J. Math. Kyoto Univ.
6-3 (1967) 323-357

Domaines pseudoconvexes sur les variétés kählériennes

Par

Akira TAKEUCHI

(Reçu le 16 Janvier, 1967)

Dans le mémoire précédent [12][1], nous avons donné une démonstration au théorème, disant que tout domaine pseudoconvexe sur l'espace projectif complexe, n'ayant pas de point critique intérieur et possédant au moins un point frontière, est holomorphiquement complet[2]. Dans cette démonstration, la métrique kählérienne projective jouait un rôle essentiel.

Dans le présent mémoire, nous nous proposons de montrer que la métrique joue le même rôle aussi sur une variété kählérienne générale.

Soit $d(P)$ la distance d'un point P à la frontière d'un domaine pseudoconvexe $\mathcal{D}$, mesurée par une métrique kählérienne. Lorsque $\mathcal{D}$ s'étend sur l'espace numérique $\mathbf{C}^n$ et que l'on mesure la distance par la métrique euclidienne, la fonction $-\log d(P)$ est une fonction pseudoconvexe dans $\mathcal{D}$[3]. Lorsque $\mathcal{D}$ s'étend sur l'espace projectif et que la distance $d(P)$ est mesurée par la métrique projective, la fonction $-\log d(P)$ est fortement pseudoconvexe. Mais, sur une variété kählérienne générale, il n'en est pas ainsi.

Cependant, on peut introduire un ordre de pseudoconvexité $\omega(-\log d)$ de la fonction $-\log d(P)$ et l'évaluer inférieurement par une quantité propre de la variété kählérienne, pourvu que la métrique soit analytique réelle. Cette évaluation permet à la métrique de jouer le rôle fondamental.

---

1) Les numéros entre crochets renvoient à la bibliographie, placée à la fin de ce mémoire.

2) Ce théorème est dû à M^{me} Fujita ; voir [6].

3) Voir [9], p. 40 ; [10], p. 117.

D'après ce résultat, nous pouvons résoudre le problème de Levi sous diverses nouvelles conditions. Par exemple, on verra que, sur une variété analytique complexe admettant une fonction analytique réelle $\varphi(P)$, fortement pseudoconvexe, tout domaine pseudoconvexe, complètement intérieur à la variété au sens large, est holomorphiquement complet. D'ailleurs, comme corollaire de ce théorème, on pourra donner une démonstration plus élémentaire à certains résultats déjà connus, concernant le problème de Levi (voir n° 11).

1. Domaines sans point critique intérieur.

Nous désignons par $\mathcal{V}$ une variété analytique complexe de dimension complexe n et par $z_i = z_{i,U}(P)$ $(i=1, 2, \cdots, n)$, ou simplement $z_i(P)$, un système de coordonnées locales dans un voisinage U d'un point de $\mathcal{V}$. Dans ce travail, nous supposons toujours que toute variété, qui intervienne dans la suite, admet une base dénombrable d'ouverts pour sa topologie.

Nous appellerons *domaine* sans point critique intérieur *sur* la variété un espace topologique séparé $\mathcal{D}$, à base dénombrable, et possédant une application continue, dite projection et notée π, de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{V}$, qui est un homéomorphisme local.

Quand il est besoin de distinguer la projection, nous désignerons le domaine par $(\mathcal{D}, \pi)$. Mais, quand aucune confusion n'est à craindre, nous le noterons simplement $\mathcal{D}$.

Par la projection π, le domaine $\mathcal{D}$ admet une et une seule structure de variété analytique complexe de dimension n, pour laquelle la projection π est une application holomorphe. Nous munirons toujours le domaine $\mathcal{D}$ de cette structure canonique.

Lorsque la variété $\mathcal{V}$ est l'espace numérique $\mathbf{C}^n$, notre définition de domaine coïncide avec celle de H. Cartan et P. Thullen [3].

2. Domaines pseudoconvexes.

Pour les domains sur l'espace numérique $\mathbf{C}^n$, nous adoptons la définition de pseudoconvexité due à Oka[4].

4) [10], p. 108.

Soit $\mathcal{D}$ un domaine sans point critique intérieur sur l'espace $\mathbf{C}^n$ des variables complexes $z_1, \cdots, z_n$. $\mathcal{D}$ est dit *pseudoconvexe* s'il satisfait aux deux conditions suivantes;

1°) Pour tout point M de $\mathbf{C}^n$, il existe un voisinage U de M tel que, pour toute composante connexe δ de $\pi^{-1}(U)$, on puisse trouver un plus petit voisinage $V \subset U$ de M de manière que, *si* $\pi^{-1}(V) \cap \delta$ contient un sousdomaine $\tilde{\Delta}$ isomorphe par la projection π à la réunion $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ de deux ensembles ouverts Δ_1 et Δ_2 dans $\mathbf{C}^n$, définis respectivement par

$$(\Delta_1) \qquad \rho' < |z_1 - z_1^0| < \rho, \quad |z_2 - z_2^0| < r_2, \cdots, |z_n - z_n^0| < r_n,$$

$$(\Delta_2) \qquad |z_1 - z_1^0| < \rho, \quad |z_2 - z_2^0| < r_2', \cdots, |z_n - z_n^0| < r_n',$$

où $(z_1^0, \cdots, z_n^0)$ est un point fixe (quelconque) de V et ρ, ρ', r_i et r_i' sont des constantes positives avec $\rho' < \rho$ et $r_i' < r_i$, $(i = 2, \cdots, n)$, *alors* il existe un sousdomaine, contenu dans $\pi^{-1}(V) \cap \delta$ et contenant $\tilde{\Delta}$ et isomorphe par la projection π au polycylindre C:

$$(C) \qquad |z_1 - z_1^0| < \rho, \quad |z_2 - z_2^0| < r_2, \cdots, |z_n - z_n^0| < r_n.$$

2°) Pour tout polycylindre $\Gamma : |z_1 - a_1| < r_1, \cdots, |z_n - a_n| < r_n$ et pour toute transformation biholomorphe $\tau : y_i = f_i(z_1, \cdots, z_n)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ d'un voisinage de $\bar{\Gamma}$ sur un domaine dans l'espace numérique des variables complexes $y_1, \cdots, y_n$, le domaine $(\pi^{-1}(\Gamma), \tau \circ \pi)$, sur l'espace $\mathbf{C}^n(y)$, satisfait à la condition 1°).

Remarque: Lorsque la condition 1°) est remplie pour un voisinage U d'un point M, elle l'est aussi pour tout voisinage U_1 de M contenu dans U. Car, pour le voisinage V, il suffit de prendre l'intersection $V \cap V_1$ de V et un polycylindre V_1 contenu dans U_1. D'ailleurs, pour un point P intérieur à $\mathcal{D}$ et pour sa projection $M = \pi(P)$, la condition 1°) est toujours vérifiée pour la composante connexe δ contenant P, puisque l'on a l'isomorphisme $\pi^{-1}(V) \cap \delta \approx V$ pour un polycylindre V suffisamment petit autour de M.

D'après ce qui précède, nous voyons que la pseudoconvexité d'un domaine est une propriété de la "frontière" de $\mathcal{D}$ et, de plus, elle est une propriété locale à chacun des "points frontières", au moins sous la forme de définition[5].

Ensuite, considérons un domaine $\mathscr{D}$ sur une variété analytique complexe de dimension n. Nous dirons que le domaine $\mathscr{D}$ est *pseudoconvexe*, si, pour tout point M de $\mathcal{V}$ et pour tout voisinage U de M suffisamment petit, le domaine $\pi^{-1}(U)$, considéré comme domaine étalé sur l'espace $\mathbf{C}^n(z)$ à l'aide des coordonnées locales $z_1, \cdots, z_n$, est pseudoconvexe, au sens précédent.

3. Métrique kählérienne.

Une métrique hermitienne sur une variété analytique complexe $\mathcal{V}$ de dimension n peut s'exprimer dans chaque domaine de coordonnées locales $z_1, \cdots, z_n$ par une forme quadratique hermitienne définie positive

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{i\bar{j}}(z)\, dz_i d\bar{z}_j\,,$$ [6]

où les fonctions $g_{i\bar{j}}$ sont des composantes du tenseur fondamental g par rapport aux coordonnées locales et elles satisfont aux relations $g_{i\bar{j}} = \bar{g}_{j\bar{i}}$ $(i, j = 1, \cdots, n)$, et les $dz_1, \cdots, dz_n, d\bar{z}_1, \cdots, d\bar{z}_n$ sont des coordonnées de l'espace tangent, correspondant aux coordonnées locales $z_1, \cdots, z_n$.

Dans ce mémoire, nous nous restreindrons au cas où les fonctions $g_{i\bar{j}}$ définissant la métrique sont des fonctions, à valeurs complexes, *analytiques réelles* par rapport aux variables réelles $\mathrm{Re}\, z_i$ et $\mathrm{Im}\, z_i$ (dites aussi analytiques réelles par rapport aux z_i et $\bar{z}_i$ ou simplement analytiques réelles).[7]

On dit que la métrique est *kählérienne* si la forme différentielle $\Omega = \sum g_{i\bar{j}} dz_i \wedge d\bar{z}_j$ est fermée: $d\Omega = 0$. S'il en est ainsi,

---

5) Oka a donné la définition de pseudoconvexité encore sous quelques autres formes; Voir [10], p. 111. Docquier et Grauert ont considérablement arrangé diverses notions concernant la pseudoconvexité; Voir [4].

6) Les coordonnées donnent lieu à un homéomorphisme $\rho(P) = (z_1(P), \cdots, z_n(P))$ d'un ouvert U à un ouvert V de l'espace C^n. Par l'intermédiaire de ρ, une fonction $f(P)$ dans U correspondent canoniquement à une fonction $f(\rho^{-1}(z))$ dans V. Mais, lorsqu'il n'y a aucune confusion à craindre, nous les identifierons pour la simplicité et nous noterons $f(z)$ une fonction sur la variété $\mathcal{V}$. Il en sera de même pour les dz_i et $d\bar{z}_i$.

7) Remarquons que cette restriction n'est essentiellement nécessaire que dans les lemmes 2 et 5.

certaines formules de la géométrie différentielle ont des expressions assez simples par rapport aux coordonnées locales complexes[8]. Par exemple, le tenseur de courbure s'exprime par rapport aux coordonnées complexes sous la forme

$$(1) \qquad R_{i\bar{j}k\bar{l}} = -\frac{\partial^2 g_{i\bar{j}}}{\partial z_k \partial \bar{z}_l} + \sum_{r,k} g^{r\bar{h}} \frac{\partial g_{i\bar{h}}}{\partial z_k} \frac{\partial g_{r\bar{j}}}{\partial \bar{z}_l},$$

où la matrice $(g^{i\bar{j}})$ est la matrice inverse de $(g_{i\bar{j}})$. Posons

$$\|R\|^2 = \sum g^{i\bar{h}} g^{r\bar{j}} g^{k\bar{s}} g^{t\bar{l}} R_{i\bar{j}k\bar{l}} \bar{R}_{hrs\bar{t}}.$$

On sait bien que cette quantité ne dépend pas des coordonnées locales donc elle est une fonction globale sur la variété.

4. Quelques coordonnées normales.

Maintenant, nous nous proposons d'examiner la possibilité de la normalisation des coordonnées relative à la métrique kählérienne. L'étude étant locale, considérons dans un ouvert U de $\mathbf{C}^n$ une métrique kählérienne $ds^2 = \sum g_{i\bar{j}}(z) dz_i d\bar{z}_j$, et supposons que les fonctions $g_{i\bar{j}}$ sont définies dans U.

