J. Math. Kyoto Univ.
4-5 (1965) 399-428.

Sur les propriétés asymptotiques des valeurs propres pour les opérateurs elliptiques

Par

Sigeru MIZOHATA

(Reçu le 10 mai, 1965)

1. Introduction.

Considérons le problème aux limites de la forme:

$$\begin{cases} A(x, D)u(x) = f(x), \\ B_j(x, D)u(x) = 0, \ j=1, 2, \cdots, b(=m/2), \end{cases}$$

où $f(x) \in L^2(\Omega)$, Ω étant un ouvert borné dans R^n dont la frontière est une hypersurface S assez régulière, et $A(x, D)$ étant un opérateur elliptique d'ordre m. Dans cet article, les coefficients sont supposés aussi assez réguliers. Supposons que le système $\{B_j\}$ est normal et recouvre A (vior [2], 10]). Supposons maintenant que A soit inversible dans $L^2(\Omega)$. Plus précisément, soit $D(A)$ le domaine de définition

$$D(A) = \{u \in \mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega) ; \ B_j(x, D)u(x) = 0, x \in S, \ j=1, 2, \cdots, b\}$$

alors, notre hypothèse dit que A est une application biunivoque de $D(A)$ sur $L^2(\Omega)$.*) Désignons par $G = A^{-1}$ l'opérateur de Green. G est un opérateur complètement continu dans $L^2(\Omega)$. Nous allons considérer le cas où A est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique e^{tA}. On peut supposer, sans diminuer la généralité, à savoir, en considérant $A - tI (t > 0)$ au lieu de A lui-même, que

*) Nous utiliserons quelques résultats dans [2], et [10]. Mais nous n'allons pas les expliquer ici. Remarquons que l'espace $\mathcal{E}_{L^2}^{m}(\Omega)$ est désigné par $H^m(\Omega)$ dans ces articles.

(1.1) $$\|(\lambda I-A)^{-1}\|\leq\frac{C}{|\lambda|+1}, \quad \text{pour } \lambda\in C^1-\Sigma$$

où Σ est le secteur défini sous la forme: $|\arg\lambda-\pi|\leq\varphi_0(<\pi/2)$.

(1-2) $$e^{tA}=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma(\lambda I-A)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda, \quad t>0,$$

où Γ est un chemin qu'on peut prendre le contour de Σ.

(1.3) $$G=-\int_0^\infty e^{tA}dt.$$

Remarquons qu'en posant

(1.4) $$(I-\lambda G)^{-1}=I+\lambda\Gamma_G(\lambda),$$

on a

(1.5) $$(\lambda I-A)^{-1}=-\Gamma_G(\lambda).$$

Dans le cas où G est hermitien, nous avons déjà montré une formule asymptotique des valeurs propres dans [8]. Notre principal résultat est le théorème de la section 8*) Comme on verra, le travail d'Arima ([3]) est un pilier de cet article. Je tiens à exprimer des remerciements à mon collègue N. Shimakura, qui a bien voulu discuter avec moi. Plusieurs points ont été éclarcis par sa collaboration.

2. Problèmes aux limites.

Considérons un domaine fini dans un espace R^n dont la frontière est une hypersurface assez régulière. Soit $A(x, D)$ un opérateur différentiel elliptique d'ordre $m(=2b)$, défini dans Ω. On suppose que les coefficients sont aussi assez réguliers. Il s'agit du problème aux limites de la forme suivante:

(2.1) $$\begin{cases} A(x,D)u(x)=f(x) & \text{dans } \Omega, \\ B_j(x, D)u(x)=0 & \text{sur } S \text{ (forntière de } \Omega), j=1,2,\cdots,b(=m/2). \end{cases}$$

*) Le résultat a été énoncé dans la note [7]. Mais dans la démonstration du théorème 1, il y a un défaut sérieux. Nous ne savons pas que ce théorème soit vrai ou non.

Ici $\{B_j\}$ est un système de b opérateurs différentiels définis sur S. On suppose que $\{B_j\}$ est un système normal:

(2.2)
1) A tout point de la frontière, S n'est pas caractéristique pour B_j,
2) Soit m_j l'ordre de B_j, on a $m_j \leq m-1$, et de plus $m_j \neq m_k$.

Naturellement on suppose que le système $\{B_j\}$ recouvre A. En d'autres terms: Soit N_x la normale intérieure à S au point x. Pour tout x de S et pour tout $\eta \neq 0$, vecteur parallèle à l'hyperplan tangent au point x, les polynomes (en z) $\{B_{0j}(x, \eta+zN_x)\}_{j=1,2,\cdots,b}$, ($B_{0j}$ étant la partie principale de B_j), sont linéairement indépendants modulo $A_{0+}(x, \eta+zN_x)=(z-z_1(x;\eta))\,(z-z_2(x,\eta))\cdots(z-z_b(x,\eta))$, où z_i sont des racines ayant la partie imaginaire positive de l'équation $A_0(x, \eta+zN_x)=0$.

Nous dirons que deux systèmes normaux $\{B_j\}$ et $\{B'_j\}$ sont *équivalents*, si l'espace des fonctions $u(x)$ définies par $B_ju(x)=0$ $(j=1, 2,\cdots b)$, et celui des fonctions $u(x)$ définies par $B'_ju(x)=0$ $(j=1, 2,\cdots,b)$ coïncident. Comme on sait, on peut associer au système $\{A;\ B_j\}$ un autre système normal $\{B'_j\}_{j=1,2,\cdots,b}$, *appelé un système adjoint au système* $\{A;\ B_j\}$. Ce système n'est pas déterminé uniquement, mais deux systèmes adjoints au même système $\{A;\ B_j\}$ *sont équivalents* l'un à l'autre. Cela posé, on peut considérer le problème dual à (2.1):

$$(2\cdot3)\qquad \begin{cases} A^*(x, D)v(x)=g(x) \\ B'_j(x, D)v(x)=0 \quad \text{sur } S. \end{cases}$$

Nous allons considérer les problèmes (2.1) et (2.3) dans L^2-cadre. Cela signifie que l'on prend les domaines de définition comme suivant:

$$D(A)=\{u\in \mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)\,;\ B_ju=0,\ j=1, 2,\cdots b\}$$

$$D(A^*)=\{u\in \mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)\,;\ B'_ju=0,\ j=1, 2,\cdots,b\}.$$

Supposons maintenant pour simplifier notre situation que l'opérateur A soit inversible. Alors on sait que A^* est aussi inversible. Comme $G=A^{-1}$ est complètement continu, les valeurs propres $\{\lambda_j\}$ de A sont disctrets.

Enoçons

Lemme 2.1. *Soit G l'opérateur de Green de A. Alors G est complètement continu dans $L^2(\Omega)$. Alors, G^* — l'opérateur conjugué à G dans $L^2(\Omega)$: $(Gu, v)=(u, G^*v)$, $u, v\in L^2(\Omega)$ — est précisément l'opérateur de Green relatif au problème* (2·3).

Comme il est facile à vérifier, nous omettons la preuve, et passons à

Lemme 2.2. *Soit s un entier tel que $s>n/2m$, alors l'application $f(x)\to(A^{-s}f)(x)=(G^sf)(x)$ est continue de $L^2(\Omega)$* dans $C^\sigma(\overline{\Omega})$, *où σ est un nombre $0<\sigma<1$, convenablement choisi.* Il *est de même de $f(x)\to(G^{*s}f)(x)$.*

Démonstration. On utilise le fait suivant:

$$Au=f,\ f\in\mathcal{E}^s_{L^2}(\Omega),\ u\in D(A) \text{ entraîne que } u\in\mathcal{E}^{m+s}_{L^2}(\Omega).$$

Comme A est supposé inversible, alors l'application biunivoque $u\to Au$ est continue de $\mathcal{E}^{m+s}_{L^2}(\Omega)\cap D(A)$ sur $\mathcal{E}^s_{L^2}(\Omega)$. Or, d'après un théorème de Banach, cette application est bicontinue, d'où

$$\|u\|_{m+s}\leq C_s\|Au\|_s, \text{ pour toute } u(x)\in\mathcal{E}^{m+s}_{L^2}(\Omega)\cap D(A).$$

Ce qui entraîne en particulier

$$\|A^{-s}u\|_{sm}\leq C_s\|u\|_{L^2} \text{ pour toute } u(x)\in L^2(\Omega).$$

Si l'on prend $s>n/2m$, alors d'après le lemme de Sobolev, l'application $u(x)\in L^2(\Omega)\to(A^{-s}u)(x)\in C^\sigma(\overline{\Omega})$ est continue.

Lemme 2.3. *Soit T un opérateur borné dans $L^2(\Omega)$ défini sous la forme*

$$T=A^{-s}BA^{-s'}=G^sBG^{s'}, \text{ où}$$

1) *B est un opérateur borné dans $L^2(\Omega)$,*
2) *s, s' (entier)$>n/2m$,*

alors T admet la représentation

$$(Tf)(x)=\int_{\Omega}L(x,y)f(y)dy,$$

où $L(x, y)$ est un noyau continu dans $\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}$.

