J. Math. Kyoto Univ.
4-2 (1965) 255-282

Sur une propriété des familles de fonctions analytiques de deux variables complexes

Par

Toshio NISHINO

Dédié à Monsieur le Professeur A. Kobori,
à l'occasion de son soixantième anniversaire.

Introduction

Le but de ce mémoire est de montrer qu'une famille de fonctions analytiques dans un domaine univalent de plusieurs variables complexes est normale si elle est normale par rapport à chaque variable. Cet énoncé, que nous avons rencontré dans la recherche sur l'itération des transformations rationnelles d'une forme particulière dans l'espace de deux variables complexes, est du même genre que le théorème, bien connu et obtenu par *Hartogs*[1] en 1906, qui énonce que la fonction qui est holomorphe par rapport à chaque variable est holomorphe par rapport à tous les variables. Notre résultat sera donc démontré selon l'idée de *Hartogs*. Mais, au cas des familles de fonctions méromorphes, il est indispensable, je crois, d'étudier beaucoup plus minutieusement les suites de surfaces analytiques. Pour cela, les théorèmes établis par *Oka*[2] en 1934 jouent un rôle très important.

Dans ce mémoire, nous nous bornons au cas de deux variables complexes ; car, un certain théorème d'*Oka* n'a été établi jusqu'aujourd'hui qu'au cas de deux variables. Mais, pour les familles normales de fonctions holomorphes, notre théorème sera montré

---

1) Hartogs, Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlichen, insbesondere über die Darstellung derselben durch Reihen, welche Potenzen einer Veränderlichen fortschreiten. (Math. Annalen, p 12).

2) Oka, Note sur les familles de fonctions analytiques multiformes etc. (J. of Hiroshima Univ.).

au cas d'un nombre quelconque de variables, par la même mode de raisonnement que nous allons exposé au cas de deux variables.

1. Lemme fondamental.

Considérons, dans l'espace de deux variables complexes x et y, une suite infinie de fonctions

$$(1) \qquad f_1(x, y),\ f_2(x, y),\ f_3(x, y),\ \cdots,$$

qui sont holomorphes sur un dicylindre fermé (C_1, C_2) de la forme $|x| \leqq r$, $|y| \leqq \rho$[3]; (C_1, C'_2) étant un autre dicylindre concentrique dont C'_2 : $|y| \leqq \rho'$ avec $\rho' < \rho$. Alors, on a le

Lemme I. *Si elle converge uniformément sur un ensemble fermé défini par* $|x| = r$, $|y| = \rho'$ *et que, pour tout* x' *sur le contour de* C_1, *la suite de fonctions de* y

$$(2) \qquad f_1(x', y),\ f_2(x', y),\ f_3(x', y), \cdots$$

converge uniformément sur $|y| = \rho$, *alors elle converge uniformément dans l'intérieur de* (C_1, C_2).[4]

En effet, chaque fonction de la suite (1) peut se développer en série de *Hartogs* dans le dicylindre:

$$f_i(x, y) = a_0^i(x) + a_1^i(x)y + a_2^i(x)y^2 + \cdots \qquad (i = 1, 2, \cdots).$$

Les coefficients $a_\mu^i(x)$ $(i = 1, 2, \cdots; \mu = 0, 1, \cdots)$, qui sont holomorphes sur C_1, peuvent s'évaluer à l'aide de l'intégrale de *Cauchy*:

$$(3) \qquad |a_\mu^i(x)| \leqq \frac{M}{\rho'^\mu} \qquad (i = 1, 2, \cdots, \mu = 0, 1, \cdots),$$

avec une constante positive M, puisque les fonctions de la suite (1) sont bornées en modules uniformément en (C_1, C'_2).

Il en résulte que les fonctions

$$(4) \qquad \frac{1}{\mu}\log|a_\mu^i(x)| \qquad (i = 1, 2, \cdots; \mu = 0, 1, \cdots)$$

---

3) On dit qu'une fonction f est holomorphe sur un ensemble fermé E s'il y a un voisinage de E dans lequel f est holomorphe.

4) Cela vaut dire qu'elle converge uniformément dans toute aire interiéur à (C_1, C_2).

sont bornées uniformément dans C_1 ; on désigne par A la borne supérieure. D'autre part, on a

$$|a_\mu^i(x)| \leqq \frac{M(x)}{\rho^\mu} \qquad (i=1, 2, \cdots ; \mu=0, 1, \cdots),$$

où $M(x)$ est une fonction réelle positive sur $|x|=r$, puisque les fonctions de la suite (2) sont bornées en modules uniformément snr C_2 pour chaque x' sur le contour de C_1. Il en resulte que, ρ_1, étant donné avec $\rho'<\rho_1<\rho$, pour chaque x sur le contour de C_1, on peut lui faire correspondre un entier $N(x)$ tel que, pour $\mu \geqq N(x)$, on a

$$(5) \qquad \frac{1}{\mu}\log|a_\mu^i(x)| < \log\frac{1}{\rho_1}. \qquad (i=1, 2, \cdots)$$

Posons dans C_1

$$\varphi_\mu(x) = \sup_i \frac{1}{\mu}\log|a_\mu^i(x)| \qquad (\mu=0, 1, \cdots)$$

et encore posons

$$\psi_\mu(x) = \max\left[\varphi_\mu(x) - \log\frac{1}{\rho_1},\ 0\right] \qquad (\mu=0, 1, \cdots).$$

Ce sont des fonctions réelles et mesurable qui satisfont des inégalités

$$(6) \qquad \psi_\mu(x) \leqq A - \log\frac{1}{\rho_1} \qquad (\mu=0, 1, \cdots)$$

et

$$(7) \qquad \varphi_\mu(x) \leqq \log\frac{1}{\rho_1} + \psi_\mu(x) \qquad (\mu=0, 1, \cdots)$$

Considérons, pour chaque μ ($\mu=0, 1, \cdots$), l'ensemble σ_μ des points dans l'intervalle $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ d'une variable réelle θ, où $\psi_\mu(re^{i\theta}) > 0$, et désignons par $m(\sigma_\mu)$ leurs mesures. Évidemment la suite $m(\sigma_\mu)$, tend vers 0 lorsque μ augmente indéfiniment puisqu'il n'y a aucun point qui appartient à une infinité de σ_μ.

Or, les fonctions (4) étant subharmoniques dans C_1, on peut lui appliquer l'intégrale de *Poisson* dans C_1 comme

$$\frac{1}{\mu}\log|a_\mu^i(x)| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r^2-\xi^2}{r^2-2r\xi\cos(\theta-\eta)+\xi^2}\frac{1}{\mu}\log|a_\mu^i(re^{i\theta})|\,d\theta$$
$$(i=1,\ 2,\cdots;\ \mu=0,\ 1,\cdots)$$

où $x=\xi e^{i\eta}$. Donc, en additionnant les inégalites (6) et (7), si on considére seulement les points x tels que $|x|\leqq r'<r$, on aura

$$\frac{1}{\mu}\log|a_\mu^i(x)| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r^2-\xi^2}{r^2-2r\xi\cos(\theta-\eta)+\xi^2}\psi_\mu(re^{i\theta})d\theta$$
$$\leqq \log\frac{1}{\rho_1}+A\frac{r+r'}{r-r'}m(\sigma_\mu) \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ \mu=0,\ 1,\ \cdots)$$

D'où, ρ_2 $(\rho'<\rho_2<\rho_1)$ et ε $(\varepsilon>0)$ étant donnés tellement que $e^\varepsilon\rho_2<\rho_1$, on peut leur faire correspondre un entier N_0 tel que, pour $\mu\geqq N_0$ on ait

$$A\frac{r+r'}{r-r'}m(\sigma_\mu)<\varepsilon$$

et par suite

$$(8) \qquad |a_\mu^i(x)| \leqq \left(\frac{e^\varepsilon}{\rho_1}\right)^\mu \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ \mu=N_0,\ N_0+1,\ \cdots)$$

D'après (3) et (8), si on considére seulement dans un dicylindre $(C_1',\ C_2'')$ de la forme $|x|<r',\ |y|<\rho_2$, on a

$$|f_i(x,\ y)| \leqq M\left[1+\frac{\rho_2}{\rho'}+\cdots+\left(\frac{\rho_2}{\rho'}\right)^{N_0-1}\right]+\left(\frac{e^\varepsilon\rho_2}{\rho_1}\right)^{N_0}+\left(\frac{e^\varepsilon\rho_2}{\rho_1}\right)^{N_0+1}$$
$$+\cdots \leqq M\frac{\rho'(\rho_2{}^{N_0}-\rho'^{N_0})}{\rho'^{N_0}(\rho_2-\rho')}+\frac{\rho_1(e^\varepsilon\rho_2)^{N_0}}{\rho_1{}^{N_0}(\rho_1-e^\varepsilon\rho_2)} \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots).$$

Cela signifie que les fonctions de la suite (1) sont bornées en modules uniformément dans $(C_1',\ C_2'')$. Donc la suite (1) y converge uniformément. C. Q. F. D.

