J. Math. Kyoto Uuiv.
4-3 (1965) 493-514.

Domaines sans point crititque intérieur sur l'espace produit

Par

Reiko FUJITA

(Communiqué par Prof. Kobori le 26 Oct., 1964)

Introduction. Dans le Mémoire précédent [4], nous avons demontré, pour les domaines[1] pseudoconvexes sur l'espace projectif, que le Lemme II d'Oka[2] [1] reste valable à la condition qu'ils admettent au moins un point frontière.

Concernant ce résultat, se pose le problème: pour les domaines de la même sorte sur l'espace produit de plusieurs espaces projectifs de diverses dimensions, quelle condition est-t-elle nécessaire et suffisante pour que le Lemme II d'Oka subsiste?[3]

Dans le présesnt Mémoire, nous allons traiter ce problème.

1. Préliminaires. Soient $S_1, S_2, \cdots, S_n$ n espaces projectifs dont les dimensions sont $m_1, m_2, \cdots, m_n$ respectivement. Soit S l'espace produit de $S_1, S_2, \cdots, S_n$. Soient $(u_{i1}, u_{i2}, \cdots, u_{il})$ les coordonnées homogènes pour l'espace projectif S_i où $l=m_i+1$, $i=1, 2, \cdots, n$. Considérons pour chaque espace S_i une transformation

$$x_{ij}=\frac{a_{j1}u_{i1}+a_{j2}u_{i2}+\cdots+a_{jl}u_{il}}{a_{l1}u_{i1}+a_{l2}u_{i2}+\cdots+a_{ll}u_{il}} \quad (j=1, 2, \cdots, m_i),$$

$$|a_{jk}| \neq 0 \quad (j, k=1, 2, \cdots, l).$$

---

1) Sans point critique intérieur. Dans le présent Mémoire, nous ne traiterons que les domaines sans point critique intérieur, et nous les appellerons simplement domaines pour abréger.

2) Voir No. 2.

3) On sait bien le rôle que le Lemme II d'Oka joue dans le problème inverse de Hartogs: Les domaines où ce Lemme reste valable sont holomorphiqument complet, d'après le Théorème de Nishino [2].

En combinant ces transformations, on a une transformation de l'espace S. Posons $\sum_{i=1}^{n} m_i = m$. Par les transformations de S de cette sorte, on peut regarder un ensemble de points de S comme un ensemble de points de l'espace de m variables complexes, localement. On peut alors définir les domaines sur l'espace S de la même manière que les demaines sur l'espace projectif,[4] également la notion de pseudoconvexité des domaines. Plus précisément, un domaine D sur S est dit *pseudoconvexe*, si tout point frontière M de D satisfait au théorème de la continuité,[5] et encore si cette propriété de M admet toute transformation pseudoconforme biunivoque de l'espace S au voisinage de base-point[6] $\underline{M}$ de M.

Considérons un domaine D sur S. Pour tout point P de D, on peut regarder un voisinage de P dans D comme un domaine univalent et fini dans l'espace de m variables complexes. Soit $\varphi(P)$ une fonction réelle et univoque (qui peut prendre la valeur $-\infty$) dans D. On appelle $\varphi(P)$ *fonction pseudoconvexe* de P dans D, si $\varphi(P)$ est une fonction pseudoconvexe[7] dans D localement.

Considérons un domaine V dans l'espace de m variables complexes (x). Partageons x_j en parties réelle et imaginaire:

$$x_j = u_j + iv_j \quad (j = 1, 2, \cdots, m).$$

Soit $\varphi(x)$ une fonction réelle et continue dans V admettant les dérivées partielles continues jusqu'au deuxième ordre par rapport aux u_j et v_j $(j = 1, 2, \cdots, m)$. Pour que $\varphi(x)$ soit pseudoconvexe dans V, il faut et il suffit que l'on ait pour tout point de V et pour tout système de valeurs réelles (α, β)

$$\sum_j \sum_k \left[\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_j \partial u_k} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v_j \partial v_k} \right) (\alpha_j \alpha_k + \beta_j \beta_k) \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_j \partial v_k} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_k \partial v_j} \right) (\alpha_j \beta_k - \beta_j \alpha_k) \right] \geqq 0^{8)}.$$

4) Voir Behnke-Thullen [3].
5) Voir Oka [1] No. 9.
6) Grundpunkt d'après Behnke-Thullen [3]. Projection d'après Oka [1].
7) Voir Oka [1] No. 13.
8) Voir Oka [1] No. 15.

Nous désignerons avec Oka le premier membre de cette inégalité par $W(\varphi;\ \alpha, \beta)$.

Considérons une fonction pseudoconvexe $\varphi(x)$ dans le domaine V. Nous dirons que $\varphi(x)$ jouit de la propriété (P_0) dans V, si elle est continue et admet les dérivées partielles continues jusqu'au deuxième ordre par rapport à (u, v) dans V, et encore si elle satisfait dans V aux conditions:

$$1°.\quad \sum_j\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u_j}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v_j}\right)^2\right]>0.$$

2°. Pour tout système de valeurs réelles (α, β) excepté $(0, 0)$,

$$W(\varphi;\ \alpha, \beta)>0$$

Nous désignerons la dernière condition par $W(\varphi;\ \alpha, \beta)>0$, simplement. Nous dirons encore que $\varphi(x)$ jouit de la propriété (P_1) dans V, si, à tout point (x_0) de V, correspond un voisinage γ de (x_0) dans V tel que $\varphi(x)$ soit donnée dans γ par la borne supérieure d'un nombre fini de fonctions pseudoconvexes ayant la propriété (P_0). Ces propriétés admettent toute transformation pseudoconforme biunivoque.[9)]

Une foncton $\varphi(x)$ ayant la proproiété (P_0) ou bien la propriété (P_1) dans V jouit de la propriété suivante: Pour tout point (x_0) de V, il y a un voisinage γ de (x_0) et une femille de surfaces analytiques $\{\sigma_t\}$ dans γ définie par l'équation $f(x, t)=0$, $(x)\in\gamma$, $0\leqq t\leqq 1$ où $f(x, t)$ est analytique par rapport à (x) et continue par rapport à (x, t), telle que:

1°. σ_0 passe par (x_0), et reste dans la portion de γ donnée par $\varphi(x)>\varphi(x_0)$, sauf au point (x_0).

