit

$$\Omega_{\alpha\cdot}^{\beta}=R_{\alpha\cdot ij}^{\beta}t^{i}t'^{j}=R_{\alpha\cdot 23}^{\beta}l_1+R_{\alpha\cdot 31}^{\beta}l_2+R_{\alpha\cdot 12}^{\beta}l_3,$$

la transformation (10. 5) où $n=3$ peut être représentée à son tour par la droite l dans le plan qui a, rapportée au repère $[A_1A_2A_3]$ les coordonnées $(l_1,\ l_2,\ l_3)$. Soint $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ les transformations correspondant respectivement aux côtes A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2, et π_1, π_2, π_3 les hyperplans auxquels l'hyperplan A_0A_4l est porté par les transformations $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$. Parmi les hyperplans passant par l'un des trois arêtes principales qui correspondent respectivement à $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$, il existe les hyperplans $\bar{\pi}_1$, $\bar{\pi}_2$, $\bar{\pi}_3$ tels que les intersections $\pi_1\cap\bar{\pi}_1$, $\pi_2\cap\bar{\pi}_2$, $\bar{\pi}_3\cap\bar{\pi}_3$ se trouvent dans l'hyperplan $A_0A_1A_2A_3$. Leurs coordonnées s'écrivent respectivement

$$(0,\ l_kR_{1\cdot st}^{k},\ l_kR_{2\cdot st}^{k},\ l_kR_{3\cdot st}^{k},\ \frac{1}{2}l_k(R_{4\cdot st}^{k}-R_{\cdot\cdot st}^{0k})$$
$$((s,t)=(2,\ 3),\ (3,\ 1),\ (1,\ 2)).$$

Or d'après (8. 6), (8. 7) nous avons

$$\begin{aligned}
&R_{i\cdot 12}^{2}=R_{i\cdot 31}^{3},\ R_{i\cdot 12}^{1}=R_{i\cdot 23}^{3},\ R_{i\cdot 31}^{1}=R_{i\cdot 23}^{2}\ (i=1,\ 2,\ 3),\\
&R_{4\cdot 12}^{2}-R_{\cdot\cdot 12}^{20}=R_{4\cdot 31}^{3}-R_{\cdot\cdot 31}^{30}\\
&R_{4\cdot 12}^{1}-R_{\cdot\cdot 12}^{10}=R_{4\cdot 23}^{3}-R_{\cdot\cdot 23}^{30},\\
&R_{4\cdot 31}^{1}-R_{\cdot\cdot 31}^{10}=R_{4\cdot 23}^{3}-R_{\cdot\cdot 23}^{30}
\end{aligned}$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}
&R_{i\cdot 23}^{1}l_1+R_{i\cdot 31}^{1}l_2+R_{i\cdot 12}^{1}l_3=R_{i\cdot 23}^{1}l_1+R_{i\cdot 23}^{2}l_2+R_{i\cdot 23}^{3}l_3,\\
&R_{i\cdot 23}^{2}l_1+R_{i\cdot 31}^{2}l_2+R_{i\cdot 12}^{2}l_3=R_{i\cdot 31}^{1}l_1+R_{i\cdot 31}^{2}l_2+R_{i\cdot 31}^{3}l_3,\\
&R_{i\cdot 23}^{3}l_1+R_{i\cdot 31}^{3}l_2+R_{i\cdot 12}^{3}l_3=R_{i\cdot 12}^{1}l_1+R_{i\cdot 12}^{2}l_2+R_{i\cdot 12}^{3}l_3,
\end{aligned}$$

ces équations étant vértifiées même quand on remplaçe $R_{i\cdot st}^{j}$ par $R_{4\cdot st}^{j}-R_{\cdot\cdot st}^{j0}$.

Nous voyons ainsi que l'intersection des trois hyperplans $\bar{\pi}_1$, $\bar{\pi}_2$, $\bar{\pi}_3$ est l'arête principal correspondent à la transformation $\Omega_{\alpha\cdot}^{\beta}$. Autrement dit, *toutes les arêtes principales en* z_0 *peuvent être déterminées au moyen des hyperplans appartenant aux étoiles principales qui correspondent un des côtes* A_2A_3, A_{31}, A_1A_2.