Dans tout le cours du Mémoire, ce lemme joue un rôle capital.

Sous la même configuration géométrique, considérons une suite infinie de surfaces analytiques dans un voisinage du dicylindre fermé $(C_1,\ C_2)$[5)]

---

5) Un ensemble S de points dans un domaine s'appelle une surface analytique si elle définie localement par zéro d'une fonction holomorphe.

(9) $$S_1,\ S_2,\ S_3,\ \cdots.$$

Pour une surface analytique S, on désignera par $S(x')$ la projection sur le plan de la variable y de l'ensemble des points communs de la surface S et de la droite analytique de la forme $x=x'$. Pareillement, on considérera $S(y)$.

Si toute surface analytique S_μ appartenant à la suite (9) *n'a aucun point dans (C_1, C_2') à partir de certain rang N et que, pour chaque x' sur le contour de C_1, tout $S_\mu(x')$ devient vide dès que μ dépasse un entier assez grand qui peut dépendre de x', alors pour tout dicylindre (C_1', C_2'') de la forme $|x|\leqq r'$, $|y|\leqq \rho_1$ $(r'<r,\ \rho'<\rho_1<\rho)$ dans (C_1, C_2) on peut lui faire correspondre un entier N_0 tel que, pour tout $\mu\geqq N_0$, S_μ n'ait aucun point dans (C_1', C_2'').*

En effet, soient $d_\mu(x)$ $(\mu=N,\ N+1,\ N+2,\ \cdots)$ les distances de l'origine à $S_\mu(x)$ sur le plan y, et posons

$$\varphi_\mu(x)=\min[\log d_\mu(x),\ \log \rho].$$

Ce sont des fonctions surharmoniques de x dans C_1, et $\varphi_\mu(x)\geqq \log\rho'$. Pour chaque μ, soit σ_μ l'ensemble des points dans l'intervalle $0\leqq\theta\leqq 2\pi$ de la variable réelle θ, où $\varphi_\mu(re^{i\theta})<\log\rho$, et soit $m(\sigma_\mu)$ sa mesure. Évidemment la suite $m(\sigma_\mu)$ tend vers 0 lorsque μ augmente indéfiniment puisqu'il n'y a aucun point qui appartient à une infinité de σ_μ.

Or, d'après l'intégrale de *Poisson*, si l'on considére seulement les points $x=\xi e^{i\eta}$ tels que $|x|\leqq r'<r$, on aura en ces points

$$\varphi_\mu(x)\geqq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r^2-\xi^2}{r^2-2r\xi\cos(\theta-\eta)+\xi^2}\varphi_\mu(re^{i\theta})d\theta$$
$$\geqq\log\rho-\log\rho'.\frac{r-r'}{r+r'}.m(\sigma_\mu)$$

Il en résulte que, ρ_1 $(\rho'<\rho_1<\rho)$ étant donné, on peut lui faire correspondre un entier N_0 tel que, pour $\mu\geqq N_0$ et $|x|\leqq r'$, on ait

$$\varphi_\mu(x)\geqq\log\rho_1.$$

Ceci signifie que S_μ n'a aucun point dans le dicylindre (C_1', C_2'') dès que $\mu\geqq N_o$. C. Q. F· D.

D'après l'énoncé ci-dessus, sous les mêmes notations précédentes on a le

Lemme II. *Si, pour chaque x' dans C_1, il y a un entier $N(x')$ tel que, pour $\mu \geqq N(x')$, $S_\mu(x')$ ne contiennent aucun point, et s'il en soit ainsi pour y' dans C_2, alors, pour tout dicylindre (C_1', C_2'') de la forme $|x| \leqq r'$, $|y| \leqq \rho_1$ dans (C_1, C_2), on peut trouver un entier N_0 tel que, pour $\mu \geqq N_o$, S_μ n'aient aucun point dans (C_1', C_2'').*

En effet, d'après le théorème de *Baire*, il y a un entier N_1 et un domaine δ_1 dans C_1 de façon que l'ensemble des points x', où $S_\mu(x')$ est vide pour $\mu \geqq N_1$, soit partout dense dans δ_1, Il en est ainsi pour la seconde variable y et on désigne par N_2 un tel entier et par δ_2 un tel domaine, correspondants à y. Alors, étant N_3 le plus grand des entier N_1 et N_2, S_μ n'a aucun point dans le domaine cylindrique (δ_1, δ_2) pour $\mu \geqq N_3$. Car, si S_μ $(\mu \geqq N_3)$ avait un point (x_o, y_o) dans (δ_1, δ_2), on pourait, grâce à *Weierstrass*, exprimer S_μ au voisinage de (x_o, y_o) par

$$(x-x_o)^m[y^n+a_1(x)y^{n-1}+\cdots+a_n(x)]=0,$$

où m et n sont des entiers non négatifs et $a_i(x)$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ sont des fonctions holomorphes autour de x_o. On en déduit une contradiction.

Il en résulte, d'après l'énoncé plus haut, que pour tout cercle C_1' : $|x| \leqq r'$ $(r'<r)$ et δ_2' $(\delta_2' \ll \delta_2)$ on peut trouver un entier N_o' tel que, pour $\mu \geqq N_o'$, S_μ n'ait aucun point dans (C_1', δ_2') puisqu'on peut supposer que δ_1 contient un cercle $|x| \leqq r_0$, $(r_0>0)$, (en faisant une transformation linéaire de C_1, si nécessaire). En continuant le même raisonnement, on peut démontrer le lemme facilement.

C. Q. F. D.

2. Les suites de fonctions holomorphes.

Considérons une suite infinie de fonctions

$$(1) \qquad f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y), \cdots$$

holomorphes dans un domaine quelconque D[6] dans l'espace de x et y.

6) Dans ce qui suite, il est toujour connexe.

On dit qu'elle converge uniformément en un point (x', y') de D s'il y a un voisinage U de (x', y') dans D, dans lequel elle converge uniformément. Elle peut tendre unifornément vers l'infini. Si elle converge uniformément en tout point de D, d'après le théorème de *Borel-Lebesgu*, elle converge uniformément dans l'intérieur de D, et la limite est une fonction holomorphe dans D ou bien se réduit à une constante infinie.

Un ensemble de tous les points (x', y) qui apartient à D pour x' fixe d'ailleurs quelconque s'appelle, s'il exite, section de D par la droite analytique $x=x'$, que l'on désigne par $D(x')$. Pareillement on désigne par $D(y')$ la section de D par une droite analytique $y=y'$.

Si, pour tout x', la suite de fonctions de y

$$f_1(x', y),\ f_2(x', y),\ f_3(x', y),\ \cdots$$

converge uniformément dans l'intérieur de $D(x')$, pourvu qu'il ne soit pas vide, et si, pour tout y', il en est ainsi pour la suite de fonctions de x

$$f_1(x, y'),\ f_2(x, y'),\ f_3(x, y'),\ \cdots$$

alors je dit que la suite (1) converge uniformément en tout point de D.

La suite de fonctions holomorphes s'appelle converge uniformément par rapport à chacune des variables x et y dans l'intérieur de D si elle satisfait à la condition ci-dessus.

Suppons tout d'abord que la suite (1) tend toujours vers à un nombre fini en chaque point de D.