Pour une matrice carrée (λ_{ij}) de degré n telle qu'on ait

$$\sum g_{i\bar{j}}(z_0) \lambda_{ih} \bar{\lambda}_{jk} = \delta_{h\bar{k}} \qquad (\delta_{h\bar{k}} = 0 \ si\ h \neq k,\ \delta_{h\bar{h}} = 1)$$

en un point $z_0 = (z_1^0, \cdots, z_n^0)$ de U, appliquons aux coordonnées la transformation linéaire

$$(1) \qquad z_i - z_i^0 = \sum_j \lambda_{ij} z'_j \qquad (i = 1, \cdots, n).$$

Alors, les composantes $g'_{i\bar{j}}(z')$ du tenseur fondamental g par rapport aux nouvelles coordonnées (z') vérifient aussitôt les égalités

$$(2) \qquad g'_{i\bar{j}}(0) = \delta_{i\bar{j}}.$$

Développant $g'_{i\bar{j}}$ en série entière de $(z', \bar{z}')$, on a

$$(3) \qquad \begin{aligned} g'_{i\bar{j}}(z') = \delta_{i\bar{j}} &+ \sum_t (a_{i\bar{j}t} z'_t + b_{i\bar{j}\bar{t}} \bar{z}'_t) \\ &+ \sum_{t,s} (c_{i\bar{j}ts} z'_t z'_s + e_{i\bar{j}t\bar{s}} z'_t \bar{z}'_s + d_{i\bar{j}\bar{t}\bar{s}} \bar{z}'_t \bar{z}'_s) + \cdots \end{aligned}$$

8) Voir par example [2], p. 117.

où les coefficients $c_{i\bar{j}ts}$ et $d_{i\bar{j}\bar{t}\bar{s}}$ sont symétriques par rapport aux indices t et s. Des relations $\bar{g}'_{j\bar{i}}=g'_{i\bar{j}}$, il résulte

$$(4) \qquad \bar{a}_{j\bar{i}t} = b_{i\bar{j}\bar{t}}\,, \quad \bar{c}_{j\bar{i}ts} = d_{i\bar{j}\bar{t}\bar{s}}\,, \quad \bar{e}_{j\bar{i}t\bar{s}} = e_{i\bar{j}s\bar{t}}\,.$$

Considérons ensuite au voisinage de l'origine une transformation analytique biholomorphe

$$(5) \qquad w_i = \sum_j \alpha_{ij} z'_j + \sum_{j,k} \beta_{ijk} z'_j z'_k + \sum_{j,k,l} \gamma_{ijkl} z'_j z'_k z'_l + \cdots \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

où β_{ijk} et γ_{ijkl} sont symétriques par rapport aux j et k et aux j, k, l respectivement. Les composantes $g_{i\bar{j}}(w)$ du tenseur g par rapport aux coordonnées $w_1, \cdots, w_n$ auront les relations

$$g'_{i\bar{j}}(z') = \sum \tilde{g}_{k\bar{l}}(w) \frac{\partial w_k}{\partial z'_i} \overline{\frac{\partial w_l}{\partial z'_j}}\,, \qquad (i, j = 1, \cdots, n)$$

où

$$\frac{\partial w_k}{\partial z'_i} = \alpha_{ki} + 2\sum_p \beta_{kip} z'_p + 3\sum_{p,q} \gamma_{kipq} z'_p z'_q + \cdots \qquad (i, k = 1, \cdots, n)$$

Nous allons déterminer la transformation (5) d'une façon qu'on ait

$$(6) \qquad \tilde{g}_{k\bar{l}} = \delta_{k\bar{l}} + \sum A_{k\bar{l}s\bar{t}} w_s \overline{w}_t + O(r^3)\,, \qquad (r = \sqrt{\textstyle\sum |w_i|^2})\,.$$

En écrivant

$$\begin{aligned}
&\sum_{k,l} [\delta_{k\bar{l}} + \sum A_{k\bar{l}s\bar{t}} \alpha_{sp} z'_p \bar{\alpha}_{tq} \bar{z}'_q + O(r^3)] \\
&\qquad \times [\alpha_{ki} + 2\sum \beta_{kip} z'_p + 3\sum \gamma_{kipq} z'_p z'_q + O(r^3)] \\
&\qquad \times [\bar{\alpha}_{lj} + 2\sum \bar{\beta}_{ljp} \bar{z}'_p + 3\sum \bar{\gamma}_{ljpq} \bar{z}'_p \bar{z}'_q + O(r^3)] \\
&= \sum \alpha_{ki} \bar{\alpha}_{kj} + 2\sum (\bar{\alpha}_{kj} \beta_{kip} z'_p + \alpha_{ki} \bar{\beta}_{kjp} \bar{z}'_p) \\
&\qquad + 3\sum (\bar{\alpha}_{kj} \gamma_{kipq} z'_p z'_q + \alpha_{ki} \bar{\gamma}_{kjpq} \bar{z}'_p \bar{z}'_q) \\
&\qquad + \sum (\alpha_{ki} \bar{a}_{lj} \alpha_{sp} \bar{\alpha}_{tq} A_{k\bar{l}s\bar{t}} + 4\beta_{kip} \bar{\beta}_{kjq}) z'_p \bar{z}'_q + O(r^3)
\end{aligned}$$

et en comparant cette relation à la formule (3), on verra que, pour qu'on ait (6), il faut et il suffit que les égalités suivantes soient vérifiées :

$$(7) \qquad \sum \alpha_{ki} \bar{\alpha}_{kj} = \delta_{i\bar{j}}\,,$$

$$(8) \qquad 2\sum \bar{\alpha}_{kj} \beta_{kip} = a_{i\bar{j}p}\,, \qquad 2\sum \alpha_{ki} \bar{\beta}_{kjp} = b_{i\bar{j}\bar{p}}\,,$$

$$(9) \qquad 3\sum \bar{\alpha}_{kj} \gamma_{kipq} = c_{i\bar{j}pq}\,, \qquad 3\sum \alpha_{ki} \bar{\gamma}_{kjpq} = d_{i\bar{j}\bar{p}\bar{q}}\,,$$

$$(10)\qquad \sum \alpha_{ki}\bar{\alpha}_{lj}A_{kl s\bar{t}}\alpha_{sp}\bar{\alpha}_{tq}+4\sum \beta_{kip}\bar{\beta}_{kjq} = e_{i\bar{j}p\bar{q}}\,.$$

(7) signifie que (α_{ij}) est une matrice unitaire. Si l'on choisit une matrice unitaire (α_{ij}) tout arbitrairement, alors on peut déterminer d'une façon unique les coefficients β_{ijk} et γ_{ijkl} tellement que les relations (8) et (9) soient satisfaites. En vertu de

$$e_{i\bar{j}t\bar{s}} = \left(\frac{\partial^2 g'_{i\bar{j}}}{\partial z'_t\partial \bar{z}'_s}\right)_0$$

$$a_{i\bar{j}p} = \left(\frac{\partial g'_{i\bar{j}}}{\partial z'_p}\right)_0$$

et de (1) du n° 3, l'égalité (10) se transforme en

$$A_{kl s\bar{t}} = -\tilde{R}_{kl s\bar{t}}(0)\,,$$

où $\tilde{R}_{kl s\bar{t}}$ sont les composantes du tenseur de courbure par rapport aux coordonnées (w). Nous sommes ainsi arrivés à

$$(11)\qquad \tilde{g}_{k\bar{l}}(w) = \delta_{kl}-\tilde{R}_{k\bar{l}s\bar{t}}(0)w_s\bar{w}_t+O(r^3)\,.$$

Examinons encore plus en detail le procèssus de transformation de (z) en (w). Comme on peut obtenir (λ_{ij}) à partir de $(g_{i\bar{j}}(z_0))$ par le calcul arithmétique et par la racine carrée, il existe des fonctions $\lambda_{ij}(z)$ analytiques réelles dans U telles qu'on ait

$$\sum g_{i\bar{j}}(z)\lambda_{ih}(z)\bar{\lambda}_{jk}(z) = \delta_{h\bar{k}}$$

en tout point de U. Ensuite, les coefficients $a_{i\bar{j}t}$ et $c_{i\bar{j}ts}$ de (3) sont aussi analytiques réelles en tant que fonctions de (z_0) et de (α). Donc, on peut déterminer la transformation (5) de manière qu'elle varie d'une façon analytique réelle par rapport aux (z_0, α).

En résumé, nous avons le lemme suivant.

Lemme 1. *Soient $g_{i\bar{j}}(z)$ n^2 fonctions analytiques réelles (à valeurs complexes) dans un ouvert U de $\mathbf{C}^n$ telles que la forme $\sum g_{i\bar{j}}(z)dz_i d\bar{z}_j$ définisse une métrique kählérienne dans U. Pour tout point (z_0) dans U et pour toute matrice unitaire (α_{ij}) de degré n, il existe alors une transformation (analytique biholomorphe) de coordonnées locales*

$$w_i = f_i(z\,;\,z_0,\,\alpha)$$

dans un voisinage de z_0, *telle qu'on ait* $f_i(z_0\,;\,z_0,\alpha)=0$, *que les composantes du tenseur fondamental g puissent s'écrire par rapport aux coordonnées* (w) *sous la forme*

$$\tilde{g}_{i\bar{j}}(w) = \delta_{i\bar{j}} - \sum \tilde{R}_{i\bar{j}s\bar{t}}(0)w_s w_t + O(r^3)$$

et que les fonctions $f_i(z\,;\,z_0,\alpha)$ *soient analytiques réelles par rapport aux paramètres* (z_0,α). *De plus, pour toute matrice* (λ'_{ij}) *satisfaisant à* $\sum g_{i\bar{j}}(z_0)\lambda'_{ih}\bar{\lambda}'_{jk}=\delta_{h\bar{k}}$, *on peut choisir une matrice unitaire* (α_{ij}) *de telle façon que*

$$\frac{\partial f_i}{\partial z_h}(z_0\,;\,z_0,\alpha) = \lambda'_{ih}\,.$$ [9]

5. Géodésiques.

Soit $\mathcal{V}$ une variété analytique complexe de dimension n, munie d'une métrique hermitienne. La longueur d'une courbe $z_i=z_i(t)$ $(\alpha\leqq t\leqq\beta)$, différentiable de classe C^1, dans le domaine U d'un système de coordonnées locales $z_1,\cdots,z_n$, est donnée par la formule

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\sum g_{i\bar{j}}\frac{dz_i}{dt}\frac{d\bar{z}_j}{dt}}\,dt\,.$$

Pour mesurer la longueur d'une courbe différentiable de classe C^1, qui n'est pas nécessairement contenue dans un domaine de coordonnées, il suffira de la partager en morceaux, chacun contenu dans un domaine de coordonnées locales.

La distance entre deux points est, par définition, l'infimum de la longueur de toutes les courbes différentiables de classe C^1 joignant ces points. Si la variété $\mathcal{V}$ est connexe, elle est un espace métrique muni de cette distance.

---

9) La démonstration montre d'ailleurs que, dans le cas où la métrique n'est que hermitienne, on peut trouver une transformation de coordonnées locales, après laquelle on exprime

$$g_{i\bar{j}}=\delta_{i\bar{j}}+\sum A_{i\bar{j}k\bar{l}}\,z_k\bar{z}_l+O(r_3)\,.$$

Si deux systèmes de coordonnées locales admettent l'expression des $g_{i\bar{j}}$ de la forme

$$g_{i\bar{j}}=\delta_{i\bar{j}}+O(r)\,.$$

alors la transformation entre eux possède des développements tayloriens dont les coefficients du premier degré forment une matrice unitaire.

Si la métrique est kählérienne, l'équation de géodésique peut s'exprimer localement par rapport à un système de coordonnées $z_1, \cdots, z_n$ dans une forme simple

$$(1) \qquad \frac{d^2 z_i}{ds^2} + \sum_{j,k,g} g^{i\bar{j}} \frac{\partial g_{k\bar{j}}}{\partial z_h} \frac{dz_k}{ds} \frac{dz_h}{ds} = 0 \qquad (i=1, \cdots, n)$$

avec le paramètre s, qui exprime la longueur des géodésiques. On a

$$\sum_{i,j} g_{i\bar{j}} \frac{dz_i}{ds} \frac{d\bar{z}_j}{ds} = 1 .$$

Pour s assez petit, toute courbe d'intégrale de l'équation (1) est la courbe plus courte entre ses extrémités.

Supposons désormais que la métrique est kählérienne et analytique réelle.