12. Si l'on efectue, dans S^{n+1}, le changement du repére

$$\tilde{A}_0 = A_0, \quad \tilde{A}_i = \lambda^j{}_i A_j, \quad \tilde{A}_{n+1} = A_{n+1},$$

il vient

$$\sigma\tilde{\xi}^0 = \xi^0, \quad \sigma\tilde{\xi}^j = \mu^j{}_i \xi^i, \quad \sigma\tilde{\xi}^{n+1} = \xi^{n+1} \quad ((\mu^l{}_m) = (\lambda^j{}_i)^{-1})$$

de sorte que l'équation de la transformation (10. 1) devient

$$\rho\tilde{\xi}'^{\sigma} = \tilde{\Omega}_{\tau\cdot}^{\sigma}\xi^{\tau}$$

où

$$\tilde{\Omega}_{0\cdot}^{\alpha} = 0, \quad \tilde{\Omega}_{\beta\cdot}^{n+1} = 0, \quad \tilde{\Omega}_{i\cdot}^{\kappa} = \mu^j{}_i \lambda^{\kappa}{}_l \Omega_{j\cdot}^{l}, \quad \tilde{\Omega}_{i\cdot}^{o} = \mu_i{}^j \Omega_{j\cdot}^{o}, \quad \tilde{\Omega}_{n+1\cdot}^{k} = \lambda^{\kappa}{}_l \Omega_{n+1\cdot}^{l}$$

tandis que les coordonnées de la droite dans l'espace $A_1A_2\ldots A_n$ représentant la transformation (10. 1) se transforment par

$$\begin{vmatrix} \xi^i{}_1 & \xi^j{}_1 \\ \xi^i{}_2 & \xi^j{}_2 \end{vmatrix} = \mu^i{}_s \mu^j{}_t \begin{vmatrix} \xi_1{}^s & \xi_1{}^t \\ \xi_2{}^s & \xi_2{}^t \end{vmatrix}.$$

Donc, en posant

$$\tilde{R}_{l\cdot}{}^{o}{}_{st} = \mu^h{}_l R_{h\cdot}{}^{o}{}_{ij} \mu^i{}_s \mu^j{}_t, \quad \tilde{R}_{l\cdot}{}^{m}{}_{st} = \mu_l{}^h \lambda^m{}_k R_{h\cdot ij}^{k} \mu^i{}_s \mu^j{}_t.$$
$$\tilde{R}_{n+1\cdot st}^{m} = \lambda^m{}_k R_{n+1\cdot ij}^{k} \mu^i{}_s \mu^j{}_t,$$

nous pouvons écrire

$$\tilde{\Omega}_{\sigma\cdot}^{\tau} = \tilde{R}_{\sigma\cdot ij}^{\tau} t^i t'^j,$$

D'autre part, l'équation de l'hyperquadrique de Lie en point z_0 devient

$$2\xi^0\xi^{n+1} = \tilde{H}_{ij}\xi^i\xi^j \quad (\tilde{H}_{ij} = \mu_i{}^s \mu_j{}^t H_{st}).$$

Les équations (8. 6), (8. 7) sont conservées dans ce changement, à savoir,

$$\tilde{H}^{mj}(\tilde{R}_{lmij} + \tilde{R}_{mlij}) = 0, \quad \tilde{H}^{mj}(\tilde{R}_{lmij} - \tilde{R}_{mlij}) = 0, \tag{12. 1}$$

(12. 2) $\tilde{R}^{so}_{\cdot\cdot is}=\tilde{R}_{n+1}{}^{s}_{\cdot is}.$

Nous allons nous occuper maintenant du cas où $n=4$. Posons

$$\sum_{lmij}=\tilde{R}_{lmij}-\tilde{R}_{mlij}.$$

Puisque $\sum_{mlij}=-\sum_{lmij}$, $\sum_{lmji}=-\sum_{lmij}$, en écrivant 1, 2, 3, 4, 5, 6 à la place de (12), (13), (14), (23), (42), (34) nous pouvons mettre $\sum_{lmij}$ sous la forme A_{pq}, par exemple,

$$\sum_{1212}=A_{11},\ \sum_{1213}=A_{12},\ \ldots,\ \sum_{1234}=A_{16}.$$

Grâce à $\sum_{lmij}=\sum_{ijlm}$, on a $A_{pq}=A_{qp}$.