Prenens un point quelconque (x_0, y_0) dans D et décrivons autour ce point un dicylindre fermé (C_1, C_2) de la forme $|x-x_0|\leqq r_1$, $|y-y_0|\leqq r_2$, dans D. Pour chaque x' dans C_1 les fonctions $f_i(x', y)$ $(i=1, 2, \cdots)$ étant bornées uniformément en modules sur C_2, comme on sait bien, d'après le théorème de *Baire*, il y a un nombre N et un domaine δ dans C_1 tels que l'ensemble des points x' pour lesquels on a, dans C_2

$$|f_i(x', y)|\leqq N \qquad (i=1, 2, \cdots)$$

soit partout dense dans δ. De plus, cet ensemble contient tout point de δ puisque les fonctions $|f_i(x, y)|$ $(i=1, 2, \cdots)$ sont continues. Autrement dit, les fonctions de la suite (1) sont bornées uniformément en modules dans (δ, C_2), elle donc converge uniformément dans (δ, C_2).

Comme on peut supposer que δ contient un cercle $|x|<\rho$ $(\rho >0)$ (si necessaire, en faisant une transformations linéaire de C_1), d'après le lemme I, elle converge uniformément dans l'intérieur de (C_1, C_2).

Supposons, maintenant, qu'il y a un point (x', y') dans D tel que la suite (1) tend vers l'infini en ce point. Alors, il est évident que la suite (1) converge vers l'infini en tout point dans D. Soit (x_o, y_o) un point quelconque de D, et soit (C_1, C_2) un dicylindre fermé de la forme $|x-x_o|\leqq r_1$, $|y-y_o|\leqq r_2$, dans D. D'après l'-hypothèse, à chaque x' dans C_1, on peut faire correspondre un entier $N(x')$ tel que pour $\mu\geqq N(x')$, $f_\mu(x', y)$ n'ait aucun zéro dans C_2 et il en est ainsi pour y' dans C_2.

D'après le lemme II, pour tout dicylindre (C'_1, C'_2) de la forme $|x-x_o|\leqq r'_1$, $|y-y_o|\leqq r'_2$ $(r'_1<r_1,\ r'_2<r_2)$ dans (C_1, C_2) on peut trouver un entier N_o tel que, pour $\mu\geqq N_o, f_\mu(x,y)$ y n'ait aucun zéro.

Considérons la suite de fonctions

$$\frac{1}{f_{N_0}(x, y)},\ \frac{1}{f_{N_0+1}(x, y)},\ \frac{1}{f_{N_0+2}(x, y)},\ \cdots\cdots$$

Elle est une suite de fonctions holomorphes dans (C'_1, C'_2) qui converge uniformément vers 0 par rapport à chacune des variables x et y. Il en resulte qu'elle converge unifrmément vers 0 dans l'intérieur de (C'_1, C'_2).

D'après ce que nous avons dit jusqu'ici, on a le

Théorème I. *Une suite infinie de fonctions holomorphes dans un domaine D dans l'espace de x et y converge uniformément dans l'intérieur de D si elle converge uniformément par rapport à chacune des variabls x et y dans l'intérieur de D.*

3. Les familles de fonctions holomorphes.[7]

7) Pour les détails sur les famille normales de fonctions analytiques d'une variable complexe, voir, par exemple, Julia : Leçons sur les fonctions uniformes.

Considérons une famille $\{f(x, y)\}$ de fonctions holomorphes dans un domaine D dans l'espace de x et y. On dit que c'est une famille normale dans ce domaine si, de toute suite infinie

$$f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y), \cdots\cdots$$

de fonctions appartenant à la famille, on peut en extraire une suite nouvelle convergeant uniformément dans l'intérieur de D; cette limite sera une fonction holomorphe dans D; mais elle peut tendre uniformément vers l'infini. On dit que la famille est normale en un point dans D si elle est normale dans un voisinage de ce point. Il est évident qu'une famille qui est normale en tout point de D est normale dans D.

En 1926[8], *Julia* a montré une propriété importante par rapport au ensemble de tous les points où une famille de fonctions holomorphes cesse d'être normale. Dans ce mémoire, on étudie la relation entre la normalité dans l'espace de x et y et celle par rapport à chacune des variables x et y.

On dira que la famille $\{f(x, y)\}$ de fonctions holomorphes est normale par rapport à chacune des variables x et y dans D si, pour chaque x' la famille $\{f(x', y)\}$ de fonctions holomorphes de la variables y est normale dans $D(x')$, pourvu qu'il n'est pas vide et qu' il en est ainsi pour la famille $\{f(x, y')\}$ de fonctions holomorphes de la variable x, pour tout y'.

Soit

$$(1) \qquad f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y), \cdots\cdots$$

une suite infinie quelconque de fonctions appartenant à une famille normale par rapport à chacune des variables x et y.

Supposons, d'abord, que les fonctions de la suite soient bornées en module en chaque point dans D. D'après le théorème de *Baire*, comme les fonctions $|f_i(x, y)|$ $(i=1, 2, \cdots)$ sont continues, il y a un domaine δ dans D tel que les fonctions de la suite soient bornées uniformément en modules dans δ. Donc, d'après le théorème de *Montel*, on peut extraire de la suite une suite nouvelle conver-

8) Julia, Sur les familles de fonctions analytiques de plusieurs variables (Acta Mathematica).

geant uniformément dans l'intérieur de δ.

En la désignant par

$$(2) \qquad f_{i_1'}(x,\ y),\ f_{i_2'}(x,\ y),\ f_{i_3'}(x,\ y),\ \cdots$$

je dit qu'elle converge uniformément dans l'intérieur de D.

En effet, en prenant un point $(x_o,\ y_o)$ dans δ, soit $(C_1,\ C_2)$ un dicylindre fermé de la forme $|x-x_o|\leqq r_1,\ \ |y-y_o|\leqq r_2$ dans D et soit $(C_1,\ C_2')$ un dicylindre fermé dont C_2': $|y-y_o|\leqq r_2'$ $(r_2'<r_2)$ suité dans δ, alors, d'après le lemme I, la suite (2) converge uniformément dans l'intérieur de $(C_1,\ C_2)$, puisque, pour chaque x' dans C_1 la suite de fonctions de y

$$f_{i_1'}(x',\ y),\ f_{i_2'}(x',\ y),\ f_{i_3'}(x',\ y),\ \cdots\cdots$$

soit, comme on sait bien, converge uniformément dans C_2. En continuant ce raisonnement on peut démontrer facilement cet énoncé.

Supposons, maintenant, qu'il y ait un point $(x_o,\ y_o)$ dans D tel que les valeurs en $(x_o,\ y_o)$ de fonctions de la suite (1) ne soient pas bornées en module. On peut, alors, extraire de la suite une situé nouvelle qui converge vers l'infini en (x_o, y_o). Désignons les par

$$f_{i_1'}(x,\ y),\ f_{i_2'}(x,\ y),\ f_{i_3'}(x,\ y),\ \cdots\cdots$$

on peut voir facilement qu'elle tend vers l'infini en chaque point de D. De plus, pour chaque x', la suite de fonctions de y

$$f_{i_1'}(x',\ y),\ f_{i_2'}(x',\ y),\ f_{i_3'}(x',\ y),\ \cdots\cdots$$

tend vers l'infini uniformément dans l'intérieur de $D(x')$, pourvu qu'il n'est pas vide, et qu'il en est ainsi pour y'. Il en resulte, d'après le théorème I, qu'elle converge uniformément vers l'infini dans l'intérieur de D. On a donc établi le

Théorème II. *Une famille de fonctions holomorphes dans un domaine D dans l'espace de x et y est normale dans D, si elle est normale par rapport à chacune des variables x et y dans D.*

La réciproque est évidemment vraie.

4. Les suites de surfaces analytiques.

Pour établir le même énoncé dans le champ des fonctions méromorphes, nous allons traiter les suites de surfaces analytiques en plus détail.

D'abord, indiquons rapidement les notions et les propriétés générales d'ensembles pseudoconcaves que on a établi jusqu'ici.[9)]

Un ensemble E de points dans un domaine D dans l'espace de x et y est appelé ensemble pseudoconcave dans D s'il est fermé relativement à D et s'il satisfait à deux conditions suivantes : 1) il satisfait au théorème de la continuité,[10)] 2) cette propriété de E admet toute transformation pseudoconforme biunivoque de l'espace de x et y au voisinage de tout point de E.

Il résulte immédiatement de la définition que :

Étant donné une famille (E) d'une infinité d'ensembles pseudoconcaves dans un domaine D et étant E_0 la limite[11)] de tout E appartenant à (E), alors E_0 est aussi pseudoconcave dans D.

En général, soit S un ensemble de points dans l'espace de x et y on appelle section de S par la droite analytique $x=x'$ l'ensemble des points y tels que $(x', y)\in S$, et on la désigne par $S(x')$ dans ce qui suit.