De plus, s, s′ étant fixés, alors l'application de $B\in\mathcal{L}(L^2(\Omega), L^2(\Omega))$ dans $L(x,y)\in C^0(\overline{\Omega}\times\overline{\Omega})$ est continue:

(4·4) $\qquad \sup|L(x, y)|\leq C(s,s')\|B\|$

Démonstration. D'abord on va montrer que

1) $$(G^s f)(x)=\int_{\Omega}\widehat{H}(x,y)f(y)dy,$$

où $\widehat{H}(x,y)$ est, x etant fixé, un élément de $L^2(R^n_y)$ et on a

$$\int|\widehat{H}(x,y)|^2dy<C \quad \text{(indépendante de } x).$$

De plus, si l'on pose $\Phi_f(x)=\int_{\Omega}\widehat{H}(x,y)f(y)dy$, elle est une fonction uniformément continue, lorsque $f(x)$ parcourt un ensemble borné dans $L^2(\Omega)$. Plus précisément,

$$|\Phi_f(x)-\Phi_f(x')|\leq C\|f\|_{L^2}|x-x'|^{\sigma}.$$

En effet, soit $L_x[f]=(G^s f)(x)$, alors le lemme 2.2 montre que L_x est une forme linéaire continue dans $L^2(\Omega)$, (x étant fixé). En appliquant le théorème de F. Riesz, on a le résultat plus haut.

Malheureusement, on ne peut pas dire que le noyau $\widehat{H}(x, y)$ soit mesurable en deux variables x, y. On est donc ramené à considérer la forme linéaire

$$\langle K, f(x, y)\rangle=\sum\int v_i(x)L_x[u_i(y)]\,dx,$$

$$\text{où } f(x,y)=\Sigma v_i(x)u_i(y), \quad v_i(x)\in L^2(\Omega), \quad u_i(y)\in L^2(\Omega).$$

Evidemment telles fonctions $f(x,y)$ forment un sous-espace dense dans $L^2(\Omega\times\Omega)$.

Maintenant $|\langle K,f\rangle|\leq\left|\int_{\Omega}L_x[\Sigma v_i(x)u_i(y)]\,dx\right|$, et

$$|L_x[\Sigma v_i(x)u_i(y)]|\leq C(\int|f(x,y)|^2dy)^{1/2}$$

d'où

$$|\langle K,f\rangle|\leq C\ \mathrm{mes}(\Omega)^{1/2}\|f(x,y)\|_{L^2(\Omega\times\Omega)}$$

Ceci montre que $\langle K,f\rangle$ est forme linéaire continue de $L^2(\Omega\times\Omega)$ définie sur un sous-espace dense dans $L^2(\Omega\times\Omega)$. D'où, d'après Riesz, il existe une fonction $K_s(x,y)\in L^2(\Omega\times\Omega)$ telle que

$$\langle K,f\rangle=\int_\Omega K_s(x,y)f(x,y)dxdy.$$

En posant $f(x,y)=v(x)u(y)$, on a

$L_x[u]=\int_\Omega K_s(x,y)u(y)dy$, preseque partout dans Ω. Nous avons donc démontré que:

2) Il existe un noyau K_s du type d'Hilbert-Schmidt tel que

$$(G^sf)(x)=\int_\Omega K_s(x,y)f(y)dy, \text{ presque partout dans } \Omega.$$

$$\int|K_s(x,y)|^2dxdy<+\infty.$$

Ceci préparé, on va montrer le lemme. Considérons

$$(BG^{s'})^*=(G^{s'})^*B^*=(G^*)^{s'}B^* \quad \text{(d'après le lemme 2.1).}$$

On peut appliquer à l'opérateur $(G^*)^{s'}B^*$ le résultat plus haut, on a donc

1) Il existe un noyau $\widehat{K}(x,y)$ tel que

$$((G^*)^{s'}B^*f)(x)=\int_\Omega\widehat{K}(x,y)f(y)dy,$$

$$\int|\widehat{K}(x,y)|^2dy<C.$$

2) Il existe un autre noyau du type d'Hillbert-Schmidt tel que

$$((G^*)^{s'}B^*f)(x)=\int_\Omega K(x,y)f(y)dy, \text{ presque partout dans } \Omega.$$

D'où,

$$(BG^{s\prime}f)(x)=\int_\Omega \overline{K(y,x)}f(y)dy \text{ presque partout dans } \Omega.$$

On utilise pour G^s le résultat 1). On a donc

$$(Tf)(x)=\int_\Omega \widehat{H}(x,y)\,dy\int_\Omega \overline{K(z,y)}f(z)dz, \text{ par Fubini,}$$

$$=\int_\Omega \Phi(x,z)f(z)dz, \text{ où } \Phi(x,z)=\int_\Omega \widehat{H}(x,y)\overline{K(z,y)}dy.$$

Considérons $\Phi^0(x,z)=\int_\Omega \widehat{H}(x,y)\overline{\widehat{K}(z,y)}dy$. On voit que, x étant fixé, $\Phi^0(x,z)=\Phi(x,z)$ presque partout (en $z\in\Omega$), d'où

$$(Tf)(x)=\int_\Omega \Phi^0(x,z)f(z)dz.$$

D'après ce qui a été remarqué pour les noyaux $\widehat{H}$ et $\widehat{K}$, il est facile de voir que $\Phi^0(x,z)$ est continue en (x,z) dans $\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}$. Enfin, l'inégalité (4.4) est évidente d'après ce qui précède.

c. q. f. d.

3. Fonctions principales.

Soit A l'opérateur défini par (2.1). Soit G l'opérateur de Green défini dans la section 2. On dit qu'une fonction $\omega(x)$ est une fonction propre de A, si $\omega(x)\in D(A)$, $\omega(x)\not\equiv 0$ et

$$(cI-A)\omega(x)=0.$$

La valeur c est dite valeur propre de A. Cette condition équivaut à

$$(I-cG)\omega(x)=0, \qquad \omega(x)\in L^2(\Omega).$$

Dans le cas où G n'est pas hermitien, on étend la notion des fonctions propres de la manière suivante: On dit que la fonction $u(x)$ est une fonction principale de G ou bien une fonction propre généralisée de A relative à la valeur propre c, s'il existe un entier k tel que

$$(I-cG)^k u(x)=0, \quad u(x)\in L^2(\Omega),$$

ou ce qui revient au même

$$(cI-A)^k u(x)=0, \quad u(x)\in D(A^k).$$

On sait que l'espace des fonctions principales forme un espace de dimension fini. La dimension m de cet espace est dite *le degré* de la valeur propre c. Dans le cas où G est hermitien, le degré n'est autre que la multiplicité de la valeur propre. Comme G est complètement continu, si l'on écrit

$$(3.1) \qquad (I-\lambda G)^{-1}=I+\lambda\Gamma_G(\lambda),$$

$\Gamma_G(\lambda)$ est une fonction méromorphe et ces pôles sont précisément les valeurs propres de G. Soit

$$\Gamma_G(\lambda)=\sum_{j=1}^{p}\frac{B_j(x,y)}{(\lambda-c)^j}+H(\lambda)$$

le développement autour du pôle c, où $H(\lambda)$ est holomorphe au voisinage de c.

On a

$$B_1(x,y)=\sum_{i=1}^{m}\varphi_i(x)\psi_i(y),$$

où $\{\varphi_i(x)\}$ $(i=1,2,\cdots,m)$ est un système de fonctions principales linéairement indépendantes, et engendre l'espace des fonctions principales. Autrement dit, le nombre m est égal au degré du pôle c. De plus, on a

$$\int\varphi_i(x)\psi_j(x)dx=-\delta_i^j.$$

Remarquons le fait suivant, qui est valable pour tous les opérateurs complètement continus dans $L^2(\Omega)$.

Proposition 3.1. *Soient $\{\lambda_j\}$ les valeurs propres de l'opérateur G. Les valeurs propres de G^k sont données par $\{\lambda_j^k\}$ et les fonctions principales de G^k relatives au pôle λ_j^k coïncident avec celles de G relatives à λ_j. Si éventuellement, $\lambda_{j_1}^k=\lambda_{j_2}^k=\cdots=\lambda_{j_s}^k(=c^k)$, alors l'espace des fonctions principales de G^k relatif au pôle c^k est engendré par ceux des fonctions principales relatifs à $\lambda_{j_i}^k$ $(i=1,2,\cdots\cdots,s)$, et sa dimension est $m_{j1}+m_{j2}+\cdots m_{js}$ $(m_{ji}$:degré de $\lambda_{j_i})$.*

Remarque. Les fonctions principales de G relatives aux pôles différents sont linéairement indépendantes.