2°. Toute $\sigma_t(t\neq 0)$ reste dans la portion de γ donnée par $\varphi(x)>\varphi(x_0)$.[10)]

Soit $\varphi(P)$ une fonction pseudoconvexe dans un domaine D sur l'espace S. Nous dirons que $\varphi(P)$ jouit de *la propriété* (P_0) ou de *la propriété* (P_1) dans D respectivement, si $\varphi(P)$ jouit de la pro-

9) Vair Oka [1] No. 15.
10) Voir Fujita [4] No. 3.

priété (P_0) ou de la propriété(P_1) dans D localement.

2. Lemme II d'Oka et Conditions. Considérons l'espace produit S:

$$S=S_1\times S_2\times\cdots\times S_n$$

où $S_1, S_2, \cdots, S_n$ sont des espaces projectifs dont les dimensions sont $m_1, m_2, \cdots, m_n$ respectivement.

Considérons un domaine D sur l'espace S. Soit $\widetilde{E}$ un ensemble de points de D et soit E un ensemble de points dans S. Nous dirons que $\widetilde{E}$ *est équivalent à* E, si l'on peut établir une correspondance biunivoque et bicontinue entre les points de $\widetilde{E}$ et les points de E de façon que le base-point de point arbitraire P de $\widetilde{E}$ coïncide avec le point de E correspondant à P.

Soit à nouveau $\widetilde{E}$ un ensemble de points de D. Soit E un ensemble dans S de la forme

$$E=S_1\times Q_0^2\times\cdots\times Q_0^n$$

où Q_0^i est un point de S_i $(i=2, 3, \cdots, n)$. Lorsque $\widetilde{E}$ est équivalent à E, nous dirons que $\widetilde{E}$ *est équivalent à* S_1, pour simplifier l'énoncé.

Considérons le problème suivant qui s'appelle problème frontière d'après Oka:

Étant donné un domaine pseudoconvexe D, trouver une fonction pseudoconvexe $\varphi(P)$ dans D jouissant des propriétés suivantes: 1°. *$\varphi(P)$ possède la propriété (P_1).* 2°. *Pour tout nombre réel α, l'ensemble de points de D donné* par $\varphi(p)<\alpha$ *reste à l'interieur complet de D.*

Pour les domaines pseudoconvexes finis sur l'espace de n variables complexes, ce problème est résoluble affirmativement; *c'est le Lemme II d'Oka.*

Pour les domaines pseudoconvexes sur l'espace projectif, le problème est résoluble sous la condition suivante:

Condition (A). *Le domaine pseudoconvexe D donné admet au moins un point frontière.*

Pour les domaines pseudoconvexes sur l'espace produit S, il est évident que le problème n'est pas résoluble à moins qu'on n'y impose de pareille condition, mais la condition (A) n'est pas suffisante pour que le problème soit résoluble.

Nous allons prendre la condition (B) suivante dont la signification est analogue à celle de la condition (A):

Condition (B). *Le domaine pseudoconvexe D donné ne contient aucun ensemble équivalent à l'un au moins des espaces projectifs* $S_1, S_2, \cdots, S_n$.

On voit facilement que, pour un pomaine pseudoconvexe D, D satisfaisant au théorème de la continuité,[11] la condition (B) est équivalent à la condition (C) suivante:

Condition (C). *Pour au moins un point P_0 de D, il n'existe dans D aucun ensemble passant par P_0 et équivalent à l'un au moins des* $S_1, S_2, \cdots, S_n$.

Chacune des conditons (B) et (C) est évidemment nécessaire pour que le problème soit résoluble.

Dans la suite, on verra que: Pour que le problème soit résoluble, la condition (B) est suffisante, par suite, la condition (C) l'est aussi.

D'autre part, considérons la condition qu'il suit:

Condition (D). *Le domaine pseudoconvexe D donné ne contient aucun ensemble analytique compact à une dimension complexe.*

Pour les domaines pseudoconvexes sur l'espace projectif, cette condition est nécessaire et suffisante pour que le problème soit résoluble. Pour ceux sur l'espace produit S, il est évident que la condition est nécessaire, et d'après ce que la condition (B) est suffisante, il s'ensuit que la conditin (D) est aussi suffisante.

3. Problème et Notations. *Nous allons résoudre le problème frontière sous la condition (B); nous nous bornerons à l'espace produit de deux espaces projectifs pour la simplicité; mais, on pourra obtenir la même conclusion pour l'espace produit d'un nombre*

11) Le théorème de la continuité (C) d'après Oka. Voir Oka [1] No. 10.

quelconque d'espaces projectifs, par des raisonnements analogues.

Soit à nouveau S l'espace produit de deux espaces projectifs S^m, S^n dont les dimensions sont m, n respectivement.

Exprimons exactement le problème que nous allons considérer.

Problème. *Soit D un domaine pseudoconvexe sur S qui ne contient aucun ensemble équivalent à l'un au moins de S^m, S^n, trouver une fonction pseudoconvexe $\varphi(P)$ dans D jouissant des propriétés suivantes*: 1°. *$\varphi(P)$ possède la propriétés (P_1).* 2°. *Pour tout nombre réel α, l'ensemble de points de D donnè par $\varphi(P)<\alpha$ rest à l'interieur complet de D.*

Pour le domaine D donné dans le problème ci-dessus, considérons la configuration géométrique suivante pour résoudre le problème.

Soient $(u_1, u_2, \cdots, u_{m+1})$ les coordonnées homogènes de l'espace S^m, et soient $(v_1, v_2, \cdots, v_{n+1})$ celles de l'espace S^n. Nous allons désigner par Q^m un point de S^m, et par Q^n un point de S^n, et par $Q(Q^m, Q^n)$ ou par Q un point de S.

Soit P_0 un point quelconque de D. Soit $Q_0(Q_0^m, Q_0^n)$ le base-point de P_0 dans S. D'après la condition imposée sur D, il n'existe dans D aucun ensemble équivalent à l'ensemble $S^m \times Q_0^n$. Alors, il existe dans S^m au moins un point Q_1^m tel que, sur le point (Q_1^m, Q_0^n), il existe au moins un point frontière de D. De même, il existe dans S^n au moins un point Q_1^n tel que, sur le point (Q_0^m, Q_1^n), il existe au moins un point frontière de D.

Choisissons dans l'espace S^m, $2m+2$ plans analytiques

$$L_i^m \qquad U_i \equiv a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + \cdots + a_{im+1}u_{m+1} = 0 \quad (i=1, 2, \cdots, 2m+2)$$

de façon qu'ils ne passent pas par les points Q_0^m, Q_1^m, et que $m+1$ quelconques entre eux ne se rencontrent jamais en même point.