Théorème A.[12)] *Considérons un ensemble pseudoconcave E dans un domaine cylindrique de la forme $x\in U$, $|y|<\infty$, U étant un domaine sur le plan de x. Supposons que la section $E(x')$ soit toujours bornée pour tout x' dans U. Si, pour tout x' appartenant à un ensemble de capacité non nulle dans U, la section $E(x')$ ne contient au plus qu'un nombre fini de points qui peuvent change avec x', il en est ainsi pour tout x de U, et cela de façon que $E(x)$ consiste des fonctions algébroïdes en nombre fini dans U.*

Cet énoncé a obtenu, en 1934 par *Oka*, par la généralisation du théorème de *Hartogs* que l'on connait bien.

---

9) Pour les détails voir ; [1] Oka, Note sur les familles de fonctions analytiques multiformes etc. (J. of Hiroshima Univ. 1934) ; [2] T. Nishino, Sur les ensembles pseudoconcaves (J. of Math. of Kyoto Univ. 1962) ; [3] T. Nishino, Sur les familles de surfaces analytiques (J. of Math. of Kyoto Univ. 1962).

10) Voir [2] p. 227.

11) Cela veut dire que dans tout voisinage d'un point quelconque de E il existe une infinité d'ensembles de la famille admettant l'existence au moins d'un point dans le voisinage.

12) Voir [1] page 98, ou [2] page 234.

Considérons, à nouveau, un ensemble pseudoconcave E dans un domaine D. On dit qu'un point de E est de première espèce s'il y a un voisinage δ de ce point et une fonction holomorphe $f(x, y)$ dans δ de façon que la partie de E soit reprèsentée dans ce voisinage δ par l'équation $f(x, y)=0$. Dans le cas contraire, on le dit de deuxième espèce. On dit que l'ensemble formé de tous les points de deuxième espèce de E l'ensemble dérivé de l'ensemble pseudoconcave E.

Théorème B.[13] *L'ensemble dérivé d'un ensemble pseudoconcave E dans un domaine D est, s'il existe, aussi pseudoconcave dans D.*

Il s'agit maintenant de la surface analytique. Considérons une surface analytique dans un domaine D de l'espace de x et y. On peut considérer la projection de S sur le plan de x et celle sur le plan y. Alors, comme on peut facilement voir, l'aire d'une surface analytique dans D est la somme de l'aire de la projection de la surface sur le plan de x et celle sur le plan de y.[14]

Considérons, ensuite, une suite de surfaces analytiques

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ \cdots$$

dans un domaine dans l'espace de x et y. On dit qu'elle converge analytiquement en un point dans D, si l'on peut trouver un dicylindre γ autour du point et une suite de fonctions holomorphes

$$f_1(x,\ y),\ f_2(x,\ y),\ f_3(x,\ y),\ \cdots\cdots$$

convergeant uniformément vers une fonction holomorphe qui n'est pas la constante nulle dans γ, de manière que la partie de S_i s'-exprime dans γ par l'équation

$$f_i(x,\ y)=0 \qquad\qquad (i=1,\ 2,\ \cdots).$$

Si elle converge analytiquement en tout point de D, elle converge analytiquement dans l'intérieur de D. Dans ce cas, la limite de la suite est aussi une surface analytique dans D.

Théorème C. *Considérons une suite de surfaces analytiques dans un domaine D. Alors, l'ensemble de tous les points dans D où la suite-ci ne converge pas analytiquement est pseudoconcave dans D.*

---

13) Voir [2], page 240.
14) Voir [3], page 369.

Ceci est facilement démontre.

Nous nous emploierons les mêmes mots que l'on emploie pour la suite de surfaces analytiques pour la suite de l'ensembles de points zéros de la fonctions holomorphes d'une variable sur le plan de la variable. Il est évident, de la définition, qu'une suite infinie Z_i $(i=1, 2, \cdots)$ d'ensembles de points zéros de fonctions holomorphes dans un domaine $\varDelta$ sur le plan de x converge analytiquement dans l'intérieur de $\varDelta$ si et seulement si, pour tout domaine $\varDelta'$ $(\varDelta' \subset\subset \varDelta)$, elle a un nombre fini au plus de points comme leur limite dans $\varDelta'$ et en désignant les par $x_1, x_2, \cdots, x_n$, on peut écrit les cercles $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$, ayant pour centors les points $x_1, x_2, \cdots, x_n$ intérieur à $\varDelta$ et exterieur deux à deux et de la rayon suffisament petite de façon que tout Z_i ait même nombre[15] de points dans chaque γ_j $(j=1, 2 \cdots, n)$ dès que i surpasse un certaine rang.

On en introduire la notion de famille normale de surfaces analytiques comme d'habitude. Ceci est évidemment équivalente à la notion d' *Oka*.[16]

Théorème D.[17] *Pour qu'une famille de surfaces analytiques dans un domaine D dans l'espace de x et y soit normale en un point de D il faut et li suffit que la famille soit bornée en aire au voisinage de ce point.*

Or, considérons, dans un voisinage d'un dicylindre fermé (C_1, C_2) de la forme $|x| \leqq r_1$, $|y| \leqq r_2$, une suite infinie d'ensembles pseudoconcaves

$$E_1, E_2, E_3, \cdots$$

et désignons la limite de la suite par E_0. D'autre part, considérons pour chaque x' dans C_1 la limite de la suite de sections

$$E_1(x'), E_2(x'), E_3(x'), \cdots$$

de E_i $(i=1, 2, \cdots)$ par la droite $x=x'$, que l'on désigne par $K(x')$.

Théorème E. *Sur une courbe de Jordan rectifiable donnée arbitrairement dans C_1, l'ensemble de tous les points tels que la fron-*

15) Un point zéro d'ordre ν se calcure ν fois.
16) Voir [1], page 94.
17) Voir [3], page 371.

tière de $E_o(x)$ *existe dans* C_2 *et ne soit pas contenue dans celle de* $K(x)$ *est toujours de mesure nulle.*

Ce théorème a été énoncé, en 1934, par *Oka* sans démonstration.[18] Nous allons donc le démontrer ici.

Supposons qu'il y ait une courbe l de *Jordan* rectifiable dans C_1 tel que l'ensemble des points en quéstion, que l'on désigne par σ, soit de mesure non nulle.

En désignant par $d(y, S)$ la distance de y à un ensemble S de points sur le plan de y, on va montrer, d'abord, qu'il existe un point y_0 sur le plan de y qui satisfait à la condition suivante: l'-ensemble de tous les points ξ sur l tels que y_o soit situé en dehors de $E_o(\xi)$ et que $d(y_o, E_o(\xi))$ soit plus petite que $d(y_o, K(\xi))$ est de mésure non nulle.

En effet, pour chaque point ξ de σ, il y a au moins un point y' sur le plan de y tel que $d(y', E_o(\xi))<d(y', K(\xi))$. On peut prendre, comme tel point, un point rationnel[19] Si, pour tout point rationnel η sur le plan de y, l'ensemble de tous les points x de σ tels que $d(\eta, E_o(x))<d(\eta, K(x))$ est toujours de mesure nulle, σ doit être nécessairement de mesure nulle, puisque la somme d'une infinité denombrable d'ensembles de mesure nulle est aussi de mesure nulle.

Soit y_o un point comme ci-dessus. On peut dire qu'il y a un nombre positif δ_o, tel que l'ensemble de tous les points ξ sur l qui satisfait à l'inégalité $d(y_o, E(\xi))<d(y_o, K(\xi))-\delta_o$ soit de mesure non nulle. On désigne, de nouveau, par σ un ensemble de tous les points ξ comme ci-dessus.

Prenons, ensuite, un point de l tel que l'ensemble de tous les points de σ qui sont situé dans un voisinage quelconque de ce point soit toujours de mesure non nulle. Il existe certainement; désignons le par ξ_o. Prenons, encore, un voisinage U de ξ_o tel que y_o soit toujours situé en dehors de $E_o(x)$ pour chaque x dans U. Il est possible évidemment. De plus, on peut supposer sans rest-

---

18) Voir [1] page 97.

19) C'est-à-dire, l'affixe de ce point a des nombres rationnelles comme partie réelle et imaginaire à la fois.

reindre la généralité que la courbe l soit un courbe de *Jordan* rectifiable simple et fermé qui situé dans U.