Démonstration. Partons de la formule

$$(I-\mu G^k)^{-1}-I=\mu\Gamma(\mu;\ G^k)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=\varepsilon}\left\{1/\left(1-\frac{\mu}{\lambda^k}\right)-1\right\}\Gamma_G(\lambda)d\lambda,$$

qui est valable pour μ dans un petit voisinage de l'origine, où ε est choisi petit. En effet, l'on a $\mu\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^k\leq\alpha<1$, on a le développement: $1/\left(1-\frac{\mu}{\lambda^k}\right)-1=\sum_{j=1}^{\infty}\mu^j\frac{1}{\lambda^{jk}}$, qui converge uniformément sur le cercle $|\lambda|=\varepsilon$. D'autre part, comme ε est petit, on peut supposer que, pour $|\lambda|\leq\varepsilon$, $\Gamma_G(\lambda)=G+\lambda G^2+\cdots+\lambda^{m-1}G^m+\cdots$ D'où

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=\varepsilon}\mu^j\frac{1}{\lambda^{jk}}\Gamma_G(\lambda)d\lambda=\mu^jG^{jk}.$$

D'où, le second membre de la formule précedente est égal à $\sum_{j=1}^{\infty}\mu^jG^{jk}=\mu\Gamma(\mu;\ G^k)$.

Remarquons que la formule prédédente s'écrit

$$\Gamma(\mu;\ G^k)=-\frac{1}{(2\pi i)}\int_{|\lambda|=\varepsilon}\frac{1}{\mu-\lambda^k}\Gamma_G(\lambda)d\lambda.$$

Cette formule s'écrit encore

$$(3.2)\quad \Gamma(\mu;\ G^k)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=R}\frac{1}{\mu-\lambda^k}\Gamma_G(\lambda)d\lambda+\sum_i\ \operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_i}\left[\frac{1}{\mu-\lambda^k}\Gamma_G(\lambda)\right].$$

Ici le cercle $|\lambda|=R$ n'a pas de point commun avec $\{\lambda_j\}$, et les $\{\lambda_i\}$ qui figurent dans le second membre de (3. 2) sont les points tels que $|\lambda_i|<R$. Cette formule montre le prolongement analytique de $\Gamma(\mu;\ G^k)$, défini d'abord seulement au voisinage de $\mu=0$.

Envisageons le résidu au point $\lambda=\lambda_i$ dans (3.2). Pour abréger, nous écrivons c au lieu de λ_i. En posant

$$\Gamma_G(\lambda)=\sum_{j=1}^{p}\frac{B_j(x,y)}{(\lambda-c)^j}+H(\lambda),$$

on a

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=c}\left[\frac{1}{\mu-\lambda^k}\Gamma_G(\lambda)\right]=\sum_{j=1}^{p}\operatorname*{Res}_{\lambda=c}\left[\frac{1}{(\lambda-c)^j(\mu-\lambda^k)}\right]B_j+\operatorname*{Res}_{\lambda=c}\left[\frac{1}{\mu-\lambda^k}H(\lambda)\right].$$

Supposons toujours $\mu\neq c^k$, alors le dernier terme est 0. Considérons donc

$$\varphi_j(\mu;\, c)=\operatorname*{Res}_{\lambda=c}\left[\frac{1}{(\lambda-c)^j(\mu-\lambda^k)}\right] \quad (j=1, 2,\cdots,p).$$

D'abord on a

$$\varphi_1(\mu;\, c)=\frac{1}{\mu-c^k}\,. \tag{3.3}$$

En général, on a $\varphi_j(\mu;\, c)=\dfrac{1}{(j-1)!}\left(\dfrac{\partial}{\partial c}\right)^{j-1}\varphi_1(\mu;\, c)$.

On peut donc calculer tous les termes explicitement. Par exemple,

$$\varphi_2(\mu;\, c)=\frac{kc^{k-1}}{(\mu-c^k)^2}\,.$$

Ceci montre que $\varphi_2(\mu;\, c)$, $\varphi_3(\mu;\, c),\cdots$ ont leurs pôles uniquement à c^k, et leurs ordres sont toujours ≥ 2 (en d'autres termes, le terme d'ordre 1 manque). D'après ce qui a été expliqué plus haut, et compte tenu de (3.3), la démonstration est complète. c. q. f. d.

Proposition 3.2. *Soit G l'opérateur de Green défini dans la section 2. Soient $\{\lambda_j\}$ ses valeurs propres, où λ_j figure autant de fois que son degré. Alors, pour tout s entier tel que $s>n/2m$,*

$$\sum_j\frac{1}{|\lambda_j|^{2s}}<\infty$$

Démonstration. On s'appuie sur le lemme de Schur. Ce lemme est le suivant: Soit $K(x, y)$ un noyau d'Hilbert-Schmidt. Soient $\{\lambda_j\}$ les valuers propres de K comptées autant de fois que leurs degrés. On a

$$\sum_j\frac{1}{|\lambda_j|^2}\leq\iint|K(x, y)|^2dxdy.$$

Or, nous avons montré (lemme 2.2) que $G^s=K$ est, pour $s>n/2m$, un noyau de tel type. Alors la proposition précédente montre que les valeurs propres de A sont précisément $\{\lambda_j^s\}$. Ce qui montre notre poposition. c. q. f. d.

4. Opérateur G_ε.

Nous imposons à l'opérateur A la condition suivante, qui est une limitation essentielle dans cet article:

$$\|(\lambda I-A)^{-1}\|\leq\frac{C}{|\lambda|+1},\quad \text{pour } \lambda\in C^1-\Sigma, \tag{4.1}$$

où Σ est le secteur défini sous la forme: $|\arg\lambda-\pi|\leq\varphi_0(<\pi/2)$. On sait alors que l'opérateur A est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique, et $e^{tA}(t>0)$ est défini par

$$e^{tA}=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda t}(\lambda I-A)^{-1}d\lambda, \tag{4.2}$$

où le chemin Γ est, par exemple, le contour de Σ. Comme le spectre de A est dans le demi-plan, on peut supposer que Γ est situé dans le demi-plan Re $\lambda<0$, plus précisément, Re $\lambda\leq-\delta$ $(\delta>0)$ convenablment choisi.

Les formules suivantes sont vérifiées facilement.

$$G=A^{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma(\lambda I-A)^{-1}\frac{d\lambda}{\lambda} \tag{4.3}$$

$$G=-\int_0^\infty e^{tA}dt \tag{4.4}$$

$$(-G)^s=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma(\lambda I-A)^{-1}\frac{d\lambda}{(-\lambda)^s},\quad s \text{ étant réel positif.} \tag{4.5}$$

$$\int_0^\infty e^{-\mu t}e^{tA}dt=(\mu I-A)^{-1},\quad \mathrm{Re}\,\mu\geq0. \tag{4.6}$$

On définit l'opérateur G_ε, qui est une bonne approximation de de G, de la manière suivante:

$$G_\varepsilon=-\int_\varepsilon^\infty e^{tA}dt\quad(\varepsilon>0). \tag{4.7}$$

Compte tenu de (4.4), on voit que, $\|G_\varepsilon-G\|\to0$, lorsque $\varepsilon\to+0$.

Cherchons les propriétés de G_ε.

Lemme 4.1. *Soient $\{\lambda_j\}_{j=1,2,\ldots}$ les valeurs propres de G (=celles de A), les valeures propres de G_ε sont précisément $\{\lambda_j e^{-\varepsilon\lambda_j}\}$ et les fonctions principales de G_ε relatives à $\lambda_j e^{-\varepsilon\lambda_j}$ coïncident avec celles de G relatives à λ_j.*

Démonstration.

$$(4\cdot 8)\quad \begin{cases} G_\varepsilon = -\int_\varepsilon^\infty e^{tA}dt = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda I - A)^{-1}d\lambda \int_\varepsilon^\infty e^{\lambda t}\, dt \\ = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda I - A)^{-1}\varphi_\varepsilon(\lambda)d\lambda. \end{cases}$$

où $\qquad \varphi_\varepsilon(\lambda) = e^{\varepsilon\lambda}/\lambda.$

D'où, comme la section précédente, pour μ assez petit

$$(4.9)\qquad (I-\mu G_\varepsilon)^{-1} - I = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left\{\frac{1}{1-\mu\varphi_\varepsilon(\lambda)} - 1\right\}(\lambda I - A)^{-1}d\lambda.$$

En effet, $(G_\varepsilon)^k$ est donnné par

$$(4\cdot 10)\qquad (G_\varepsilon)^k = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda I - A)^{-1}\varphi_\varepsilon(\lambda)^k d\lambda.$$

Remarquons

$$(4.11)\qquad (\lambda I - A)^{-1} = -\Gamma_G(\lambda).$$

D'où

$$(4.12)\qquad \Gamma(\mu;\, G_\varepsilon) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{\mu - \lambda e^{-\varepsilon\lambda}}\Gamma_G(\lambda)d\lambda.$$

Ce qui peut s'écrire encore

$$(4.13)\quad \Gamma(\mu;G_\varepsilon) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} \frac{1}{\mu - \lambda e^{-\varepsilon\lambda}}\Gamma_G(\lambda)d\lambda + \sum_i \operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_i}\left[\frac{1}{\mu - \lambda e^{-\varepsilon\lambda}}\Gamma_G(\lambda)\right].$$

Le passage de (4.12) à (4.13) se justifie de la même manière qu'on a fait dans la démonstration de la proposition 3.1. Expliquons-le en bref. On déplace le chemin Γ à un autre chemin Γ' à gauche et ajoute les résidus correspondant aux valeurs λ_i compris entre Γ et Γ'. Evidemment on peut supposer que tels λ_i sont à un nombre fini. (4.13) montre le prolongement analytique de (4.12), défini au voisinage de $\mu=0$. En effet, comme Γ' peut être déplacé arbitrairement à gauche, le premier terme du second membre de (4.13) est holomorphe (en μ) dans un cercle dont le rayon peut être choisi aussi grand qu'on le veut. Or, les résidus du second membre se calculent de la même manière que dans la section précédente, et on voit immédiatement que le lemme est démontré,

c. q. f. d.