Par rapport à chaque plan L_i^m, considérons une correspondance (P_i^m) entre l'espace projectif S^m et l'espace de m variables complexes $X_i(x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{im})$ ayant L_i^m comme le plan infini, de la forme

$$(P_i^m) \qquad x_{i1} = \frac{U_{i+1}}{U_i}, \quad x_{i2} = \frac{U_{i+2}}{U_i}, \quad \cdots, \quad x_{im} = \frac{U_{i-1}}{U_i},$$

où nous expliquons comme suit:

$$m+2=1, \qquad \text{pour} \quad 1 \leqq i \leqq m+1,$$
$$2m+3=m+2, \quad \text{pour} \quad m+2 \leqq i \leqq 2m+2.$$

De même, choisissons $2n+2$ plans analytiques dans S^n

$$L_j^n \qquad V_j \equiv b_{j1}v_1 + b_{j2}v_2 + \cdots + b_{jn+1}v_{n+1} = 0 \quad (j=1, 2, \cdots, 2n+2)$$

de façon qu'ils ne passent pas par les points Q_0^n, Q_1^n, et que $n+1$ quelconques entre eux ne se rencontrent jamais en même point; et pour chaque L_j^n, considérons encore une correspondance (P_j^n) entre S^n et l'espace de n variables complexes $Y_j(y_{j1}, y_{j2}, \cdots, y_{jn})$, de la forme

$$(P_j^n) \qquad y_{j1} = \frac{V_{j+1}}{V_j}, \quad y_{j2} = \frac{V_{j+2}}{V_j}, \quad \cdots, \quad y_{jn} = \frac{V_{j-1}}{V_j},$$

oú nous expliquons

$$n+2=1, \qquad \text{pour} \quad 1 \leqq j \leqq n+1,$$
$$2n+3=n+2, \quad \text{pour} \quad n+2 \leqq j \leqq 2n+2.$$

Considérons la combinaison $[(P_i^m), (P_j^n)]$ de deux correspondances (P_i^m), (P_j^n). On a alors une correspondance entre S et l'espace de $m+n$ variables complexes $(x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{im};\ y_{j1}, y_{j2}, \cdots, y_{jn})$. Nous allons désigner le deuxième espace par X_{ij}.

Nous avons ainsi $(2m+2)\times(2n+2)$ espaces X_{ij} et le même nombre de correspondances $[(P_i^m), (P_j^n)]$.

Posons

$$L_{ij} = (L_i^m \times S^n) \cup (S^m \times L_j^n),$$

L_{ij} est l'ensemble des points infinis de l'espace X_{ij}. Soit $\widetilde{L}_{ij}$ l'ensemble des points de D sur L_{ij}. Soit D_{ij} l'ensemble des points de D qui n'appartiennent pas à $\widetilde{L}_{ij}$. L'image de D_{ij} sur X_{ij} par $[(P_i^m), (P_j^n)]$ est évidemment un domaine pseudoconvexe fini sur X_{ij} ayant au moins un point frontière fini.

Dans la suite, pour simplifier l'écriture, nous désignerons un ensemble sur S et son image sur chaque espace X_{ij} par la même lettre.

4. Fonction $\delta(P)$. Considérons le domaine D_{ij} sur l'espace de $m+n$ variables complexes X_{ij}. D_{ij} est un domaine pseudoconvexe fini sur X_{ij} ayant au moins un point frontière fini.

Soit P un point quelconque de D_{ij}, soit $\underline{P}$ le base-point de P dans X_{ij}, et soit V un domaine partiel contenant P dans D_{ij}. Nons appelons V *voisinage hypersphèrique* de centre P et de rayon r, si V est équivalent à une hypersphère dans X_{ij} de centre $\underline{P}$ et de rayon r. Désignons par $d_{ij}(P)$ la borne supérieure des rayons de tous les voisinages hypersyhériques de centre P, et nous l'appelons *distance frontière euclidienne de* P par rapport à D_{ij}, avec Oka.

Posons

$$\delta_{ij}(P)=\frac{1}{d_{ij}(\mathrm{P})}\ .$$

$\delta_{ij}(P)$ est une fonction pseudoconvexe continue dans D_{ij} jouissant des propriétés suivantes: 1°. Elle est positive et non nulle dans D_{ij}. 2°. Elle ne se réduit pas à une constante. 3°. Lorsque P tend vers la frontère fini de D_{ij}, $\delta_{ij}(P)$ tend vers $+\infty$.[12)]

Mais, lorsque P tend vers un point quelconque de $\widetilde{L}_{ij}$, $\delta_{ij}(P)$ ne tend pas nécessairement vers zéro; c'est la différence entre le présent cas et celui de l'espace projectif.

Considérons $\delta_{ij}(P)$ comme une fonction définie dans D_{ij} qui est un domaine partiel de D, et posons

$$\delta(P)=\max[\delta_{ij}(P)]\ (i=1, 2, \cdots, 2m+2;\ j=1, 2, \cdots, 2n+2)\ ;$$

de façon plus précise, pour un point quelconque P' de D, soit $\delta(P')$ la borne supérieure des valeurs en P' des seules fonctions qui sont définies au point P', parmi $\delta_{ij}(P)$ $(i=1, 2, \cdots, 2m+2;\ j=1, 2, \cdots, 2n+2)$. La fonction $\delta(P)$ est évidemment une fonction définie dans D.

Nous allons montrer que $\delta(P)$ est pseudoconvexe et continue dans D.

Soit P_0 un point qnelconque de D. Si P_0 n'appartient à aucun

12) Voir Oka [1] No. 14.

des $\widetilde{L}_{ij}$, $\delta(P)$ est évidemment pseudoconvexe et continue au voisinage de P_0. Traitons alors le cas où P_0 est un point de l'un au moins des $\widetilde{L}_{ij}$.