La forme quadrique $H_{ij}\xi^i\xi^j$ étant définite positive, nous pouvons faire $\tilde{H}_{st}=\delta_{st}$ en choisissant convenablement les nombres $\mu_i{}^j$. Cela étant fait, les équations

$$\tilde{H}^{jm}\sum_{1jlm}\quad (l=2,\ 3,\ 4)$$

nous donnent

$$\sum_{1323}+\sum_{1424}=0,\ \sum_{1232}+\sum_{1434}=0,\ \sum_{1242}+\sum_{1343}=0,$$

c'est-à-dire

$$A_{24}=A_{35}=A_{53},\ A_{14}=A_{36}=A_{63},\ A_{15}=A_{26}=A_{62}.$$

De même, moyenant $H^{jm}\sum_{2jlm}$ $(l=3,\ 4)$, $H^{jm}\sum_{3j4m}=0$ on obtient

$$A_{12}=A_{56}=A_{65},\ A_{13}=A_{46}=A_{64},\ A_{23}=A_{45}=A_{54}.$$

Ensuite, les équations $\tilde{H}^{jm}\sum_{ljlm}=0$ $(l=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ deviennent

$$\begin{aligned}A_{11}+A_{22}+A_{33}&=0,\\ A_{11}+A_{44}+A_{55}&=0,\\ A_{22}+A_{44}+A_{66}&=0,\\ A_{33}+A_{55}+A_{66}&=0.\end{aligned}$$

En ajoutant ces équations membre à membre on obtient

$$A_{44}+A_{55}+A_{66}=0.$$

Il vient ainsi

$$A_{11}=A_{66},\ A_{22}=A_{55},\ A_{33}=A_{44}.$$

En résumé, nous avons

$$A_{ij}=A_{ji}=A_{hk} \quad \left(\binom{i}{h},\ \binom{j}{k}\in\binom{1\,2\,3\,4\,5\,6}{6\,5\,4\,3\,2\,1}\right).$$

13. Le système d'équations

$$(13.\ 1)\quad \begin{cases}(A_{11}+A_{61}-\rho)l^1+(A_{12}+A_{62})l^2+(A_{13}+A_{63})l^3=0,\\ (A_{21}+A_{51})l^1+(A_{22}+A_{52}-\rho)l^2+(A_{23}+A_{53})l^3=0,\\ (A_{31}+A_{41})l^1+(A_{32}+A_{42})l^2+(A_{33}+A_{43}-\rho)l^3=0\end{cases}$$

admet trois systèmes de solutions $(l_a^1,\ l_a^2,\ l_a^3)$ $(a=1, 2, 3)$ tels que

$$(13.\ 2)\quad \begin{cases}(l_a^1)^2+(l_a^2)^2+(l_a^3)^2=1 \quad (a=1,\ 2,\ 3),\\ l_a^1l_b^1+l_a^2l_b^2+l_a^3l_b^3=0 \quad (a\neq b\,;\ a,\ b=1,\ 2,\ 3).\end{cases}$$

Ils correspondent aux racines ρ_1, ρ_2, ρ_3 de l'équation

$$(13.\ 3)\quad \begin{vmatrix}A_{11}+A_{61}-\rho & A_{12}+A_{62} & A_{13}+A_{63}\\ A_{21}+A_{51} & A_{22}+A_{52}-\rho & A_{23}+A_{53}\\ A_{31}+A_{41} & A_{32}+A_{42} & A_{33}+A_{43}-\rho\end{vmatrix}=0.$$

En posant

$$(13.\ 4)\qquad l_a^6=l_a^1,\ l_a^5=l_a^2,\ l_a^4=l_a^3,$$

nous introduisons l_a^i $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6)$. De même, le système d'équations

$$(13.\ 5)\quad \begin{cases}(A_{66}-A_{16}-\rho)l^6+(A_{65}-A_{15})l^5+(A_{64}-A_{14})l^4=0,\\ (A_{56}-A_{26})l^6+(A_{55}-A_{25}-\rho)l^5+(A_{54}-A_{24})l^4=0,\\ (A_{46}-A_{36})l^6+(A_{45}-A_{35})l^5+(A_{44}-A_{34}-\rho)l^4=0\end{cases}$$

admet trois système de solutions $(l_p^6,\ l_p^5,\ l_p^4)$ $(p=6,\ 5,\ 4)$ tels que

$$(13.\ 6)\quad \begin{cases}(l_p^6)^2+(l_p^5)^2+(l_p^4)^2=1 \quad (p=6,\ 5,\ 4)\\ l_p^6l_q^6+l_p^5l_q^5+l_p^4l_q^4=0 \quad (p\neq q\,;\ p,\ q=6,\ 5,\ 4),\end{cases}$$

correspondant aux racines ρ_6, ρ_5, ρ_4 de l'équation

$$(13.\ 7)\quad \begin{vmatrix}A_{66}-A_{16}-\rho & A_{65}-A_{15} & A_{64}-A_{14}\\ A_{56}-A_{26} & A_{55}-A_{25}-\rho & A_{54}-A_{24}\\ A_{46}-A_{36} & A_{45}-A_{35} & A_{44}-A_{34}-\rho\end{vmatrix}=0.$$