Maintenant, nous allons montrer une autre propriété de $G_\varepsilon(x, y)$. Comme G_ε a le noyau continu $G_\varepsilon(x, y)$, d'après Fredholm, $\Gamma(\lambda; G_\varepsilon)$ s'exprime sous la forme bien connue:

$$\Gamma(\lambda; G_\varepsilon)=\frac{D_\varepsilon(x, y; \lambda)}{D_\varepsilon(\lambda)}, \quad (x, y)\in\Omega\times\Omega. \tag{4.14}$$

Nous allons montrer d'abord

Lemme 4.2.

$$D_\varepsilon(\lambda)=\prod_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_j^{(\varepsilon)}}\right), \quad \text{où } \lambda_j^{(\varepsilon)}=\lambda_j e^{-\varepsilon\lambda_j}. \tag{4.15}$$

Ici $\lambda_j^{(\varepsilon)}$ *se figure autant de fois que son degré* (*=degré de* λ_j). *Par conséquent, compte tenu de la proposition* 3.2, $D_\varepsilon(\lambda)$ *est une fonction entière d'order* 0.

Démonstration. Il suffit de montrer que $D_\varepsilon(\lambda)$ est d'ordre 0. Pour cela, on décompose

$$G_\varepsilon=G^{km}A^{km}G_\varepsilon.$$

Montrons que A^sG_ε a le noyau continu quel que soit s. Comme A^s et G_ε est permutable, compte tenu du lemme 2.3, il suffit de montrer que A^sG_ε est un opérateur continu quel que soit s. Or, compte tenu de (4.8),

$$A^sG_\varepsilon=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma(\lambda I-A)^{-1}\lambda^s\varphi_\varepsilon(\lambda)d\lambda.$$

Maintenant, il est clair que cet opérateur est borné.

Ensuite, compte tenu du lemme 2.3, on prend $k=2([n/2m]+1)$. Alors G^k a le noyau continu. Ceci montre que G^s s'exprime comme le produit de $(m+1)$ noyaux continus, ou plus précisément, comme le produit de $(m+1)$ opérateurs bornés, chacun d'eux ayant noyau continu. Or, il est connu que le déterminant de Fredholm relatif à tel noyau est d'ordre au plus $2/(m+1)$ (voir T. Carleman, Math. Zeit. (1921), p. 213). Comme m est arbitraire, $D(\lambda; G_\varepsilon)=D_\varepsilon(\lambda)$ est donc d'ordre 0. c. q. f. d.

5. Propriétés fines des noyaux $G'_s(x, y)$ et $G_\varepsilon(x, y)$.

Dans cette section, nous allons toujours garder les hypothèses des sections 2 et 4. Soit

$$e^{tA}=G(t, x, y) \tag{5.1}$$

le noyau de Green. Ce noyau a été étudié par M^{lle} Arima dans [3] (voir aussi [8]). Enonçons un résultat dans [3] comme le

Lemme 5.1. *Soit*

$$e^{tA}=G(t, x, y)=G_0(t, x-y; y)+G_1(t, x, y)+G_c(t,x, y) \tag{5.2}$$

(G_0+G_1) étant le noyau fondamental (construit par Eidelman) correspondant au problème de Cauchy et G_c étant le noyau de compensateur. On a alors

$$|G_c(t, x, y)|\leqslant const.\, t^{-n/m}\exp\left(-c\left|\frac{x-y}{t^\alpha}\right|^q-c\left(\frac{l_y}{t^\alpha}\right)^q\right) \quad (c>0)\,, \tag{5·3}$$

où $l_y=dis(y, S)$, $\alpha=1/m$, $q=m/(m-1)$.

Remarque. Le noyau (G_0+G_1) a été étudié par Eidelman. Il avait obtenu l'estimation

$$|(G_0+G_1)(t, x, y)|\leqslant\text{const. } t^{-n/m}\exp\left(-c\left|\frac{x-y}{t^\alpha}\right|^q\right), \quad (c>0). \tag{5.4}$$

Par conséquent, compte tenu de (5.3), on a

$$|G(t, x, y)|\leqslant\text{const. } t^{-n/m}\exp\left(-c\left|\frac{x-y}{t^\alpha}\right|^q\right). \tag{5.5}$$

Considérons d'abord

$$G'^s=(-G)^s=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}e^{tA}dt=G'_s(x, y), \quad (s>0). \tag{5.6}$$

Il faut remarquer que $G'_s(x, y)$ est défini pour tout s réel positif.

Proposition 5.1. $G'_s(x, y)$ *a la propriété suivante*:

1) *pour* $x \neq y$, *il est continu*,

2) *si* $s > n/m$, $G'_s(x, y)$ *est continu*,

si $s = n/m$, $|G'_s(x, y)| \leqslant C_0 + C_1 \log |x-y|^{-1}$.

si $s < n/m$,

$$|G'_s(x, y)| \leqslant C|x-y|^{ms-n}. \tag{5.7}$$

Démonstration.

$$G'_s(x, y) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^1 t^{s-1} e^{tA} dt + \frac{1}{\Gamma(s)}\int_1^\infty t^{s-1} e^{tA} dt$$
$$\equiv G_s^{(0)}(x, y) + G_s^{(1)}(x, y).$$

Considérons d'abord

$$G_s^{(1)}(x, y) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda I - A)^{-1} f_s(\lambda) d\lambda\,,$$

où
$$f_s(\lambda) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_1^\infty t^{s-1} e^{\lambda t} dt\,.$$

Un calcul simple montre que, quel que soit entier positif k, on a sur $\lambda \in \Gamma$,

$$|\lambda|^k |f_s(\lambda)| \leqslant C(k, s).$$

Ceci montre que, quel que soient l et l', $A^l G_s^{(1)} A^{l'}$ est un opérateur borné dans $L^2(\Omega)$. Alors, d'après le lemme 2.3, $G_s^{(1)}(x, y)$ est un noyau continu.

Considérons donc $G_s^{(0)}$. Ici on utilise (5.5). Alors on aura

$$|G_s^{(0)}(x, y)| \leqslant C'\int_0^1 t^{s-1-n/m} \exp\left(-c\left|\frac{x-y}{t^\alpha}\right|^q\right) dt\,.$$

Dans le cas où $s > n/m$, la proposition est évidente, car l'intégrale est sommable même quand $x = y$. Dans le cas où $s \leq n/m$, on fait le changement de variables: $t = |x-y|^m t'$. Alors l'intégrale ci-dessus se majore par

$$C''|x-y|^{ms-n}\int_0^{|x-y|^{-m}} t^{s-1-n/m} \exp(-ct^{\alpha q}) dt.$$

Remarquons que cette intégrale est toujours sommable au voisinage de $t=0$. Dans le cas où $s>n/m$, on peut remplacer l'intégrale $(0, |x-y|^{-m})$ par $(0, \infty)$. Dans le cas où $s=n/m$, elle se majore par

$$\int_0^1 \cdots dt + \int_1^{|x-y|^{-m}} t^{-1}dt \leqslant C_0 + C_1 \log |x-y|^{-1}. \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Maintenant on va envisager l'allure de $G_\varepsilon(x, y)$ $(=G_\varepsilon)$ lorsque ε tend vers 0.

$$(5.8) \qquad G_\varepsilon - G = \int_0^\varepsilon e^{tA}dt = \int_0^\varepsilon G(t, x, y)dt.$$

Lemme 5.2.

1) *Si* $n/m<1, G_\varepsilon(x, y)$ *tend uniformément vers* $G(x, y)$ *sur* $\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}$, *lorsque* $\varepsilon\to+0$.

2) *Si* $n/m\leq 1$, *quel que soit* $\delta>0$,

$|x-y|^{n-m+\delta}|G_\varepsilon(x, y)-G(x, y)| \to 0$, *uniformément dans* $\Omega\times\Omega$, *lorsque* $\varepsilon \to +0$.

Démonstration. 1) est évident compte tenu de (5.8) et la proposition 5.1. Montrons 2). Le changement de variables: $t=|x-y|^m t'$ montre que

$$|G_\varepsilon(x, y)-G(x, y)| \leqslant C|x-y|^{m-n} \int_0^{\varepsilon|x-y|^{-m}} t^{-n/m}\exp(-ct^{\alpha q})dt.$$

Il suffit donc de montrer que

$$|x-y|^\delta \int_0^{\varepsilon|x-y|^{-m}} t^{-n/m}\exp(-ct^{\alpha q})dt$$

tend uniformément vers 0 lorsque $\varepsilon\to+0$. Posons $\varepsilon|x-y|^{-m}=\xi$. Alors en posant $|x-y|^\delta=\varepsilon^{\delta/m}(\varepsilon^{-1/m}|x-y|)^\delta=\varepsilon^{\delta/m}\xi^{-\delta/m}$, cette intégrale se majore par

$$\varepsilon^{\delta/m} \sup_{0<\xi<+\infty}\{\xi^{-\delta/m}\int_0^\xi t^{-n/m}\exp(-ct^{\alpha q})dt\} = \text{Constant. } \varepsilon^{\delta/m}.$$

c. q. f. d.