Commençons d'abord par considérer l'espace projectif S^m. Soit Q_0^m un point de S^m qui appartient à $L_k^m(1\leqq k\leqq 2m+2)$. Parmi les plans $\widetilde{L}_i(i=1, 2, \cdots, 2m+2)$, il existe au moins un plan L_l^m ne contenant pas Q_0^m. D'après la définition des L_i^m, on peut choisir L_l^m de façon que

$$\begin{aligned} &1\leqq l\leqq m+1, && \text{si } 1\leqq k\leqq m+1,\\ &m+2\leqq l\leqq 2m+2, && \text{si } m+2\leqq k\leqq 2m+2 . \end{aligned}$$

Pour simplifier l'écriture, supposons maintenant que $k=1$, $l=2$. Q_0^m est alors fini dans X_2. Dans l'espace X_2, traçons une hypersphère C de rayon R, ayant son centre à l'origine, R étant un nombre positif suffisamment grand. Soient $Q_1^m(x'_{21}, x'_{22}, \cdots, x'_{2m})$, $Q_2^m(x''_{21}, x''_{22}, \cdots, x''_{2m})$ deux points de C qui n'appartiennent pas à L_1^m, mais d'ailleurs quelconque. Désignons par $d_1(Q_1^m, Q_2^m)$, $d_2(Q_1^m, Q_2^m)$ les distances euclidiennes entre Q_1^m, Q_2^m dans l'espaces X_1, X_2 respectivement. D'après un calcul simple, on a

$$[d_2(Q_1^m, Q_2^m)]^2\leqq |x'_{2m}|^2(2R^2+2)\,[d_1(Q_1^m, Q_2^m)]^2.$$

Soient $(x^0_{21}, x^0_{22}, \cdots, x^0_{2m})$ les coordonnées dans X_2 de Q_0^m. Comme Q_0^m est un point de L_1^m, on a évidemment $x^0_{2m}=0$. Traçons dans X_2 une hypersphère γ_0 de centre Q_0^m et de rayon r_0 suffisamment petit, et supposons que Q_1^m soit un point de γ_0; on a alors

$$d_2(Q_1^m, Q_2^m)\leqq d_1(Q_1^m, Q_2^m).$$

Soit Q^m un point de γ_0 et soit $r(Q^m)$ une fonotion positive bornée dans γ_0. Traçons, pour tout point Q^m de γ_0, une hypersphère $\gamma(Q^m)$ dans X_2 de centre Q^m et de rayon $r(Q^m)$. On peut considérer que le rayon R de C est suffisamment grand pour que toute $\gamma(Q^m)$ soit contenue dans C. Dans l'espace X_1, voyons l'ensemble $\gamma(Q^m)$. Soit Q_2^m un point frontière quelcenque de $\gamma(Q^m)$. On a alors

$$r(Q^m)=d_2(Q^m, Q_2^m)\leqq d_1(Q^m, Q_2^m).$$

Donc, pour tout point Q^m de γ_0 qui n'appartient pas à L_1^m, on peut tracer, dans l'espace X_1, une hypersphère de centre Q^m et de rayon $r(Q^m)$ de façon qu'elle soit contenue dans $\gamma(Q^m)$.

De la même manière, pour un point Q_0^n de l'espace projectif S^n qui appartient à $L_k^n(1\leqq k\leqq 2n+2)$ et pour une fonction positive bornée au voisinage de Q_0^n, on peut trouver au moins un espace Y_l parmi les espaces $Y_j(j=1, 2, \cdots, 2n+2)$, et un voisinage de Q_0^n, jouissant des mêmes propriétés.

D'après ce que nous venons de voir, on voit facilement que; pour un point quelconque Q_0 de L_{kl} dans l'espace S et pour une fonction positive bornée $r(Q)$ au voisinage de Q_0, on peut trouver au moins un espace X_{qr} parmi les espaces X_{ij} $(i=1, 2, \cdots, 2m+2;\ j=1, \cdots, 2n+2)$ et un voisinage γ_0 de Q_0 de façon que:

1°. Q_0 soit un point fini dans X_{qr}.

2°. Soit $\gamma(Q)$ une hypersphère dans X_{qr} de rayon $r(Q)$, ayant son centre en un point Q de γ_0. Pour tout point Q de γ_0 qui n'appartient pas à L_{kl}, on puisse alors tracer dans X_{kl} une hypersphère de centre Q et de rayon $r(Q)$, contenue dane $\gamma(Q)$.

Soit P_0 un point quelconque de $\widetilde{L}_{kl}$ dans le domaine D. La fonction $d_{kl}(P)$ n'est pas définie au point P_0. Mais, pour tout domaine D_{ij} auquel P_0 appartient, la fonction $d_{ij}(P)$ est définie au voisinage de P_0 et la valeur $d_{ij}(P_0)$ n'est pas $+\infty$. Pour tout point P de voisinage de P_0, on peut tracer un voisinage hyperspérique dans D_{ij} sur X_{ij} de centre P et de rayon $d_{ij}(P)$; et $d_{ij}(P)$ est une fonction positive bornée au voisinage de P_0. Par suite, d'après ce que nous venons de voir, on voit facilement qu'il existe au moins une fonction $\delta_{qr}(P)$ parmi les fonction $\delta_{ij}(P)$ $(i=1, 2, \cdots, 2m+2;\ j=1, 2, \cdots, 2n+2)$ et un voisinage γ_0 de P_0 tels que $\delta_{qr}(P)$ soit définie dans γ_0, et que $\delta_{qr}(P)\geqq\delta_{kl}(P)$, pour tout point P de γ_0 qui n'appartient pas à $\widetilde{L}_{kl}$.

On voit ainsi que $\delta(P)$ *est une fonction pseudoconvexe et continue dans* D.

De la définition de $\delta(P)$, il s'ensuit que, *lorsque P tend vers un point frontière quelconque de D, $\delta(P)$ tend vers $+\infty$.*

5. Fonctions $\rho_{ij}(P)$ et $\rho(P)$. Considérons le domaine D sur l'espace X_{ij} de $m+n$ variables complexes. Soit P_0 un point de D_{ij} ayant les coordonnées $(x_{i1}^0, x_{i2}^0, \cdots, x_{im}^0; y_{j1}^0, y_{j2}^0, \cdots, y_{jn}^0)$ dans X_{ij}.

On peut trouver deux nombres positifs r, r' de façon qu'il existe dans D_{ij} un domaine partiel univalent contenant P_0 et équivalent à l'ensemble donné par

$$\sum_{k=1}^{m} |x_{ik}-x_{ik}^0|^2 < r^2, \quad \sum_{l=1}^{n} |y_{jl}-y_{jl}^0|^2 < r'^2,$$

dans X_{ij}. Désignons la borne supérieure de tous les r par $R_{ij}^m(P_0)$, et celle de tous les r' par $R_{ij}^n(P_0)$.

$R_{ij}^m(P)$ et $R_{ij}^n(P)$ sont des fonctions dans D qui peuvent prendre la valeur $+\infty$. De la définition de D_{ij}, on voit qu'elles ne se réduisent pas à une constante.