Prenons dans U un point P avec ses coordonnées (z_0) et une matrice unitaire (α) de degré n, et considérons les coordonnées locales (w) obtenues dans le lemme 1. Soit $w_i(s\,;\, z_0, \alpha)$ le système d'intégrales de l'équation

$$(2) \qquad \frac{d^2 w_i}{ds^2} + \sum \tilde{g}^{i\bar{j}} \frac{\partial \tilde{g}_{k\bar{j}}}{\partial w_h} \frac{dw_k}{ds} \frac{dw_h}{ds} = 0 \qquad (i=1, \cdots, n)$$

satisfaisant aux conditions

$$w_i(0) = 0 \qquad (i=1, \cdots, n) ,$$
$$\frac{dw_1}{ds}(0) = 1 , \quad \frac{dw_j}{ds}(0) = 0 \qquad (j=2, \cdots, n) .$$

Comme on a

$$\sum \tilde{g}_{i\bar{j}}(0) \left(\frac{dw_i}{ds}\right)_0 \left(\frac{d\bar{w}_j}{ds}\right)_0 = 1 ,$$

s est le paramétre exprimant la longueur[10]. D'ailleurs, d'après le lemme 1, les fonctions $w_i(s\,;\, z_0, \alpha)$ sont analytiques réelles par rapport à toutes les variables (s, z_0, α). Développons chacune d'elles en série entière de s:

$$w_i = \sum_{m=1}^{\infty} a_{im}(z_0, \alpha) s^m \qquad (i=1, \cdots, n) .$$

10) Voir, par exemple, [5], p. 50.

En substituant à s la variable complexe $\sigma=s+\sqrt{-1}t$, nous avons

$$\zeta_i(\sigma\,;\,z_0,\,\alpha)=\sum_{m=1}^{\infty}a_{i,m}(z_0,\,\alpha)\sigma^m \qquad (i=1,\,\cdots,\,n)$$

Ces fonctions-ci sont holomorphes à l'origine par rapport à σ et elles vérifient les conditions

$$\zeta_i(0\,;\,z_0,\,\alpha)=0 \qquad (i=1,\cdots,n)$$

$$\frac{d\zeta_1}{d\sigma}(0\,;\,z_0,\,\alpha)=1\,,\quad \frac{d\zeta_j}{d\sigma}(0\,;\,z_0,\,\alpha)=0 \qquad (j=2,\,\cdots,\,n)\,.$$

Donc, au voisinage de $\sigma=0$, on aura la fonction inverse $\sigma=\zeta_1^{-1}(\tau\,;\,z_0,\,\alpha)$ de $\tau=\zeta_1(\sigma\,;\,z_0,\,\alpha)$, qui est holomorphe par rapport à la variable complexe τ au voisinage de l'origine et analytique réelle par rapport aux variables $(z_0,\,\alpha)$.

En posant

$$(3)\qquad \begin{aligned} u_1&=\zeta_1^{-1}(w_1\,;\,z_0,\,\alpha)\,,\\ u_2=w_2\,,\quad &\cdots\,,\quad u_n=w_n\,. \end{aligned}$$

on a un système de coordonnées locales (u) en P. Nous allons calculer certains coefficients des développements des composantes $g^*_{i\bar{j}}(u)$ du tenseur g

$$g^*_{i\bar{j}}(u)=\sum_{i,j}\tilde{g}_{kl}(w)\frac{\partial w_k}{\partial u_i}\overline{\frac{\partial w_l}{\partial u_j}}\,.$$

D'abord, l'équation (2) et les relations suivantes

$$\left(\frac{dw_1}{ds}\right)_0=1\,,\quad \left(\frac{dw_2}{ds}\right)_0=\cdots=\left(\frac{dw_n}{ds}\right)_0=0\,,$$

$$\tilde{g}^{i\bar{j}}(0)=\delta_{i\bar{j}}\,,\quad \left(\frac{\partial\tilde{g}_{k\bar{j}}}{\partial w_h}\right)_0=0\,,\quad \left(\frac{\partial^2\tilde{g}_{k\bar{j}}}{\partial w_h\partial w_l}\right)_0=0$$

entraînent les relations

$$\left(\frac{d^2w_1}{ds^2}\right)_0=0\,,\quad \left(\frac{d^3w_1}{ds^3}\right)_0=\left(\frac{\partial^2\tilde{g}_{1\bar{1}}}{\partial w_1\partial\overline{w}_1}\right)_0=-\tilde{R}_{1\bar{1}1\bar{1}}(0)\,.$$

Il suit de là que

$$\zeta_1(\sigma)=\sigma-\frac{1}{3!}\tilde{R}_{1\bar{1}1\bar{1}}(0)\sigma^3+\cdots\,.$$

Alors, (3) devient

$$\begin{cases} w_1 = u_1 - \dfrac{1}{3!}\tilde{R}_{1\bar{1}1\bar{1}}(0)u_1^3 + \cdots \\ w_2 = u_2, \cdots, w_n = u_n, \end{cases}$$

donc on a

$$\frac{\partial w_1}{\partial u_1} = 1 - \frac{1}{2}\tilde{R}_{1\bar{1}1\bar{1}}u_1^2 + \cdots$$

$$\frac{\partial w_i}{\partial u_j} = \delta_{ij} \qquad (si\ i \geqq 2\ ou\ j \geqq 2).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} g^*_{1\bar{1}}(u) &= \tilde{g}_{1\bar{1}}(w)\frac{\partial w_1}{\partial u_1}\overline{\frac{\partial w_1}{\partial u_1}} \\ &= \Big(1 - \sum \tilde{R}_{1\bar{1}s\bar{t}}w_s\bar{w}_t + \cdots\Big)\Big(1 - \frac{1}{2}R^*_{1\bar{1}1\bar{1}}u_1^2 + \cdots\Big)\Big(1 - \frac{1}{2}\bar{R}^*_{1\bar{1}1\bar{1}}\bar{u}_1^2 + \cdots\Big) \\ &= 1 - \frac{1}{2}R^*_{1\bar{1}1\bar{1}}u_1^2 - \frac{1}{2}\bar{R}^*_{1\bar{1}1\bar{1}}\bar{u}_1^2 - \sum R^*_{1\bar{1}s\bar{t}}u_s\bar{u}_t + \cdots, \end{aligned}$$

$$g^*_{1\bar{j}}(u)(=\bar{g}^*_{j\bar{1}}) = \tilde{g}_{1\bar{j}}\frac{\partial w_1}{\partial u_1} = -\sum R^*_{1\bar{j}s\bar{t}}u_s\bar{u}_t + \cdots,$$

$$g^*_{i\bar{j}}(u) = \tilde{g}_{i\bar{j}}(w) = \delta_{ij} - \sum R^*_{i\bar{j}s\bar{t}}u_s\bar{u}_t + \cdots \qquad (i, j \geqq 2)$$

où les $R^*_{i\bar{j}k\bar{l}}$ signifient leurs valeurs à l'origine $(w)=(0)$. (En vertu de $(\tilde{R}_{i\bar{j}k\bar{l}})_0 = (R^*_{i\bar{j}k\bar{l}})_0$).

En tenant compte de ce que toutes les fonctions et tous les coefficients intervenant dans les formules précédentes sont analytiques réelles par rapport à (z_0, α), nous obtiendrons ainsi le lemme suivant :

Lemme 2. 1°) *Pour tout point P de U et pour toute géodésique l issue de P, il existe un système de coordonnées locales $(u_1, \cdots, u_n)$ en P, tel que l s'exprime par*

$$\operatorname{Im} u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \cdots, u_n = 0$$

et qu'on ait

$$g^*_{1\bar{1}}(u) = 1 \qquad sur\ l,$$

où $g^*_{i\bar{j}}$ sont les composants du tenseur g par rapport aux coordonnées (u).

2°) *De plus, pour tout ouvert $V \Subset U$, il existe un nombre réel*

$\varepsilon>0$, *tel qu'en tout* $P\in V$, *on puisse trouver les coordonnées* (u) *de* $1°$), *qui sont valides dans le* ε-*voisinage de* P, *quelle que soit la géodésique* l. ε *ne dépend ni de* P *ni de* l.

$3°$) *Pour tout nombre réel* $\delta>0$ *et pour tout ouvert* $V\Subset U$, *il existe un nombre réel* $\varepsilon_1>0$, *plus petit que* ε, *tel qu'en tout point* $P\in V$, *on puisse trouver les coordonnées* (u) *de* $1°$), *par rapport auxquelles les composantes des tenseurs admettent les inégalites*

$$|g^*_{i\bar{j}}(u)-\delta_{i\bar{j}}|<\delta\,,\quad\left|\frac{\partial g^*_{i\bar{j}}}{\partial u_k}(u)\right|<\delta$$
$$|R^*_{i\bar{j}k\bar{l}}(u)-R^*_{i\bar{j}k\bar{l}}(0)|<\delta$$

pourvu que la distance de (u) *à l'origine* (0) $(=P)$ *soit plus courte que* ε_1. ε_1 *ne dépend pas du choix de* P.

6. Ordre de pseudoconvexité.

Une fonction $\varphi(P)$ définie dans un domaine $\mathcal{D}$, à valeurs réelles, admettant $-\infty$ pour sa valeur, est dite *fonction pseudoconvexe* dans $\mathcal{D}$, si elle satisfait aux conditions suivantes:

$1°$) $e^{\varphi(P)}$ est finie et semi-continue supérieurement dans $\mathcal{D}$;

$2°$) Pour tout point P_0 de $\mathcal{D}$ et pour toute droite complexe L passant par P_0, avec

$$\pi(L):\quad z_1=z_1^0+\lambda_1 t,\cdots,z_n=z_n^0+\lambda_n t\,,$$

la trace de φ sur L, considérée comme fonction de la variable complexe t, est sous-harmonique en $t=0$.

Une fonction $\psi(t)$ d'une variable complexe t est dite *sous-harmonique* en $t=t_0$, si elle est semi-continue supérieurement au voisinage de t_0, et si, pour tout $r>0$ assez petit et pour toute fonction $u(t)$, continue dans $|t-t_0|\leqq r$ et harmonique dans $|t-t_0|<r$ avec $\psi(t)\leqq u(t)$ sur $|t-t_0|=r$, on a $\psi(t_0)\leqq u(t_0)$.

Maintenant, rappelons-nous quelques notations et leurs propriétés concernant sur les fonctions pseudoconvexes, employées dans notre mémoire précédent.

Soit $\varphi(z)$ une founction continue, à valeurs réelles, définie au voisinage du point $z=a$ sur le plan d'une variable complexe z. Désignons sa valeur moyenne sur la circonférence $|z-a|=r$ de centre a et de rayon r, par

$$\mu_{r,a}(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(a+re^{i\theta})\,d\theta\,.$$

Si $\varphi(z)$ est différentiable de classe C^2, on a

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mu_{r,a}(\varphi)-\varphi(a)}{r^2} = \frac{1}{4}\Delta\varphi(a)\,.$$

Soit $\varphi(P)$ une fonction, à valeurs réelles, continue au voisinage d'un point $P_0=(a_1, \cdots, a_n)$ dans l'espace $\mathbf{C}^n$: $(z_1, \cdots, z_n)$. A chaque droite complexe L, passant par P_0 de la forme:

$$(L) \qquad z_1 = a_1+\lambda_1 t, \cdots, z_n=a_n+\lambda_n t$$

avec $|\lambda_1|^2+\cdots+|\lambda_n|^2=1$, t étant une variable complexe, correspond une fonction continue

$$\Phi_{P_0,L}(t) = \varphi(a_1+\lambda_1 t, \cdots, a_n+\lambda_n t)$$

de t au voisinage de $t=0$. Posons

$$W\varphi(P_0) = 4 \inf_L \liminf_{r\to 0} \frac{\mu_{r,0}(\Phi_{P_0,L})-\Phi_{P_0,L}(0)}{r^2}$$

où $\inf_L$ signifie la borne inférieure prise quand L parcourt l'ensemble des droites complexes passant par P_0. Alors, $W\varphi(P)$ est une fonction de P à valeurs réelles, admettant $\pm\infty$ pour sa valeur.