Comme une conséquence immédiate des propositions 5.1 et le lemme 5.2, par un calcul habituel dans la théorie du potentiel, on a

Corollaire. Soit $k=[n/m]+1$. Soient $G^s=G_s(x,y)$, et $(G_\varepsilon)^s=G_s^{(\varepsilon)}(x,y)$ $(s=1,2,\cdots)$,

1) pour $s\geqslant k$, $G_s^{(\varepsilon)}(x,y)\to G_s(x,y)$ uniformément sur $\bar{\Omega}\times\bar{\Omega}$, lorsque $\varepsilon\to+0$,

2) pour $s<k$,
$|x-y|^{n-ms+\delta}|G_s^{(\varepsilon)}(x,y)-G_s(x,y)|\to 0$, uniformément dans $\Omega\times\Omega$, lorsque $\varepsilon\to+0$, où δ est un nombre positif fixé, et d'ailleurs qu'on peut prendre aussi petit qu'on le veut.

6. La formule de trace due à Poincaré.

Dans la section précédente, nous avons montré des propritétés des noyaux $G_s(x,y)$. Le noyau de Green $G(x,y)$ n'est pas nécessairement continu, mais ses itérés G^k $(k>n/m)$ sont représentés par des noyaux continus. Dans cette situation, on peut appliquer la méthode de Poincaré ([9]). Nous allons expliquer une partie de ses résultats dans cette section.

Soit Ω un domaine borné dont la frontière est une hypersuface régulière. Soit $G(x,y)$ un noyau continu: $G(x,y)\in C^0(\bar{\Omega}\times\bar{\Omega})$. On sait que la formule de trace due à Fredholm

$$(6.1)\qquad -D_G'(\lambda)/D_G(\lambda)=\int_\Omega\Gamma(x,x;\lambda|G)dx.$$

En posant

$$(6.2)\qquad b_n=\int_\Omega G_n(x,x)dx\qquad(n=1,2,\cdots),$$

le développement de (6.1), autour de $\lambda=0$, donne

$$(6.3)\quad -D_G'(\lambda)/D_G(\lambda)=b_1+b_2\lambda+\cdots+b_n\lambda^{n-1}+b_{n+1}\lambda^n+\cdots.$$

Compte tenu de $D_G(0)=1$, on a, au voisinage de $\lambda=0$,

$$D_G(\lambda)=\exp\left(-b_1\lambda-\frac{b_2}{2}\lambda^2-\cdots-\frac{b_n}{n}\lambda^n-\cdots\right).$$

Poincaré a désigné

$$(6.4)\qquad \mathscr{D}_n(\lambda;G)=\exp(b_1\lambda+\cdots+\frac{b_{n-1}}{n-1}\lambda^{n-1})D_G(\lambda)$$

$$=\exp(-\frac{b_n}{n}\lambda^n-\frac{b_{n+1}}{n+1}\lambda^{n+1}-\cdots).$$

Compte tenu de (6.2) et (6.3), on a

$$(6.5)\qquad -\mathscr{D}'_n(\lambda;G)/\mathscr{D}_n(\lambda;G)=$$

$$\int_\Omega(\Gamma_G(\lambda)-G-\lambda G^2-\cdots-\lambda^{n-2}G^{n-1})(x,x;\lambda)dx.$$

Maintenant nous supprimons l'hypothèse que $G(x,y)$ est continu, et imposons les conditons suivantes:

(6.6) 1) $G(x,y)$ définit une application continue dans $C^0(\overline{\Omega})$ et en même temps une application complètement continue dans $L^2(\Omega)$.

2) $G^k=G_k(x,y)$ sont des noyaux continus pour $k=n, n+1, n+1, n+2, \cdots$ (ici n n'a aucune relation avec la dimension de l'espace).

Soit

$$(6.7)\qquad K(\lambda)=-\frac{b_n}{n}\lambda^n-\frac{b_{n+1}}{n+1}\lambda^{n+1}-\cdots.$$

Nous allons montrer que $e^{K(\lambda)}$, définie seulement au voisinage de $\lambda=0$, admet le prolongement analytique $\mathscr{D}_n(\lambda;G)$ et elle est une fonction entière, et (6.5) est vraie dans tout le plan de λ. Comme on verra, ce qui est avantageux d'utiliser la fonction $\mathscr{D}_n(\lambda;G)$ est que $\mathscr{D}_n(\lambda;G)$ a pour zéros justement les valeurs propres c_i de G, et l'ordre m_i du zéro est égal au degré de la valeur propre c_i.

Le prolongement analytique se fait à l'aide du second membre de (6.5). Dans ce but, considérons le développement de (6.5) autour de $\lambda=0$.

$$-K'(\lambda)=b_n\lambda^{n-1}+b_{n+1}\lambda^n+b_{n+2}\lambda^{n+1}+\cdots$$

$$=\lambda^{n-1}\sum_{h=0}^{\infty} b_{nh+n}\lambda^{nh}+\lambda^{n}\sum_{h=0}^{\infty} b_{nh+n+1}\lambda^{nh}+\cdots$$

$$\cdots+\lambda^{n+k-1}\sum_{h=0}^{\infty} b_{nh+n+k}\lambda^{nh}+\cdots+\lambda^{2n-2}\sum_{h=0}^{\infty} b_{nh+2n-1}\lambda^{nh}.$$

Donc, (6. 5) peut s'écrire

$$(6.8)\quad -K'(\lambda)=\lambda^{n-1}\int_{\Omega}\Gamma_{G^n}(x, x;\ \lambda^n)\,dx+\sum_{k=1}^{n-1}\lambda^{n+k-1}\times$$

$$\int_{\Omega}(G^k\Gamma_{G^n})(x, x;\ \lambda^n)dx.$$

Cette relation donne le prolongement analytique de $-K'(\lambda)$. En effet, on sait, d'après Fredholm, que le second membre est une fonction méromorphe dans tout le plan. Envisageons les pôles du second membre. Soient $\{c_i\}$ les valeurs propres de G. D'après ce qui a été expliqué dans la proposition 3. 1,

$$\Gamma_{G^n}(\mu^n)\sim-\sum_i \operatorname*{Res}_{\lambda=c_i}\left[\frac{1}{\lambda^n-\mu^n}\Gamma_G(\lambda)\right].$$

En utilisant l'expression de $\Gamma_G(\lambda)$ au voisinage de $\lambda=c_i$:

$$\Gamma_G(\lambda)=\sum_j\frac{B_j^{(i)}}{(\lambda-c_i)^j}+H(\lambda),$$

et compte tenu de

1) trace $(B_j^{(i)})=0$, $(j\geqslant 2)$,
2) trace $(B_1^{(i)})=-m_i$ ($m_i=$ le degré de la valeur propre c_i), on a

$$\int_{\Omega}\Gamma_{G^n}(x, x;\ \mu^n)dx\sim\sum_i \operatorname*{Res}_{\lambda=c_i}\left[\frac{1}{(\lambda^n-\mu^n)(\lambda-c_i)}\right]m_i$$

$$=-\sum_i\frac{m_i}{\mu^n-c_i^n}.$$

D'autre part, en partant de la relation, (voir (3. 2)),

$$(G^k\Gamma_{G^n})(\mu^n)=-\sum_i \operatorname*{Res}_{\lambda=c_i}\left[\frac{1}{\lambda^k(\lambda^n-\mu^n)}\Gamma_G(\lambda)\right]+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{1}{\lambda^k(\lambda^n-\mu^n)}\Gamma_G(\lambda)\,d\lambda,$$

on a

$$\text{trace}\left[G^k \Gamma_{G^n}(\mu^n)\right] \sim -\sum_i \operatorname*{Res}_{\lambda=c_i}\left[\frac{1}{\lambda^k(\lambda^n-\mu^n)(\lambda-c_i)}\right] \text{trace } (B_1^{(i)})$$

$$= -\sum_i \frac{m_i}{c_i^k(\mu^n - c_i^n)}\,.$$

Alors, (6.8) devient

$$-K'(\mu) \sim -\mu^{n-1}\sum_i \frac{m_i}{\mu^n - c_i^n} - \sum_{k=1}^{n-1} \mu^{n+k-1} \sum_i \frac{m_i}{c_i^k(\mu^n - c_i^n)}\,.$$

D'où,

$$(6.9) \qquad K'(\mu) \sim \sum_i \frac{m_i}{\mu^n - c_i^n}\mu^{n-1}\left\{1 + \frac{\mu}{c_i} + \left(\frac{\mu}{c_i}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\mu}{c_i}\right)^{n-1}\right\} = \sum_i \frac{m_i}{\mu - c_i}\left(\frac{\mu}{c_i}\right)^{n-1}.$$

Cela signifie que $K'(\mu)$ a les pôles simples pour $\mu = c_1, c_2, \cdots, c_i \cdots$ et le résidu au point c_i est égal à m_i. Cela implique que

$$(6.10) \qquad \mathcal{D}_n(\lambda;\, G) = \exp\left(\int_0^\lambda K'(\lambda)\,d\lambda\right) = e^{K(\lambda)}$$

est une fonction entière et a pour zéros c_i, et dont les ordres sont précisément m_i. Evidemment (6.5) est valable pour tout λ d'après la définition de $\mathcal{D}_n(\lambda;\, G)$.