Suivant le mode de raisonnement d'Oka [1] No. 14, on voit facilement que les fonctions $-\log R_{ij}^m(P)$ et $-\log R_{ij}^n(P)$ sont des fonctions pseudoconvexes dans D_{ij}. Posons

$$\rho_{ij}(P) = \frac{1}{R_{ij}^m(P) R_{ij}^n(P)};$$

si l'une au moins de $R_{ij}^m(P)$ et $R_{ij}^n(P)$ prend la valeur $+\infty$ en un point P_0 de D_{ij}, posons

$$\rho_{ij}(P_0) = 0.$$

$\rho_{ij}(P)$ est une fonction pseudoconvexe dans D_{ij}.

De plus, posons

$$\rho_{ij}(P) = 0, \quad \text{pour} \quad P \in \widetilde{L}_{ij}.$$

$\rho_{ij}(P)$ est alors une fonction pseudoconvexe dans D. En effet, d'après la définition même, on a $\rho_{ij}(P) \geqq 0$ pour $P \in D_{ij}$, et d'après le résultat du No, 2 de [4], on voit facilement que $\delta_{ij}(P)$ tend vers zéro, lorsque P tend vers $\widetilde{L}_{ij}$; $\rho_{ij}(P)$ est donc pseudoconvexe sur $\widetilde{L}_{ij}$.

Posons

$$\rho(P)=\max[\rho_{ij}(P)]\ (i=1,2,\cdots,2m+2;\ j=1,2,\cdots,2n+2);$$

$\rho(P)$ est aussi une fonction pseudoconvexe dans D.

6. Propriétés des fonctions $\rho(P)$ et $\rho_{ij}(P)$.

1. *La fonction $\rho(P)$ est positive et non nulle dans D.*

En effet, supposons qu'il existe un point P_0 dans D tel que $\rho(P_0)=0$. P_0 n'appartiendrait pas à l'un au moins des plans $\widetilde{L}_{ij}$. Pour simplifier l'écriture, supposons maintenant que P_0 n'appartienne pas à $\widetilde{L}_{11}$. Alors, comme P_0 serait un point de D_{11}, l'une au moins des valeurs $R^m_{11}(P_0)$, $R^n_{11}(P_0)$ serait $+\infty$.

Considérons d'abord le cas où $R^m_{11}(P_0)=\infty$, $R^n_{11}(P_0)\neq\infty$. Soit $Q_0(Q^m_0, Q^n_0)$ le base-point de P_0 dans S. Comme D ne contient aucun ensemble équivalent à S^m, il existerait un point Q^m_1 dans S^m tel que, sur le point (Q^m_1, Q^n_0) dans S, il existe au moins un point frontière de D. Soit M_0 un point frontière sur (Q^m_1, Q^n_0). Dans l'espace S^m, il existerait au moins un plan ne passant pas par les deux points Q^m_0, Q^m_1, parmi les plans L^m_1, L^m_2, $\cdots$, L^m_{2m+2}. Soit L^m_i un tel plan. Considérons le domaine D_{i1} sur l'espace X_{i1}, on verrait facilement que $R^m_{i1}(P)$ et $R^n_{i1}(P)$ sont finis au point P_0. On a donc $\rho_{i1}(P_0)>0$; par suite, $\rho(P_0)>0$.

De la même manière, pour le cas où on $R^m_{11}(P_0)=\infty$, $R^n_{11}(P_0)=\infty$, on pourrait trouver au moins un domaine D_{ij} parmi $D_{i1}, D_{i2}, \cdots, D_{i2n+2}$ tel que $R^m_{ij}(P)$ et $R^n_{ij}(P)$ soient finies au point P_0. On aurait alors $\rho(P_0)>0$.

Pour le cas où $R^m_{11}(P_0)\neq\infty$, $R^n_{11}(P_0)=\infty$, on aurait encore $\rho(P_0)>0$; tous les cas contredisent le fait que $\rho(P_0)=0$. On a ainsi $\rho(P)>0$ dans D.

2. *Soit ρ_0 la borne inférieure des valeurs de $\rho(P)$ dans D. On a alors $\rho_0>0$.*

En effet, supposons que $\rho_0=0$. On pourrait alors choisir une suite

(S) $\qquad P_1,\ P_2,\ \cdots,\ P_k,\ \cdots$

des points de D de façon que

$$\lim_{k\to\infty} \rho(P_k) = 0$$

Soit $(\underline{S})$ la suite des bases-points dans l'espace S des points de (S). $(\underline{S})$ aurait au moins un point d'acumulation Q dans S. Pour simplifer l'écriture, soit (S) la suite telle que $(\underline{S})$ converge vers Q. Comme il existerait au moins un plan qui ne passe pas par Q, parmi les plans L_{ij}, supposons que L_{11} ne passe pas par Q. Alors, comme on pourrait considérer tout point de (S) comme un point de D_{11}, on aurait

$$\rho_{11}(P_k) = \frac{1}{R_{11}^m(P_k) R_{11}^n(P_k)} \quad (k=1,\ 2,\ \cdots).$$

On aurait donc

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\, R_{11}^m(P_k) = \infty, \text{ ou } \overline{\lim_{k\to\infty}}\, R_{11}^n(P_k) = \infty.$$

Considérons le cas premier. De la suite (S), extrayons une suite partielle

(S') $\qquad P'_1,\ P'_2,\ \cdots,\ P'_k,\ \cdots$

de façon que $\lim_{k\to\infty} R_{11}^m(P'_k) = \infty$. Soient $(x_{11}^k, x_{12}^k, \cdots, x_{1m}^k;\ y_{11}^k, y_{12}^k, \cdots, y_{1n}^k)$ les coordonnées de P'_k sur X_{11}. D'après la définition de $R_{11}^m(P)$, pour tout point P'_k de (S'), il existerait dans D_{11} un ensemble partiel univalent $\widetilde{V}_k$ contenant P'_k et équivalent à l'ensemble V_k dans X_{11} donné par

$$\sum_{l=1}^{m} |x_{1l} - x_{1l}^k|^2 < [R_{11}^m(P_k)]^2,\ y_{11} = y_{11}^k,\ \cdots,\ y_{1n} = y_{1n}^k;$$

et il existerait au moins un point frontière M_k de D tel qu'il soit un point sur l'ensemble

$$\sum_{l=1}^{m} |x_{1l} - x_{1l}^k|^2 = [R_{11}^m(P_k)]^2,\ y_{11} = y_{11}^k,\ \cdots,\ y_{1n} = y_{1n}^k,$$

et que l'on puisse joindre M_k et P'_k par une courbe continue située dans $\widetilde{V}_k$.

