J. Math. Kyoto Univ.
7-3 (1967) 295-313

Sur les hypersurfaces à $2r-1$ dimensions admettant des espaces générateurs à $r-1$ dimensions.

Par

Jôyô KANITANI

(Received Dec. 9, 1967)

---

§1. Introduction

1. Si une hypersurface V contient un espace linéaire S^m $(m\geq 1)$, en un point quelconque de S^m, chaque tangente de Darboux est en coïncidence avec une tangente asymptotique. Ce qu'on étude dans cet article est une réciproque de ce fait.

Nous commençons par expliquer quelques formules fondamentales exposées dans un mémoire précédent [1] concernant une hypersurface V dans un espace projectif à $n+1$ dimensions.

Supposons qu'elle est définie par

$$x^\alpha = x^\alpha(u^1, \cdots, u^n) \quad (\alpha = 0, 1, \cdots, n+1),$$

où x^α sont des fonctions réelles différentiables de $u^1, \cdots, u^n$ dans un domaine D, telles que

$$\text{det.}\left|\text{det.}\left| x^\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^1} \cdots \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^n} \; \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial u^i \partial u^j}\right|\right|$$

$$(\alpha = 0, 1, \cdots, n+1; \; i, j = 1, \cdots, n)$$

ne s'annule pas dans ce damaine. Soit ε le signe de ce déterminant.

Envisageons n formes

$$\omega^i = a^i_1 du^1 + \cdots + a^i_n du^n \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

dont les coefficients a^i_j $(i, j = 1, \cdots, n)$ sont des fonctions réelles différentiables définies dans D, telles que det. $|a^i_j| \neq 0$. Soient $(b^j_i) =$

$(a^i_j)^{-1}$, i.e. $a^i_s b^s_j = a^s_j b^i_s = \delta^i_j$. Il vient

$$du^j = b^j_1 \omega^1 + \cdots + b^j_n \omega^n.$$

Etant donné une fonction $f(u^1, \cdots, u^n)$, posons

$$f_{\omega^i} = \frac{\partial f}{\partial u^s} b^s_i,$$

de sorte qu'on a

$$df = \frac{\partial f}{\partial u^s} du^s = (f_{\omega^t}) \omega^t, \quad \frac{\partial f}{\partial u^j} = (f_{\omega^t}) a^t_j.$$

La dérivée extérieur de ω^i s'exprime par

$$d\omega^i = \frac{1}{2} \alpha^i_{hk} \omega^h \wedge \omega^k,$$

où

$$\alpha^i_{hk} = a^i_s (b^s_{h,\omega^k} - b^s_{k,\omega^h}) = \left(\frac{\partial a^i_t}{\partial u^s} - \frac{\partial a^i_s}{\partial u^t} \right) b^s_h b^t_k.$$

Si l'on pose

$$h_{ij} = \text{det.} | x^\sigma \, x^\sigma_{\omega^1} \cdots x^\sigma_{\omega^n} \, x^\sigma_{\omega^i, \omega^j} |, \quad h = \text{det.} | h_{ij} |,$$

$$H_{ij} = h_{ij} / (\varepsilon' h)^{\frac{1}{n+2}} \quad (\varepsilon' = \varepsilon \eta^n, \ \eta\text{: le signe de det.} | b^j_i |),$$

il vient

$$H_{ij} = H_{ji} = h_{ij} / \sqrt{\varepsilon' H}, \quad H = \text{det.} | H_{ij} |.$$

L'équation $H_{ij} \omega^i \omega^j = 0$ donne les lignes asymptotiques sur l'hypersurface V.

Si l'on multiplie les coordonnées du point courant x de l'hypersurface V par un facteur commun ρ, c'est-à-dire, si l'on efféctue la transformation $x' = \rho x$, il provient

$$H'_{ij} = \varepsilon'' \rho \rho H_{ij} \qquad (\varepsilon''\text{: le signe de } \rho^n).$$

2. Designons par X_σ $(\sigma = 0, \cdots, n+1)$ les cofacteurs divisés par $\sqrt{\varepsilon' H}$ des éléments de la dernière colonne dans le déterminant

$$\text{det.} | x^\sigma \, x^\sigma_1 \cdots x^\sigma_n x^\sigma_{\omega^i, \omega^j} | \qquad (x^\sigma_i = x^\sigma_{\omega^i}).$$

Nous pouvons les prendre comme coordonnées de l'hyperplan tangent en point x à l'hypersurface V, c'est-à-dire,

$$X_\sigma x^\sigma = 0, \quad X_\sigma x_i^\sigma = 0 \qquad (i=1, \cdots, n). \tag{2.1}$$

Nous avons d'ailleurs

$$H_{ij} = X_\sigma x^\sigma_{\omega^i,\omega^j} = -X_{\sigma,j} x_i^\sigma = -X_{\sigma,i} x_j^\sigma = X_{\sigma,\omega^i\omega^j} x^\sigma \tag{2.2}$$
$$(X_{\sigma,i} = X_{\sigma,\omega^i}).$$

Si l'on pose

$$x_{n+1} = \lambda x + q^1 x_1 + \cdots + q^n x_n + \frac{1}{n} x_{\omega^i,\omega^j} H^{ij} \tag{2.3}$$
$$((H^{ij}) = (H_{ij})^{-1}),$$

il vient

$$X_\sigma x^\sigma_{n+1} = 1 \tag{2.4}$$

ce qui nous montre que le point x_{n+1} se trouve hors de l'hyperplan X. En choisissant convenablement les coefficient $q^1, \cdots, q^n$, nous pouvons écrire

$$\begin{cases} dx = x_k \omega^k, \\ dx_i = \omega_i^0 x + \omega_i^k x_k + H_{is}\omega^s x_{n+1} (i=2, \cdots, n), \\ dx_{n+1} = \omega^0_{n+1} x + \omega^k_{n+1} x_k \qquad (k, s\colon 1 \rightarrow n), \end{cases} \tag{2.5}$$

c'est-à-dire, nous pouvons faire $\omega^{n+1}_{n+1} = 0$.