7. Expression de $-\mathcal{D}_k'(\lambda;\, G)/\mathcal{D}_k(\lambda;\, G)$.

Dans (6.5) changeons n en k:

$$(7.1) \qquad -\mathcal{D}_k'(\lambda;\, G)/\mathcal{D}_k(\lambda;\, G) = \int_\Omega (\Gamma_G - G - \lambda G^2 - \cdots - \lambda^{k-2}G^{k-1})(x, x;\, \lambda)\,dx\,.$$

Nous allons appliquer cette formule au noyau de Green $G(x, y)$, étudié dans la section 5. On prend

$$(7.2) \qquad k = [n/m] + 1.$$

Proposition 7.1. *Soit $G(x, y)$ le noyau de Green envisagé dans la section 5, on a*

(7.3) $$\mathcal{D}_k(\lambda;\, G)=\prod_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_j}\right)\exp\left\{\frac{\lambda}{\lambda_j}+\frac{\lambda^2}{2\lambda_j^2}+\cdots+\frac{1}{k-1}\left(\frac{\lambda}{\lambda_j}\right)^{k-1}\right\},$$

où les valeurs propres λ_j de G se figurent autant de fois que leurs degrés.

Démonstration. Nous divisons la démonstration en deux parties.
1) Montrons que $\mathcal{D}_k(\lambda;\, G_\varepsilon)\to\mathcal{D}_k(\lambda;\, G)$, $(\varepsilon\to+0)$, uniformément sur tout compact de C^1. D'après (6.10),

$$\mathcal{D}_k(\lambda; G_\varepsilon)=\exp\left(\int_0^\lambda K_\varepsilon'(\lambda)d\lambda\right),$$

où

$$-K_\varepsilon'(\lambda)=\lambda^{k-1}\int_\Omega \Gamma_{G_\varepsilon^k}(x, x;\, \lambda^k)dx+\sum_{p=1}^{k-1}\lambda^{k+p-1}\int_\Omega (G^p\Gamma_{G_\varepsilon^k})(x, x;\, \lambda^k)dx.$$

(G_ε^k signifie $(G_\varepsilon)^k$).

D'après Fredholm,

$$\Gamma_{G_\varepsilon^k}(x, x;\, \lambda^k)=D_{G_\varepsilon^k}(x, x;\, \lambda^k)/D(\lambda^k;\, G_\varepsilon^k).$$

Or, compte tenu du corollaire du lemme 6.2, il est clair que

$$D(\lambda^k;\, G_\varepsilon^k)\to D(\lambda^k;\, G^k);\quad D_{G_\varepsilon^k}(x, x;\, \lambda^k)\to D_{G^k}(x, x;\lambda^k)$$

uniformément sur $\bar{\Omega}\times K$, K étant un compact (arbitraire) de C^1. Ceci entraîne encore que

$G_\varepsilon^p D_{G_\varepsilon^k}(x, x;\, \lambda^k)=\int_\Omega G_\varepsilon^p(x, z)D_{G_\varepsilon^k}(z, x;\, \lambda^k)dz$ converge vers $(G^p D_{G^k})$ $(x, x;\, \lambda^k)$ dans le même sense.

Ceci remarqué, soit R un nombre tel que, sur le cercle $|\lambda|=R$, il n'existe aucun zéro de $D(\lambda^k;\, G^k)$. Dans ce cercle nous excluons les zéros de $D(\lambda^k;\, G^k)$ par de petits disques $\{\delta_i\}$. Alors $1/D(\lambda^k;\, G_\varepsilon^k)$ converge uniformément dans le cercle exclué les disques $\{\delta_i\}$. Ceci entraîne que $K_\varepsilon'(\lambda)\to K'(\lambda)$ dans le même domaine. Or, dans la définition

$$\mathcal{D}_k(\lambda;\, G_\varepsilon)=\exp\left(\int_0^\lambda K_\varepsilon'(z)dz\right)$$

l'intégration est prise sur n'importe quel chemin. Nous fixons un chemin de la manière suivante: D'abord prenons un point fixé z_0 sur le cercle $|\lambda|=R$. Pour aller de l'origine à un point du cercle, on prend d'abord le segment Oz_0*), et puis le chemin sur le cercle. Ceci entraîne que

$$\mathcal{D}_k(\lambda;\, G_\varepsilon)\rightarrow\mathcal{D}_k(\lambda;\, G)$$

uniformément sur le cercle $|\lambda|=R$. Ceci entraîne que $\mathcal{D}_k(\lambda;\, G_\varepsilon)$ converge uniformément dans $|\lambda|\leq R$. Comme R est arbitraire, on voit que cette convergence a lieu sur tout compact K de C^1.

2) Montrons que

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{|\lambda_j|^{\alpha}}<+\infty, \text{ pour } \alpha>n/m\,. \tag{7.4}$$

Telle estimation a été montrée dans la proposition 3.2 sous la forme plus faible. Montrons-le donc en bref. Compte tenu de (4.5) et d'après le raisonnement fait dans le lemme 4.1, on voit que, s étant *réel* positif,

$$\Gamma(\mu;G'^s)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}\frac{1}{\mu-(-\lambda)^s}\Gamma_G(\lambda)d\lambda+\sum_i \operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_i}\left[\frac{1}{\mu-(-\lambda)^s}\Gamma_G(\lambda)\right],$$

où $G'=(-G)$. Ensuite le même raisonnement que dans la proposition 3.1 montre que les valeurs propres de $G'^s=(-G)^s$ est précisément $(-\lambda_j)^s$ y compris leurs degrés. D'autre part, d'après la proposition 5.1, pour $s>n/2m$, $G'_s(x,y)$ est un noyau du type d'Hilbert-Schmidt, donc on a d'après Schur,

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{|\lambda_j|^{2s}}\leq\iint|G'_s(x,y)|^2dxdy<+\infty, \text{ pour } s>n/2m\,. \tag{7.5}$$

On a donc

---

*) On peut supposer le segment Oz_0 n'a pas de points communs avec les disques $\{\delta_i\}$.

(7.6) $$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{|\lambda_j|^k}<+\infty \quad (k=[n/m]+1).$$

Par ailleurs, compte tenu de $\lambda_j^{(\varepsilon)}=\lambda_j e^{-\varepsilon\lambda_j}$, il existe un M, tel que

(7.7) $$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{|\lambda_j^{(\varepsilon)}|^k}<M, \text{ quel que soit } \varepsilon.$$

3) D'après le lemme 4.2,

$$D(\lambda;G_\varepsilon)=\sum_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_j^{(\varepsilon)}}\right).$$

Ceci entraîne que $-D'(\lambda;G_\varepsilon)/D(\lambda;G_\varepsilon)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_j^{(\varepsilon)}-\lambda}$.

Or, le premier membre est égal (d'après (7.3)) à $b_1^{(\varepsilon)}+b_2^{(\varepsilon)}\lambda+\cdots+b_p^{(\varepsilon)}\lambda^{p-1}+\cdots$, où

$$b_p^{(\varepsilon)}=\int_\Omega (G_\varepsilon^p)(x,x)dx .$$

D'où

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_j^{(\varepsilon)}}\right)^p=b_p^{(\varepsilon)} \quad (p=1,2,\cdots).$$

On a donc, d'après (6.4),

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_k(\lambda;G_\varepsilon)&=\exp\left(b_1^{(\varepsilon)}\lambda+\frac{b_2^{(\varepsilon)}}{2}\lambda^2+\cdots+\frac{b_{k-1}^{(\varepsilon)}}{k-1}\lambda^{k-1}\right)D(\lambda;G_\varepsilon)\\&=\prod_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_j^{(\varepsilon)}}\right)\exp\left\{\frac{\lambda}{\lambda_j^{(\varepsilon)}}+\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\lambda_j^{(\varepsilon)}}\right)^2+\cdots+\frac{1}{k-1}\left(\frac{\lambda}{\lambda_j^{(\varepsilon)}}\right)^{k-1}\right\}.\end{aligned}$$

Or, $\lambda_j^{(\varepsilon)}\to\lambda_j$ ($\varepsilon\to+0$) avec les multiplicités, et compte tenu de (7.7), le passage à la limite donne (7.3). c.q.f.d.