On aurait ainsi la suite

$$(T) \qquad M_1, M_2, \cdots, M_k, \cdots$$

des points frontières de D. Soit $(\underline{T})$ la suite des bases-points dans l'espace S des points de (T). $(\underline{T})$ aurait un point d'accumulation Q' dans S. Pour simplifier l'écriture, soit (T) la suite telle que $(\underline{T})$ converge vers Q'.

On pourrait trouver au mains un plan qui ne passe pas les deux points Q, Q', parmi les plans $L_{11}, L_{21}, \cdots, L_{2m+2\,1}$. Soit L_{i1} un tel plan. Dans l'espace X_{i1}, Q, Q' serait deux points finis. Dans le domaine D_{i1} sur X_{i1}, considérons les ensembles $\widetilde{V}_k(k=1, 2, \cdots)$. On verrait alors faciement que $\overline{\lim}_{k\to\infty} R^m_{i1}(P'_k)$ serait une valeur finie. Comme on aurait $R^n_{11}(P'_k)=R^n_{i1}(P'_k)$, si $\overline{\lim}_{k\to\infty} R^n_{11}(P_k)$ soit fini, $\overline{\lim}_{k\to\infty} R^n_{i1}(P'_k)$ serait aussi une valeur finie. On verrait alors que, lorspue k tend vers ∞, $\rho_{i1}(P'_k)$ ne tend pas vers zéro; par suite, $\rho(P'_k)$ ne tend pas vers zéro. Si $\overline{\lim}_{k=\infty} R^n_{11}(P_k)=\infty$, de la même manière, on pourrait trouver une suite partielle

$$(S'') \qquad P''_1, P''_2, \cdots, P''_k, \cdots$$

de la suite (S') et un domaine D_{ij} parmi $D_{i1}, D_{i2}, \cdots, D_{i\,2n+2}$ de façon que $\overline{\lim}_{k\to\infty} R^m_{ij}(P''_k)$ et $\overline{\lim}_{k\to\infty} R^n_{ij}(P''_k)$ soient des valeurs finies. Alors, on verrait encore que, lorsque k tend vers ∞, $\rho_{ij}(P''_k)$ ne tend pas vers zéro; par suite, pour $\rho(P''_k)$, l'est aussi.

Pour le cas où $\overline{\lim}_{k\to\infty} R^m_{11}(P_k)\neq\infty$, $\overline{\lim}_{k=\infty} R^n_{11}(P_k)=\infty$, on aurait le même résultat; tous contredisent le fait que $\lim_{k\to\infty}\rho(P_k)=0$.

On a donc $\rho_0>0$.

3. Considérons la fonction $\rho_{ij}(P)$ dans le domaine D. Soit D^r l'ensemble des points de D donné par

$$\delta(P)<\frac{1}{r}\,.$$

Soit P_0 un point quelconque de D. Supposons maintenant que P_0 n'appartienne pas à $\widetilde{L}_{ij}$. Alors, P_0 est un point dans D_{ij} sur l'espace

X_{ij}. Soient $(x_{i1}^0, x_{i2}^0, \cdots, x_{im}^0; y_{j1}^0, y_{j2}^0, \cdots, y_{jn}^0)$ les coordonnées de P_0 sur X_{ij}. On peut trouver un domaine partiel univalent contenant P_0 et équivalent à l'ensemble donné par

$$\sum_{k=1}^{m} |x_{ik}-x_{ik}^0|^2 < \frac{r^2}{2}, \quad \sum_{l=1}^{n} |y_{jl}-y_{jl}^0|^2 < \frac{r^2}{2} .$$

D'après le résultat du No. 7 de [4], on voit facilement que: *Étant donné un nombre positif* ε, *pour tout plan* L_{ij} *dans* S, *on peut trouver un voisinage* V_{ij} *de* L_{ij} *dans* S *de façon que, soit* $\widetilde{V}_{ij}$ *l'ensemble des points de* D^r *sur* V_{ij}, *on ait* $\rho_{ij}(P) < \varepsilon$, *pour* $P \in \widetilde{V}_{ij}$.

7. Une métrique dans l'espace S. Pour chacun des espaces S^m, S^n, considérons la métrique définie au No, 8 de [4]. Soient Q_1^m, Q_2^m deux points quelconques dans S^m. Désignons par $\mathrm{dis}^m(Q_1^m, Q_2^m)$ la distance entre Q_1^m et Q_2^m par cette métrique. De même, pour deux points Q_1^n, Q_2^n dans S^n, désignons par $\mathrm{dis}^n(Q_1^n, Q_2^n)$ la distance entre Q_1^n et Q_2^n par cette métrique.

Soient $Q_1(Q_1^m, Q_1^n)$, $Q_2(Q_2^m, Q_2^n)$ deux points quelconques dans l'espace produit S.

Nous allons définir la distance entre Q_1 et Q_2 dans S par

$$[[\mathrm{dis}^m(Q_1^m, Q_2^m)]^2 + [\mathrm{dis}^n(Q_1^n, Q_2^n)]^2]^{1/2}$$

Désignons cette distance par $\mathrm{dis}(Q_1, Q_2)$. La distance dans S ainsi définie satisfait évidemment aux axiomes de la distance.

Dans l'espace X_{ij} de $m+n$ variables complexes $(x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{im}; y_{j1}, y_{j2}, \cdots, y_{jn})$, traçons un polycylindre

$$C_{ij} \qquad |x_{ik}| < R, \ |y_{jl}| < R, \ (k=1, 2, \cdots, m; \ l=1, 2, \cdots, n)$$

où R est un nombre positif quelconque. D'après le résultat du No. 7 de [4], on voit facilement que:

Pour le polycylindre C_{ij}, on peut trouver une constante K_{ij} jouissant de la propriété suivante: Soient Q_1, Q_2 deux points quelconques de C_{ij}, et soit $d_{ij}(Q_1, Q_2)$ la distance euclidienne dans X_{ij} entre Q_1 et Q_2; on a alors

$$d_{ij}(Q_1, Q_2) \leqq K_{ij} \ \mathrm{dis}\,(Q_1, Q_2)$$

pour tout couple de points Q_1, Q_2 de C_{ij}.

Considérons le domaine D sur l'espace S. Soient P_1, P_2 deux points quelconques de D. Soit l une courbe continue sur D reliant P_1 et P_2. Soit s la longueur de l par la métrique dans S. Nous allons définir la distance entre P_1 et P_2 sur D par la borne inférieure de tous les s, et nous la désignerons par $\mathrm{dis}(P_1, P_2)$ sur D, ou par $\mathrm{dis}(P_1, P_2)$ simplement. Pour un point P de D, on peut définir un voisinage hypersphérique dans D de centre P et la distance frontière de P par rapport à D, par la métrique dans l'espace S, de même que ceux définis par la métrique euclidienne.[13] Désignons par $d(P)$ la distance frontière de P par rapport à D par la métrique dans l'espace S.