Désignons maintenant par $X_{\sigma,n+1} (\sigma = 0, 1, \cdots, n+1)$ les cofacteurs divisés par $\sqrt{\varepsilon' H}$ des éléments de la premiére colonne dans le déterminant

$$\det. |x^\sigma \, x_1^\sigma \cdots x_n^\sigma \, x^\sigma_{n+1}|.$$

Nous aurons

$$X_{\sigma,n+1} x^\sigma = 1, \quad X_{\sigma,n+1} x_k^\sigma = 0, \quad X_{\sigma,n+1} X^\sigma_{n+1} = 0, \tag{2.6}$$

$$X_{\sigma,k} x^\sigma_{n+1} = 0 \;\; (k=1, \cdots, n), \quad dX_{\sigma,n+1} x^\sigma = 0. \tag{2.7}$$

Nous pouvons donc écrire

$$\begin{cases} dX = X_i \omega^i, \\ dX_i = \Omega_i^0 X + \Omega_i^k X_k + H_{is}\omega^s X_{n+1}, \\ dX_{n+1} = \Omega^0_{n+1} X + \Omega^k_{n+1} X_k. \end{cases} \tag{2.8}$$

3. Posons

$$\omega_i^0 = M_{is}\omega^s, \quad \omega_{n+1}^k = N_s^k\omega^s, \quad N_{ij} = H_{ik}N_j^k.$$

En remarquant que les dérivées éxtérieures de x et de x_{n+1} s'annulent comme conséquence de (2.5), on peut déduire

$$M_{ij} = M_{ji}, \quad N_{ij} = N_{ji}. \tag{3.1}$$

Par un choix convenable du coefficient λ dans (2.3) on peut faire

$$M_s^s - N_s^s = 0 \qquad (M_i^k = H^{ks}M_{si};\ s\colon 1\to n). \tag{3.2}$$

La différentiation des équations (2.6), (2.7) nous donne

$$\Omega_{n+1}^k = M_s^k\omega^s, \quad \Omega_k^0 = N_{ks}\omega^s, \quad \omega_{n+1}^0 = -\Omega_{n+1}^0 = L_s\omega^s.$$

Posons

$$\frac{1}{2}(\omega_i^k + \Omega_i^k) = \Gamma_{il}^k\omega^l, \quad H_{jk}\Gamma_{il}^k = \Gamma_{ijl},$$

$$\frac{1}{2}(\omega_i^k - \Omega_i^k) = K_{il}^k\omega^l, \quad H_{jk}K_{il}^k = K_{ijl}.$$

Nous avons alors

$$\Gamma_{ilj} = \frac{1}{2}(H_{il,\omega^j} + H_{jl,\omega^i} - H_{ij,\omega^l} + H_{ik}\alpha_{jl}^k + H_{jk}\alpha_{il}^k + H_{lk}\alpha_{ij}^k), \tag{3.3}$$

tandis que l'équation

$$K_{ijl}\omega^i\omega^j\omega^l = 0$$

donne les courbes de Darboux sur l'hypersurface V, les égalités

$$K_{ijl} = K_{jil} = K_{lij}, \quad K_{is}^s = 0 \qquad (s\colon 1\to n) \tag{3.4}$$

étant vérifiées.

D'après la transformation $x' = \rho x$, il provient

$$K_{ijl}' = \varepsilon''\rho\rho K_{ijl}. \tag{3.5}$$

Nous supposerons dorénavant que les K_{ijl} $(i, j, l = 1, \cdots, n)$ ne sont pas tous nuls. Cela revient à dire que l'hypersurface V n'est pas une quadrique.

Les systèmes d'équations différentielles totales (2.5), (2.8) s'écrivent maintenant

$$(3.6)\qquad \begin{cases} dx=\omega^i x_i, \\ dx_i=M_{is}\omega^s x+(\Gamma^j_{is}x+K^j_{is})\omega^s x_j+H_{is}\omega^s x_{n+1}, \\ dx_{n+1}=L_s\omega^s x+N^k_s\omega^s x_k, \end{cases}$$

$$(3.7)\qquad \begin{cases} dX=\omega^i X_i, \\ dX_i=N_{is}\omega^s X+(\Gamma^j_{is}-K^j_{is})\omega^s X_j+H_{is}\omega^s X_{n+1}, \\ dX_{n+1}=-L_s\omega^s X+M^k_s\omega^s X_k. \end{cases}$$

La condition d'intégrabilité pour ces deux systèmes devient, si l'on désigne par $;i$ la dérivée absolue par rapport à ω^i, dans laquelle Γ^k_{ij} se fait le symbole de Christoffel,

$$(3.8)\qquad 2(K_{ijt;s}-K_{ijs;t})+H_{is}(M_{jt}-N_{jt})+H_{js}(M_{it}-N_{it}) \\ -H_{it}(M_{js}-N_{js})-H_{jt}(M_{is}-N_{is})=0,$$

$$(3.9)\qquad 2(K_{jsl}K^l_{it}-K_{jtl}K^l_{is}+T_{ijst})+H_{js}(M_{it}+N_{it})-H_{is}(M_{jt}+N_{jt}) \\ -H_{jt}(M_{is}+N_{is})+H_{it}(M_{js}+N_{js})=0,$$

$$(3.10)\qquad (M_{it}+N_{it})_{;s}-(M_{is}+N_{is})_{;t}+K^l_{it}(M_{ls}-N_{ls}) \\ -K^l_{is}(M_{lt}-N_{lt})=0,$$

$$(3.11)\qquad (M_{it}-N_{it})_{;s}-(M_{is}-N_{is})_{;t}+K^l_{it}(M_{ls}+N_{ls})-K^l_{is}(M_{lt}+N_{lt}) \\ +2(L_sH_{it}-L_tH_{is})=0,$$

$$(3.12)\qquad 2(L_{t;s}-L_{s;t})+(M_{ls}-N_{ls})(M^l_t+N^l_t) \\ -(M_{lt}-N_{lt})(M^l_s+N^l_s)=0,$$

où

$$(3.13)\qquad T_{i.st}^{\ k}=\Gamma^k_{it,\omega^s}-\Gamma^k_{is,\omega^t}+\Gamma^k_{ls}\Gamma^l_{it}-\Gamma^k_{lt}\Gamma^l_{is}+\alpha^l_{st}\Gamma^k_{il}.$$