Si $\varphi(P)$ est différentiable de classe C^2, on a

$$W\varphi = 4 \min_{\Sigma|\lambda_i|^2=1} \sum \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}\lambda_i\bar{\lambda}_j\,.$$

Quant aux propriétés de $W\varphi$, on voit que

1°. Pour qu'une fonction continue $\varphi(P)$ soit pseudoconvexe, il faut et il suffit qu'on ait $W\varphi(P)\geqq 0$.

2°. Si $W\varphi\geqq k$, k étant une constante, et que c est une constante positive, alors $W(c\varphi)\geqq ck$. Si $W\varphi\geqq h$ et $W\psi\geqq k$, h et k étant des constantes, alors $W(\varphi+\psi)\geqq h+k$ et $W[\max(\varphi, \psi)]\geqq \max(h, k)$.

3°. Si $\psi_1, \psi_2, \cdots$ est une suite de fonctions continues avec $W\psi_m\geqq k$, k étant une constante indépendante de m, et que, pour

$m\to\infty$, ψ_m converge uniformément vers une fonction φ, alors $W\varphi \geqq k$.

4°. Si $W\varphi \geqq k$ dans un domaine, alors, à l'intérieur complet du domaine, φ peut s'approcher uniformément d'une fonction ψ, différentiable de classe C^2 et vérifiant $W\psi \geqq k$.

5°. La valeur $W\varphi(P_0)$ est invariante par toute transformation analytique (birégulière) de coordonnées au voisinage de P telle que les coefficients du premier degré dans le développement taylorien des n fonctions, qui définissent la transformation, forment une matrice unitaire.

6°. Soit $z_i = f_i(t_1, \cdots, t_n)$ $(i=1, \cdots, n)$ une transformation analytique (birégulière) de coordonnées dans un domaine. Si $W_z\varphi(P) \geqq 0$, alors

$$c^2 W_z \varphi(P) \leqq W_t \varphi(P) \leqq c'^2 W_z \varphi(P)$$

où c et c' sont respectivement le minimum et le maximum de la distance de l'origine à l'hypersurface S', qui est l'image, dans l'espace de (z), de l'hypersphère $S: \sum |t_i|^2 = 1$ dans l'espace de (t), par la transformation linéaire définie par

$$z_i = \sum_j \left(\frac{\partial f_i}{\partial t_j}\right)_P t_j .$$

Donc, c et c' sont positifs et indépendants de φ et ils varient d'une façon analytique réelle par rapport à P.[11]

Maintenant, soit $\mathcal{V}$ une variété hermitienne de dimension n et soit φ une fonction continue, à valeurs réelles, dans un voisinage d'un point P. Prenons un système de coordonnées locales $(z_1, \cdots, z_n)$ au voisinage de P tel que l'on ait

$$g_{i\bar{j}}(z) = \delta_{i\bar{j}} + O(r),$$

où $P=(z_0)$ et $r^2 = \sum |z_i - z_i^0|^2$, et posons

$$\omega\varphi(P) = W_z \varphi(P).$$

D'après les remarques faites dans le n° 4[12] et la propriété 5° de

11) Voir [12], p. 171.

12) Voir la note 9) au bas de la page 330.

ce n°, la quantité $\omega\varphi(P)$ ne dépend pas du choix d'un tel système de coordonnées. Ceci nous permet de l'appeler *ordre de pseudoconvexité* de φ en P.

De même que sur l'espace numérique, nous disons qu'une fonction continue φ dans un domaine est fonction pseudoconvexe si l'on a partout $\omega\varphi \geqq 0$. Et, φ se dit fonction *fortement* pseudoconvexe si, pour tout point du domaine, il existe un voisinage de U et un nombre réel positif k tels qu'on ait $w\varphi \geqq k$ dans U.

On sait que, si $\mathcal{D}$ est un domaine pseudoconvexe sur une variété analytique complexe $\mathcal{V}$ et φ est une fonction pseudoconvexe dans $\mathcal{D}$, alors le domaine $\{P \in \mathcal{D}\,;\, \varphi(P) < \alpha\}$ est aussi pseudoconvexe, quel que soit le nombre réel α.

7. Distance frontière.

Dans une variété riemannienne $\mathcal{V}$, considérons une courbe, de classe C^1, $l : [0, 1) \to \mathcal{V}$. Si, pour tout ensemble compact K dans $\mathcal{V}$, il existe un nombre réel positif ε tel que $l(t)$ soit en dehors de K pour tout $t > 1 - \varepsilon$, nous appelons cette courbe l courbe issue de $P = l(0)$ et tendant vers la frontière. Soit P un point de $\mathcal{V}$, nous appelons *distance de P à la frontière de $\mathcal{V}$* l'infimum de la longueur, mesurée par la métrique riemannienne, de toutes les courbes issues de P et tendant vers la frontère et nous la désignons par $d(P, \mathcal{V})$ ou simplement $d(P)$. Dans chaque composante connexe de $\mathcal{V}$, $d(P)$ est ou bien la constante infinie $+\infty$ ou bien une fonction continue à valeurs finies et positives.

Pour un domaine $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{V}$ sans point critique intérieur, qui est par définition un espace étalé sur $\mathcal{V}$, on peut munir $\mathcal{D}$ d'une métrique riemannienne, canoniquement par l'intermédiaire de la projection π. Donc, aussi dans $\mathcal{D}$, on peut définir la distance $d(P, \mathcal{D})$ d'un point P à la frontière de $\mathcal{D}$.

Lorsque la variété $\mathcal{V}$ est l'espace numérique $\mathbf{C}^n$ ou bien l'espace projectif complexe, la définition que nous venons de donner coïncide avec celle d'Oka [10] ou avec celle que nous avons donnée dans [12], respectivement.

Notre but est d'évaluer inférieurement l'ordre de pseudoconvexité $\omega(-\log d(P))$ pour un domaine pseudoconvexe $\mathcal{D}$ sur une variété kählérienne $\mathcal{V}$. Avant de l'entreprendre, il sera besoin de quelques études préparatoires.

8. Conditions à la frontière.

Lemme 3. *Soit U un polycylindre ouvert dans l'espace numérique $\mathbf{C}^n$ et soit $\mathcal{D}$ un domaine pseudoconvexe, contenu dans U et défini, par $\mathcal{D}=\{(z)\in U\,;\ \varphi(z)<0\}$ avec une fonction φ, différentiable de classe C^2, fortement pseudoconvexe. Soit P un point de $\mathcal{D}$. Supposons qu'un des points frontières de $\mathcal{D}$, les plus approchés de P par rapport à la métrique riemannienne, soit un point Q intérieur à U. Alors, on peut tracer au voisinage de Q une surface caractéristique régulière, passant par Q, extérieure à $\mathcal{D}$ sauf en Q. Autrement dit, il existe un voisinage V de Q et une fonction $f(z)$ holomorphe dans V, telles que l'ensemble analytique $\sigma=\{f(z)=0\}$ n'ait pas de point singulier et qu'on ait $Q\in\sigma$ et $\sigma\cap\mathcal{D}=\{Q\}$.*

Démonstration. De même dans le mémoire précédent, développons $\varphi(z)$ au point $Q=(z_0)$ en série taylorienne

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= 2\,\mathrm{Re}\,(\textstyle\sum a_i(z_i-z_i^0)+\sum b_{ij}(z_i-z_i^0)(z_j-z_j^0))\\ &\quad+\textstyle\sum c_{ij}(z_i-z_i^0)(\bar z_j-\bar z_j^0)+O(r^2)\,, \qquad r=\sqrt{\sum|z_i-z_i^0|^2}\,.\end{aligned}$$

Comme la forme quadratique $\sum c_{ij}\alpha_i\bar\alpha_j$ est définie positive, au moins un des coefficients a_i et b_{ij} n'est pas nul. Car, si $a_i=b_{ij}=0$ $(i, j=1, \cdots, n)$, on aurait $\varphi(z)\geqq 0$ au voisinage de (z_0), qui contredit ce que (z_0) est un point frontière de $\mathcal{D}$. Donc, l'équation

$$\textstyle\sum a_i(z_i-z_i^0)+\sum b_{ij}(z_i-z_i^0)(z_j-z_j^0)) = 0$$

définit une surface caractéristique σ qui passe par $Q=(z_0)$ et ne rencontre pas $\mathcal{D}$ au voisinage de Q.

D'ailleurs, d'après l'hypothèse, Q est le point frontière le plus approchée de P, on peut tracer une hypersphère S, ayant son centre en un point convenable P_1, telle que S passe par Q et que l'intérieur de S soit contenu dans $\mathcal{D}$. Si la surface σ n'était pas régurière en Q, on aurait $a_i=0$ $(i=1, \cdots, n)$. Etant $a_i=0$, si la forme quadratique $\sum b_{ij}(z_i-z_i^0)(z_j-z_j^0)$ est carré d'une forme linéaire, σ est un seul plan donc n'a pas de point singulier. Sinon, σ serait ou bien somme de deux plans distincts passant par Q ou bien un cône quadratique en Q. Dans tout cas, σ deverait entrer à l'intérieur de S. Or, c'est impossible. Donc, σ doit être régulière.

c. q. f. d.

Soit $\mathscr{D}$ un domaine sur une variété analytique complexe $\mathscr{V}$ et soit $\mathscr{D}_1$ un ouvert dans $\mathscr{D}$. Soit $Q \in \mathscr{D}$ un point frontière de $\mathscr{D}_1$. Nous dirons que $\mathscr{D}_1$ est fortement pseudoconvexe au point Q s'il existe un voisinage U de Q dans $\mathscr{D}$ et une fonction φ, différentiable de classe C^2 et fortement pseudoconvexe dans U telles que $\mathscr{D}_1 \cap U = \{P \in U\,;\ \varphi(P) < 0\}$. Lorsque $\mathscr{D}_1$ est fortement pseudoconvexe en tout point frontière de $\mathscr{D}_1$, intèrieur à $\mathscr{D}$, nous disons que $\mathscr{D}_1$ est fortement pseudoconvexe relativement à $\mathscr{D}$.

Ces définitions étant faites, nous avons le

Lemme 4. *Soit $\mathscr{D}$ un domaine pseudoconvexe sur l'espace numérique $\mathbf{C}^n$. Pour tout nombre positif ε, il existe un sousdomaine $\mathscr{D}_1 \subset \mathscr{D}$, fortement pseudoconvexe relativement à $\mathscr{D}$, tel que $\mathscr{D}(2\varepsilon) \subset \mathscr{D}_1 \subset \mathscr{D}(\varepsilon)$, où $\mathscr{D}(r)$ signifie l'ensemble ouvert des points P de $\mathscr{D}$ dont la distance euclidienne $d(P) = d(P, \mathscr{D})$ à la frontière de $\mathscr{D}$ dépasse r, r étant un nombre positif.*

En effet, posons $\mathscr{D}' = \left\{P \in \mathscr{D},\ d(P) > \dfrac{\varepsilon}{2}\right\}$. On sait que la fonction $-\log d(P)$ peut s'approcher uniformément dans $\mathscr{D}'$ d'une fonction φ, différentiable de classe C^2 et fortement pseudoconvexe dans $\mathscr{D}'$:

$$|-\log d(P) - \varphi(P)| < \rho \qquad \text{dans } \mathscr{D}'.$$ [13]

Si l'on prend le nombre positif ρ assez petit, on obtiendra le domaine $\mathscr{D}_1 = \left\{P \in \mathscr{D}'\,;\ \varphi(P) < -\log\left(\dfrac{3}{2}\varepsilon\right)\right\}$, qui satisfait à la condition du lemme.

9. Propriété fondamentale.

Quant à la distance à la frontière, nous allons maintenant démontrer le théorème suivant.