Nous posons cette fois-ci

(13. 8) $$l_p{}^1=-l_p{}^6,\ l_p{}^2=-l_p{}^5,\ l_p{}^3=-l_p{}^4.$$

Posons ensuite

(13. 9) $$m_1{}^i=\frac{1}{2}(l_1{}^i+l_6{}^i),\qquad m_2{}^i=\frac{1}{2}(l_2{}^i+l_5{}^i),\qquad m_3{}^i=\frac{1}{2}(l_3{}^i+l_4{}^i),$$
$$m_6{}^i=\frac{1}{2}(l_1{}^i-l_6{}^i),\qquad m_5{}^i=\frac{1}{2}(l_2{}^i-l_5{}^i),\qquad m_4{}^i=\frac{1}{2}(l_3{}^i-l_4{}^i).$$

Nous avons alors grâce à (13. 2), (13. 4), (13. 6), (13. 8)

(13. 10) $$m_i{}^j=m_h{}^k,$$

(13. 11) $$m_i{}^1m_j^6+m_i{}^2m_j{}^5+m_i{}^3m_j{}^4+m_i{}^4m_j{}^3+m_i{}^5m_j{}^2+m_i{}^6m_j{}^1=\delta^h{}_j=\delta^k{}_i$$
$$\left(\binom{h}{i},\ \binom{k}{j}\ \epsilon\ \binom{1\cdots 6}{6\cdots 1}\right)$$

et, par suite,

$$|m_i{}^j|^2=1.$$

Par l'altération des signes de $l^6{}_6$, $l^5{}_6$, $l^4{}_6$, si elle est nécessaire, nous pouvons faire

(13. 12) $$|m^j{}_i|=1$$

en conservant (13. 6). Les $l_a{}^1$, $l_a{}^2$, $l_a{}^3$ satisfaisant à (13. 1), où ρ est une racine de (13. 3), on tire, en tenant compte de (13. 2), (13. 4)

$$\sum_{i=1}^{6}\sum_{c=1}^{3}A_{ic}l_a{}^cl_b{}^i=0\quad (a\neq b\,;\ a,\ b=1,\ 2,\ 3)$$

ce qui est équivalent à

$$\sum_{i=1}^{6}\sum_{p=4}^{6}A_{ip}l_a{}^il_b^p=0$$

et, par conséquent, à

(13. 13) $$\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}A_{ij}l_a{}^il_b{}^j=0.$$

De même, on a

$$\sum_{i=1}^{6}\sum_{r=4}^{6}A_{ir}l_p{}^rl_q{}^i=0\quad (p\neq q\,;\ p,\ q=4,\ 5,\ 6)$$

ce qui est équivalent à

(13. 14) $$\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6} A_{ij} l_p^i l_q^j = 0.$$

Or, on a grâce à (13. 9)

$$l_1^i = m_1^i + m_6^i,\ l_2^i = m_2^i + m_5^i,\ l_3^i = m_3^i + m_4^i,$$
$$l_6^i = m_1^i - m_6^i,\ l_5^i = m_2^i - m_5^i,\ l_4^i = m_3^i - m_4^i.$$

Portons-les dans (13. 13), (13. 14). Il vient

$$A_{ij}(m_a^i m_b^j + m_p^i m_q^j) = 0 \quad (a \neq b;\ a,\ b = 1,\ 2,\ 3,$$
$$A_{ij}(m_a^i m_q^j + m_p^i m_b^j) = 0 \qquad \left(\begin{smallmatrix} p \\ a \end{smallmatrix}\right),\ \left(\begin{smallmatrix} q \\ b \end{smallmatrix}\right) \in \left(\begin{smallmatrix} 1 \cdots 6 \\ 6 \cdots 1 \end{smallmatrix}\right)),$$