Soit γ un domaine simplement connexe dans C_1 limité par l, et considérons dans ce domaine des fonctions

$$\varphi_i(x) = \log d(y_o,\ E_i(x)).$$

Ces fonctions, étant bien définies certainement pour $i=0$ et pour $i \geqq N$, dont N est une entière positive assez grande, sont, grâce à *Hartogs*, surharmoniques, bornées unifmément et mesurables sur l. Désignons la borne inférieure par B.

Représentons γ conformément au cercle unité du plan de z par une fonction $x=\nu(z)$ et posons $z=\omega(x)$ la fonction inverse de $\nu(z)$. Alors, d'après le théorème de *Carathèodory*, la correspondance entre ces contours est biunivoque et bicontinue ; de plus, en désignant par σ' l'ensemble des points sur $|z|=1$ qui correspondent aux points de σ, on voit, grâce au théorème de *Riesz*, que σ' est de mesure non nulle.

Définissons une fonction ψ pour $z=e^{i\theta}$ par

$$\begin{aligned} \psi(e^{i\theta}) &= \varphi_o[\nu(e^{i\theta})] + \delta_o && \text{aux points de } \sigma', \\ &= B && \text{en dehors de } \sigma'. \end{aligned}$$

L'intégrale de *Poisson*

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-\zeta^2}{1-2\zeta\cos(\theta-\eta)+\zeta^2} \psi(e^{i\theta}) d\theta$$

donne une fonction Φ de $z=\zeta e^{i\eta}$. Pour cette fonction, d'après le théorème de *Riesz*, il existe un point $z'=e^{i\alpha}$ de σ' tel que

$$\underset{\zeta \to 1}{\text{limite}}\ \Phi(\zeta e^{i\alpha}) = \psi(e^{i\alpha}).$$

D'autre part, d'après le théorème d'*Oka*

$$\inf \underset{\zeta \to 1}{\text{limite}}\ \varphi_o[(\nu(\zeta e^{i\alpha})] = \varphi_o[\nu(e^{i\alpha})].$$

Il en resulte qu'il existe un point z_o et son voisinage γ_o dans le cercle unité tels que, pour tout z dans γ_o,

$$\Phi(z) > \varphi_o[\nu(z_o)] + \rho$$

ρ étant une constante positive suffisamment petite, puisque $\Phi(z)$ est une fonction continue dans le cercle unité.

Soit, pour chaque μ avec $\mu \geqq N$, l'ensemble τ_μ des points dans l'intervalle $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ de la variable réelle θ, où $\varphi_\mu[\nu(e^{i\theta})] < \psi(e^{i\theta})$ et soit $\mathrm{m}(\tau_\mu)$ sa mesure. Évidemment la suite $\mathrm{m}(\tau_\mu)$ tend vers 0 lorsque μ augment indéfiniment puisqu'il n'y a aucun point qui appartient à une infinité de τ_μ. Donc, au moyen de l'intégrale de *Poisson*, on peut conclut que, pour ρ' avec $0 < \rho' < \rho$ on peut faire correspondre une entiere N_0 tel que, pour $\mu \geqq N_0$ et $z \in \gamma_0$, on ait

$$\varphi_\mu[\nu(z)] > \varphi_0[\nu(z_0)] + \rho',$$

autrement dit, il n'y a aucun point appartenant à E_μ qui converge vers un point (x_0, y') dont $d(y_0, y') = \varphi_0(x_0)$ et $x_0 = \nu(z_0)$. Ce qui est contraire à l'hypothèse. C. Q. F. D.

On remarque ici que l'ensemble des points qui est traite dans ce théorème ne contient aucun continium sur la frontière d'un domaine simplement connexe quelconque dans C_1. On peut le voir facilement selon le même raisonnement comme ci-dessus.

Nous allons appliquer le théorème à une suite de surfaces analytiques dans un dicylindre.

Lemme III. *Étant donnéz une suite infinie de surfaces analytiques*

$$S_1,\ S_2,\ S_3, \cdots \tag{1}$$

dans un voisinage V d'un dicylindre fermé (C_1, C_2) de la forme $|x| \leqq r_1$, $|y| \leqq r_2$. Si elle converge analytiquement dans un dicylindre (C_1, C_2') dont C_2': $|y| \leqq r_2'$ $(r_2' < r_2)$ *et si, pour tout x' dans C_1 la suite des sections*

$$S_1(x'),\ S_2(x'),\ S_3(x'),\ \cdots$$

converge analytiquement dans C_2, la suite (1) *converge analytiquement en tout point de (C_1, C_2).*

En effet, soit S_0 une limite de la suite; elle est un ensemble pseudoconcave dans V. D'aprés l'hypothèse, $S_0(x)$ a au moins un point frontière dans C_2 pour tout x dans C_1 sauf un nombre fini au plus de points.

Or, on dit, d'abord, que l'ensemble des points x pour lesquels

$S_0(x)$ ne contient qu'un nombre fini de points dans (C_1, C_2) forme un ensemble ouvert. Car, soit x_0 un tel point et soit $S_0(x_0)\cap(C_1, C_2)$ forme par $y_1, y_2, \cdots, y_n$; soient $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$ des cercles ayant pour centre les points $y_1, y_2, \cdots, y_n$, respectivement, dans l'intérieurs de $V(x_0)$ et extérieurs deux à deux, et soit δ un voisinage de x_0 tel que $S_0(x)$ n'ait aucun point en dehors de la somme des $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$ quel que soit x un point dans δ et que $(\delta. \gamma_i)\subset V$ $(i=1. 2. \cdots n)$. Alors, d'après le théorème A, $S_o(x)$ se frome toujours d'un nombre fini de points pour tout x dans δ, puisque l'ensemble des points x dans δ tels que $S_o(x)$ n'ait qu'un nombre fini de points est de capacité non nulle d'après le théorème E.

Considérons ensuite l'ensemble dérivé S_o' de l'ensemble pseudoconcave S_o. D'après le théorème B, elle est aussi un ensemble pseudoconcave dans V. De plus, d'après le remarque ci-dessus, r'' étant donné avec $r''<r_1$, on peut décrit un contour Γ autour de l'origine situé dans $r''\leqq|x|\leqq r_1$ de façon que, Γ_o étant l'aire limitée par Γ, S_0' n'ait aucun point dans la somme de deux ensembles définis par

$$x\in\Gamma_0,\quad |y|\leqq r_2'$$
$$x\in\Gamma,\quad |y|\leqq r_2.$$

Il en résulte que S_0 n'a aucun point dans $x\in\Gamma_0$, $|y|\leqq r_2$. Ceci étant vrai quel que soit $r''<r_1$, S_0 est une surface analytique dans (C_1, C_2).

Il s'agit maintenant de la convergence analytique. Pour cela, il suffit de le considérer seulement aux points de S_0 situé dans (C_1, C_2). Prenons un point (x_0, y_0) de $S_0\cap(C_1, C_2)$ et supposons que la droite analytique $x=x_0$ n'est pas contenue dans S_0. On peut décrire un dicylindre (γ_1, γ_2) dans V de la forme $|x-x_0|\leqq\rho_1$, $|y-y_0|\leqq\rho_2$ de façon que S_0 n'ait pas de point dans l'ensemble $|x-x_0|\leqq\rho_1$, $\rho_2'\leqq|y-y_0|\leqq\rho_2$; ρ_1, ρ_2 et ρ_2' étant des nombres positifs qui sont choisis convenablement. D'après l'hypothèse, on voir facilement que la partie de S_μ située dans (γ_1, γ_2) est représentée par l'équation

$$(2)\qquad y^\lambda+a_1^{(\mu)}(x)y^{\lambda-1}+\cdots+a_\lambda^{(\mu)}(x)=0$$

dès que μ surpasse un certain rang N, où $a_i^{(\mu)}(x)$ $(i=1, 2, \cdots, \lambda)$

sont des fonctions holomorphes dans γ_1 et λ est un entier indépendant de μ. Envisageons les suites de fonctions holomorphes

$$a_i^N(x),\ a_i^{N+1}(x),\ a_i^{N+2}(x),\ \cdots, \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ \lambda),$$

elles convergent uniformément dans γ_1 puisque les fonctions de chaque suite sont bornées en module et chaque suite converge en tout x dans γ_1. Donc la suite (2) converge uniformément dans $(\gamma_1,\ \gamma_2)$.