8. Résolution du problème. Nous allons résoudre **le problème:** *Trouver une fonction pseudoconvexe $\varphi(P)$ dans le domaine pseudoconvexe D jouissant des propriétés suivantes:* 1°. *$\varphi(P)$ possède la propriété (P_1).* 2°. *Pour tout nombre réel α, l'ensemble D_α des points de D tels que $\varphi(P)<\alpha$ remplie la condition $D_\alpha \Subset D$.*

D'après ce que nous avons vu jusqu'ici, il sera presque évident qu'il existe une solution $\varphi(P)$ de ce problème, si l'on rappelle le mode de raisonnement du Mémoire précédant. Nous allons le vérifier brièvement.

1. Commençons par résoudre **le problème auxiliaire** suivant:

Soit P_0 un point de D, soit D_0 une composante connexe contenant P_0 de l'ensemble donné par

$$\delta(P)<\frac{1}{r}, \quad P\in D$$

où r est un nombre positif suffisamment petit pour qu'il existe D_0 effectivement, mais d'ailleurs quelconque; trouver une fonction pseudoconvexe continue $\lambda_0(P)$ dans D_0 telle que, pour tout nombre réel α, l'ensemble Δ_α des points de D_0 donné par $\lambda_0(P)<\alpha$ satisfasse à la condition $\Delta_\alpha \Subset D$.

13) Voir No. 4.

Dans chaque espace X_{ij}, traçons un polycylindre fermé

$$C_{ij} \quad |x_{ik}| \leqq 1, \ |y_{jl}| \leqq 1 \ (k=1, 2, \cdots, m; \ l=1, 2 \cdots, n)$$

et un polycylindre

$$C'_{ij} \quad |x_{ik}| < 1+2r, \ |y_{jl}| < 1+2r \ (k=1, 2, \cdots, \mathrm{m}; \ l=1, 2, \cdots, n).$$

Pour chaque C'_{ij}, choisissons une constante K_{ij} telle que, pour tout couple de deux points Q_1, Q_2 de C'_{ij},

$$d_{ij}(Q_1, \ Q_2) \leqq K_{ij} \operatorname{dis}(Q_1, Q_2).$$

posons

$$K = \max[1, K_{ij}] \ (i=1, 2, \cdots, 2m+2; \ j=1, 2, \cdots, 2n+2).$$

Soit D' une composante connexe contenant P_0 de l'ensemble des points de D donné par

$$d(p) > \frac{r}{K}.$$

Soit D'' celle de l'ensemble des points de D donné par

$$d(p) > \frac{r}{2K}.$$

On a alors

$$D_0 \subseteqq D' \subset D''.$$

En effet, soit P un point de D_0. Le base-point $\underline{P}$ de P dans S appartient à l'un au moins des C_{ij}. Soit C_{kl} un tel polycylindre. Comme on peut tracer un voisinage hypersphérique de centre P et de rayon r par la métrique euclidienne dans X_{kl}, d'après la propriété de la constante K, on peut tracer un voisinage hypersphérique de centre P et de rayon r/K par la métrique dans S. On a donc $D_0 \subseteqq D'$.

Pour tout point de D'', posons

$$\lambda(P) = \operatorname{dis}(P_0, P) \ \text{sur} \ D'';$$

où $\operatorname{dis}(P_0, P)$ sur D'' est la distance entre P_0 et P sur D'' définie de la manière du paragraphe précédent.

$\lambda(P)$ est une fonction continue définie dans D''. D'après le mode de raisonnement du Mémoire précédent,[14] on voit facilement que: Pour tout nombre réel α, l'ensemble Δ'_α des points de D'' donné par $\lambda(P)<\alpha$ satisfait à la conditian $\Delta'_\alpha \Subset D''$.

2. Posons

$$D_0-\widetilde{L}_{ij}=D^0_{ij},\ D'-\widetilde{L}_{ij}=D'_{ij},\ D''-\widetilde{L}_{ij}=D''_{ij}.$$

Considérons D^0_{ij}, D'_{ij} et D''_{ij} sur l'espace X_{ij}. Soient u_k, v_k $(k=1, 2, \cdots, m+n)$ les parties réelles et imaginaires des variables complexes $x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{im};\ y_{j1}, y_{j2}, \cdots, y_{jn}$.

Pour deux points quelconques Q_1, Q_2 de X_{ij}, on a

$$d_{ij}(Q_1, Q_2) \geqq \operatorname{dis}(Q_1, Q_2).$$

On peut donc tracer, ponr tout point P de D'_{ij}, un voisinage hypersphérique $\gamma(P)$ de centre P et de rayon $r[2K]^{-1}$ par la métrique euclidienne dans X_{ij} de façon que $\gamma(P) \subset D''_{ij}$; et, pour tout couple de deux points P_1, P_2 de D''_{ij}, on a

$$|\lambda(P_1)-\lambda(P_2)| \leqq d_{ij}(P_1, P_2) \ \text{sur}\ D''_{ij}.$$

D'où, étant donné un nombre positif ε, en élevant l'ordre de continuité par une modification habituelle,[15] on peut trouver une fonction $\lambda_{ij}(P)$ dans D'_{ij} ayant les propriétés suivantes:

1° Elle admet les dérivées partielles continues jusqu'au deuxième ordre par rapport aux u_k, v_k.

2° Pour tout point P de D'_{ij},

$$|\lambda(P)-\lambda_{ij}(P)|<\varepsilon.$$

Pour cette fonction $\lambda_{ij}(P)$, on pent trouver une constante positive N_{ij}, tell que

$$W[\lambda_{ij}(P);\ \alpha', \beta'] > -N_{ij},$$

pour tout point P de D'_{ij}, et pour tout point (α', β') sur la frontière de l'hypersphère de rayon 1, ayant pour centre l'origine dans l'espace

14) Voir No. 10 de [4],
15) Voir Oka [1], No. 17.

(α, β) de $2(m+n)$ variables réelles.[16]

Posons

$$\mu_{ij}(P)=\sum_{k=1}^{m+n}(u_k^2+v_k^2).$$

On a évidemment

$$W[\mu_{ij}(P)\,;\ \alpha', \beta']=4.$$

Choisissons une constante positive c de façon que $4c$ soit plus grand que tonte N_{ij} $(i=1, 2, \cdots, 2m+2;\ j=1, 2, \cdots, 2n+2)$, et considérons dans D'_{ij}, une fonction

$$\lambda_{ij}(P)+c\mu_{ij}(P)\,;$$

cette fonction est évidemment une fonction pseudoconvexe continue dans D'_{ij}.