Or, on a grâce à (13. 10)

$$A_{ij} m_p^i m_q^j = A_{ij} m_a^h m_b^k = A_{hk} m_a^h m_b^k,$$
$$A_{ij} = m_p^i m_b^j = A_{ij} m_a^h m_q^k = A_{hk} m_a^h m_q^k$$
$$\left(\left(\begin{smallmatrix} h \\ i \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} k \\ j \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \cdots 6 \\ 6 \cdots 1 \end{smallmatrix}\right)\right),$$

donc,

(13. 15) $$\begin{cases} A_{ij} m_a^i m_b^j = 0,\ A_{ij} m_p^i m_q^j = 0\ (a \neq b, a, b = 1,2,3; p \neq q, p, q = 4,5,6), \\ A_{ij} m_a^i m_q^j = 0\ (a = 1,\ 2,\ 3,\ q = 4,\ 5,\ 6;\ \left(\begin{smallmatrix} q \\ a \end{smallmatrix}\right) \in \left(\begin{smallmatrix} 1 \cdots 6 \\ 6 \cdots 1 \end{smallmatrix}\right)). \end{cases}$$

14. D'aprés (13. 11) on a

$$m_i^1 m_i^6 + m_i^2 m_i^5 + m_i^3 m_i^4 = 0 \quad (i = 1,\ \ldots,\ 6)$$

ce qui nous montre qu'il existe dans $S^3 = A_1 A_2 A_3 A_4$ une droite p_i ayant pour ses coordonnées Plückeriennes $(m_i^1,\ m_i^2,\ m_i^3,\ m_i^4,\ m_i^5,\ m_i^6)$.

Les droites p_1, p_2 se coupent en un point P_1. Les droites p_3, p_4 ne se coupent pas et elles coupent toutes les deux p_1 et p_2 de sorte que l'une d'elles passe par P_1 sans se trouver dans le plan $p_1 p_2$ tandis que l'autre se trouve sur le plan $p_1 p_2$ et ne passe pas par P_1. Supposons que p_3 passe par P_1. Soient $P_2 = p_1 \cap p_4$, $P_3 = p_2 \cap p_4$. La droite p_5 coupe p_1, p_3, p_4 et ne coupe pas p_2. Elle passe donc par P_2 et le point $P_4 = p_3 \cap p_5$ n'est pas sur le plan $p_1 p_2$ de sorte que les points P_1, P_2, P_3, P_4 sont indépendants. Enfin, la droite p_6 coupe p_2, p_3, p_4, p_5 et ne coupe pas p_1. Elle est donc la droite de jonction des points P_3 et P_4.

Soient $(\sigma_i^1,\ \sigma_i^2,\ \sigma_i^3,\ \sigma_i^4)$ $(i = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ les coordonnées du point

P_i. En choisissant convenablement le facteur commun, nous pouvons écrire

$$
\begin{array}{l}
m_1{}^1=\begin{vmatrix}\sigma_1{}^1 & \sigma_1{}^2\\ \sigma_2{}^1 & \sigma_2{}^2\end{vmatrix},\quad m_1{}^2=\begin{vmatrix}\sigma_1{}^1 & \sigma_1{}^3\\ \sigma_2{}^1 & \sigma_2{}^3\end{vmatrix},\quad \cdots,\quad m_1{}^6=\begin{vmatrix}\sigma_1{}^3 & \sigma_1{}^4\\ \sigma_2{}^3 & \sigma_2{}^4\end{vmatrix},\\
m_2{}^1=\begin{vmatrix}\sigma_1{}^1 & \sigma_1{}^2\\ \sigma_3{}^1 & \sigma_3{}^2\end{vmatrix},\quad m_2{}^2=\begin{vmatrix}\sigma_1{}^1 & \sigma_1{}^3\\ \sigma_3{}^1 & \sigma_3{}^3\end{vmatrix},\quad \cdots,\quad m_2{}^6=\begin{vmatrix}\sigma_1{}^3 & \sigma_1{}^4\\ \sigma_3{}^3 & \sigma_3{}^4\end{vmatrix},\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
m_6{}^1=\begin{vmatrix}\sigma_3{}^1 & \sigma_3{}^2\\ \sigma_4{}^1 & \sigma_4{}^2\end{vmatrix},\quad m_6{}^2=\begin{vmatrix}\sigma_3{}^1 & \sigma_3{}^3\\ \sigma_4{}^1 & \sigma_4{}^3\end{vmatrix},\quad \cdots,\quad m_6{}^6=\begin{vmatrix}\sigma_3{}^3 & \sigma_3{}^4\\ \sigma_4{}^3 & \sigma_4{}^4\end{vmatrix}.
\end{array}
$$