Résumons ce qu'on a obtenu. Remarquons d'abord qu'on a deux expressions de $(-G)^s$:

$$G'^s=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}e^{tA}dt, \qquad (6.6),$$

$$(-G)^s=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma(\lambda I-A)^{-1}\frac{d\lambda}{(-\lambda)^s}, \qquad (4.5).$$

L'équivalence est immédiate compte tenu de (4.2). En effet

$$\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}e^{tA}dt=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma(\lambda I-A)^{-1}d\lambda\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty e^{\lambda t}t^{s-1}dt$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma(\lambda I-A)^{-1}(-\lambda)^{-s}d\lambda.$$

En combinant (4. 6) et (5. 6),

$$(8.8)\qquad \Gamma_G(\lambda)-G-\lambda G^2-\cdots-\lambda^{k-2}G^{k-1}$$
$$=-\int_0^\infty e^{tA}\left[e^{-\lambda t}-\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(-\lambda t)^j}{j!}\right]dt,\quad (\mathrm{Re}\lambda\geq 0).$$

D'où, compte tenu de (7. 1) et (7. 3),

Proposition 7.2.

$$(7.9)\qquad \mathrm{trace}\left(\int_0^\infty e^{tA}\varphi(t;\lambda)dt\right)=\sum_{j=1}^\infty\left(\frac{1}{\lambda-\lambda_j}+\frac{1}{\lambda_j}+\cdots+\frac{\lambda^{k-2}}{\lambda_j^{k-1}}\right),\quad (\mathrm{Re}\lambda\geq 0),$$

où $\qquad \varphi(t;\lambda)=e^{-\lambda t}-\sum_{j=0}^{k-2}\frac{(-\lambda t)^j}{j!},$

où les valeurs propres λ_j figurent autant de fois que leurs degrés.

8. Formule asymptotique des valeurs propres.

Regardons le premier membre de (7. 9) :

$$\int_0^\infty e^{tA}\varphi(t;\lambda)dt=\int_0^1 e^{tA}\varphi(t;\lambda)dt+\int_1^\infty e^{tA}\varphi(t;\lambda)dt.$$

Considérons d'abord la dernière intégrale. Compte tenu de $\varphi(t;\lambda)$, elle s'écrit

$$\int_1^\infty e^{tA}\varphi(t;\lambda)dt=\int_1^\infty e^{tA}e^{-\lambda t}dt-\sum_{j=0}^{k-2}\frac{(-\lambda)^k}{j!}\int_1^\infty e^{tA}t^{j-1}dt\,.$$

D'où,

$$\mathrm{trace}\left(\int_1^\infty e^{tA}\varphi(t;\lambda)dt\right)=\int_\Omega N(x,x;\lambda)dx-\sum_{j=0}^{k-2}\frac{(-\lambda)^j}{j!}\int_\Omega N_j(x,x)dx.$$

En effet, pour $s>0$ arbitraire,

$$A^s\int_1^\infty e^{tA}t^j dt=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma(\lambda I-A)^{-1}f(\lambda)d\lambda,$$

où $f(\lambda)=\int_1^\infty t^{s+j}e^{\lambda t}dt$. Or, sur $\lambda\in\Gamma$, on a Re $\lambda\leqslant-\delta$, et Re $\lambda\leqslant-c|\lambda|$, $(c>0)$, d'où $|f(\lambda)|\leqslant$Const. $|\lambda|^{s+j-1}e^{-c|\lambda|}$. Ceci montre, compte tenu du lemme 2. 3, que

$$\text{trace}\left(\int_1^\infty e^{tA}t^{j-1}dt\right)=\int_\Omega N_j(x,x)dx$$

a le sense déterminé. Il en est de même de $N(x,y;\lambda)$.

Considerons

$$\int_\Omega N(x,x;\lambda)dx=\text{trace}\left(\int_1^\infty e^{tA}e^{-\lambda t}dt\right).$$

Remarquons le principe suivant: Soit $T(\lambda)=A^{-s}B(\lambda)A^{-s'}$ $(s,s'>n/2m)$, désignons le noyau de $T(\lambda)$ par $N(x,y;\lambda)$. Alors, si $B(\lambda)$ est continuement différentiable dans l'espace $\mathcal{L}(L^2(\Omega);L^2(\Omega))$, alors le noyau $N(x,y;\lambda)$ est continuement différentiable dans l'espace $C^0(\bar\Omega\times\bar\Omega)$, et $\frac{d}{d\lambda}T(\lambda)$ a le noyau $\frac{\partial}{\partial\lambda}N(x,y;\lambda)$. Ceci se voit facilement compte tenu du lemme 2. 3. Appliquons cette propriété à $T(\lambda)=\int_1^\infty e^{tA}e^{-\lambda t}dt$ (Re$\lambda>0$), en prenant $B(\lambda)=A^sT(\lambda)A^{s'}$. Comme on le voit facilement, $B(\lambda)$ est indéfiniment différentiable pour $\lambda>0$, et on a

$$\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^kB(\lambda)=\int_1^\infty e^{-\lambda t}(-t)^ke^{tA}A^{s+s'}dt.$$

D'autre part, comme $\|e^{tA}A^{s+s'}\|<C_{s+s'}$, pour $t\geqslant1$, on a

$$\left\|\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^kB(\lambda)\right\|\leqslant\text{Const. }e^{-\lambda/2},\text{ pour }\lambda\to+\infty\quad(k=0,1,2,\cdots).$$

Donc on a confirmé que non seulement sup $|N(x,y;\lambda)|$, mais aussi toutes les dérivées sup $\left|\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^kN(x,y;\lambda)\right|$ décroissent exponentiellement vers 0 lorsque $\lambda\to+\infty$.

Considérons ensuite

$$\text{trace}\left(\int_0^1e^{tA}\varphi(t;\lambda)dt\right)=\int_0^1\varphi(t;\lambda)dt\int_\Omega G(t,x,x)dx$$

Montrons que cette fonction est continuement différentiable pour $\lambda>0$, et

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\int_0^1\varphi(t;\lambda)dt\int_\Omega G(t,x,x)dx\right)=\int_0^1\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi(t;\lambda)dt\int_\Omega G(t,x,x)dx.$$

En effet, compte tenu de $\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi(t;\lambda)=(-t)\left\{e^{-\lambda t}-\sum_{j=0}^{k-3}\frac{(-\lambda t)^j}{j!}\right\}$, on a

$$\left|G(t,x,x)\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi(t;\lambda)\right|\leq\text{const. } t^{-(n/m)+(k-1)},$$

pour λ borné et $t\in[0,1]$. Remarquons que $-(n/m)+(k-1)>-1$. Alors, comme la fonction $G(t,x,x)\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi(t;\lambda)$ est majorée par valeurs absolues, pour λ borné, par une fonction sommable (indépendante de λ) dans $(x,t)\in\Omega\times(0,1)$, on voit que la différentiation sous le signe de l'intégrale est légitime.

Résumons:

Lemme 8.1. *La différentiation* $(k-1)$ *fois des deux membres de* (7.9) *donne*

$$(8.1)\quad \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(\lambda-\lambda_j)^k}$$
$$=\frac{1}{(k-1)!}\int_0^1\int_\Omega e^{-\lambda t}t^{k-1}G(t,x,x)\,dtdx+O(e^{-c\lambda}),\quad(\lambda\to+\infty).$$

En décomposant,

$$(8.2)\quad G(t,x,y)=G_0(t,x-y;y)+G_1(t,x,y)+G_c(t,x,y),$$

utilisons le lemme 5.1. G_0 se défini par

$$(8.3)\quad G_0(t,x-y;y)=(2\pi)^{-n}\int e^{i(x-y)\xi}\exp\{A_0(x,i\xi)t\}\,d\xi,$$

où $A_0(x,D)$ est la partie principale de l'opérateur $A(x,D)$. Supposons que les coefficients de A_0 soient tous réels. Posons

$$(8.4)\quad A_0(x,\xi)=(-1)^{b+1}a(x,\xi)\qquad(b=m/2).$$

On sait que $a(x,\xi)>0$ pour tout $\xi\neq0$. Définissons

(8.5) $\quad w_a(x)=\int_{a(x,\xi)<1} d\xi; \quad w(\Omega)=\int_\Omega w_a(x)dx.$

On a alors

Lemme 8.2.

$$G_0(t,0;x)=(2\pi)^{-n}n/m\Gamma(n/m)w_a(x)t^{-n/m}.$$

Démonstration.

$$G_0(t,0;x)=(2\pi)^{-n}\int \exp\{-a(x,\xi)t\}\,d\xi.$$

Introduisons les coordonnées polaires: $\rho(\omega)=ra(x,\omega)^{1/m}$, où $r=|\xi|$, et ω est la variable sur la sphère d'unité Comme x est fixé en ce moment, au lieu de $a(x,\omega)$ nous écrivons simplement $a(\omega)$. Alors $d\rho=a(\omega)^{1/m}dr+\Sigma K_i d\omega_i$.