Théorème 1. *Soit $\mathscr{V}$ une variété analytique complexe de*

---

13) Voir [10], p. 126.

dimension n, munie d'une métrique kählérienne analytique réelle et soit $\mathcal{D}$ un domaine pseudoconvexe sur $\mathcal{V}$, tel que sa projection $\pi(\mathcal{D})$ soit contenue dans un ensemble compact $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{V}$. Soit $d(P)$ la distance à la frontière de $\mathcal{D}$, mesurée par la métrique kählérienne. Alors, il existe un nombre positif ε et un nombre réel K tels qu'on ait $\omega(-\log d)(P) \geqq K$ en tout point P où $d(P)<\varepsilon$. Les nombres ε et K ne dépendent pas du domaine $\mathcal{D}$ mais ils dépendent seulement de l'ensemble compact $\mathcal{K}$.

Pour démontrer le théorème, établissons d'abord quelques lemmes, qui sont des cas spéciaux du théorème.

Soit U un ouvert dans $\mathbf{C}^n$, muni d'une métrique kählérienne analytique réelle

$$ds^2 = \sum g_{i\bar{j}}(z)dz_i d\bar{z}_j,$$

soit $\mathcal{D}$ un sousdomaine $\subset U$, fortement pseudoconvexe relativement à U, et soit $d(P)$ la distance à la frontière de $\mathcal{D}$. Pour tout ouvert $V \Subset U$, on peut facilement trouver un nombre positif ε de manière que

1° pour tout point $P \in V$, on ait $d(P; U) > 2\varepsilon$, où $d(P; U)$ est la distance kählérienne de P à la frontière de U;

2° l'énoncé 2° du lemme 2 subsiste;

3° l'énoncé 3° du même lemme subsiste pour $\varepsilon_1 = \varepsilon$.

Pour un ouvert $V \Subset U$ et pour le nombre positif ε que nous venons de trouver, nous aurons le lemme suivant.

Lemme 5. *Il existe une constante réelle k telle que, pour tout point $P \in V \cap \mathcal{D}$ avec $d(P) < \varepsilon$, on ait*

$$\omega(-\log d)(P) \geqq -4(\|R\|(P)+k),$$

où $\|R\|$ est la quantité définie dans le n° 3 à partir du tenseur de courbure.

Démonstration. Soit P un point de $V \cap \mathcal{D}$ tel que $d(P) < \varepsilon$ et soit Q un des points frontières de $\mathcal{D}$, les plus approchés de P. On peut décrire une géodésique l, issue de P et passant par Q. D'après 1°, Q est intérieur à U. D'après 2° et 3°, on peut choisir, en vertu du lemme 2, un système de coordonnées locales $u_1, \cdots, u_n$ dans le voisinage U_1 de P, formé des points moins écartés de P

que ε, de telle façon que l s'exprime par

$$\operatorname{Im} u_1 = 0\,, \quad u_2 = 0, \cdots, \quad u_n = 0\,.$$

Donc, $Q \in U_1$. En employant ces coordonnées, nous allons évaluer

$$W_u(-\log d)(P) = \omega(-\log d)(P)\,.$$

Soit L une droite complexe passant par P:

$$(L) \qquad u_i = \lambda_i \tau,\ (i=1, \cdots, n) \qquad \text{avec} \quad \sum |\lambda_i|^2 = 1\,.$$

Pour l'évaluation, étant $d_0(\tau) = d(\lambda_i \tau)$ la restriction de $d(P)$ à L, il suffit d'évaluer inférieurement la

$$\liminf_{r \to 0} \frac{\mu_{r,0}(-\log d_0) + \log d_0(0)}{r^2}\,,$$

où $\mu_{r,0}$ signifie la moyenne sur le cercle $|\tau| = r$. (Voir n° 6) Selon le lieu de Q relatif à L, il faut distinguer deux cas suivants.

(α) Cas où $Q \in L$.

Dans ce cas, $\lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. Donc, on peut supposer sans diminuer la généralité $\lambda_1 = 1$, $u_1 = \tau$. Alors, sur L, P s'exprime par $u_1 = 0$ et Q par $u_1 = \alpha = d_0(0)$. Pour toute valeur complexe τ assez voisine de 0, décrivons la ligne l_τ définie par

$$(l_\tau) \qquad u_1 = (1-t)\tau + t\alpha \qquad (0 \leqq t \leqq 1)\,.$$

La longueur de l_τ, mesurée par la métrique kählérienne sera donnée par

$$d_1(\tau) = \int_\tau^\alpha \sqrt{g^*_{1\bar{1}}(u)}\,|du_1| = |\alpha - \tau| \int_0^1 \sqrt{g^*_{1\bar{1}}((1-t)\tau - t\alpha, 0, \cdots, 0)}\,dt\,.$$

Da la définition de $d(P)$, on a $d_1(\tau) \geqq d_0(\tau)$ et, pour $\tau = 0$, on a $d_1(0) = d_0(0)$. Donc

$$\liminf_{r \to 0} \frac{\mu_{r,0}(-\log d_0) + \log d_0(0)}{r^2} \geqq \liminf_{r \to 0} \frac{\mu_{r,0}(-\log d_1) + \log d_1(0)}{r^2}\,.$$

Or, $d_1(\tau)$ étant différentiable, la limite au deuxième membre existe et elle est égale à

$$\lim_{r \to 0} \frac{\mu_{r,0}(-\log d_1) + \log d_1(0)}{r^2} = \frac{1}{4} \Delta_\tau(-\log d(0))\,.$$

Calculons celui-ci directement. En écrivant

$$-\log d_1(\tau) = -\log|d-\tau| - \log\int_0^1 \sqrt{g_{1\bar{1}}^*((1-t)\tau - t\alpha, 0, \cdots, 0)}\,dt\,,$$

on a d'abord $\Delta(-\log|\alpha-\tau|)=0$. En posant $A=\int_0^1\sqrt{\quad}\,dt$, on aura

$$\frac{\partial(-\log A)}{\partial\tau} = -\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\tau}\,,$$

$$\frac{\partial^2(-\log A)}{\partial\tau\partial\bar{\tau}} = \frac{1}{A^2}\left|\frac{\partial A}{\partial\tau}\right|^2 - \frac{1}{A}\frac{\partial^2 A}{\partial\tau\partial\bar{\tau}}\,,$$

$$\frac{\partial A}{\partial\tau} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{g_{1\bar{1}}^*}}\frac{\partial g_{1\bar{1}}^*}{\partial u_1}(1-t)\,dt\,,$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial\tau\partial\bar{\tau}} = \int_0^1\left[\frac{-1}{2g_{1\bar{1}}^{*\,3/2}}\left|\frac{\partial g_{1\bar{1}}^*}{\partial u_1}\right|^2 + \frac{1}{g_{1\bar{1}}^{*\,1/2}}\frac{\partial^2 g_{1\bar{1}}^*}{\partial u_1\partial\bar{u}_1}\right](1-t)^2\,dt\,.$$

Comme $g_{1\bar{1}}^*\equiv 1$ sur l, nous obtenons ainsi l'inégalité suivante :

$$(1)\qquad \frac{1}{4}\Delta(-\log d_1(0)) \geqq -\int_0^1\frac{\partial^2 g_{1\bar{1}}^*}{\partial u_1\partial\bar{u}_1}(1-t)^2\,dt\,.$$

(β) Cas où Q ne se trouve pas sur L.

Dans ce cas, en reprenant $u_2, \cdots, u_n$ convenablement, nous pouvons exprimer L par les équations

$$u_1 = \lambda_1\tau\,,\quad u_2 = \lambda_2\tau\,,\quad u_3 = \cdots = u_n = 0\,,\qquad |\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2 = 1\,.$$

D'après le lemme 3, on peut décrire à l'extérieur de $\mathfrak{D}$ une surface caractéristique touchant $\mathfrak{D}$ en Q. Plus précisément, il existe une fonction $\beta(u_2, \cdots, u_n)$ holomorphe au voisinage de $(u_2, \cdots, u_n)=(0, \cdots, 0)$ telle que $(\beta(0), 0, \cdots, 0)$ soit le point Q et que $(\beta(u), u_2, \cdots, u_n)\in V-\bar{\mathfrak{D}}$ sauf $(u, \cdots, u_n)=(0, \cdots, 0)$. Joignons maintenant un point $P'=(\lambda_1\tau, \lambda_2\tau, 0, \cdots, 0)$ sur L, suffisamment voisin de P, et le point correspondant $Q'=(\beta(\lambda_2\tau, 0, \cdots, 0), \lambda_2\tau, 0, \cdots, 0)$ de la surface, par une ligne l_τ définie par

$$(l_\tau)\qquad u_1 = (1-t)\lambda_1\tau + t\beta(\lambda_2\tau, 0, \cdots, 0),\quad u_2 = \lambda_2\tau\,,\quad u_3 = \cdots = u_n = 0\,.$$

La longueur de l_τ sera donnée par

$$d_2(\tau) = \int_{P'}^{Q'}\sqrt{g_{1\bar{1}}^*(u)}\,|du_1|$$
$$= |\beta(\lambda_2\tau, 0, \cdots, 0) - \lambda_1\tau|\int_0^1\sqrt{g_{1\bar{1}}^*((1-t)\tau + t\beta, \lambda_2\tau, 0, \cdots)}\,dt\,.$$

Comme on a $d_2(0)=d_0(0)$ et $d_2(\tau)\geqq d_0(\tau)$, on verra, de même que dans le cas précédent,

$$\omega(-\log d_0)(0) \geqq \Delta(-\log d_2)(0).$$

On a aussi $\Delta \log|\beta-\lambda_1\tau|=0$. Posons $B=\int_0^1 \sqrt{g^*_{1\bar{1}}}\,dt$. Alors,

$$\frac{\partial B}{\partial \tau} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{g^*_{1\bar{1}}}}\left[\frac{\partial g^*_{1\bar{1}}}{\partial u_1}\left((1-t)\lambda_1+t\frac{\partial \beta}{\partial u_2}\lambda_2\right)+\frac{\partial g^*_{1\bar{1}}}{\partial u_2}\lambda_2\right]dt$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial \tau\partial\bar{\tau}} = \int_0^1\left[\frac{-1}{2g^{*\,3/2}_{1\bar{1}}}\left| \quad " \qquad\qquad " \quad \right|^2\right.$$

$$+\frac{1}{\sqrt{g^*_{1\bar{1}}}}\left\{\frac{\partial^2 g^*_{1\bar{1}}}{\partial u_1\partial\bar{u}_1}\left|(1-t)\lambda_1+t\frac{\partial\beta}{\partial u_2}\lambda_2\right|^2+\frac{\partial^2 g^*_{1\bar{1}}}{\partial u_1\partial\bar{u}_2}\left((1-t)\lambda_1+t\frac{\partial\beta}{\partial u_2}\lambda_2\right)\bar{\lambda}_2\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial^2 g^*_{1\bar{1}}}{\partial\bar{u}_1\partial u_2}\left((1-t)\bar{\lambda}_1+t\,\overline{\frac{\partial\beta}{\partial u_2}}\,\bar{\lambda}_2\right)\lambda_2+\frac{\partial^2 g^*_{1\bar{1}}}{\partial u_2\partial\bar{u}_2}\lambda_2\bar{\lambda}_2\right\}\right]dt.$$

De l'hypothèse que Q est un point frontière de $\mathcal{D}$, ayant la distance minimum de P, et de la définition de β, il s'ensuit que

$$\frac{\partial\beta}{\partial u_2}(0,\cdots,0) = -g^*_{2\bar{1}}(Q).$$

Donc, pour $\tau=0$, nous obtenons

$$(2)\qquad \frac{1}{4}\Delta(-\log d_2(0)) \geqq -\int_0^1 \sum_{i,j=1,2}\frac{\partial^2 g^*_{1\bar{1}}}{\partial u_i\partial\bar{u}_j}\alpha_i\bar{\alpha}_j\,dt,$$

où $\alpha_1=(1-t)\lambda_1-g^*_{2\bar{1}}(Q)t\lambda_2$ et $\alpha_2=\lambda_2$.

Or, $\varepsilon=\varepsilon_1$ étant suffisamment petit, on aura, d'après le lemme 2,

$$\left|\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial^2 g^*_{1\bar{1}}}{\partial u_i\partial\bar{u}_j}\alpha_i\bar{\alpha}_j\right| \leqq ||R||_0+k$$

pour une constante k.