Lorsque c'est la droite p_4 qui passe par P_1 nous n'avons qu'à faire

$$
\begin{array}{l}
P_4=p_1\cap p_2,\ P_3=p_1\cap p_3,\ P_2=p_2\cap p_3,\\
P_1=p_5\cap p_6=p_4\cap p_5=p_4\cap p_6\,;\\
\sigma_i{}^4,\ \sigma_i{}^3,\ \sigma_i{}^2,\ \sigma_i{}^1:\ \text{les coordonnées de } P_i.
\end{array}
$$

Posons

$$\nu_s{}^t=\sigma_s{}^r\mu_r{}^t\ (s,\ t=1,\ 2,\ 3,\ 4\,;\ r:1\to 4).$$

Nous pouvons mettre

$$A_{ij}m_{i'}{}^i m_{j'}{}^j\quad (i',\ j'=1,\ \cdots,\ 6\,;\ i,\ j:\ 1\to 6)$$

sous la forme

$$
\begin{array}{c}
\nu_p^h\nu_q^k\nu_s{}^l\nu_t{}^m(R_{hklm}-R_{khlm})\\
(p,\ q,\ s,\ t=1,\ \cdots,\ 4\,;\ h,\ k,\ l,\ m:\ 1\to 4).
\end{array}
$$

D'autre part, on a

$$H'_{ij}=\nu_i{}^a\nu_j{}^b H_{ab}=\sigma_i{}^s\mu_s{}^l\sigma_j{}^t\mu_t{}^m H_{lm}=\sigma_i{}^s\sigma_j{}^t\delta_{st}=\sigma_i{}^1\sigma_j{}^1+\sigma_i{}^2\sigma_j{}^2+\sigma_i{}^3\sigma_j{}^3+\sigma_i{}^4\sigma_j{}^4$$

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix}H'_{11} & H'_{12}\\ H'_{21} & H'_{22}\end{vmatrix}&=\left|\begin{pmatrix}\sigma_1{}^1 & \sigma_1{}^2 & \sigma_1{}^3 & \sigma_1{}^4\\ \sigma_2{}^1 & \sigma_2{}^2 & \sigma_2{}^3 & \sigma_2{}^4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_1{}^1 & \sigma_2{}^1\\ \vdots & \vdots\\ \sigma_1{}^4 & \sigma_2{}^4\end{pmatrix}\right|\\
&=(m_1{}^1)^2+(m_1{}^2)^2+\cdots\cdots+(m_1{}^6)^2\\
&=m_1{}^1m_6{}^6+m_1{}^2m_6{}^5+\cdots\cdots+m_1{}^6m_6{}^1=1,
\end{aligned}
$$

$$\begin{vmatrix}H'_{11} & H'_{13}\\ H'_{21} & H'_{23}\end{vmatrix}=m_1{}^1m_2{}^1+\cdots\cdots+m_1{}^6m_2{}^6=0,\quad \begin{vmatrix}H'_{12} & H'_{13}\\ H'_{22} & H'_{23}\end{vmatrix}=0$$

d'où

$$H'_{13}=0,\quad H'_{23}=0.$$

De cette manière, on tire

$$H'_{st}=\delta_{st} \quad (s,\ t=1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Cela revient à dire que nous pouvons choisir un repère $[A_0, \tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{A}_3, \tilde{A}_4, A_5]$ de manière à avoir

$$\tilde{H}_{st}=\delta_{st},$$
$$\tilde{R}_{hklm}=\tilde{R}_{khlm},$$

$((h,\ k)\neq(l,\ m)$; *hklm* n'est pas une permutation de 1234).

Nous l'apprellerons *le repère canonique en point* z_0.