D'autre part, il n'y a que un nombre fini au plus de x' tels que la droite $x=x'$ soit contenue dans S_0. Donc, d'après le théorème *D*, on peut dire que la suite (1) converge analytiquement en tout point de $(C_1,\ C_2)$ puisqu'elle converge analytiquement dans $(C_1,\ C_2')$.

C, Q, F, D,

Remarque. *Considérons une famille* (S) *de surfaces analytiques dans un dicylindre fermé* $(C_1,\ C_2)$. *Si, pour tout* x *sauf un nombre fini de* x *dans* C_1, *les sections* $S(x)$ *consiste un nombre borné de points qui pouvant change avec* x *dans* C_2 *et il en est ainsi povr* y, *alors il existe une aire dans lequelle la famille est normale.*

En effet, il y a, d'après le théorème de *Baire*, un domaine γ_1 dans C_1 dans lequel l'ensemble de tous les point où tout $S(x)$ se forme d'au plus N points est partout dense, où N est un nombre positif assez grand. Il en résulte que, pour tout point x dans γ_1, $S(x)$ n'a que N points au plus dans l'intérieur de C_2. Car, a tout x, on peut faire correspondre un voisinage U de x dans γ_1 tel que la partie de S située dans le domaine cylindrique $(U,\ C_2')$ dont C_2': $|y|<r_2'<r_2$, soit donnée grâce à *Weierstrass*, par l'équation

$$y^n+a_1(x)y^{n-1}+\cdots+a_n(x)=0,$$

$a_i(x)$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ \mathrm{n})$ étant des fonctions holomorphes dans U. Donc les $S(x)$ a le même nombre de points dans C_2' pour tout point x dans U. Il en est ainsi pour y. Désignons par γ_2 pour y un tel domaine dans C_2. Ceci signifie que tout S a l'aire bornée dans $(\gamma_1,\ \gamma_2)$ puisque l'aire de la surface analytique est la somme de l'aire de la projection de la surface analytique sur le plan de x et de celle sur le plan de y. Par conséquent, d'après le théorème C, elle est normale dans ce domaine.

Mais la condition ci-dessus n'est pas suffisant pour que la famille (S) soit normale dans (C_1, C_2). Par exemple, considérons la famille de surfaces analytiques S_i $(i=1, 2, \cdots)$ définies par les équations

$$y+a_n x^{b_n}+c_n=0,$$

où $a_n=1/2^{n+2}$, $b_n=2^{3n}$ et $c_n=1/2^n$. Ceci satisfait évidemment la condition ci-dessus sans d'être normale en l'origine.

5. Les suites de fonctions méromorphes.

Dans ce qui suit, nous allons étudier les fonctions méromorphes.

Considérons une suite infinie de fonctions méromorphes

$$(1) \qquad g_1(x, y),\ g_2(x, y),\ g_3(x, y), \cdots$$

dans un domaine D dans l'espace de x et y. On dira qu'elle converge uniformément dans l'intérieur de D s'il y a un ensemble σ de points dans D qui n'a aucun point d'accumulation dans D de façon que, pour un domaine fermé Δ dans D n'ayant aucun point de σ sur sa frontière, d'ailleurs quelconques, Δ' étant la partie de Δ extérieure aux voisinages quelconques de tout point de σ dans Δ, $g_\mu(x, y)$ n'ait aucun point d'indétermination dans Δ' à partir d'un certaine rang et que l'image de la valeur de la fonction sur la sphère de *Riemann* converge uniformément dans Δ'. Il est évident que la limite de la suite (1) est une fonction méromorphe ou bien se reduit à la constante infinie par la continuation analytique si elle converge uniformément dans l'intérieur de D.[20] On dit qu'elle converge uniformément en un point de D s'il y a un voisinage U de ce point dans lequel elle converge uniformément. Il en resulte que la suite qui converge uniformément en tout point de D converge uniformément dans l'intérieur de D. Comme on peut voir facilement, si tout $g_\mu(x, y)$ est holomorphes dans D, cette définition est équivalent à celle pour la suite de fonctions holomorphes.

---

20) Cettes fonctions sont bien défini certainement, si nécessaire, par continuation analytique.

Si une suite (1) de fonctions méromorphes converge uniformément dans l'intérieur de D, la suite de fonctions de y

$$g_1(x', y), g_2(x', y), g_3(x', y), \cdots$$

converge uniformément au sens classique[21] dans l'intérieur de $D(x')$ pour tout x', pourvu qu'il n'est pas vide, sauf des points qui sont les projections des points d'indétermination de la limite sur le plan de x, mais elle ne converge pas nécessairement uniformément en tel point ; par exemple, la suite

$$\frac{nx+1}{ny} \qquad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

converge uniformément dans l'intérieur de tout l'espace de x et y à une fonction rationnelle

$$\frac{x}{y}$$

sans converge uniformément pour $x=0$.

Lemme IV. *Soit*

$$(3) \qquad g_1(x, y), g_2(x, y), g_3(x, y), \cdots$$

une suite infinie de fonctions méromorphes dans un dicylindre fermé (C_1, C_2) *de la forme* $|x| \leqq r_1$, $|y| \leqq r_2$. *Si elle converge uniformément dans un dicylindre fermé* (C_1, C_2'), *dont* C_2' : $|y| \leqq r_2'$ $(r_2' < r_2)$ *et si la suite de fonctions de* y

$$(4) \qquad g_1(x', y), g_2(x', y), g_3(x', y), \cdots$$

converge uniformément pour tout x' *sauf au plus un nombre fini de point dans* C_1, *elle converge uniformément dans l'intérieur de* (C_1, C_2).

En effet, supposons, d'abord, que la limite de la suite ne soit ni la constante infinie ni la constante nulle. Soient S_i les surfaces analytiques de pôles de $g_i(x, y)$ $(i=1, 2, \cdots)$. D'après l'hypothèse la suite de surfaces analytiques

$$(5) \qquad S_1, S_2, S_3, \cdots$$

21) Voir, par exemple, Julia, Sur les fonctions uniformes. page 80.

converge analytiquement dans (C_1, C_2') et, pour chaque x' dans C_1 sauf un nombre fini de points, la suite de sections de S_i:

$$S_1(x'),\ S_2(x'),\ S_3(x'),\ \cdots$$

toujours converge analytiquement puisqu'elle converge analytiquement si la limite de la suite de fonctions (2) n'ait pas la constante infinie. Donc, d'après le lemme III la suite de surfaces analytiques (5) converge analytiquement dans l'intérieur de (C_1, C_2). D'après le même raisonnement, soient T_i les surfaces analytiques de zèros de $g_i(x, y)$ $(i=1, 2, \cdots)$, la suite

$$(6) \qquad T_1,\ T_2,\ T_3,\ \cdots$$

aussi converge analytiquement dans l'intérieur de (C_1, C_2); on désigne par S_0 et T_0 la limite de suite (5) et (6) respectivement.

Alors, on peut dire qu'il n'existe aucune composante analytique commune de S_0 et T_0.

Car, si ce n'est pas vrais, d'abord, elle ne peut pas être de la forme $x=x'$, puisque la suite (1) converge uniformément dans (C_1, C_2'). Soit (x', y') un point régulier de la composante commune que l'on désigne par Σ. On peut décrire un dicylindre fermé (γ_1, γ_2) autour de ce point de la forme $|x-x'|\leqq\rho_1$, $|y-y'|\leqq\rho_2$, oú ρ_1, ρ_2 sont des nombres positifs suffisamment petits, tel que, pour tout point x dans γ_1, les sections $S_0(x)$ et $T_0(x)$ aient un et un seul point commun, c'est-a-dire, $\Sigma(x)$ dans γ_2. Il en resulte que l'on peut lui faire correspondre un entier N tel que, pour $n\geqq N$ et $x \in \gamma_1$, $S_n(x)$ et $T_n(x)$ aient au moins un point dans γ_2 respectivement (diminuant γ_1 convenablement, si nécessaire). Ceci est évidemment contraire à l'hypothèse.

Soit (C_1', C_2'') un dicylindre de la forme $|x|<r_1'$, $|y|<r_2''$ avec $r_1'<r_1$, $r_2'<r_2''<r_2$ et soient $p_1, p_2, \cdots, p_m$ des points communs de S_0 et T_0 situés dans (C_1', C_2'') et soit Δ' la partie de (C_1', C_2'') extérieures aux voisinages quelconques des points p_i $(i=1, 2, \cdots, m)$. Alors, la suite (3) converge uniformément en tout point de Δ' sauf un point de S_0.