Donc, dans tous les deux cas, les inégalités donnent naissance à l'évaluation voulue:

$$\omega(-\log d) \geqq -4(||R||+k).$$

c. q. f. d.

Soit U encore un ouvert dans $\mathbf{C}^n$, muni d'un métrique kählérienne analytique réelle. Soit maintenant $\mathcal{D}$ un domaine pseudoconvexe sur U et soit $d(P)$ la distance de $P\in\mathcal{D}$ à la frontière de $\mathcal{D}$. Nous allons montrer le

Lemme 6. *Pour un ouvert $V \Subset U$, il existe un nombre réel K et un nombre réel positif ε, tels que, si P est un point de $\mathcal{D} \cap \pi^{-1}(V)$ tel que $d(P) < \varepsilon$, on ait $\omega(-\log d)(P) \geqq K$. Les nombres ε et K ne dépendent pas du domaine $\mathcal{D}$ mais ils dépendent seulement de $V \Subset U$.*

Démonstration. D'après le lemme 4, pour tout nombre positif ε', il existe un sousdomaine $\mathcal{D}_1$ fortement pseudoconvexe, contenu dans $\mathcal{D}$ et contenant $\mathcal{D}(\varepsilon')$. Pour la distance $d_1(P)$ à la frontière de $\mathcal{D}_1$, tous les points frontières de $\mathcal{D}_1$ remplissent toutes les conditions du lemme précédent. En tenant compte du fait que les constantes ε et $K = -4(\max_V \|R\| + k)$, obtenues dans le lemme précédent, ne dépendent pas du domaine, on verra que, pour tout point $P \in \mathcal{D}_1$ avec $d_1(P) < \varepsilon$, subsiste l'inégalité $\omega(-\log d_1(P)) \geqq K$. En vertu des relations

$$d(P) - \varepsilon' \leqq d_1(P) \leqq d(P),$$

quand ε' tend vers 0, $d(P)$ converge uniformément vers $d(P)$. Par conséquent

$$\omega(-\log d)(P) \geqq K,$$

pour $P \in \mathcal{D} \cap \pi^{-1}(V)$, $d(P) < \varepsilon$. c. q. f. d.

Maintenant que le problème a été résolu localement, le théorème est facilement démontré. En effet, prenons pour chaque point M de $\mathcal{K}$ un domaine U de coordonnées locales, contenant M, et un voisinage V de M tel que $V \Subset U$. En vertu de la compacité de $\mathcal{K}$, nous pouvons choisir parmi les voisinages V un nombre fini d'eux, soient $V_1, V_2, \cdots, V_p$, qui forment un recouvrement de $\mathcal{K}$. Soient $U_1, U_2, \cdots, U_p$ les domaines de coordonnées locales correspondant aux $V_1, V_2, \cdots, V_p$ respectivement. D'après le dernier lemme, il existe un nombre réel K et un nombre réel positif ε tels que l'énoncé du lemme soit vérifié pour tous les couples (U_i, V_i) $(i = 1, 2, \cdots, p)$. Avec ces nombres réels, l'énoncé du théorème est aussi vérifié. Nous avons ainsi achevé la démonstration du théorème.

10. Construction des fonctions pseudoconvexes.

Soit $\mathcal{V}$ une variété analytique complexe, munie d'une métrique kählérienne analytique réelle. Soit $\mathcal{D}$ un domaine pseudoconvexe sur $\mathcal{V}$ tel qu'on ait $\pi(\mathcal{D})\Subset\mathcal{V}$. Supposons d'ailleurs qu'il existe une fonction fortement pseudoconvexe $\varphi_0(P)$ dans $\mathcal{V}$.[14]

Théorème 2. *Dans ces conditions, on peut construire une fonction continue* Φ *dans* $\mathcal{D}$ *telle que l'on ait*

$$\{P\in\mathcal{D}\,;\,\Phi(P)<\alpha\}\Subset\mathcal{D}$$

pour tout nombre réel α, *et* $\omega\Phi\geqq 1$ *dans* $\mathcal{D}$.

La méthode de la démonstration de ce théorème est essentiellement la même que celle d'Oka[15]. Commençons par établir le lemme suivant.

Lemme 7. *Il existe une fonction* Φ_0 *continue dans* $\mathcal{D}$ *telle que* $\omega\Phi_0\geqq 1$ *et que, pour tout nombre réel* α, *on puisse trouver un nombre réel positif* ρ *tel que* $\{P\in\mathcal{D}\,;\,\Phi_0(P)<\alpha\}\subset\mathcal{D}(\rho)$.

Démonstration. Soient K et ε les nombres réels trouvés dans le théorème 1 pour $\mathcal{K}=\overline{\pi(\mathcal{D})}$. Nous allons démontrer le lemme dans le cas où K est négatif. (Au cas où $K\geqq 0$, le même raisonnement sera appliqué d'une façon un peu plus simple.)

Soit M le plus grand de l'unité et du $\max\{|\varphi_0(P)|\,;\,P\in\overline{\pi(\mathcal{D})}\}$. Posons

$$\psi_0 = -\log d(P)+(1-K)\varphi_0(P)\,. \tag{1}$$

Alors on a $\omega\psi_0\geqq 1$. Etant

$$r = e^{-M(1-K)}\,,\qquad \beta = -\log\left(\frac{r\varepsilon}{2}\right), \tag{2}$$

posons

$$\mathcal{D}_1 = \{P\in\mathcal{D}\,;\,\psi_0(P)<\beta\}\,.$$

Alors, nous avons

$$\mathcal{D}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\subset\mathcal{D}_1\subset\mathcal{D}\left(\frac{r^2\varepsilon}{2}\right).$$

---

14) Remarquons qu'il sera suffisant qu'une telle fonction existe au voisinage de $\overline{\pi(\mathcal{D})}$ et, de plus, qu'on peut supposer qu'on ait $\omega\varphi_0(P)\geqq 1$ au voisinage de $\overline{\pi(\mathcal{D})}$, en vertu de la compacité de $\overline{\pi(\mathcal{D})}$. Cela ne diminue pas la généralité.

15) Voir [10], p. 128.

Car, si $\psi_0(P)=\beta$, on aura

$$\log r = -(1-K)M \leqq -(1-K)\varphi_0(P) \leqq (1-K)M = -\log r\,,$$
$$-\log\frac{\varepsilon}{2} \leqq -\log d(P) \leqq -\log\frac{r^2\varepsilon}{2}\,.$$

Donc,

$$\frac{\varepsilon}{2} \geqq d(P) \geqq \frac{r^2\varepsilon}{2}\,.$$

Par conséquent, ψ_0 est une fonction pseudoconvexe au voisinage de $\partial\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_1$ est un domaine pseudoconvexe.

Soit $d_1(P)$ la distance de $P\in\mathcal{D}_1$ à la frontière de $\mathcal{D}_1$. Comme on a $\overline{\pi(\mathcal{D}_1)}\subset\overline{\pi(\mathcal{D})}$, on voit $\omega(-\log d_1)(P)\geqq K$, pour tout point $P\in\mathcal{D}_1$ tel que $d_1(P)<\varepsilon$ $\left(\text{c'est-à-dire que } d(P)<\varepsilon+\frac{r^2\varepsilon}{2}\right)$.

Ensuite, en posant

$$\psi_1(P) = -\log d_1(P)+(1-K)\varphi_0(P)\,,$$
$$\mathcal{D}_2 = \{P\in\mathcal{D}_1\,;\, \psi_1(P)<\beta\}\,,$$

on aura $\omega\psi_1(P)\geqq 1$ pour tout $P\in\mathcal{D}_1$ avec $d_1(P)<\varepsilon$ et

$$\mathcal{D}_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\subset\mathcal{D}_2\subset\mathcal{D}_1\left(\frac{r^2\varepsilon}{2}\right).$$

Par conséquent, $\mathcal{D}_2$ est un domaine pseudoconvexe.

En répétant ce processus, on obtiendra une suite décroissante de domaines pseudoconvexes

$$\mathcal{D}\supset\mathcal{D}_1\supset\mathcal{D}_2\supset\cdots\supset\mathcal{D}_k\supset\cdots\,,\quad \left(\mathcal{D}_k\subset\mathcal{D}_{k-1}\left(\frac{r^2\varepsilon}{2}\right)\right)$$

et une suite de fonctions

$$\psi_0,\ \psi_1,\ \psi_2,\ \cdots,\ \psi_k,\ \cdots$$

où chaque $\psi_k(P)$ est définie dans $\mathcal{D}_k$ et telle que $\omega\psi_k(P)\geqq 1$, si $d_k(P)<\varepsilon$. Comme on a $d(P)>k\frac{r^2\varepsilon}{2}$ pour $P\in\mathcal{D}_k$ et que $\overline{\pi(\mathcal{D})}$ est compact, ces suites s'arrêtent en nombre fini. C'est à dire que, pour un certain numéro m, on a $d_m(P)\leqq\varepsilon$ dans $\mathcal{D}_m$ et il exite un point $P\in\mathcal{D}_{m-1}$ tel que $d_{m-1}(P)>\varepsilon$. A ce moment, $\omega\psi_m(P)\geqq 1$ dans $\mathcal{D}_m$ tout entier.

Soient β_1 et β_2 deux nombres réels $\beta>\beta_1>\beta_2$. Dans $\mathcal{D}_{m-1}$, prenons deux domaines

$$\Delta_i = \{P\in\mathcal{D}_{m-1}\,;\ \psi_{m-1}(P)\leqq\beta_i\} \qquad (i=1,2)\,.$$

β_2 étant pris assez voisin de β, on pourra avoir

$$\mathcal{D}_{m-1}\Big(\frac{3}{4}\varepsilon\Big)\subset\Delta_2\subset\Delta_1\subset\mathcal{D}_m(\varepsilon_1)\subset\mathcal{D}_m\subset\mathcal{D}_{m-1}\Big(\frac{r^2\varepsilon}{2}\Big),$$

où ε_1 est un nombre positif déterminé par β_1. Posons maintenant

$$\inf_{\partial\Delta_1}\psi_m = \gamma_1\,, \qquad \sup_{\partial\Delta_2}\psi_m = \gamma_2\,.$$

Bien que les frontières $\partial\Delta_1$ et $\partial\Delta_2$ ne soient pas nécessairement compactes, γ_1 et γ_2 sont finis, puisque ψ_m est bornée dans $\mathcal{D}_m(\varepsilon_1)$. Prenons ensuite deux constantes réelles A et B telles que

$$A\beta_1+B>\gamma_1$$
$$A\beta_2+B<\gamma_2$$
$$A>1\,.$$[16]

Avec ces constantes, définissons

$$\Phi_{m-1}(P) = \begin{cases} \psi_m(P) & \text{quand } P\in\Delta_2\,, \\ \max\,[A\,\psi_{m-1}(P)+B,\ \psi_m(P)] & \text{quand } P\in\Delta_1-\Delta_2\,, \\ A\,\psi_{m-1}(P)+B & \text{quand } P\in\mathcal{D}_m-\Delta_1\,. \end{cases}$$

Alors, $\Phi_{m-1}(P)$ est une fonction définie et continue dans $\mathcal{D}_{m-1}$ et on a $\omega\Phi_{m-1}(P)\geqq1$ dans $\mathcal{D}_{m-1}$.

En employant Φ_{m-1} au lieu de ψ_m et ψ_{m-2} au lieu de ψ_{m-1}, nous aurons une fonction Φ_{m-2} dans $\mathcal{D}_{m-2}$, par le même passage. Après avoir répété m fois ce passage, nous pourrons construire une fonction Φ_0 remplissant les conditions imposées dans le lemme.

c. q. f. d.

Avant de montrer le théorème, établissons encore un

Lemme 8. *Pour tout nombre réel a, il existe une fonction $\varphi(P)$ continue dans $\mathcal{D}'=\{\Phi_0(P)<a\}$, telle que $\omega\varphi\geqq1$ dans $\mathcal{D}'$ et que $\{P\in\mathcal{D}'\,;\ \varphi(P)<\alpha\}\Subset\mathcal{D}'$ pour tout nombre réel α.*

---

16) De ce que $\beta_1>\beta_2$, cela est certainement possible.