D'où

$$d\rho d\omega=a(\omega)^{1/m}dr\,d\omega; \quad r=a(\omega)^{-1/m}\rho.$$

(8.6) $\quad \iint \exp\{-a(r\omega)t\}\,r^{n-1}drd\omega=\int_\Omega a(\omega)^{-n/m}\,d\omega\int_0^\infty \exp(-\rho^m t)\rho^{n-1}d\rho.$

Or, $\quad \int_0^\infty \exp(-\rho^m t)\rho^{n-1}d\rho=1/m\,t^{-n/m}\Gamma(n/m).$

D'autre part, comme on le voit facilement, $\int_{a(\xi)<1} d\xi=\frac{1}{n}\int_\Omega a(\omega)^{-n/m}d\omega$, d'où (8.6) est égal à

$$t^{-n/m}n/m\,\Gamma(n/m)\int_{a(\xi)<1} d\xi. \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Quant à G_c, on a

(8.7) $\quad \int_\Omega |G_c(t,x,x)|\,dx \leqslant \text{const.}\quad t^{-n/m+1/m}.$

En effet, le premier membre se majore, compte tenu de (6.3), par

$$\text{const.}\int_0^\infty \exp\left\{-c\left(\frac{l_x}{t^\alpha}\right)^q\right\}t^{-n/m}dl_x.$$

En posant $l_x/t=u$, $dl_x=t^\alpha du$, ce nombre se majore par,

$$\text{const. } t^{-n/m+1/m}\int_0^\infty \exp(-cu^q)du\,.$$

Calculons

$$\int_0^1 t^{k-n/m-1}e^{-\lambda t}dt\,.$$

Ceci est égal à $\lambda^{n/m-k}\int_0^\lambda t^{k-n/m-1}e^{-t}dt=\lambda^{n/m-k}\,\Gamma\left(k-\frac{n}{m}\right)+O(e^{-c'\lambda}),\ (c'>0)$.

Compte tenu des lemmes 8. 1, 8. 2, on a donc

Lemme 8.3.

$$\sum_{j=1}^\infty\frac{1}{(\lambda-\lambda_j)^k}=(2\pi)^{-n}\{(k-1)!\}^{-1}\,\Gamma\left(\frac{n}{m}+1\right)\Gamma\left(k-\frac{n}{m}\right)w(\Omega)\,\lambda^{n/m-k}+O(\lambda^{n/m-k-1/m}),\ (\lambda\to+\infty). \tag{8.8}$$

Nous allons en déduire la formule asymptotique des valeurs propres λ_j. Supposons que les λ_j sont rangées de manière que les parties réelles des λ_j forment une suite décroissante.

Posons

$$-\lambda_j=\alpha_j+i\beta_j\,. \tag{8.9}$$

Maintenant on impose aux λ_j la condition suivante:

Condition.

(8. 10) *Les λ_j ont comme une seule direction asymptotique l'axe réel négatif.*

En d'autres termes, quel que soit $\varepsilon>0$, on a

$$|\mathrm{Im}\,\lambda_j|\leqslant\varepsilon|\mathrm{Re}\,\lambda_j|,\ \text{pour } j>N(\varepsilon).$$

Posons

$$f(\lambda)=\sum_{j=1}^\infty\frac{1}{(\lambda+\alpha_j)^k}, \tag{8.11}$$

et montrons

$$\sum_{j=1}^\infty\frac{1}{(\lambda-\lambda_j)^k}=(1+o(1))f(\lambda),\ \text{pour } \lambda\to+\infty. \tag{8.12}$$

$$f(\lambda)-\Sigma\frac{1}{(\lambda-\lambda_j)^k}=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(\lambda+\alpha_j+i\beta_j)^k-(\lambda+\alpha_j)^k}{(\lambda+\alpha_j+i\beta_j)^k}\frac{1}{(\lambda+\alpha_j)^k}.$$

D'après (8.10), pour $\varepsilon>0$ donné à l'avance, il existe un $N(\varepsilon)$ tel que $|\beta_j|\leqslant\varepsilon\alpha_j$ pour $j>N$.

$$\left|\frac{(\lambda+\alpha_j+i\beta_j)^k-(\lambda+\alpha_j)^k}{(\lambda+\alpha_j+i\beta_j)^k}\right|\leqslant\sum_{q=1}^{k}\binom{k}{q}\frac{(\lambda+\alpha_j)^{k-q}|\beta_j|^q}{|(\lambda+\alpha_j+i\beta_j)^k|}\leqslant\sum_{q=1}^{k}\binom{k}{q}\left|\frac{\beta_j}{\lambda+\alpha_j}\right|^q.$$

Or, si l'on prend λ assez grand, c'est-à-dire que pour $\lambda>\lambda_0$, ce nombre devient $<\varepsilon$ et cela a lieu pour tout $j=1,2,\cdots,N$.

Pour les termes tels que $j>N$, on a

$$\sum_{q=1}^{k}\binom{k}{q}\left|\frac{\beta_j}{\lambda+\alpha_j}\right|^q\leqslant\sum_{q=1}^{k}\binom{k}{q}\left|\frac{\beta_j}{\alpha_j}\right|^q\leq\sum_{q=1}^{k}\binom{k}{q}\varepsilon^q=(1+\varepsilon)^k-1.$$

En résumé, pour $\lambda>\lambda_0$,

$$\left|\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{1}{(\lambda+\alpha_j)^k}-\frac{1}{(\lambda-\lambda_j)^k}\right)\right|\leqslant\varepsilon\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{(\lambda+\alpha_j)^k}$$

$$\left|\sum_{j=N+1}^{\infty}(\cdots-\cdots)\right|\leqslant\{(1+\varepsilon)^k-1\}\sum_{j=N+1}^{\infty}\frac{1}{(\lambda+\alpha_j)^k}.$$

Ces deux inégalités impliquent (9.12). D'où

$$(8.13)\quad \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(\lambda+\alpha_j)^k}\sim(2\pi)^{-n}\{(k-1)!\}^{-1}\Gamma\left(\frac{n}{m}+1\right)\Gamma\left(k-\frac{n}{m}\right)w(\Omega)\lambda^{n/m-k}.$$

Appliquons le théorème taubérien dû à Hardy-Littlewood ([5]):

$\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dM(t)}{(t+\lambda)^\rho}\sim\frac{A}{\lambda^\sigma}$, $\lambda\to+\infty$, *entraîne que*

$\displaystyle M(t)\sim A\frac{\Gamma(\rho)}{\Gamma(\sigma)\Gamma(\rho-\sigma+1)}t^{\rho-\sigma}$, *pour* $t\to+\infty$,

où $0<\sigma<\rho$, et $M(t)$ étant une fonction positive non-décroissante. D'où

$$(8.14)\qquad N(t)=\sum_{\alpha_j<t}1\sim(2\pi)^{-n}w(\Omega)t^{n/m},\ \text{pour } t\to+\infty\,.$$

Posons $t=\alpha_j$ dans cette formule, on a

$$j\sim(2\pi)^{-n}w(\Omega)\alpha_j^{n/m}.$$

Compte tenu de $\alpha_j/(-\lambda_j)\sim 1$, on a

(8.15) $$\lambda_j \sim -(2\pi)^m w(\Omega)^{-m/n} j^{m/n} \text{ pour } j\to\infty .$$

Résumons le résultat, qui a été montré par Carleman ([4]) et Gårding ([6]) et par plusieurs auteurs dans des cas particuliers:

Théorème *Dans la condition* (8.10) *on a*

$$N(t)=\sum_{\mathrm{Re}\lambda_j>-t} 1\sim(2\pi)^{-n}w(\Omega)t^{n/m}, \quad \textit{pour } t\to+\infty ,$$

$$\lambda_j\sim -(2\pi)^m w(\Omega)^{-m/n} j^{m/n}, \quad \textit{pour } j\to\infty ,$$

où les valeurs propres λ_j sont rangées de manière que

$$\mathrm{Re}\ \lambda_1 \geqslant \mathrm{Re}\ \lambda_2 \geqslant\cdots\geqslant \mathrm{Re}\ \lambda_j \geqslant\cdots \to -\infty ,$$

et les λ_j figurent autant de fois que leurs degrés (le nombre des fonctions propres généralisées linéairement indépendantes).

Références

[1] S. Agmon: On the eigenfunctions and on the eigenvaleues of general elliptic boundary value problems, Comm. Pure Appl. Math., 15 (1962), 119-147

[2] S. Agmon, D. Douglis, L. Nirenberg: Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary value conditions I, Comm. Pure Appl. Math., 12 (1959), 623-727

[3] R. Arima: On general boundary value parablem for parabolic equations, J. Math. Kyoto Univ., 4 (1964), 207-243

[4] T. Carleman: Uber die asymptotishe Verteilung der Eigenwerte partieller Differentialgleichungen, Ber. Math. Phys. Klasses der Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, 88 (1963), 119-132

[5] G. H. Hardy and J. E. Littlewood: Notes of the series (XI), Proc. London Math. Soc., 30 (1930), 23-37

[6] L. Gårding: On the asymptotic distribution of eigenvalues and eigenfunctions of elliptic differential operators, Math. Scand., 1 (1953), 232-255

[7] S. Mizohata: Sur les propriétés asymptotiques des valeurs propres pour les opérateurs elliptiques, Proc. Japan Acad. 41 (1965), 104-108

[8] S. Mizohate et R. Arima: Propriétés asymptotiques des valeurs propres des opérateurs elliptiques auto-adjoints, J. Math. Kyoto Univ. 4 (1964), 245-254

[9] H. Poincaré: Remarques diverses sur l'équation de Fredholm, Acta Math. 33 (1910), 57-86

[10] M. Schechter: General boundary value problems for elliptic partial differential equations, Comm. Pure Appl. Math., 12(1959), 475-482