§2. La famille des espaces générateurs au cône des tangentes asymptotiques

4. Supposons maintenant que $n=2r-1$. Le cône des tangentes asymptotiques en point x à l'hypersurface V s'obtient par projeter de ce point une quadrique régulière $V^{2,2r-2}$ située sur l'espace

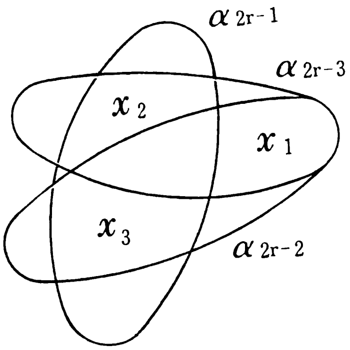
$S^{2r-2}=x_1\vee\cdots\vee x_{2r-1}$ (l'espace à $2r-2$ dimensions déterminé par les points $x_1, \cdots, x_{2r-1}$). Dans cette quadrique $V^{2,2r-3}$ il existe $\infty^{1/2\, r(r-1)}$ espaces à $r-2$ dimensions. Soit L^{r-2} un tel espace. L'ensemble des points cojugués à tout point de L^{r-2} par rapport à $V^{2,2r-3}$ forme un espace S^{r-1} auquel appartient L^{r-2}. Prenonons un point contenu dans S^{r-1} mais non contenu dans L^{r-2}. L'hyperplan polaire de ce point par rapport à $V^{2,2r-3}$ renferme L^{r-2} et coupe $V^{2,2r-3}$ en une quadrique régulière $V^{2,2r-4}$. Cette quadrique étant de dimension paire, contient deux familles de $\infty^{1/2\,(r-1)(r-2)}$ espaces à $r-2$ dimensions telles que, selon que r est pair (ou impair), les deux espaces générateurs appartenant à différente famille (ou à une même famille) sont disjoints en général—lorsqu'ils se coupent, en particulier, l'espace d'intersection est de dimension impaire—, et que les deux espaces générateurs appartenant à une même famille (ou à différente famille) se coupent en un espace de dimension paire, cela étant un point en général.

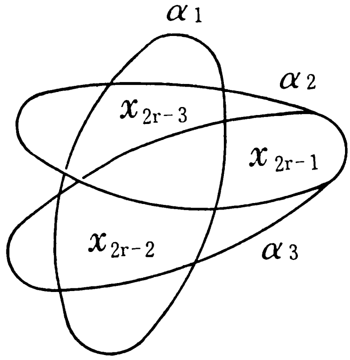
De la même manière que cette proposition [2] nous pouvons prouver que, dans la quadrique $V^{2,2r-3}$, pour un espace générateur quelconque L^{r-2} il existe un autre L'^{r-2} qui n'a pas de point commun avec L^{r-2}. Donc, par un choix convenable des formes fondamentales ω^i nous pouvons prendre dans l'espace S^{2r-2} les points $x_1, \cdots, x_{2r-1}$ de la manière suivante.

Ces deux espaces générateurs déterminent un espace $S^{2r-3}=L^{r-2}\vee L'^{r-2}$. Prenons comme point x_r le pôle de cet espace par rapport à la quadrique $V^{2,2r-3}$. Ce point x_r ne se trouve pas dans S^{2r-3}, car alors la quadrique régulière $V^{2,2r-3}$ contiendrait l'espace à $r-1$ dimensions $L^{r-1}=x_r\vee L^{r-2}$, ce qui est absurde.

L'intersection $V^{2,2r-4}=S^{2r-3}\cap V^{2,2r-3}$ est donc une quadrique reguliére.

Prenons dans L^{r-2} un point x_1. L'hyperplan polaire α_1 de x_1 dans S^{2r-3} par rapport à quadrique $V^{2,2r-4}$ ne contient pas L'^{r-2}. Soit x_{2r-1} un point de L'^{r-2} non contenu dans α_1. L'hyperplan polaire α_{2r-1} de x_{2r-1} ne contient pas le point x_1. Dans $L^{r-3}=L^{r-2}\cap\alpha_{2r-1}$





prenons un point x_2. L'hyperplan polaire α_2 de x_2 passe par x_{2r-1}. Dans $L'^{r-3}=L'^{r-2}\cap\alpha_1$ prenons un point x_{2r-2} non contenu dans α_2. L'hyperplan polaire α_{2r-2} de x_{2r-2} passe par x_1 et ne contient pas le point x_2. Dans $L^{r-4}=L^{r-3}\cap\alpha_{2r-2}$ prenons un point x_3. L'hyperplan polaire α_3 de x_3 passe par les points x_{2r-1}, x_{2r-2} qui ne se trouvent pas dans $\alpha_1\cap\alpha_2$. Dans $L'^{r-4}=L'^{r-3}\cap\alpha_2$ prenons un point x_{2r-3} non contenu dans α_3. L'hyperplan polaire α_{2r-3} de x_{2r-3} passe par les points x_1, x_2, mais ne contient pas le point x_3, et ainsi de suite.

Nous obtiendrons enfin les $r-1$ points indépendants $x_1,\cdots,x_{r-1}$ dans L^{r-2} et les $r-1$ points indépendants $x_{2r-1}, x_{2r-2},\cdots,x_{x+1}$ dans L'^{r-2} tels que l'hyperplan polaire α_i de x_i $(i=1,\cdots,r-1,r+1,\cdots,2r-1)$ ne passe pas par le pdint x_{2r-i} mais contient les autres points x_j $(i+j\neq 2r;\ 1\leqq j\leqq 2r-1)$.

Les points $x_1,\cdots,x_r,\cdots,x_{2r-1}$ étant ainsi déterminés, l'équation des lignes asymptotiques se ramène à

$$2\omega^1\omega^{2r-1}+\cdots+2\omega^{r-1}\omega^{r+1}+(\omega^r)^2=0,$$

d'après l'hypothèse convenable faite sur la signature de la matrice (H_{ij}), ce que nous présumerons désormais.