15. Reprenons les trois étoiles Σ, Σ', Σ'': Σ est l'étoile singulière de la transformation (10. 5), Σ' est formée par les hyperplans polaires par rapport à l'hyperquadrique de Lie en point z_0 des points de l'espace singulier de la transpormation (10. 2), Σ'' est l'etoile principale en point z_0. L'axe de Σ'' est la droite d'intersection des quatre hyperplans

$$(0,\ \tilde{\Omega}_{1i}+\tilde{\Omega}_{i1},\ \tilde{\Omega}_{2i}+\tilde{\Omega}_{i2},\ \tilde{\Omega}_{3i}+\tilde{\Omega}_{i3},\ \tilde{\Omega}_{4i}+\tilde{\Omega}_{i4},\ \tilde{\Omega}_{5i}-\tilde{\Omega}_{i\cdot}^{0})$$
$$(i=1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Envisageons maintenant un élément $\tilde{\Omega}^{\sigma}_{\tau\cdot}$ correspondendant à une droite de la congruence linéaire dont les directrices sont deux côtes du repére canonique qui ne se coupent pas. Pour fixer l'idée, supposons que ces côtes sont $\tilde{A}_1\tilde{A}_2$ et $\tilde{A}_3\tilde{A}_4$. Alors, les cordonnées d'une droite de la congruence s'expriment au moyen d'une combinaison linéaire de celles de $\tilde{A}_1\tilde{A}_3$, $\tilde{A}_1\tilde{A}_4$, $\tilde{A}_2\tilde{A}_3$, $\tilde{A}_2\tilde{A}_4$ de sorte qu'on a d'aprés (14. 1)

$$\Omega_{12}=\Omega_{21},\ \ \Omega_{34}=\Omega_{43}$$

et, par suite, les coordonnées des hyperplans dont nous venons de mentionner peuvent s'écrire

$$(0,\ 2\tilde{\Omega}_{11},\ 2\tilde{\Omega}_{12},\ \tilde{\Omega}_{13}+\tilde{\Omega}_{31},\ \tilde{\Omega}_{14}+\tilde{\Omega}_{41},\ \tilde{\Omega}_{51}-\tilde{\Omega}_{1\cdot}^{0}),$$
$$(0,\ 2\tilde{\Omega}_{12},\ 2\tilde{\Omega}_{22},\ \tilde{\Omega}_{23}+\tilde{\Omega}_{32},\ \tilde{\Omega}_{24}+\tilde{\Omega}_{42},\ \tilde{\Omega}_{52}-\tilde{\Omega}_{2\cdot}^{0}),$$
$$(0,\ \tilde{\Omega}_{31}+\tilde{\Omega}_{13},\ \tilde{\Omega}_{32}+\tilde{\Omega}_{23},\ 2\tilde{\Omega}_{33},\ 2\tilde{\Omega}_{34},\ \tilde{\Omega}_{53}-\tilde{\Omega}_{3\cdot}^{0}),$$
$$(0,\ \tilde{\Omega}_{41}+\tilde{\Omega}_{14},\ \tilde{\Omega}_{42}+\tilde{\Omega}_{24},\ 2\tilde{\Omega}_{34},\ 2\tilde{\Omega}_{44},\ \tilde{\Omega}_{54}-\tilde{\Omega}_{4\cdot}^{0}).$$

Il existe donc pour chacune des côtes $\tilde{A}_1\tilde{A}_2$, $\tilde{A}_3\tilde{A}_4$ ∞^1 *systèmes* *de trois hyperplans qui appartiennent respectivement à Σ, Σ', Σ'' et qui coupent $\tilde{A}_1\tilde{A}_2(\tilde{A}_3\tilde{A}_4)$ en un même point. Soient l, l', l'' les droites d'intersection de ces hyperplans avec un plan passant par $\tilde{A}_1\tilde{A}_2(\tilde{A}_3\tilde{A}_4)$. Alors les droites l, l' ; l'', $\tilde{A}_1\tilde{A}_2(\tilde{A}_3\tilde{A}_4)$ forment un faisceau harmonique.*

Il suit de (8. 4), (8. 7)