Démonstration. Prenons un nombre positif ρ tel que $\mathcal{D}'\subset\mathcal{D}(\rho)$ et un nombre ρ_1 tel que $0<\rho_1<\frac{\rho}{3}$. Soit $\mathcal{D}_0$ l'une des composantes connexes de $\mathcal{D}(\rho_1)$ et soit O un point fixe dans $\mathcal{D}_0$. La distance $\lambda(P)$ de O à $P\in\mathcal{D}_0$, mesurée par la métrique kählérienne, est une fonction continue dans $\mathcal{D}_0$. Pour tout point P de $\mathcal{D}_0$, désignons par $S(P, \rho_1)$ l'ensemble $\{Q\in\mathcal{D}\,;\ \mathrm{dist}\,(Q, P)<\rho_1\}$. Si l'on prend ρ_1 plus petit que ε, il est homéomorphe à l'intérieur d'une hypersphère. Désignons ensuite la valeur moyenne, étendue sur $S(P, \rho_1)$, d'une fonction continue φ par

$$A_{\rho_1}\varphi(P)=\frac{1}{V}\int_{S(P,\rho_1)}\varphi(Q)dv(Q)\,,$$

où dv est l'élément de volume déterminé par la métrique kählérienne et V est le volume de $S(P, \rho_1)$. En prenant deux fois la moyenne :

$$\lambda_1=A_{\rho_1}\lambda \quad \text{et} \quad \lambda_2=A_{\rho_1}\lambda_1\,,$$

on aura une fonction $\lambda_2(P)$, définie et différentiable de classe C^2 dans $\mathcal{D}_0(2\rho_1)$.

Au voisinage d'un point P, utilisons un système de coordonnées $u_1, \cdots, u_n$ satisfaisant aux conditions du lemme 1. Pour deux points $Q_1=(u_1^1, \cdots, u_n^1)$ et $Q_2=(u_1^2, \cdots, u_n^2)$ dans $S(P, \rho_1)$, on aura alors l'évaluation

$$|\lambda(Q_1)-\lambda(Q_2)|^2\leqq C\{|u_1^1-u_1^2|^2+\cdots+|u_n^1-u_n^2|^2\}\,,$$

où C est une constante positive, dépendante de $\pi(\mathcal{D})$ mais indépendante du choix de P. Par rapport à ces coordonnées, il en résulte que l'on a

$$\left|\frac{\partial\lambda_1}{\partial u_i}\right|\leqq C \qquad (i=1, \cdots, n)$$

et qu'il existe encore une constante positive C_1, (indépendante du choix de P), pour laquelle on a

$$\left|\frac{\partial^2\lambda_2}{\partial u_i\partial\bar{u}_j}\right|\leqq C_1 \qquad (i, j=1, \cdots, n)\,.$$

Ces inégalités nous permettent donc de trouver un nombre positif K_1 tel que

$$\omega\lambda_2(P) \geqq -K_1 \qquad \text{pour } P \in \mathcal{D}_0(2\rho_1).$$

Maintenant, pour chacune des composantes connexes $\mathcal{D}_0^{(1)}$, $\mathcal{D}_0^{(2)}$, $\cdots$, $\mathcal{D}_0^{(m)}$, $\cdots$ du domaine $\mathcal{D}(\rho_1)$, formons, de la même façon, la deuxième moyenne $\lambda_2^{(m)}(P)$ et posons

$$\varphi(P) = \lambda_2^{(m)}(P) + (K_1+1)\Phi_0'(P) + m \qquad \text{pour } P \in \mathcal{D}_0^{(m)} \cap \mathcal{D}',$$

où Φ_0' est la fonction, construite dans le lemme précédent pour le domaine $\mathcal{D}'$. Alors, $\varphi(P)$ est une fonction définie et continue dans $\mathcal{D}'$ et elle satisfait aux conditions

$$\omega\varphi(P) \geqq 1$$
$$\{\varphi(P) < \alpha\} \Subset \mathcal{D}'.$$

c. q. f. d.

D'après deux lemmes précédents, nous allons maintenant démontrer le théorème 2, selon la même méthode que celle d'Oka.

Démonstration. Prenons une suite croissante d'ensembles compacts,

$$\Delta_1 \Subset \Delta_2 \Subset \Delta_3 \Subset \cdots$$

l'un emboîté à l'intérieur du suivant, telle qu'on ait $\bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_i = \mathcal{D}$. Choisissons ensuite une suite croissante de nombres positifs

$$0 < a_1 < a_2 < \cdots$$

de manière que

$$\Delta_i \Subset \{\Phi_0(P) < a_i\},$$

où Φ_0 est la fonction construite dans le lemme 7. Notons $\mathcal{D}_i = \{\Phi_0(P) < a_i\}$. Pour chacun des domaines $\mathcal{D}_i$, soit φ_i une fonction satisfaisant aux conditions du lemme 8. Puis, considérons deux suites de sousdomaines

$$\Delta_i' = \{\varphi_i(P) < \alpha_i\} \qquad (i = 1, 2, \cdots),$$
$$\Delta_i'' = \{\varphi_i(P) < \beta_i\} \qquad (i = 3, 4, \cdots),$$

où α_i et β_i sont des constantes réelles. On peut alors déterminer ces constantes, l'une après l'autre par l'ordre

$$\alpha_1, \beta_3, \alpha_2, \beta_4, \cdots, \alpha_i, \beta_{i+2}, \alpha_{i+1}, \cdots$$

de manière que l'on ait

$$\Delta_1 \subset \Delta_i'$$
$$\Delta_i' \Subset \Delta_{i+2}''$$
$$\Delta_{i+2}'' \cap \left\{\Phi_0 < \frac{a_i + a_{i+1}}{2}\right\} \Subset \Delta_{i+1}' .$$

Ceci est possible.

Construisons maintenant une suite de fonctions Ψ_i $(i=2, 3, \cdots)$ de la manière suivante: D'abord, posons $\Psi_2 = \varphi_2$. Ψ_2 est alors une fonction continue dans $\mathcal{D}_2$ telle que $\omega\Psi_2 \geqq 1$. Puis, pour obtenir Ψ_3, considérons pour une nouvelle constante $c_2 \geqq 1$ et une fonction ψ_3 définie par

$$\psi_3(P) = c_2 \max\left[\Phi_0(P) - \frac{a_1 + a_2}{2},\ \varphi_3 - \beta_3\right].$$

Cette fonction est définie et continue dans $\mathcal{D}_3$. Si l'on prend c_2 assez grande, on pourra supposer que ψ_3 satisfait aux conditions suivantes:

$$\begin{array}{ll} \psi_3 < \psi_2 & \text{pour } \Delta_1', \\ \psi_3 > a_2 & \text{pour } \mathcal{D}_3 - \Delta_2', \\ \psi_3 > \psi_2 & \text{pour } \partial\Delta_2'. \end{array}$$

Ceci est possible, puisqu'on a

$$\Delta_1' \Subset \{\psi_3 < 0\} = \Delta_3'' \cap \left\{\Phi_0 < \frac{a_1 + a_2}{2}\right\} \Subset \Delta_2' .$$

Définissons alors

$$\Psi_3 = \begin{cases} \max(\Psi_2, \psi_3) & \text{pour } \Delta_2', \\ \psi_3 & \text{pour } \mathcal{D}_3 - \Delta_2' . \end{cases}$$

C'est une fonction définie et continue dans $\mathcal{D}_3$, telle que $\omega\Psi_3 \geqq 1$. De plus, $\Psi_3 = \Psi_2$ dans Δ_1' et $\Psi_3 > a_2$ dans $\mathcal{D}_3 - \Delta_2'$.

Et ainsi de suite.

Nous obtiendrons ainsi une suite de fonctions

$$\Psi_2, \Psi_3, \cdots ,$$

chacune Ψ_i définie et continue dans $\mathcal{D}_i$, satisfaisant aux conditions

$$\Psi_i = \Psi_{i-1} \quad \text{pour} \quad \Delta'_{i-2},$$
$$\Psi_i > a_{j-1} \quad \text{pour} \quad \mathcal{D}_i - \Delta'_{j-1}, \quad i \geqq j > 1$$
et
$$\omega\Psi_i \geqq 1 \quad \text{pour} \quad \mathcal{D}_i .$$

Cette suite converge évidemment dans $\mathcal{D}$. La fonction limite Φ de la suite est une fonction continue dans $\mathcal{D}$, jouissant des propriétés voulues :

$$\omega\Phi \geqq 1$$
$$\{\Phi < \alpha\} \Subset \mathcal{D} .$$

11. Problème de Levi.

Une variété analytique complexe $\mathcal{V}$ est dite *holomorphiquement convexe* si, pour toute suite infinie discrète de points P_1, $P_2, \cdots$ de $\mathcal{V}$, il existe une fonction $f(P)$ holomorphe dans $\mathcal{V}$ telle qu'on ait $\sup |f(P_k)| = +\infty$. $\mathcal{V}$ est dite *holomorphiquement complet*, si elle est holomorphiquement convexe et que, pour tout point P_0 de $\mathcal{V}$, on peut trouver un nombre fini de fonctions $f_1, f_2, \cdots, f_m$ holomorphes dans $\mathcal{V}$ telles que P_0 soit un point isolé dans l'ensemble $\{P \in \mathcal{V}; f_1(P) = f_1(P_0), \cdots, f_m(P) = f_m(P_0)\}$.

Depuis Oka [9], au théorème disant qu'une variété analytique complexe est holomorphiquement convexe ou holomorphiquement complet quand elle admet une fonction pseudoconvexe remplissant certaines conditions, ont été données diverses démonstrations dans divers cas par de nombreux mathématiciens. Notamment, le théorème dû à Grauert [7] est énoncé sous la forme suivante :

Théorème 3. *Soient $\mathcal{D}$ une variété analytique complexe, Φ une fonction continue dans $\mathcal{D}$, à valeurs réelles, et $\mathcal{D}_\alpha = \{P \in \mathcal{D}; \Phi(P) < \alpha\}$, où α est un nombre réel. Supposons que les conditions suivantes sont remplies :*

1° $\mathcal{D}_\alpha \Subset \mathcal{D}$;

2° *pour tout point frontière P de $\mathcal{D}_\alpha$, il existe un voisinage U de P et un nombre fini de fonctions $\varphi_1, \cdots, \varphi_l$, différentiables de classe C^2 et fortement pseudoconvexes dans U, telles que $d\varphi_i \neq 0$ et que Φ puisse s'exprimer dans U par*

$$\Phi = \max \{\varphi_1, \cdots, \varphi_l\} .$$

Dans ces hypothèses, $\mathcal{D}_\alpha$ est holomorphiquement convexe.

Si, de plus, $\mathcal{D}_\alpha$ ne possède aucun sous-ensemble analytique compact de dimension $\geqq 1$, alors $\mathcal{D}_\alpha$ est holomorphiquement complet.[17)]

Avec Oka, nous dirons qu'une fonction continue dans $\mathcal{D}$, à valeurs réelles, possède la propriété (P_1) dans $\mathcal{D}$, si la condition 2° de ce théorème est remplie quel que soit le nombre réel α.

Remarquons que Nishino [8] et Andreotti-Narasimhan [1] ont montré selon la méthode d'Oka un pareil théorème pour les espaces analytiques complexes, sous certaines hypothèses supplémentaires.

Nous allons montrer ici qu'à ce théorème s'applique aussi une fonction obtenue par une légère modification à partir de la fonction que nous avons construite dans le n° 10.