§3. L'énonce de la proposition

5. Supposons maintenant qu'à tout point x de l'hypersurface V, le cône des tangentes de Darbox $\mathscr{D}$ a un contact du second ordre avec le cône des tangentes asymptotiques $\mathcal{A}$ suivant deux espaces générateurs à $r-1$ dimensions de $\mathcal{A}$, qui n'ont pas de point commun, à l'exception du sommet x lui-même. Cela revient à dire que, dans l'espace $S^{2r-2}=x_1\vee\cdots\vee x_{2r-1}$, la cubique $V^{3,2r-3}=\mathcal{D}\cap S^{2r-2}$ a un contact du second ordre avec la quarique $V^{2,2r-3}=\mathcal{A}\cap S^{2r-2}$ en chacun des points de deux espaces générateurs disjoints L^{r-2}, L'^{r-2} de $V^{2,2r-3}$.

Considérons d'abord la section par le plan

$$x_a\vee x_r\vee x_{2r-a} \qquad (1\leqq a\leqq r-1).$$

La section de $V^{2,2r-3}$ s'exprime par

$$2\omega^a\omega^{2r-a}+(\omega^r)^2=0$$

de sorte qu'on peut poser

$$\omega^a=1,\ \omega^r=t,\ \omega^{2r-a}=-\frac{1}{2}t^2$$

Pour que l'équation de la section de $V^{3,2r-3}$

$$\begin{aligned}K_{rrr}(\omega^r)^3&+3(\omega^r)^2(K_{rra}\omega^a+K_{rr\,2r-a}\omega^{2r-a})\\&+3\omega^r(K_{aar}(\omega^a)^2+2K_{a\,2r-a\,r}\omega^a\omega^{2r-a}+K_{2r-a\,2r-a\,r}(\omega^{2r-a})^2)\\&+K_{aaa}(\omega^a)^3+3K_{aa\,2r-a}(\omega^a)^2\omega^{2r-a}+3K_{a\,2r-a\,2r-a}\omega^a(\omega^{2r-a})^2\\&+K_{2r-a\,2r-a\,2r-a}(\omega^{2r-a})^3\end{aligned}$$

soit vérifiée à l'exception des termes du troisième ordre au moin par rapport à t, il faut et il suffit que

$$(5.1)\qquad K_{aaa}=0,\ K_{aar}=0,\ K_{aa\,2r-a}=2K_{arr}\qquad (a=1,\cdots,r-1).$$

De même, en posant

$$\omega^{2r-a}=1,\ \omega^r=t,\ \omega^a=-\frac{1}{2}t^2,$$

on déduit

$$(5.2)\qquad K_{ttt}=0,\ K_{ttr}=0,\ K_{tt\,2r-t}=2K_{trr}\qquad (t=r+1,\cdots,2r-1).$$

6. La section de $V^{2,2r-3}$ par le plan $x_a\vee x_b\vee x_r (a\neq b;\ 1\leqq a,\ b\leqq r-1)$ devient $(\omega^r)^2=0$. Il faut donc, par l'hypothèse, que pour la cubique

$$K_{rrr}(\omega^r)^3+3(\omega^r)^2(K_{rra}\omega^a+K_{rrb}\omega^b)+6K_{abr}\omega^a\omega^b\omega^r$$

$$+3K_{aab}(\omega^a)^2\omega^b+3K_{abb}\omega^a(\omega^b)^2=0,$$

la droite $x_a \vee x_b$ soit une tangente double ayant un contact du second ordre avec elle en chacun des points x_a, x_b. C'est à dire que

$$K_{aab}=K_{abb}=0, \quad K_{abr}=0 \qquad (a, b=1, \cdots, r-1).$$

De même, nous obtenons

$$K_{tts}=K_{tss}=0, \quad K_{str}=0 \qquad (s,t=r+1, \cdots, 2r-1).$$

Par un raisonnement pareil, en considérant la section par le plan $x_a \vee x_r \vee x_t$ $(a+t \neq 2r,\ a \neq r,\ t \neq r)$, on déduit

$$K_{aat}=K_{att}=0, \quad K_{atr}=0 \qquad (a+t \neq 2r,\ a \neq r,\ t \neq r).$$

7. L'équation de la section de $V^{2,2r-3}$ par le plan

$$(x_a+x_b)\vee x_r \vee (x_{2r-a}+x_{2r-b}) \qquad (a \neq b;\ 1 \leqq a, b \leqq r-1)$$

s'écrit

$$4\rho\nu+(\omega^r)^2=0 \qquad (\rho=\omega^a=\omega^b,\ \nu=\omega^{2r-a}=\omega^{2r-b})$$

de sorte qu'on peut poser

$$\rho=1, \quad \omega^r=t, \quad \nu=-\frac{1}{4}t^2.$$

La condition pour que ces valeurs de ω^i satisfont à l'équation de la section de $V^{3,2r-3}$

$$\begin{aligned}K_{rrr}(\omega^r)^3&+3(\omega^r)^2((K_{arr}+K_{brr})\rho+(K_{2r-a\ r\ r}+K_{2r-b\ r\ r})\nu)\\&+6\omega^r\rho\nu(K_{a\ 2r-a\ r}+K_{b\ 2r-b\ r})\\&+(3K_{a\ a\ 2r-a}+6K_{a\ b\ 2r-a}+6K_{a\ b\ 2r-b}+3K_{b\ b\ 2r-b})\rho^2\nu\\&+(3K_{a\ 2r-a\ 2r-a}+6K_{a\ 2r-a\ 2r-b}+6K_{b\ 2r-a\ 2r-b}+3K_{b\ 2r-b\ 2r-b})\rho\nu^2\\&=0\end{aligned}$$

à l'éxception des termes de troisième ordre au moins par rapport à t, devient grâce à (5.1)

$$K_{arr}+K_{brr}=K_{a\ b\ 2r-a}+K_{a\ b\ 2r-b}.$$

De même, en posant

$$\nu=1,\quad \omega^r=t,\quad \rho=-\frac{1}{4}t^2$$

on obtient

$$K_{2r-a\ r\ r}+K_{2r-b\ r\ r}=K_{a\ 2r-a\ 2r-b}+K_{b\ 2r-b\ 2r-b}.$$

D'autre part, si l'on prend la section par le plan

$$(x_a-x_b)\vee x_r\vee(x_{2r-a}-x_{2r-b}),$$

il vient

$$K_{arr}-K_{brr}=K_{ab\ 2r-a}-K_{ab\ 2r-b},$$

$$K_{2r-a\ r\ r}-K_{2r-b\ r\ r}=K_{a\,2r-a\ 2r-b}-K_{b\ 2r-a\ 2r-b}.$$

On a donc

$$K_{arr}=K_{ab\,2r-b}\qquad (a\neq b,\ 1\leqq a,\ b\leqq r-1),$$

$$K_{trr}=K_{ts\ 2r-s}\qquad (s\neq t,\ r+1\leqq t,\ s\leqq 2r-1).$$

Portons les dans la dernière équation de (3.4): $K^j_{lj}=0$ (j: $1\rightarrow 2r-1$). Nous aurons

$$K_{lrr}=0,\quad K_{l\ a\ 2r-a}=0\qquad (l\neq r,\ a\neq r).$$

8. La section de $V^{2,2r-3}$ par le plan

$$(x_a+x_b)\vee x_r\vee(x_{2r-a}-x_{2r-b})\qquad (a\neq b,\ 1\leqq a.\ 1\leqq r-1)$$

devient $(\omega^r)^2=0$. La condition pour que la droite $(x_a+x_b)\vee(x_{2r-a}-x_{2r-b})$ soit une tangente double de la section de $V^{3,2r-3}$, ayant un contact du second ordre avec $V^{3,2r-3}$ en chacun des points x_a+x_b, $x_{2r-a}-x_{2r-b}$ s'écrit

$$K_{ra\,2r-a}=K_{rb\,2r-b}.$$

Or, $K^j_{rj}=0$ (j: $1\rightarrow 2r-1$). Nous avons donc

$$K_{ra\ 2r-a}=-\frac{K_{rrr}}{2(r-1)}\qquad (a\neq r).$$

Enfin, en prenant les sections par les espaces

$$x_a\vee x_b\vee x_c\vee x_r,\quad x_a\vee x_b\vee x_r\vee x_{2r-c}$$

$$x_a\vee x_r\vee x_{2r-b}\vee x_{2r-c},\quad x_r\vee x_{2r-a}\vee x_{2r-b}\vee x_{2r-c}$$

on conclut que

$$K_{abc}=K_{abt}=K_{ast}=K_{stz}=0$$

$1\leqq a,b,c\leqq r-1,\ r+1\leqq s,t,z\leqq 2r-1;\ a+t, b+t,\ a+s\neq 2r).$

En somme, l'équation de $V^{3,2r-3}$ s'écrit

$$K_{rrr}(\omega^r)\left((\omega^r)^2-\frac{3}{r-1}(\omega^1\omega^{2r-1}+\cdots+\omega^{r-1}\omega^{r+1}\right)=0,$$

c'est-à-dire, pour qu'à tout point x de l'hypersurface V à dimension $2r-1$, le cône des tangentes de Darbox $\mathscr{D}$ ait un contact du second ordre avec le cône des tangentes asymptotiques $\mathscr{A}$ suivant deux espaces générateurs à $r-1$ dimensions de $\mathscr{A}$, qui n'ont pas de point commun, à l'exception du sommet x lui-même, il faut et il suffit que le cône $\mathscr{D}$ se décompose en un hyperplan π passant par x et un cône quadrique $\mathscr{B}$ de sommet x, qui a en commun avec $\mathscr{A}$ la secton par π.

La proposition qu'on va démontrer s'énonce comme il suit.

Si, à tout point x d'une hypersurface V dans un espace projectif à $2r$ dimensions, le cône des tangentes de Darboux a un contact du second ordre avec le cône des tangentes asymptotiques $\mathscr{A}$ suivant deux espaces génératours à $r-1$ dimensions de $\mathscr{A}$ qui n'ont pas de point commun à l'exception du sommet x lui-même, l'hypersurface V admet des espaces générateurs à $r-1$ dimensions.

§4. Détermination de M_{ij}, N_{ij}, L_i.

9. En faisant $n=2r-1$ et en utilisant les résultats du paragraphe précédent:

$$\text{(9. 1)}\qquad \begin{cases} K_{abc}=0,\ K_{arr}=0,\ K_{rab}=0 & (a+b\neq 2r),\\ K_{ra\,2r-a}=-\dfrac{1}{2(r-1)}K_{rrr} & (a,b,c\neq r),\end{cases}$$

nous déterminons maintenant les valeurs de M_{ij}, N_{ij}, L_i satisfaisant aux équations (3. 8), ⋯, (3. 12).

Puisque $H_{ij}=0$ $(i+j\neq 2r)$, $H_{i,2r-i}=1$ $(i,j=1,\cdots,2r-1)$, on a

(9.2) $$\Gamma^k_{ij}=\Gamma_{i\,2r-k\,j},\quad \Gamma_{ilj}=\frac{1}{2}(\alpha^{2r-i}_{jl}+\alpha^{2r-j}_{il}+\alpha^{2r-l}_{ij}).$$

Faisons d'abord, dans (3.8), $i=j=r$, $s\neq r$, $t\neq r$. Il vient grâce à (9.1), (9.2)

$$\alpha^r_{st}=0 \qquad (s\neq r,\ t\neq r)$$

ce qui nous montre que nous pouvons choisir le paramétre u^r de manière à voir

(9.3) $$\omega^r=adu^r \quad \text{i.e.}\quad a^r_t=0 \qquad (t\neq r).$$

Cela étant fait, nous pouvons supposer sans restreindre la généralité que

(9.4) $$a^t_r=0 \qquad (t\neq r).$$

En effet, si $a^t_r(t=1,\cdots,r-1,r+1,\cdots,2r-1)$ ne sont pas tous nuls, le système d'équations différentielles simultanés

$$\frac{1}{a^1_r}(a^1_1du^1+\cdots+a^1_{r-1}du^{r-1}+a^1_{r+1}du^{r+1}+\cdots+a^1_{2r-1}du^{2r-1})$$
$$=\cdots$$
$$=\frac{1}{a^{2r-1}_r}(a^{2r-1}_1du^1+\cdots+a^{2r-1}_{r-1}du^{r-1}+a^{2r-1}_{r+1}du^{r+1}+\cdots+a^{2r-1}_{2r-1}du^{2r-1})$$

admet un système d'intégrales

$$f^t(u^1,\cdots,u^{2r-1})=\text{const.} \qquad (t=1,\cdots,r-1,r+1,\cdots,2r-1)$$

où u^r se figure comme un paramètre. En effectuant la transformation $u'^t=f^t$, on peut réduire a'^t_r $(t=1,\cdots,r-1,r+1,\cdots,2r-1)$ tous à nul.

Faisons maintenant la transformation $x'=x/a$. Il vient alors d'après (1.5) $H'_{ij}=H_{ij}/aa$ (nous pouvons supposer que $a>0$). Donc, en posant $\omega'^i=\omega^i/a$ on obtent

$$H'_{ij}\omega^i\omega^j=H_{ij}\omega'^i\omega'^j=(du^r)^2+2\omega'^1\omega'^{2r-1}+2\omega'^2\omega'^{2r-2}+\cdots+2\omega'^{r-1}\omega'^{r+1}.$$

Cela revient à dire qu'on peut faire

(9.5) $$\alpha^r_{ij}=0 \qquad (i,j=1,\cdots,2r-1).$$

10. Faisons ensuite, dans (3.8), $i=j=t=r$, $s\neq r$. Nous aurons grâce à (9.1), (9.2), (9.5),

$$K_{rrr,\omega^s}=M_{rs}-N_{rs} \qquad (s\neq r).$$

D'autre part, en y faisant $i=j\neq r$, $s\neq r$, $t=2r-i$, on obtient

$$M_{ri}-N_{ri}=0 \qquad (i\neq r). \tag{10.1}$$

Nous avons donc

$$K_{rrr,\omega^i}=0 \qquad (i=1,\cdots,r-1,r+1,\cdots,2r-1)$$

ce qui nous montre que la fonction K_{rrr} ne dépend que de u^r. Nous la désignerons par $k(u^r)$.

Faisons maintenant la transformation $x'=kx$, $\omega'^i=k\omega^i$. On a

$$\begin{aligned} H'_{ij}=kkH_{ij}, \quad & kk((du^r)^2+\omega^1\omega^{2r-1}+\cdots+\omega^{r-1}\omega^{r+1}) \\ & =(\omega'^r)^2+\omega'^1\omega'^{2r-1}+\cdots+\omega'^{r-1}\omega'^{r+1}, \\ K'_{ijl}=kkK_{ijl}, \quad & kkK_{rrr}(\omega^r)\left((\omega^r)^2-\frac{3}{r-1}(\omega'\omega^{2r-1}+\cdots+\omega^{r-1}\omega^{r+1})\right) \\ & =(\omega'^r)\left((\omega'^r)^2-\frac{3}{r-1}(\omega'^1\omega'^{2r-1}+\cdots+\omega'^{r-1}\omega'^{r+1})\right). \end{aligned}$$

D'ailleurs, en posant

$$u'^r=\int k(u^r)du^r$$

on peut faire,

$$\omega'^r=du'^r,$$

c'est-à-dire, en laissant ω^r une différentielle totale, on peut faire

$$K_{rrr}=1. \tag{10.2}$$

11. Faisons maintenant, dans (3.8), $i=s=r$, $j+t\neq 2r$, $j\neq r$, $t\neq r$. Il vient

$$\frac{2r}{r-1}\Gamma^r_{jt}+M_{jt}-N_{jt}=0 \qquad (j+t\neq 2r).$$

D'autre part, en y faisant $i=j\neq r$, $s=2r-i\neq t$, $t\neq r$, on obtient

$$-\frac{1}{r-1}\Gamma^{r}_{jt}+M_{jt}-N_{jt}=0.$$

On a donc

$$\Gamma^{r}_{jt}=0,\quad M_{jt}-N_{jt}=0\qquad (j+t\neq 2r). \tag{11.1}$$

Si l'on fait $i=s=r$, $t=2r-j\neq r$, il vient

$$\frac{2r}{r-1}\Gamma^{r}_{j,2r-j}+M_{j,2r-j}-N_{j,2r-j}-(M_{rr}-N_{rr})=0$$

et, par suite,

$$\frac{2r}{r-1}\Gamma^{r}_{i,2r-i}+M_{i,2r-i}-N_{i,2r-i}$$
$$=\frac{2r}{r-1}\Gamma_{j,2r-j}+M_{j,2r-j}-N_{j,2r-j}.$$

D'autre part, lorsque $i, j, s, t\neq r$, $i+s=2r$, $j+t=2r$, on a

$$\frac{1}{r-1}(\Gamma^{r}_{i,2-i}-\Gamma^{r}_{j,2r-j})=M_{i,2r-i}-N_{i,2r-i}-(M_{j,2r-j}-N_{j,2r-j}).$$

Nous avons ainsi

$$\begin{aligned}&\Gamma^{r}_{i,2r-i}=\Gamma^{r}_{j,2r-j}=\gamma\qquad (i, j=1, \cdots, r-1, r+1, \cdots, 2r-1),\\ &M_{i,2r-i}-N_{i,2r-i}=M_{j,2r-j}-N_{j,2r-j}.\end{aligned} \tag{11.2}$$

Donc, en tenant conpte de (3.2), on peut écrire

$$\begin{cases} M_{rr}-N_{rr}=\dfrac{4r}{2r-1}\gamma, \\ M_{i,2r-i}-N_{i,2r-i}=-\dfrac{2r}{(r-1)(2r-1)}\gamma \qquad (i\neq r). \end{cases} \tag{11.3}$$

12. Nous allons maintenant nous occuper de l'équation (3.9). Quant à $K_{jsl}K^{l}_{it}-K_{jtl}K^{l}_{is}$ il s'annule, d'après (9.1), (10.2), à l'exception de deux cas. Ce sont le cas où $i=s=r$, $t=2r-j\neq r$ et le cas où $s=2r-i\neq r$, $t=2r-j\neq r$, $i\neq j$. Au cas premier il prend la valeur

$$\frac{2r-1}{4(r-1)^2}$$

tandis qu'il prend la valeur

$$-\frac{1}{4(r-1)^2}$$

au cas denier.

Portant les valeurs de Γ^r_{ij} données par (11.1), (11.2) dans (3.13), nous obtenons

$$T_{rjrt}=-T_{jrrt}=-T_{j\cdot rt}^{\,r}=0 \qquad (j+t\neq 2r,\ j\neq r,\ t\neq r),$$

$$T_{rjr\,2r-j}=-T_{j\cdot r\,2r-j}^{\,r}=\gamma\gamma-\gamma_{\omega^r} \qquad (j\neq r),$$

$$T_{rjst}=-T_{j\cdot st}^{\,r}=0 \qquad (j,s,t\neq r,\ j+s\neq 2r,\ j+t\neq 2r),$$

$$T_{rjs\,2r-j}=-T_{j\cdot s\,2r-j}^{\,r}=-\gamma_{\omega^s}\,.$$

Nous avons donc, grâce à (3.9),

(12.1) $\quad M_{jt}+N_{jt}=0 \qquad (j+t\neq 2r,\ j\neq r\ \ t\neq r),$

(12.2) $\quad M_{j,2r-j}+N_{j,2r-j}=\dfrac{2r-1}{2(r-1)^2}+2(\gamma\gamma-\gamma_{\omega^r})-(M_{rr}+N_{rr})=\mu \qquad (j\neq r),$

(12.3) $\quad M_{rs}+N_{js}=-2\gamma_{\omega^s} \qquad (s\neq r).$

Donc, si l'on fait dans (3.9) $i,\ j,\ s,\ t\neq r$, il vient

$$T_{ijst}=0 \qquad (j+s\neq 2r,\ j+t\neq 2r),$$

$$T_{ij\,2r-i\,2r-j}-\frac{1}{4(r-1)^2}=\mu.$$

13. L'équation (3.12) où $i=r$, $s\neq r$, $t\neq r$ est vérifiée comme conséquence de (11.1), (11.2), (12.1), (12.2), (12.3). Il en est de même quand on y fait $s=r$, $i+t\neq 2r$, $s\neq r\ \ t\neq r$, ou bien i, s, $t\neq r$, $i+s\neq 2r$, $i+t\neq 2r$.

Faisons maintenant $t=2r-i\neq r$, $s\neq t$, $s\neq r$. Il vient

(13.1) $\qquad (\mu-\gamma\gamma)_{\omega^s}=0 \qquad (s\neq r).$

Donc,

$$\kappa=\mu-\gamma\gamma+\frac{1}{4(r-1)^2}$$

est une fonction qui ne dépend que de u^r.

On obtient le même résultat en faisant $i=t=r$, $s\neq r$.

Faisons maintenant $i\neq r$, $t\neq r$, $s=r$. On a alors

$$(13.2)\qquad \begin{cases} \gamma_{i;t}=0 & (\gamma_i=\gamma_{\omega^i},\ i+t=2r,\ i\neq r,\ t\neq r),\\ \gamma_{i;2r-i}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{r}{(r-1)^2}\gamma+\mu\gamma-\mu_{\omega^r}\right) & (i\neq r). \end{cases}$$

14. Faisons dans (3.11) $t=2r-i\neq r$, $s\neq r$. Il vient grâce à (11.1), (11.3), (12.1), (12.2), (12.3)

$$(14.1)\qquad L_s=\frac{1}{2(r-1)(2r-1)}\gamma_{\omega^s}\qquad (s\neq r).$$

On obtient le même résultant même qu'on y fait $i=t=r$, $s\neq r$. Faisons enfin $t=2r-i\neq r$, $s=r$. Nous avons

$$(14.2)\qquad L_r=\frac{1}{2(r-1)(2r-1)}\gamma_{\omega^r}+\frac{2r-1}{2(r-1)}\kappa-\frac{r}{r-1}\mu.$$

Les valeurs ainsi déterminées de $M_{ij}-N_{ij}$, $M_{ij}+N_{ij}$, L_i satisfont à (3.12) grâce à (13.1).

§5. Démonstration de la proposition

15. Nous avons, grâce à (3.7), (11.1), (11.2), (12.1), (12.2), (12.3), (13.1), (14.1),

$$\left(\left(\gamma-\frac{1}{2(r-1)}\right)X+X_r\right)_{\omega^s}=0\qquad (s\neq r)$$

ce qui nous montre que sous-variété de l'hypersurface V, donnée par $u^r=$const. se trouve dans l'hyperplan

$$\Pi=\left(\gamma-\frac{1}{2(r-1)}\right)X+X_r.$$

Cet hyperplan contient $2r$ points indépendants

$$x,\ x_1,\cdots,x_{r-1},\ x_{r+1},\cdots,x_{2r-1},$$

$$z=\left(\frac{\mu}{2}-\frac{r}{(r-1)(2r-1)}\gamma\right)x+\left(\gamma-\frac{1}{2(r-1)}\right)x_r+x_{2r}.$$

Lorsque $u^r=$const., le système d'équations (3.6) se ramène à

$$dx=\sum_{s\neq r}\omega^s x_s,$$

$$dx_t=\frac{1}{2}\kappa\omega^{2r-t}x+\sum_{s,l\neq r}\Gamma^l_{ts}\omega^s x_l+\omega^{2r-t}z \qquad (t\neq r),$$

$$dz=\frac{1}{2}\kappa\sum_{s\neq r}\omega^s x_s.$$

Ce système d'équations est vérifié d'àprès (3. 7), même qu'on y remplace x, x_t, z par X, X_t,

$$Z=\left(\frac{\mu}{2}+\frac{r}{(r-1)(2r-1)}r\right)X+\left(r+\frac{1}{2(r-1)}\right)X_r+X_{2r},$$

et nous avons

$$x^\sigma Z_\sigma=1,\quad x^\sigma_l Z_\sigma=0,\quad z^\sigma X_\sigma=1,\quad z^\sigma X_{\sigma,l}=0,\quad z^\sigma Z_\sigma=0$$
$$(l=1,\cdots,r-1,\ r+1,\cdots,2r-1).$$

16. Envisageons, sur l'hypersurface V, un point $x_0(u_0^1,\cdots,u_0^{2r-1})$. Prenons $[x,x_1,\cdots,x_r,\cdots,x_{2r-1},x_{2r}]_0$ comme repère fixe dans S^{2r}. Alors $[x,x_1,\cdots,x_{r-1},x_{r+1},\cdots,x_{2r-1},z]_0$ devient le repère fixe dans l'hyperplan Π_0 donné par $u^r=u^r_0$.

Si l'on transforme le repère $[x,\cdots,x_r,\cdots,x_{2r}]_0$ en $[x,\cdots,x_r,\cdots,x_{2r-1},z]_0$ l'équation de l'hyperplan Π_0 devient $x^r=0$. Donc, lorsque $u^r=u^r_0$, les coordonnées des points $x,x_1,\cdots,x_{r-1},x_{r+1},\cdots,x_{2r-1},z$ de numéro différent de r satisfont (15. 1) et elles déterminent le repère mobile au point courant dans $V\cap\Pi_0$. Quant aux coordonnées des hyperplans $X,X_1,\cdots,X_{r-1},X_{r+1},\cdots,X_{2r-1},Z$, si l'on annule les coordonnées du numéro r, elles deviennent les coordonnées de l'intersection de ces hyperplans avec Π_0 et elles satisfont aussi à (15. 1) et nous avons d'après (2. 1), (15. 2)

$$\sum_{\sigma\neq r}x^\sigma X_\sigma=0,\quad \sum_{\sigma\neq r}x^\sigma X_{\sigma,l}=0,\quad \sum_{\sigma\neq r}x^\sigma Z_\sigma=1,$$

$$\sum_{\sigma\neq r}x^\sigma X_\sigma=0,\quad \sum_{\sigma\neq r}x^\sigma_{2r-i}X_{\sigma,l}=-\delta_{il},\quad \sum_{\sigma\neq r}x^\sigma_i Z_\sigma=0,$$

$$\sum_{\sigma\neq r}z^\sigma X_\sigma=1,\quad \sum_{\sigma\neq r}z^\sigma X_{\sigma,l}=0,\quad \sum_{\sigma\neq r}z^\sigma Z_\sigma=0$$

$$(i,l=1,\cdots,r-1,\ r+1,\cdots,2r-1).$$

Ainsi les coordonnées

$$x^{\sigma},\ x_1^{\sigma}, \cdots, x_{r-1}^{\sigma},\ x_{r+1}^{\sigma}, \cdots, x_{2r-1}^{\sigma},\ z^{\sigma}$$
$$(\sigma=0, \cdots, r-1,\ r+1, \cdots, 2r)$$

forment un système fondamental d'intégrales de (15. 1) et on peut écrire

$$(16.2)\quad \begin{cases} X_{\rho}=C_{\rho 0}x^0+\cdots+C_{\rho\ r-1}x^{r-1}+C_{\rho\ r+1}x^{r+1}+\cdots+C_{\rho\ 2r}x^{2r}, \\ X_{\rho,l}=C_{\rho 0}x_l^0+\cdots+C_{\rho\ r-1}x_l^{r-1}+C_{\rho\ r+1}x_l^{r+1}+\cdots+C_{\rho\ 2r}x_l^{2r}, \\ Z_{\rho}=C_{\rho 0}z^0+\cdots+C_{\rho\ r-1}z^{r+1}+C_{\rho\ r+1}z^{r+1}+\cdots+C_{\rho\ 2r}z^{2r} \end{cases}$$
$$(\rho=0, 1, \cdots, r-1,\ r+1, \cdots, 2r;\ l=1, \cdots, r-1,\ r+1, \cdots, 2r-1).$$

où les $C_{\rho\sigma}$ sont des constants. On en tire, en tenant compte de $\sum\limits_{\sigma\neq r} x^{\sigma}X_{\sigma}=0$,

$$(16.3)\qquad \sum_{\rho,\tau\neq r} C_{\rho\tau}x^{\rho}x^{\tau}=0.$$

D'autre part, lorsque $u^{\alpha}=u_0^{\alpha}$, il vient grâce à (16. 1),

$$X_0=0,\ X_l=0,\ X_{2r}=1,$$
$$X_{0,l}=0,\ X_{i,l}=0\quad (i+l\neq 2r),\ X_{2r-l,l}=-1,\ X_{i,2r}=0,$$
$$Z_0=1,\ Z_l=0,\ Z_{2r}=0$$
$$(i,\ l=1, \cdots, r-1,\ r+1, \cdots, 2r-1).$$

Portant ces valeurs de X dans (16. 2) où $u^{\alpha}=u_0^{\alpha}$, on obtient

$$C_{\rho 0}=0\ (\rho\neq 2r),\ C_{2r,0}=1,$$
$$C_{\rho l}=0,\ (\rho+l\neq 2r),\ C_{2r-l,l}=-1\quad (l=1, \cdots, r-1, r+1, \cdots, 2r-1),$$
$$C_{0\ 2r}=1,\ C_{\rho,2r}=0\qquad (\rho\neq 0)$$

de sorte que l'équation (16. 3) se ramène à

$$x^0x^{2r}=x^1x^{2r-1}+\cdots+x^{r-1}x^{r+1}.$$

Nous voyons donc que l'intersection $V\cap\Pi_0$ est une quadrique régulière à $2r-2$ dimensions. Celle-ci admet les espaces générateurs à $r-1$ dimensions. Il en est donc de même pour l'hypersurface V elle-même. La proposition est ainsi démontrée.

Références

[1] J. Kanitani. Géométrie différentielle projective des hypersurfaces. (p. 39)
[2] E. Bertini. Introduzione alla geometria poiettiva degli iperspazi. (p .154)

Department of Mathematics
College of Science and Engineering
Nihon University.