3. Dans chaque domaine D_{ij} sur X_{ij}, considérons la fonction $\rho_{ij}(P)$. En modifiant la fonction $\rho_{ij}(P)$ pour élever son ordre de continuité, on peut trouver une fonction pseudoconvexe continue $\rho'_{ij}(P)$ dans D^0_{ij}. De ce que $\rho_{ij}(P)$ est pseudocouvexe, il s'ensuit que $\rho'_{ij}(P)\geqq\rho_{ij}(P)$ dans D^0_{ij}.

Soti ρ_0 la borne inférieure de $\rho(P)$ dans D. On a alors $\rho_0>0$. Soit ε' un nombre positif plus petit que ρ_0. D'après ce que nous avons vu dans No. 6, on peut trouver un voisinage V_{ij} de L_{ij} dans S tel qu'étant $\widetilde{V}_{ij}$ l'ensemble des points de D_0 sur V_{ij}, on ait

$$\rho'_{ij}(P)<\varepsilon'$$

dans $\widetilde{V}_{ij}$ et sur la frontiére de $\widetilde{V}_{ij}$ appartenant à D_0.

Posons

$$\varDelta_{ij}=D_0-\widetilde{V}_{ij}.$$

D'après les deux inégalités

$$\varepsilon'<\rho_0,\ \rho_{ij}(P)\leqq\rho'_{ij}(P) \text{ dans } D^0_{ij},$$

on voit facilement que $\cup\varDelta_{ij}=D_0$ $(i=1, 2, \cdots, 2m+2;\ j=1, 2, \cdots,$

16) Voir Oka [1], No. 21.

$2n+2$). Comme chaque Δ_{ij} est borné sur X_{ij}, on peut trouver une constante R telle que, pour toute fonction $\mu_{ij}(P)$,

$$\mu_{ij}(P) \leqq R, \text{ dans } \Delta_{ij}.$$

Par rapport aux constantes ε, ε', c, R donnés juspu'ici, choisissons une constante positive c' satisfaisant à la condition

$$c' > \frac{2\varepsilon + cR}{\rho_0 - \varepsilon'};$$

et posons

$$\lambda_{ij}^0(P) = \lambda_{ij}(P) + c\mu_{ij}(P) + c'\rho'_{ij}(P)$$

dans Δ_{ij}.
Posons encore

$$\lambda_0(P) = \max[\lambda_{ij}^0(P)] \; (i=1, 2, \cdots, 2m+2; j=1, 2, \cdots, 2n+2)$$

dans D_0.
Comme $\cup \Delta_{ij} = D_0$, la fonction $\lambda_0(P)$ est une fonction définie dans D_0. D'après la définition, on voit facilement que $\lambda_0(P)$ est pseudoconvexe et continue dans D_0. Encore, d'après la définition, on a $\lambda_0(P) > \lambda(P) - \varepsilon$. D'ou, il s'ensuit que l'ensemble Δ_α des points de D_0 donné par $\lambda_0(P) < \alpha$ satisfait à la condition $\Delta_\alpha \Subset D$.

La fonction $\lambda_0(P)$ est ainsi une solution du problème auxiliaire.

4. Comme le problème auxiliaire est ainsi résolu, d'après l'idée d'Oka,[17] on peut trouver une fonction pseudoconvexe continue $\Phi(P)$ dans D ayant la propriété que, pour tout nombre réel α, l'ensemble D_α des points de D donné par $\Phi(P) < \alpha$ satisfait à la condition $D_\alpha \Subset D$.

Soit à nouveau D_0 un domaine partiel de D tel que $D_0 \Subset D$, et soit ε un nombre positif. Si l'on rappelle le rôle de $\rho_{ij}(P)$ dans le problème auxiliaire, on voit facilement que:

D'après la méthode de No, 4 du Mémoire précédent, on peut trouver une fonction pseudeconvexe $\Phi'(P)$ dans D_0 ayant la propriété (P_1), telle que

---

17) Voir Oka [1], No. 22.

$$|\Phi(P)-\Phi'(P)|<\varepsilon, \text{ dans } D_0$$

Donc, par la méthode d'Oka,[18] on peut trouver une fonction pseudoconvexe $\varphi(P)$ dans D ayant les propriétés demandées dans le problème.

Le problème est ainsi résolu.

9. Résumé. Revenons au point de départ. Nous avons vu jusqu'ici que la condition (C) est nécessaire et suffisante pour que le Lemme II d'Oka reste valable pour les domaines pseudoconvexes sur l'espace produit de deux espaces projectifs.

D'après le mode de raisonnement, on voit facilement que l'on pent obtenir le même résultat pour les domaines pseudoconvexes sur l'espace produit de plusieurs espaces projectifs de diverses dimensions.

Nous avons ainsi le théorème suivant:

Théorème. *Soit S l'espace produit de n espaces projectifs S_1, $S_2, \cdots, S_n$ où leur dimensions sont quelconques. Soit D un domaine pseudoconvexe sans point critique intérieur sur S. Pour que le Lemme II d'Oka*[19] *reste valable pour D, il est nécessaire et suffisant que, pour au moins un point P_0 dans D, il n'existe aucun ensemble contenant P_0 et équivalent à l'un au moins des espaces projectifs $S_1, S_2, \cdots, S_n$.*

De ce théorème, il résulte que:

Pour que le Lemme II d'Oka reste valable pour le domaine pseudoconvexe D, il est nécessaire et suffisant que D ne contienne aucun ensemble analytique compact à une dimension complexe.

Université féminine de Nara

BIBLIOGRAPHIE

[1] K. Oka, Sur les fonctions anaytiques de plusieurs variables IX-Domaines finis sans point critique intérieur, Jap. J. Math., **23** (1953), 97-155.
[2] T. Nishino, Sur les espaces analytiques holomorphiquement complet, J. Math. Kyoto Univ., **1** (1962), 247-254.
[3] H. Behnke und P. Thullen, Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränder-

18) Voir Oka [1] No. 22,
19) Voir Oka [1] No. 22, ou No. 2 du présent Mémoire.

lichen, 1934.
[4] R. Fujita, Domaines sans point critique intérieur sur l'espace projectif complexe, J. Math. Soc. Japan, **15** (1963), 443-473.