Dans les mêmes conditions que dans le théorème 2, on a le

Lemme 9. *Soit $\Phi(P)$ la fonction obtenue dans le théorème 2 et soit $\Delta_\alpha=\{P\in\mathcal{D}\,;\,\Phi(P)\leqq\alpha\}$, où α est un nombre réel. Alors, on peut faire s'approcher $\Phi(P)$ d'une fonction possédant la propriété (P_1), uniformément dans Δ_α.*

Démonstration. Chaque point de Δ_α possède un voisinage U satisfaisant aux conditions suivantes :

1° dans U, il existe un système de coordonnées locales $(z_1, \cdots, z_n)$, par rapport auxquelles on a $W_z\Phi\geqq k>0$ dans U, où k est une constante positive ;

2° il existe une fonction $h(z)$ continue dans U, satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) $|W_z h|<\dfrac{k}{2}$ et $2\varepsilon>h(z)\geqq 0$ dans U;

(ii) on puisse trouver deux voisinages V et U' de P tels que $P\in V\Subset U'\Subset U$, que $h(z)$ s'annule à l'extérieur de U' et qu'on ait $h(z)>\varepsilon$ dans V, où ε est un nombre positif assez petit, choisi à l'avance indépendamment de P.

Comme Δ_α est compact, Δ_α peut être recouvert par un nombre fini de tels voisinages V, soient $V_1, \cdots, V_l$. Soient $U_1, \cdots, U_l$ les voisinages U et $h_1, \cdots, h_l$ les fonctions h, correspondantes

17) Lorsque la fonction Φ est fortement pseudoconvexe dans $\mathcal{D}_\alpha$ tout entier, la dernière condition est vérifiée a priori.

respectivement. La fonction

$$\varphi_i(P) = \Phi(P) + h_i(P)$$

définie dans U_i, est, en vertu de (i), fortement pseudoconvexe.

Oka a montré[18] qu'une telle fonction φ_i peut s'approcher uniformément dans U d'une fonction φ_i' possédant la propriété (P_1):

$$|\varphi_i - \varphi_i'| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Pour chaque point P de Δ_α, soit $\Phi'(P)$ la plus grande des valeurs $\varphi_i'(P)$ des fonction φ_i' définies en P. Φ' est alors une fonction possédant la propriété (P_1) dans Δ_α. De plus, on a

$$|\Phi' - \Phi| < \frac{5}{2}\varepsilon\,.$$

c. q. f. d.

D'après ce lemme, nous obtenons le

Théorème 4. *Soit $\mathcal{V}$ une variété analytique complexe, munie d'une métrique kählérienne analytique réelle. Soit $\mathcal{D}$ un domaine pseudoconvexe sur $\mathcal{V}$ tel qu'on ait $\pi(\mathcal{D}) \Subset \mathcal{V}$. Supposons d'ailleurs qu'il existe une fonction fortement pseudoconvexe $\varphi_0(P)$ dans $\mathcal{V}$. Alors, on peut construire une fonction continue Ψ, possédant la propriété (P_1) dans $\mathcal{D}$ tout entier.*

En effet, α étant un nombre réel, prenons une suite de fonctions

$$\Phi_\alpha',\ \Phi_{\alpha+1}',\ \cdots\,,$$

possédant la propriété (P_1) et obtenues, dans le lemme précédent, respectivement pour la suite de domaines fermés

$$\Delta_\alpha,\ \Delta_{\alpha+1},\ \cdots\,.$$

Par passage de la formation des fonctions linéaires de ces fonctions et de leurs maxima, nous pourrons bien construire une fonction Ψ possédant la propriété (P_1) dans le domaine $\mathcal{D}$ tout entier.

De nombreuses recherches ont été faites sur la condition pour laquelle la limite d'une suite croissante de variétés analytiques

18) Voir [10], p. 127.

complexes holomorphiquement complètes soit aussi holomorphiquement complète. Parmi elles, nous ne citons ici que le résultat énoncé par Docquier et Grauert :[19]

Théorème 5. *Soit* $\mathcal{V}$ *une variété analytique complexe et soit* $\varphi(P)$ *une fonction, à valeurs réelles, semi-continue supérieurement, telle que* $\varphi(P)<1$ *et que, dans tout voisinage de tout point de* $P\in\mathcal{V}$, *il y ait un point* P *où* $\varphi(P)<\varphi(P_0)$. *De plus, supposons qu'il existe un ensemble dense* N *dans l'intervalle* $[0, 1)$ *tel que, pour tout* $t\in N$, *le sousdomaine* $\mathcal{V}_t=\{P\in\mathcal{V},\ \varphi(P)<t\}$ *soit holomorphiquement complet. Alors,* $\mathcal{V}$ *est aussi holomorphiquement complète.*

Grâce à ce théorème, nous pouvons obtenir les résultats suivants.

Théorème 6. *Soit* $\mathcal{V}$ *une variété analytique complexe munie d'une métrique kählérienne analytique réelle et soit* $\mathcal{D}$ *un domaine pseudoconvexe sur* $\mathcal{V}$ *sans point critique intérieur. Si* $\pi(\mathcal{D})\Subset\mathcal{V}$ *et s'il existe une fonction fortement pseudoconvexe au voisinage de* $\overline{\pi(\mathcal{D})}$, *alors* $\mathcal{D}$ *est holomorphiquement complet.*

En effet, pour toute valeur réelle α, le domaine $\mathcal{D}_\alpha=\{\Psi<\alpha\}$ est holomorphiquement complet, en vertu du théorème 3. $\mathcal{D}$ étant limite de la famille continue de $\mathcal{D}_\alpha$, $\mathcal{D}$ lui-même est holomorphiquement complet, en vertu du théorème 5.

Théorème 7. *Soit* $\mathcal{V}$ *une vaeiété analytique complexe, munie d'une métrique kählérienne analytique réelle et d'une fonction fortement pseudoconvexe. Soit* $\mathcal{D}$ *un domaine pseudoconvexe sur* $\mathcal{V}$ *sans point critique intérieur. Supposons que*

1° *il existe une fonction* φ (*semi-continue supérieurement*) *pseudoconvexe dans* $\mathcal{D}$ *telle que, dans tout voisinage de tout point* $P_0\in\mathcal{D}$, *on puisse trouver un point* P *où* $\varphi(P)<\varphi(P_0)$, *et*

2° *pour tout nombre réel* α, *étant* $\mathcal{D}_\alpha=\{P\in\mathcal{D}\,;\ \varphi(P)<\alpha\}$, *on ait* $\pi(\mathcal{D}_\alpha)\Subset\mathcal{V}$.

Dans ces hypothèses, $\mathcal{D}$ *est holomorphiquement complet.*

Par exemple, si une fonction φ dans $\mathcal{D}$ est fortement pseudoconvexe, la condition 1° est vérifiée.

19) Voir [4], p. 122. Voir aussi [10], p. 143.

Corollaire 1. *Soit $\mathcal{V}$ une variété analytique complexe, munie d'une fonction analytique réelle ψ fortement pseudoconvexe dans $\mathcal{V}$. Tout domaine $\mathcal{D}$, vérifiant les conditions* 1° *et* 2° *du théorème, est holomorphiquement complet.*

En effet, en posant $g_{i\bar{j}}=\dfrac{\partial^2\psi}{\partial z_i\partial\bar{z}_j}$ dans chaque domaine de coordonnées, on aura une métrique kählérienne analytique réelle.

Comme corollaire à notre théorème, nous pouvons rétablir le théorème dû à Docquier et Grauert :

Corollaire 2. *Si $\mathcal{V}$ est elle-même une variété analytique complexe holomorphiquement complète, alors tout domaine pseudoconvexe sur $\mathcal{V}$ sans point critique intériuer est aussi holomorphiquement complet.*

En effet, on peut alors trouver une fonction ψ fortement pseudoconvexe analytique réelle dans $\mathcal{V}$, telle que $\{\varphi(P)<\alpha\}\Subset\mathcal{V}$ pour tout nombre réel α. Donc, les conditions du théorème sont toutes remplies.

Corollaire 3. (Théorème de Stein [11]) *Tout revêtement* (*topologique*) *d'une variété analytique complexe holomorphiquement complet est aussi holomorphiquement complet.*

On aura encore quelques corollaires, en combinant diverses conditions. Mais nous n'en donnons pas ici.

Finalement, nous remarquons que, de la façon suivante, on peut encore donner une autre démonstration au théorème dû à M[me] Fujita :

Théorème 8. *Tout domaine pseudoconvexe sur l'espace projectif complexe* **P**, *n'ayant pas de point critique intérieur mais possédant au moins un point frontière, est holomorphiquement complet.*

Pour cela, voyons d'abord que, dans l'espace projectif, la métrique s'exprimera sous la forme

$$ds^2=\frac{\sum|dz_i|^2}{1+\sum|z_i|^2}-\frac{\sum\bar{z}_i z_j dz_i d\bar{z}_j}{(1+\sum|z_i|^2)^2}$$

par rapport aux coordonnées normales employées dans la démonstration du lemme 5. Il s'ensuit de là que

$$g_{1\bar{1}}(z_1, z_2, 0, \cdots, 0) = \frac{1+|z_2|^2}{(1+|z_1|^2+|z_2|^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 g_{1\bar{1}}}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1}(z_1, 0, \cdots, 0) = \frac{-2+4|z_1|^2}{(1+|z_1|^2)^4},$$

$$\frac{\partial^2 g_{1\bar{1}}}{\partial z_1 \partial \bar{z}_2}(z_1, 0, \cdots, 0) = \frac{\partial^2 g_{1\bar{1}}}{\partial \bar{z}_1 \partial z_2}(z_1, 0, \cdots, 0) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 g_{1\bar{1}}}{\partial z_2 \partial \bar{z}_2}(z_1, 0, \cdots, 0) = \frac{-1+|z_1|^2}{(1+|z_1|^2)^4}.$$

Donc, d'après les formules (1) et (2) dans la démonstration du lemme 5, on peut trouver deux constantes positives K et ε, telles que l'on ait

$$\omega(-\log d(P)) \geqq K$$

pourvue que $d(P)<\varepsilon$. Ceci montre que $-\log d(P)$ est fortement pseudoconvexe dans le voisinage de la frontière du domaine $\mathcal{D}$. On peut alors construire une fonction $\Phi(P)$ dans $\mathcal{D}$, telle qu'on ait $\omega\Phi \geqq 1$, d'une même manière que dans le lemme 7, mais plus simplement. La variété **P** étant compacte, la condition $\pi(\mathcal{D}) \Subset \mathcal{V}$ est vérifiée a priori.

c. q. f. d.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Andreotti et R. Narasimhan : Oka's heftungslemma and the Levi problem for complex spaces, Trans. Amer. Math. Soc., 111 (1964) 345-366.

[2] S. Bochner et K. Yano : Curvature and Betti Numbers, Princeton University Press, 1953.

[3] H. Cartan et P. Thullen : Zur Theorie der Singularitäten der Funktionen mehrerer komplexen Veränderlichen ; Regularitäts- und Konvergenzbereiche. Math. Annalen, 106 (1932) 617-647.

[4] F. Docquier et H. Grauert : Levisches Problem und Rungescher Satz für Teilgebiete Steinscher Mannigfaltigkeiten, Math. Annalen, 140, (1960) 94-123.

[5] L. P. Eisenhart : Riemannian geometry, Princeton University Press, 1949.

[6] R. Fujita : Domaines sans point critique intérieur sur l'espace projectif complexe, J. Math. Soc. Japan, 15 (1963) 443-473.

[7] H. Grauert : On Levi's problem and the imbedding of real-analytic manifolds, Annals of Math., 68 (1958) 460-472.

[8] T. Nishino : Sur les espaces analytiques holomorphiquement complets, J. Math. Kyoto Univ., 1 (1962) 247-254.

[9] K. Oka : Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, VI, Domaines pseudoconvexes, Tohoku Math. J., 49 (1942) 119-132.

[10] K. Oka, Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, IX, Domaines finis sans point critique intérieur, Japan. J. Math. 23 (1953) 97-155.

[11] K. Stein : Überlagerung holomorph-vollständiger komplexer Räume, Arch. der Math., 7, (1956) 354-361.
[12] A. Takeuchi : Domaines pseudoconvexes infinis et la métrique riemannienne dans un espace projectif, J. Math. Soc. Japan, 16 (1964) 159-181.