Car, désignons par Δ'' l'ensemble des points de Δ' en dehors de S_0, et soit (x_0, y_0) un point dans Δ'' où la suite (3) ne converge pas uniformément. On peut joindre deux points $(x_0, 0)$ et (x_0, y_0) par une courbe lineaire ℓ sur le droite analytique $x=x_0$ située dans $\varDelta''$ et on peut prendre un voisinage cylindrique (γ, V) de ℓ dans $\varDelta''$, où γ est un cercle définie par $|x-x_0|\leqq\rho$ et V est un voisinage de la projection de ℓ sur le plan de y tel que, pour tout x' sur la circonference $|x-x_0|=\rho$, la suite (4) converge uniformément dans C_2 D'après l'hypothèse, la suite (3) converge uniformément dans un domaine cylindrique $(\gamma, C_2'\cap V)$. Ensuite, prenons un point y' dans V et décrivons deux cercles concentriques γ_1 et γ_2 de la forme $|y-y'|\leqq\rho_i$ $(i=1, 2)$ avec $\rho_1<\rho_2$ dans V. Alors, d'après le lemme I, si la suite (3) converge uniformément dans (γ, γ_1), elle converge uniformément dans $(\gamma\ \gamma_2)$, puisque les fonctions $g_\mu(x, y)$ sont holomorphes dans (γ, V) à partir de certain rang (si nécessaire, diminuant γ et V suffisament petits). Ceci est évidemment contraire à l'hypothèse.

D'après le même raisonnement comme ci-dessus, la suite de fonctions

$$\frac{1}{g_1(x, y)},\ \frac{1}{g_2(x, y)},\ \frac{1}{g_3(x, y)},\ \ldots\ldots$$

converge uniformément en tout point de $\varDelta'$ sauf un point de T_0. Ceci signifie, d'après le définition, que la suite (3) converge uniformément dans l'intérieur de (C_1, C_2).

Il s'agit, maintenant, du cas que la limite de la suite (3) est la constante nulle. Dans ce cas, à tout dicylindre (C_1', C_2'') comme ci-dessus, on peut faire correspondre un entier N tel que, pour $n\geqq N$, $g_n(x, y)$ soit holomorphes dans (C_1', C_2''). Donc, d'après le lemme I, la suite (3) converge uniformément vers 0 dans (C_1', C_2''). Il en est ainsi pour le cas que la limite de la suite (3) est la constante infinie lorsqu'on considére la suite nouvelle

$$\frac{1}{g_1(x, y)},\ \frac{1}{g_2(x, y)},\ \frac{1}{g_3(x, y)},\ \ldots\ldots$$

Donc on a démontre le lemme IV. C. Q. F. D.

Soit

$$g_1(x, y),\ g_2(x, y),\ g_3(x, y),\cdots$$

une suite infinie de fonctions méromorphes dans un domaine D dans l'espace de x et y. Supposons que, pour chaque x', la suite de fonctions de y

$$g_1(x', y), \; g_2(x', y), \; g_3(x', y), \; \cdots$$

converge uniformément dans l'intérieur de $D(x')$ pourvu qu'il n'est pas vide, sauf x de l'ensemble de points sur le plan de x tel que la somme de tous les $D(x)$ dont x appartient à l'ensemble-ci ne s'accumule pas dans D, et il en est ainsi pour y'.

On peut, d'abord, dire qu'un point (x^0, y^0) de D tel que deux suites de fonctions de y

$$g_1(x^0, y), \; g_2(x^0, y), \; g_3(x^0, y), \; \cdots$$

et de fonctions de x

$$g_1(x, y^0), \; g_2(x, y^0), \; g_3(x, y^0), \; \cdots$$

tendent vers des limites différentes au point (x^0, y^0), est un point d'indétermination de toute fonction $g_\mu(x, y)$ à partir d'un certain rang.

On peut démontrer ce fait facilement.

Il en résulte donc qu'il n'y a qu'une infinité dénombrable au plus de points dans D auxquels la limite de la suite par rapport à l'une des variables est différente de celle par rapport à l'autre.

Prenons un point quelconque (x_0, y_0) et décrivons un dicylindre fermé (C_1, C_2) autour de ce point de la forme $|x-x_0| \leqq r_1$, $|y-y_0| \leqq r_2$ dans D. Supposons, d'abord, que la limite de la suite n'est pas la constante infinie. Soient S_i $(i=1, 2, \cdots)$ les surfaces de pôles des fonctions $g_i(x, y)$ dans (C_1, C_2), On peut dire que l'ensemble de tous les points x' dans C_1 où la suite

$$S_1(x'), \; S_2(x'), \; S_3(x'), \; \cdots$$

ne converge pas analytiquement dans C_2 ne consiste qu'un nombre fini de points.

En effet, si cet ensemble a un point d'accumulation dans D, pour tout y' dans C_2 sauf une infinité dénombrable de points au plus la suite de fonctions de x

$$g_1(x,\ y'),\ g_2(x,\ y'),\ g_3(x,\ y'),\ \cdots$$

converge uniformément vers l'infini dans C_1 puisqu'elle tend vers l'infini en tout point x ci-dessus. Par conséquent elle évidemment tend vers l'infini en tout point dans $(C_1,\ C_2)$. Ce ci est contraire à l'hypothèse.

Il en est ainsi pour y. Donc, d'après la remarque dans la section précédente, on peut trouver un domaine $\varDelta$ dans lequel la suite de surfaces analytiques

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ \cdots$$

converge analytiquement. On désigne par S_0 la limite de la suite dans $\varDelta$. Décrivons un dicylindre fermé $(\gamma_1,\ \gamma_2)$ dans $\varDelta$ qui ne contient aucun point de S_0. On peut supposer, sans restreindre la généralité, qu'il est de la forme $|x-x_0|\leqq\rho_1,\ |y-y_0|\leqq\rho_2$ (si nécessaire, prenant une transformation lineaire dans $(C_1,\ C_2)$). Alors, d'après le théorème I, la suite (1) converge uniformément dans l'intérieur de $(\gamma_1,\ \gamma_2)$ puisqu'elle soit la suite de fonctions hlomorphes à partir d'un certain rang dans $(\gamma_1,\ \gamma_2)$. Donc le lemme IV peut s'appliquer au cas actuel pour $(\gamma_1,\ C_2)$, et, par suite, pour $(C_1,\ C_2)$ et on en conclurai qu'elle cenverge uniformément dans l'intérieur de $(C_1,\ C_2)$.

Si la limite de la suite (1) est la constante infinie, d'après le même raisonnement qu'on a fait à la fin de la démonstration du lemme IV, on peut dire qu'elle converge uniformément vers l'infini dans l'intérieur de D.

D'après ce que nous avons dit jusqu'ici, on a le

Théorème III.[22] *Une suite infinie de fonctions méromorphes dans un domaine D dans l'espace de x et y converge uniformément dans l'intérieur de D si elle converge uniformément dans l'intérieur de $D(x)$ pour tout x, pourvu que $D(x)$ ne soit pas vide sauf une infinité dénombrable des points x pour lesquels $D(x)$ ne s'accumule pas*

---

22) On peut démontre diréctement le théorème à l'aide du théorème de *Rothstein* disant que tout fonction méromorphe par rapport à chaque variable x et y est aussi une fonction méromorphe de deux variables x et y. Voir, W. Rothstein, Ein neuer Beweis des Hartogsochen Hauptsatzes und seine Ausdehnung auf meromorphe Funktionen. (Math Z. 53, 1950, p 84-95).

dans D et, de plus, s'il en est ainsi pour y.

6. Les familles de fonctions méromorphes.

Considérons, maintenant, une famille $\{g(x, y)\}$ de fonctions méromorphes dans un domaine D dans l'espace de x et y. On dira que c'est une famille normale dans D si, de toute suite infinie de fonctions méromorphes

$$g_1(x, y),\ g_2(x, y),\ g_3(x, y),\ \cdots$$

appartenant à la famille, on peut extraire une suite nouvelle

$$g_{i_1}(x, y),\ g_{i_2}(x, y),\ g_{i_3}(x, y),\ \cdots$$

convergant uniformément dans l'intérieur de D au sens de la section précédente. On dit encore qu'elle est normale en un point de D s'il y a un voisinage dans D de ce point dans lequel elle est normale. Si la famille est normale en tout point de D elle est normale dans D.

Nous allons étudier la relation entre la normalité dans l'espace de x et y et celle par rapport à chacune des variables x et y. On dira que la famille $\{g(x, y)\}$ est normale par rapport à chacune des variables x et y si, pour tout x', la famille $\{g(x',y)\}$ de fonctions de la variable y est normale dans $D(x')$, pourvu qu'il n'est pas vide, et qu'il en est ainsi pour la famille $\{g(x, y')\}$ de fonctions de x.

Étant donnée une famille comme ci-dessus. Soit (x_0, y_0) un point de D et soit (C_1, C_2) un dicylindre fermé autour du point de la forme $|x-x_0|\leqq r_1$, $|y-y_0|\leqq r_2$ dans D, Considérons une suite infinie

$$(1) \qquad g_1(x, y),\ g_2(x, y),\ g_3(x, y),\ \cdots$$

de fonctions méromorphes appartenant à la famille. On désigne par S_i $(i=1, 2, \cdots)$ les surfaces de pôles de $g_i(x, y)$ dans (C_1, C_2).

Supposons, d'abord, que l'on peut extraire de la suite une suite nouvelle

$$(2) \qquad g_{i_1}(x, y),\ g_{i_2}(x, y),\ g_{i_3}(x, y),\ \cdots$$

de façon que, pour tout x dans C_1 sauf un nombre fini au plus de

x, $S_{i_\nu}(x)$ ($\nu=1, 2, \cdots$) se compose toujour par un nombre borné de points qui pouvant change avec x dans C_2 et qu'il en soit ainsi pour y. Alors, d'après la remarque dans la section 4, il y a un domaine $\varDelta$ dans lequel la suite de surfaces analytiques

$$(3) \qquad S_{i_1},\ S_{i_2},\ S_{i_3},\ \cdots$$

est normale. On peut donc en extraire une suite nouvelle

$$S_{j_1},\ S_{j_2},\ S_{j_3},\ \cdots$$

qui converge analytiquement dans $\varDelta$, désignons par S_0 la limite de la suite nouvelle. La suite de fonctions méromorphes

$$(5) \qquad g_{j_1}(x, y),\ g_{j_2}(x, y),\ g_{j_3}(x, y),\ \cdots$$

correspondant à la suite de surfaces ainsi prise est la famille de fonctions holomorphes en tout point de $\varDelta$ sauf aux points de S_0 à partire d'un certaine rang ; donc, d'après le théorème II, elle est normale en ce point. Prenons un point (x_1, y_1) dans $\varDelta$, située en dehors de S_0 et un voisinage δ de ce point qui ne contient aucun point de S_0. Alors, d'après le théorème I, on peut extraire de la suite (5) une suite nouvelle

$$g_{k_1}(x, y),\ g_{k_2}(x, y),\ g_{k_3}(x, y),\ \cdots$$

convergant uniformément dans δ. Je dit qu'elle converge uniformément dans l'intérieur de (C_1, C_2).

En effet, on peut supposer sans restreindre la généralité, que δ contient un dicylindre (γ_1, γ_2) de la forme $|x-x_1|\leqq\rho_1$, $|y-y_1|\leqq\rho_2$ (quitte à une transformation linéaire convenable dans (C_1, C_2), si nécessaire). La suite (6) converge uniformément dans (γ_1, γ_2) et comme on le sait bien, pour chaque x' dans γ_1, la suite de fonctions de la variable y

$$g_{k_1}(x', y),\ g_{k_2}(x', y),\ g_{k_3}(x', y),\ \cdots$$

converge uniformément dans C_2, donc, d'après le lemme IV, elle converge uniformément dans l'intérieur de (γ_1, C_2). En continuant le même raisonnement, on peut montrer que la suite (1) converge uniformément dans l'intérieur de (C_1, C_2).

Supposons, maintenant, que pour suite partielle $g_{i_\nu}(x, y)$ ($\nu=$

1, 2, $\cdots$) quelconque de la suite (1) il y a une infinité de points x tels que le nombre des points appartenant à $S_{i_\nu}(x)$ ($\nu=1, 2, \cdots$) ne soit pas borné. Alors, je dit qu'on peut extraire de la suite (1) une suite partielle

$$(7) \qquad g_{i_1}(x, y),\ g_{i_2}(x, y),\ g_{i_3}(x, y),\ \cdots$$

de façon que, pour tout x' d'une infinité dénombrable de points dans C_1, la suite de fonctions de la variable y

$$g_{i_1}(x', y),\ g_{i_2}(x', y),\ g_{i_3}(x', y),\ \cdots$$

tend uniformément vers l'infini à la fois.

En effet, soit x_1 un points dans C_1 tel que le nombre des points de $S_i(x_1)$ ($i=1, 2, \cdots$) ne soit pas borné. On peut extraire de la suite (1) une suite partielle

$$(8) \qquad g_{11}(x, y),\ g_{12}(x, y),\ g_{13}(x, y),\ \cdots$$

telle que la suite des nombre des points de $S_{1n}(x_1)$ tend vers l'-infini lorsque n augmente indéfiniment. Il s'ensuit alors que la suite de fonctions de la variable y

$$g_{11}(x_1, y),\ g_{12}(x_1, y),\ g_{13}(x_1, y),\ \cdots$$

tend uniformément vers l'infini dans C_2.

D'après l'hypothèse, il y a au moins un point x_2 différent à x_1 dans C_1 tel que le nombre des points de $S_{1n}(x_2)$ ($n=1, 2, \cdots$) ne soit pas borné. Pour la même raison que ci-dessus, on peut extraire de la suite (8) une suite partielle

$$(9) \qquad g_{21}(x, y),\ g_{22}(x, y),\ g_{23}(x, y),\ \cdots$$

telle que la suite de fonctions de la variable y

$$g_{21}(x_2, y),\ g_{22}(x_2, y),\ g_{23}(x_2, y),\ \cdots$$

tend uniformément vers l'infini dans C_2.

En continuant de la sorte indéfiniment, on peut définir une infinité de points x_k dans C_2 et une infinité de suite

$$g_{k1}(x, y),\ g_{k2}(x, y),\ g_{k3}(x, y),\ \cdots \quad (k=1, 2, \cdots)$$

telle que la suite de fonction de la variable y

$$g_{k1}(x_k, y),\ g_{k2}(x_k, y),\ g_{k3}(x_k, y),\ \cdots$$

tend uniformément vers l'infini dans C_2.

Prenons alors la suite diagonale

$$g_{11}(x, y),\ g_{22}(x, y),\ g_{33}(x, y),\ \cdots$$

Elle est extraire de la suite (1) et la suite de fonctions de y

$$g_{11}(x_k, y),\ g_{22}(x_k, y),\ g_{33}(x_k, y),\ \cdots$$

tend uniformément vers l'infini pour tout x_k ($k=1, 2, \cdots$) à la fois dans C_2.

Il en resulte que la suite (7) converge vers l'infini pour tout point de (C_1, C_2). Alors, d'après le même raisonnement que nous avons fait à la fin de la démonstration du lemme IV, nous voyons que la suite (7) converge uniformément vers l'infini dans l'intérieur de (C_1, C_2).

D'après ce que nous avons dit jusqu'ici, nous avons le

Théorème IV. *La famille de fonctions méromorphes dans un domaine D dans l'espace de x et y est une famille normale dans D si elle est normale par rapport à chacune des variables x et y.*

On remarqu'ici que la condition pour la normalité dans ce théorème n'est pas nécessaire, comme on l'a déjà vu dans le section précédente. Pour cela il suffit que, de toute suite infinie

$$g_1(x, y),\ g_2(x, y),\ g_3(x, y),\ \cdots$$

de fonctions de la famille, on peut extraire une suite nouvelle

$$g_{i_1}(x, y),\ g_{i_2}(x, y),\ g_{i_3}(x, y),\ \cdots$$

telle que, pour tout x', la famille $\{g_{i_\nu}(x', y)\}$ ($\nu=1, 2, \cdots$) de fonctions de y soit normale dans $D(x')$, pourvu qu'il ne soit pas vide, sauf une infinité dénombrable des points x' pour lequels $D(x')$ ne s'accumule pas dans D et, de plus, il en soit ainsi pour y. Cet condition est certainement nécessaire.