$$\begin{aligned}
&\tilde{R}_{\iota 212}+\tilde{R}_{\iota 313}+\tilde{R}_{\iota 414}=0, \quad \tilde{R}_{2\iota 12}+\tilde{R}_{3\iota 13}+\tilde{R}_{4\iota 14}=0,\\
&\tilde{R}_{\iota 121}+\tilde{R}_{\iota 323}+\tilde{R}_{\iota 424}=0, \quad \tilde{R}_{1\iota 21}+\tilde{R}_{3\iota 23}+\tilde{R}_{4\iota 24}=0,\\
&\tilde{R}_{\iota 131}+\tilde{R}_{\iota 232}+\tilde{R}_{\iota 434}=0, \quad \tilde{R}_{1\iota 31}+\tilde{R}_{2\iota 32}+\tilde{R}_{4\iota 34}=0,\\
&\tilde{R}_{\iota 141}+\tilde{R}_{\iota 242}+\tilde{R}_{\iota 343}=0, \quad \tilde{R}_{1\iota 41}+\tilde{R}_{2\iota 42}+\tilde{R}_{3\iota 43}=0,\\
&\tilde{R}_{5212}-\tilde{R}^{0}_{2\cdot 12}+\tilde{R}_{5313}-\tilde{R}^{0}_{3\cdot 13}+\tilde{R}_{5414}-\tilde{R}^{0}_{4\cdot 14}=0,\\
&\tilde{R}_{5121}-\tilde{R}^{0}_{1\cdot 21}+\tilde{R}_{5323}-\tilde{R}^{0}_{3\cdot 23}+\tilde{R}_{5424}-\tilde{R}^{0}_{4\cdot 24}=0,\\
&\tilde{R}_{5131}-\tilde{R}^{0}_{1\cdot 31}+\tilde{R}_{5232}-\tilde{R}^{0}_{2\cdot 32}+\tilde{R}_{5434}-\tilde{R}^{0}_{4\cdot 34}=0,\\
&\tilde{R}_{5141}-\tilde{R}^{0}_{1\cdot 41}+\tilde{R}_{5242}-\tilde{R}^{0}_{2\cdot 42}+\tilde{R}_{5343}-\tilde{R}^{0}_{3\cdot 43}=0
\end{aligned}$$

pourvu que la relation $\tilde{H}_{ij}=\delta_{ij}$ soit vérifiée.

D'autre part, par la dérivation éxtérieur de (8. 1), on obtient

$$\left(\frac{\partial R^{\tau}_{\sigma\cdot ij}}{\partial u^k}+\Gamma^{\tau}_{\rho k}R^{\rho}_{\sigma\cdot ij}-\Gamma^{\rho}_{\sigma k}R^{\tau}_{\rho\cdot ij}\right)du^k\wedge du^i\wedge du^j=0$$
$$(\sigma,\ \tau=0,\ 1,\ \cdots,\ n+1).$$

En particulier, si l'on y fait $\sigma=0$ ou $\tau=n+1$ il vient

$$\begin{aligned}
&R^{\tau}_{k\cdot ij}+R^{\tau}_{i\cdot jk}+R^{\tau}_{j\cdot ki}=0,\\
&R_{\sigma kij}+R_{\sigma ijk}+R_{\sigma jki}=0
\end{aligned}$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{aligned}
&R^{0}_{k\cdot ij}+R^{0}_{i\cdot jk}+R^{0}_{j\cdot ki}=0, \ R_{n+1,kij}+R_{n+1,ijk}+R_{n+1,jki}=0,\\
&R_{\iota kij}+R_{\iota ijk}+R_{\iota jki}=0, \ R_{k\iota ij}+R_{i\iota jk}+R_{j\iota ki}=0.
\end{aligned}$$

Il est facile de voir que ces équations sont vérifiées même quand on remplace R par $\tilde{R}$.

Donc, on peut exprimer, par exemple, $\tilde{R}_{\iota 112}$, $\tilde{R}_{\iota 212}$, $\tilde{R}_{\iota 312}$, $\tilde{R}_{\iota 412}$ respectivement par les combinaisons linéaires de

$$\tilde{R}_{\iota 324},\ \tilde{R}_{\iota 424}\ ;\ \tilde{R}_{\iota 313},\ \tilde{R}_{\iota 414}\ ;\ \tilde{R}_{\iota 123},\ \tilde{R}_{\iota 213}\ ;\ \tilde{R}_{\iota 124},\ \tilde{R}_{\iota 214}.$$

Nous voyons ainsi que *l'arête principale correspondant à une droite d de l'espace $A_1A_2A_3A_4$ peut être déterminée au moyen des* *hyperplans appartenant aux étoiles principales qui correspondent aux droites de la congruence linéaire dont les directrices sont la droite d et sa conjuguée d′ par rapport à l'hyperquadrique de Lie en* z_0.

Institute of Mathematics, Nihon University

REFERENCES

[1] J. Kanitani. Sur la structure projective d'espace fibré. (Annali di Matematica. (IV) Vol. LVII, 1962).

[2] J. Kanitani, S. Takizawa. Quelques remarques sur la structure projective d'espace fibré. Mem. Col. Sci. Univ. Kyoto. Ser. A, Vol. XXXII (Math), 1960).

[3] A. Lichnerowitz. Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie.