J. Math. Kyoto Univ.
8-1 (1968) 49-100

Nouvelles recherches sur les fonctions entières de plusieurs variables complexes (I)

Par

Toshio NISHINO

(Reçu le 23 Decembre, 1967)

Introduction

1. Dans la théorie des fonctions entières d'une variable complexe, un des problèmes principaux, c'est ce qu'on recherche des relations intimes entre la croissance du module d'une fonction entière et la densité de l'ensemble de tous les points où la valeur de la fonction est égale à une constante donnée. On peut trouver récemment beaucoup de recherches intéressantes sur les fonctions entières de plusieurs variables complexes, qui généralisent des résultats obtenus dans la théorie d'une variable complexe, en considérant l'aire d'une surface analytique au lieu du nombre des points.[1]

Mais, le champ de plusieurs variables complexes a quelques différences essentielles du champ d'une variable complexe. Comme on sait bien, la surface analytique formée des zéros d'une fonction holomorphe a une forme très spéciale. De plus, comme un automorphisme analytique de tout l'espace de plusieurs variables complexes se conduit d'une manière très compliquée, elle peut même changer l'ordre d'une fonction entière; par exemple, une fonction entière transcendante

1) Voir, par exemple, H. Kneser, Zur Theorie der gebrochenen Funktionen mehrerer Veränderlichen, Jber. dtsh. Math. Ver. **48**, 1-28 (1938), W. Stoll, Die beiden Hauptsätze der Wertverteilungstheorie bei Funktionen mehrerer Veränderlichen (I), (II), Acta Math. **90**, 1-115 (1953) et **92**, 55-169 (1954). P. Lelong, Fonctions entières (n variables) et fonctions plurisousharmoniques d'ordre fini dans C^n. J. d'analyse Math. **12**, 365-407 (1964).

peut se réduire à un polynôme par un automorphisme analytique convenable. Il me semble, donc, qu'il puisse exister une nouvelle recherche de fonctions entières plus propre pour le champ de plusieurs variables complexes.

2. Dans le mémoire présent, on considère quelques propriétés nouvelles, des surfaces analytiques données par une fonction entière de plusieurs variables complexes. Une composante irréductible de la surface analytique dans tout l'espace, définie par l'équation

$$f-a=0,$$

où f est une fonction entière une fois fixée pour toutes et a est un nombre quelconque, sera appelée dans ce mémoire *surface première de f avec la valeur a.* Considérons, d'abord, une suite de surfaces premières $\{S_j\}$ de f qui converge uniformément dans l'intérieur de tout l'espace. La limite de la suite peut être réductible malgré que toute surface première S_j soit irréductible. A ce moment, on dira que la suite tend vers chaque surface première comprise dans la limite. Deux surfaces premières S et S' seront dites *conjuguées l'une à l'autre* s'il y a une suite comme ci-dessus qui tend vers S et S' à la fois. Une surface première de f qui n'admet aucune surface conjuguée sauf elle-même sera appelée, dans ce mémoire, *surface première régulière de f.* Au contraire s'il n'en est pas ainsi, elle sera appelée celle d'*irrégulière de f.* Alors, on peut énoncer que, pour une fonction entière quelconque f, presque toute surface première de f est certainement régulière. Ensuite, une surface S' conjuguée à S sera classifiée en deux espèces suivant que toute suite qui consiste en surfaces premières régulières seulement et qui tend vers S, tend aussi vers S' ou non; si oui, elle sera dite *de type* (α) et, sinon, *de type* (β). Une surface première irrégulière de f sera dite *de type* (A') s'il n'y a aucune surface conjuguée de type (β), et, sinon, elle sera dite *de type* (B'). De plus, si elle et toutes ses surfaces conjuguées sont de type (A'), elle sera dite *de type* (A), et, de la même manière, si elle et toutes ses surfaces conjuguées sont de type (B') elle sera dite *de type* (B). Alors, on peut énoncer que, pour une fonction entière quelconque f, il n'y a qu'une infinité dénombrable au plus de surfaces premierès irrégulières de f qui ne sont pas de type (A) ni de type (B). Soit Ω une famille de toutes les surfaces premières irrégulières de f. Alors, si une surface première S est isolée dans Ω, ou si Ω est partout discontinue autour de S, S est toujours de type (A). Enfin, nous allons considérer une famille partielle continue F, plus simple au sens convenable, de Ω telle que toutes les surfaces conjuguées à des surfaces premières appartenant à F forment aussi des familles continues et, de plus, que toutes les surfaces premières de F sont d'ordre total un. Alors, si F contient au moins une surface première irrégulière de type (A) toute surface première appartenant à F est de type (A). Dans le cas où la fonction entière envisagée est un polynôme, il n'existe jamais des surfaces premières irrégulières de type (B), mais on peut voir qu'il y a une fonction entière qui admet celles de type (B) certainement. Ceci est un résumé bref de la partie principale de ce mémoire.

3. Ce mémoire se partage en cinq parties. Dans la première partie, on se prépare à quelques lemmes élémentaires dont on servira dans la suite. On verra ici, de plus, le fait qu'une fonction multivalente obtenue par la projection d'une surface entière subit une restriction qui a été indiquée par Iversen, comme un caractère d'une telle surface, mais ceci est indépendent des problèmes succesifs. Dans la deuxième partie on définira, pour une fonction entière f, une surface première régulière et celle d'irrégulière, et quatre types d'une surface première irrégulière au moyen des suites de surfaces premières régulières de f. Ensuite on verra l'existence des surfaces premières régulières, suffisantes pour classifier les surfaces premières irrégulières. La troisième et la quatrième partie sont les parties principales de ce mêmoire. Dans la dernière partie, on construira une fonction entière qui admet des surfaces premières irrégulières de type (B), à l'aide de l'exemple de Bieberbach.

Quelques énoncés qu'on trouve dans ce mémoire ne sont pas propres aux fonctions entières, mais, pour éviter la complexité, qui aura lieu à cause de la forme d'un domaine, on se bornera toujours à l'espace entier de plusieurs variables complexes, sauf dans la première partie

I. Préliminaires.

1. Surfaces analytiques. Soit D un domaine fini et univalent dans l'espace de n variables complexes $x_1, \cdots, x_n$ $(n>1)$. Un ensemble S de points dans D est appelé *surface analytique dans D* si, pour tout point p dans D, il y a un voisinage U de p et une fonction φ holomorphe dans U, tels que $S \cap U$ soit donné par l'équation $\varphi=0$. Un point p d'une surface analytique S est dit *ordinaire* si, l'on peut faire correspondre un voisinage U de p à celui de l'origine de l'espace de n variables complexes $u_1, \cdots, u_n$ analytiquement et biunivoquement de façon que $S \cap U$ corresponde au plan analytique $u_n=0$, et sinon p s'appelle *point singulier de S*. Une surface analytique S dans D est dite *réductible dans D* s'il y a deux surfaces analytiques S_1 et S_2 dans D différentes de S et telles que $S=S_1 \cup S_2$. Au contraire, s'il n'en est pas ainsi S est dite irréductible.[2]

Pour étudier la surface analytique, le théorème de *Weierstrass* joue un rôle tout fondamental.

Soit $f(x_1, \cdots, x_n)$ une fonction holomorphe en un point $(x_1^0, \cdots, x_n^0)$. Si $f(x_1^0, \cdots, x_n^0)=0$ et si la fonction $f(x_1^0, \cdots, x_{n-1}^0, x_n)$ d'une variable complexe x_n ne s'annule pas identiquement, on peut écrire la fonction sous la forme

$$f(x_1, \cdots, x_n)=\omega(x_1, \cdots, x_n)[x_n^\nu+a_1(x_1, \cdots, x_{n-1})x_n^{\nu-1}+\cdots+a_\nu(x_1, \cdots, x_{n-1})],$$

où $\omega(x_1, \cdots, x_n)$ est une fonction holomorphe au point $(x_1^0, \cdots, x_n^0)$ et $\omega(x_1^0, \cdots, x_n^0) \neq 0$, et $a_j(x_1, \cdots, x_{n-1})$ $(j=1, \cdots, \nu)$ sont des fonctions holomorphes au point $(x_1^0, \cdots, x_{n-1}^0)$ dans l'espace de $n-1$ variables complexes $x_1, \cdots, x_{n-1}$ et $a_j(x_1^0, \cdots, x_{n-1}^0)=0$.

2) Voir, par exemple, K. Stein und R. Remmert, Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen, Math. Annalen Bd **126**, p. 263–306 (1953).

D'où, on aura un nombre fini de fonctions algébroïdes des variables complexes $x_1, \cdots, x_{n-1}$ en résolvant l'équation $f=0$ par rapport à x_n.

Il y a un autre théorème fondamental dû à *H. Grauert.*[3]

Pour une famille dénombrable au plus de fonctions holomorphes $\{f_j\}$ *dans l'espace de* $x_1, \cdots, x_n$, *on peut trouver une transformation linéaire non-dégénérée des coordonnées telle que le théorème de Weierstrass soit valable pour toutes les fonctions de la famille et en tous les points de l'espace.*

Joignant deux théorèmes ci-dessus, on peut dire que, étant donnée une surface analytique S dans un domaine D, l'équation $\varphi=0$ qui définit S localement peut être résolue par rapport à x_n en tout point de S lorsqu'on prend un système de coordonnées convenablement. On aura donc, par le prolongement analytique, une fonction analytique $\xi(p)$ qui est définie sur un domaine multivalent avec des points de ramification intérieurs. S est représentée par la fonction multivalente

$$x_n=\xi(p).$$

La surface analytique S est irréductible si et seulement si le domaine multivalent est connexe. La fonction $\xi(p)$ sera dite celle *obtenue par la projection de* S et le domaine sur lequel $\xi(p)$ est défini sera dit *projection de* S.

D'après le théorème de Weierstrass, une surface analytique dans un domaine D consiste en une infinité dénombrable au plus de surfaces analytiques irréductibles dans D. De plus, elles ne s'accumulent pas dans l'intérieur de D.

2. Prolongement analytique d'une surface analytique. Soit S, à nouveau, une surface analytique dans un domaine D. Si, en un point p de la frontière de D, il y a un voisinage U de p et une fonction φ holomorphe dans U tels que $S \cap U \cap D$ s'exprime par l'équation $\varphi=0$, alors on dit que S *peut se prolonger analytiquement en* p, et la plus petite surface analytique dans $D \cup U$ qui contient

3) H. Grauert, Charakterisierung der holomorph vollständigen komplexen Räume, Math. Annalen Bd **129** p. 249 (1955). T. Nishino. Les ensembles analytiques et les domaines, J. of Math. of Kyoto Univ. Vol. **1**, No. 3, (1962).

S est dite *prolongement analytique de S à $D \cup U$.*

Si la surface analytique S dans D est irréductible, pour toute paire de points p et q sur S, il y a une courbe linéaire qui joigne p et q sur S, le long de laquelle on peut prolonger analytiquement la partie de S située dans un voisinage de p jusqu'à q de proche en proche. On dira alors que *deux points p et q peut être joignés par une surface analytique irréductible dans D* s'ils se trouvent sur la surface.

Au sujet du prolongement analytique d'une surface analytique, il y a un théorème dû à *P. Thullen.*[4]

Soit T une surface analytique irréductible dans un domaine D et soit S une surface analytique quelconque dans $D-T$. Alors, si l'on peut prolonger analytiquement S au moins en un point de T, il en est de même en tout point sur T.

Par suite, si S ne satisfait pas à la condition ci-dessus, la fermeture de S dans D contient tous les points de T.

3. Suite et famille de surfaces analytiques. Considérons maintenant une suite de surfaces analytiques $\{S_j\}$ dans un domaine D. On appelle *ensemble de limite de la suite* l'ensemble de tous les points p tels que, pour un voisinage quelconque V de p, il y ait une infinité de surfaces analytiques appartenant à la suite et contenant au moins un point dans V. Nous disons de plus que *la suite converge uniformément en un point p de D* si, prenant un voisinage U de p convenablement dans D, on peut trouver une suite de fonctions $\{\varphi_j\}$ holomorphes dans U de façon que $S_j \cap U$ $(j=1, 2, \cdots)$ soient données par les équations $\varphi_j=0$ respectivement et que la suite de fonctions converge uniformément vers une fonction holomorphe qui ne s'annule pas identiquement dans U.[5] Nous disons que la suite de surfaces analytiques converge uniformément dans l'intérieur de D s'il en est ainsi en tout point de D. Alors, l'ensemble de limite

4) P. Thullen, Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Funktionen und Flächen im Räume von n komplexen Veränderlichen. Math. Annalen Bd. **111**, (1935).

5) Voir K. Oka. Note sur les familles de fonctions analytiques multiformes etc., Journal of Science of the Hiroshima Univ. (1934).

de la suite est aussi une surface analytique dans D, peut-être vide, qui est définie localement par la fonction limite d'une suite $\{\varphi_j\}$ comme ci-dessus. On l'appellera *limite de la suite.*

Considérons ensuite une famille de surfaces analytiques dans un domaine D. Si l'on peut extraire, de toute suite infinie de surfaces analytiques appartenant à la famille, une suite partielle convergeant uniformément en un point p de D, la famille est dite d'être *normale en* p. Une famille de surfaces analytiques dans D est dite d'être *normale dans* D s'il en est ainsi en tout point de D. Alors, si une famille de surfaces analytiques est normale dans D on peut extraire, de toute suite infinie de surfaces analytiques appartenant à la famille, une suite partielle convergeant uniformément dans D, et, donc, sa limite est aussi une surface analytique dans D.

Il y a un critère élémentaire pour qu'une famille de surfaces analytiques soit normale en un point.

Soit F une famille de surfaces analytiques dans D. Si l'on peut décrire un polycylindre (Δ, Δ') de la forme

$$\begin{aligned} \Delta &: |x_j - x_j^0| < \rho \qquad (j=1, \cdots, n-1) \\ \Delta' &: |x_n - x_n^0| < \rho', \end{aligned}$$

où ρ et ρ' sont des nombres réels positifs, autour un point $(x_1^0, \cdots, x_n^0)$ dans D, de façon que toute surface analytique S qui appartient à F n'ait aucun point $(x_1', \cdots, x_n')$ tel que $(x_1', \cdots, x_{n-1}') \in \Delta$, $|x_n' - x_n^0| = \rho'$ et que, pour tout point $(x_1', \cdots, x_{n-1}')$ dans Δ, le nombre des points communs de S et d'une droite analytique de la forme $x_j = x_j'$ $(j=1, \cdots, n-1)$, qui se trouvent dans (Δ, Δ'), soit toujours borné supérieurement par un nombre entier qui ne dépend ni de S ni de $(x_1', \cdots, x_{n-1}')$, alors la famille F est certainement normale au point $(x_1^0, \cdots, x_n^0)$.[6)]

Grâce à Weierstrass, ceci sera facilement démontré.

4. Surfaces premières d'une fonction holomorphe. Soit f une

6) Voir O. Fujita. Sur les familles d'ensembles analytiques. Journal of the Math. Soc. of Japan. Vol. **16**, p. 382 (1964).

fonction holomorphe dans un domaine D. Un ensemble de tous les points de D où la valeur de f est égale à une constante donnée a est une surface analytique dans D que l'on appellera surface donnée par l'équation $f-a=0$.

Toute composante irréductible de la surface donnée par l'équation $f-a=0$ s'appellera, dans ce mémoire, *surface première de f avec la valeur a* ou, lorsqu'il n'y a aucun ambiguïté, en peu de mots, *surface première.* C'est telles surfaces analytiques que l'on traite principalement dans le mémoire présent.

D'abord, on aura le

Théorème 1. *Pour une fonction holomorphe quelconque f dans D, la famille de toutes les surfaces premières de f est toujours normale dans D.*

Nous allons prouver ici le théorème. Soit donnée une fonction holomorphe f dans D. Prenons une suite $\{S_j\}$ quelconque de surfaces premières de f, et désignons par a_j $(j=1, 2, \cdots)$ les valeurs de f en S_j. Dans le cas où l'ensemble de toutes les a_j n'est pas borné supérieurement en module, on peut extraire de la suite $\{S_j\}$ une suite partielle $\{S'_j\}$ telle que la suite de valeurs a'_j que f prend en S'_j augmente indéfiniment en module. La suite partielle évidemment converge uniformément dans D puisque, pour un domaine quelconque D' dans l'intérieur complet de D, toute surface première S'_j n'a aucun point dans D' dès que j surpasse un nombre entier assez grand. Au cas contraire, on peut extraire de la suite $\{S_j\}$ une suite partielle $\{S'_j\}$ telle que la suite de valeurs a'_j comme ci-dessus tende vers un nombre complexe a_0. Il suffit, pour le prouver, que l'on voit seulement en un point où f prend la valeur a_0.

Soit $(x_1^0, \cdots, x_n^0)$ un point de D où $f=a_0$. Décrivons, en changeant, si nécessaire, le système de coordonnées convenablement, un polycylindre fermé (Δ, Δ') autour de $(x_1^0, \cdots, x_n^0)$ de la forme

$$\Delta: \ |x_j-x_j^0|\leqq\rho \qquad (j=1, \cdots, n-1)$$
$$\Delta': \ |x_n-x_n^0|\leqq\rho',$$

où ρ et ρ' sont des nombres réels positifs suffisamment petits tels que la fonction $f(x_1^0, \cdots, x_{n-1}^0, x_n)$ d'une variable complexe x_n ne prenne la valeur a_0 qu'en $x_n = x_n^0$ dans Δ' et que, pour tout point $(x_1', \cdots, x_{n-1}')$ dans Δ, $f(x_1', \cdots, x_{n-1}', x_n)$ ne prenne jamais la valeur a_0 sur le cercle $|x_n - x_n^0| = \rho'$. Alors, puisque f est continue on peut trouver un nombre réel positif ε tel que, pour toute valeur a qui remplit l'inégalité $|a - a_0| < \varepsilon$, la fonction $f(x_1', \cdots, x_{n-1}', x_n)$ ne prenne jamais la valeur a sur le cercle $|x_n - x_n^0| = \rho'$. Soit ν l'ordre de zéro de la fonction $f(x_1^0, \cdots, x_{n-1}^0, x_n) - a_0$ en $x_n = x_n^0$. D'après le théorème de *Rouché*, pour tout point $(x_1', \cdots, x_{n-1}')$ dans Δ et pour toute valeur a telle que $|a - a_0| < \varepsilon$, la fonction $f(x_1', \cdots, x_{n-1}', x_n) - a$ prend toujours la valeur nulle en ν points dans Δ', comptés e fois si elle y prend zéro d'ordre e. La partie de S_j' dans le polycylindre (Δ, Δ'), s'il existe, étant comprise dans une surface analytique donnée par l'équation $f - a_j' = 0$ dans (Δ, Δ'), d'après le critère dans la section 3, le théorème est donc démontré.

5. Lemme. Maintenant, on se prépare à un lemme et ses corollaires qui sont naturels mais très importants dans la recherche suivante. Soit, de nouveau, f une fonction holomorphe dans un domaine D.

Lemme 1. *Soit $\{S_j\}$ une suite de surfaces premières de f, et soit S_0 une autre surface première de f avec la valeur a_0. Alors, si l'ensemble de limite de la suite $\{S_j\}$ que l'on désigne par E contient au moins un point p_0 de S_0, E contient tous les points de S_0.*

En effet, dans le cas où il y a une infinité de surfaces premières S_j telles que $S_j = S_0$, le lemme est évidemment vrai. Ainsi, supposons que $S_j \neq S_0$ dès l'abord pour tout j $(j = 1, 2, \cdots)$. Je dis d'abord que E contient tous les points de S_0 qui sont compris dans un voisinage assez petit de p_0. Puisque la suite $\{S_j\}$ est, d'après le théorème 1, normale en p, on peut prendre un voisinage U de p_0 et extraire de la suite $\{S_j\}$ une suite partielle, que l'on désigne par $\{S_j'\}$, convergeant uniformément dans l'intérieur de D, de manière que l'ensemble de limite de la suite partielle contienne p_0. Trouvons des fonctions φ_j $(j=1, 2, \cdots)$ holomorphes dans U telles que $S'_j \cap U$ soit donnée par $\varphi_j=0$ et que la suite $\{\varphi_j\}$ converge uniformément dans U vers une fonction holomorphe qui ne s'annule pas identiquement. Dénotons φ_0 la fonction limite de la suite. Considérons ensuite les traces des fonctions φ_j $(j=0, 1, 2, \cdots)$ sur S_0. Désignons-les par ξ_j. Il est claire que la suite $\{\xi_j\}$ converge uniformément vers ξ_0 sur $S_0 \cap U$. De plus, aucune des ξ_j ne prend la valeur nulle. Au contraire ξ_0 prend certainement la valeur nulle en p_0. D'après le théorème de *Hurwitz*, la fonction ξ_0 doit s'annuler identiquement sur $S_0 \cap U$. Ceci signifie que E comprend tous les points de S_0 dans U.

Considérons, maintenant, le domaine que l'on obtient à partir de D en excluant la réunion de toutes les composantes irréductibles, autres que S_0, de la surface donnée par l'équation $f-a_0=0$, et désignons-le par D'. Soit Σ la somme de toutes les surfaces premières qui appartiennent à la suite $\{S'_j\}$. Alors, d'après l'hypothèse, $S'_0=S_0 \cap D'$ est une surface analytique irréductible dans D' et Σ est une surface analytique dans $D'-S'_0$. De plus, il y a au moins un point de S'_0 auquel Σ ne peut se prolonger analytiquement, puisque la suite $\{S'_j\}$ tend vers S_0 uniformément dans U. Donc, d'après le théorème de *P. Thullen*, la fermeture de Σ dans D' contient tous les points de S_0. Donc le lemme est démontré.

On remarque ici qu'on peut prouver le lemme 1 plus facilement s'il n'y a qu'une surface première de f passant par le point envisagé p_0.

Corollaire 1. *Soit S_0 une surface première de f avec la valeur a_0 et soient p et q deux points quelconques sur S_0. Alors, pour tout voisinage V de q, il y a un voisinage U de p tel que toute surface première de f qui rencontre U rencontre aussi V.*

En effet, supposons, pour le réduire à l'absurde, que ce ne soit pas vrai. On peut alors trouver une suite de points dans D, soit $\{p_j\}$, tendant vers p et telle que, pour tout point p_j, il y ait au moins une surface première S_j de f passant par p_j sans passer aucun point de V. L'ensemble de limite E de la suite $\{S_j\}$ contient au moins un point p de S_0. Mais, d'après la manière de trouver S_j, E ne contient pas le point q sur S_0. Ceci est en contradiction avec le lemme 1. Le corollaire 1 est donc démontré.

Corollaire 2. *Conservons les notations dans le corollaire* 1. *Pour un voisinage U de p, quelque petit qu'il soit, toutes les surfaces premières de f qui passent au moins un point de U couvrent un voisinage assez petit de q entièrement.*

C'est une conséquence immédiate du corollaire 1.

6. Surfaces entières. Considérons, dans toute la suite, l'espace entier de n variables complexes $x_1, \cdots, x_n$ comme domaine D. Avant de traiter des surfaces premières d'une fonction entière, nous allons voir un caractère d'une surface analytique dans tout l'espace.

Une surface analytique dans tout l'espace de plusieurs variables complexes $x_1, \cdots, x_n$, que l'on dira surface entière, est toujours représentée d'après le théorème de *Cousin*,[7] comme l'ensemble de tous les points où une fonction entière prend la valeur nulle.

Soit S une surface entière définie par l'équation

$$(A) \qquad f(x_1, \cdots, x_n)=0.$$

Comme ce qu'on a déjà vu, en changeant, si nécessaire, le système de coordonnées convenablement, on peut, d'après le théorème de *H. Grauert*, résoudre l'équation (A) par rapport à x_n, d'où on aura une fonction analytique

$$x_n=\xi(p)$$

définie sur un domaine multivalent étalé au-dessus de l'espace de $n-1$ variables complexes $x_1, \cdots, x_{n-1}$, qui a peut-être une surface critique intérieur.

La surface de Riemann de la fonction inverse d'une fonction entière d'une variable complexe est certainement de cette espèce, mais, d'après l'exemple dû à Bieberbach que l'on verra dans la section 18,

7) Acta Math. Bd. **19** (1895).

on peut voir facilement qu'un domaine comme ci-dessus admet une fonction analytique bornée non constante sur lui-même tout entier, même dans le cas d'une variable complexe.

Maintenant, nous allons voir ici que la fonction analytique $\xi(p)$ remplit la condition indiquée par Iversen:[8)]

Étant donné en un point p un élément de la fonction $\xi(p)$ au-dessus de p et une courbe l joignant p à un autre point quelconque q de l'espace de $x_1, \cdots, x_{n-1}$, il existe un chemin tendant vers q et compris dans une bande arbitrairement mince renfermant la courbe l, suivant lequel l'élément envisagé peut être prolongé jusqu'au point q.

Décrivons un polycylindre Δ autour un point quelconque $(x_1^0, \cdots, x_{n-1}^0)$, dans l'espace de $n-1$ variables complexes $x_1, \cdots, x_{n-1}$ de la forme

$$\Delta: \ |x_j - x_j^0| \leqq \rho_j, \qquad (j=1, \cdots, n-1),$$

où ρ_j $(j=1, 2, \cdots, n-1)$ sont des nombres réels positifs quelconques, et considérons un domaine produit (Δ, C) de Δ et de tout le plan d'une variable complexe x_n. Soit σ une composante irréductible de la surface analytique considérée dans (Δ, C), et soit ξ_σ la fonction analytique obtenue par la projection de σ. Ceci est une branche de ξ au-dessus de Δ.

D'après le raisonnement qui a été fait par Iversen,[9)] il suffit pour établir l'énoncé de prouver l'énoncé suivant:

Étant donné un élément quelconque de ξ_σ, il existe un chemin compris dans Δ et tendant vers un point $(x_1^0, \cdots, x_{n-1}^0)$, suivant lequel cet élément peut se prolonger analytiquement jusqu'au point $(x_1^0, \cdots, x_{n-1}^0)$.

Nous allons démontrer ici cet énoncé-ci. Considérons, d'abord, le cas où σ et la droite analytique de la forme $x_j = x_j^0$ $(j=1, \cdots, n-1)$ possèdent au moins un point commun q. On peut écrire alors une courbe l qui joigne sur σ un point quelconque de σ et q, puisque σ

8) F. Iversen, Recherches sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes. Thesis (1914).

9) loc. cit. voir page 18.

est irréductible. Ceci signifie qu'un élément quelconque de ξ_σ peut se prolonger analytiquement jusqu'au point $(x_1^0, \cdots, x_{n-1}^0)$ suivant le chemin qui est la projection de la courbe l sur l'espace de $x_1, \cdots, x_{n-1}$. Supposons ensuite qu'il n'y a aucun point commun de σ et de la droite analytique comme ci-dessus. Décrivons un polycylindre fermé $\varDelta'$ autour du point $(x_1^0, \cdots, x_{n-1}^0)$ de la forme

$$\varDelta': \ |x_j - x_j^0| \leqq \rho_j/2, \qquad (j=1, \cdots, n-1).$$

Je dit maintenant qu'on peut prolonger analytiquement un élément quelconque de ξ_σ suivant un chemin compris dans $\varDelta$ jusqu'au point dans $\varDelta'$. On considère σ dans un domaine produit, désigné par $(\varDelta, P)$, de $\varDelta$ et de la sphère d'une variable complexe x_n avec le point à l'infini. Il y a deux cas différents. Dans le cas où σ peut se prolonger analytiquement à au moins un point à l'infini, d'après le théorème de *P. Thullen*, la fermeture de σ est une surface analytique dans tout $(\varDelta, P)$ et elle sera définie par l'équation de la forme

$$a_0(x_1, \cdots, x_{n-1})x_n^\nu + a_1(x_1, \cdots, x_{n-1})x_n^{\nu-1} + \cdots + a_\nu(x_1, \cdots, x_{n-1}) = 0,$$

où $a_j(x_1, \cdots, x_{n-1})$ $(j=0, 1, \cdots, \nu)$ sont des fonctions holomorphes dans $\varDelta$. Par suite, il est évident que le fait considéré est établi certainement puisqu'elle n'admet pas dans $\varDelta$ d'autre points singularités que les points critiques algébriques ou les pôles. Au contraire, dans le cas où σ ne peut se prolonger analytiquement en aucun point à l'infini, d'après aussi le théorème de *P. Thullen*, la fermeture de σ comprit tous les points à l'infini dans $(\varDelta, P)$, c'est-à-dire, il existe certainement un point de σ tel que sa projection sur l'espace de $x_1, \cdots, x_{n-1}$ se trouve dans $\varDelta'$. Donc il est évident que le fait considéré est établi certainement. Considérons ensuite une composante irréductible de σ dans $(\varDelta', C)$ et désignons-la par σ' et par $\xi_{\sigma'}$ la fonction analytique obtenue par la projection de σ'. Décrivons encore un polycylindre $\varDelta''$ autour du point $(x_1^0, \cdots, x_{n-1}^0)$ de la forme

$$\varDelta'': \ |x_j - x_j^0| \leqq \rho_j/2^2, \qquad (j=1, \cdots, n-1).$$

Alors, d'après le même raisonnement comme ci-dessus, on peut dire qu'un élément quelconque de $\xi_{\sigma'}$ peut se prolonger analytiquement suivant un chemin compris dans Δ' jusqu'au point dans Δ''. Continuant le même procédé de proche en proche, on peut conclure qu'un élément quelconque de ξ_σ peut se prolonger analytiquement toujours suivant un chemin compris dans Δ jusqu'au point $(x_1^0, \cdots, x_{n-1}^0)$. Donc, l'énoncé a été démontré.

Remarque. Soit S un ensemble analytique irréductible qui est l'ensemble des zéros communs de plusieurs fonctions entières de n variables complexes $x_1, \cdots, x_n$. Désignons par r la dimension de S. En prenant un système de coordonnées convenable, on aura la projection de S sur l'espace de r variables complexes $x_1, \cdots, x_r$. Mais, si r est inférieur à $n-1$, elle ne remplit pas nécessairement la condition indiquée par Iversen. En effet, grâce à *R. Remmert*,[10] toute surface de Riemann sur le plan d'une variable complexe peut être regardée comme projection d'un ensemble analytique de dimension un dans tout l'espace de trois variables complexes. Or, il y a des surfaces de Riemann qui ne remplissent pas la condition indiquée par Iversen.

II. Classification des surfaces premières.

7. Définitions. Soit f une fonction entière quelconque de plusieurs variables complexes une fois fixée pour toutes dans la suite. Considérons une suite $\{S_j\}$ de surfaces premières de f. Elle sera appelée *suite* (γ) *de surfaces premières de* f ou, en peu de môts, *suite* (γ), si elle converge uniformément dans tout l'espace sans devenir vide. Désignons par a_j $(j=1, 2, \cdots)$ la valeur que f prend en S_j. Il est évident que, si la suite $\{S_j\}$ est une suite (γ), la suite des nombres $\{a_j\}$ tend nécessairement vers un nombre complexe. Dénotons-le a_0. La limite de la suite $\{S_j\}$ est une surface entière qui se compose d'un nombre dénombrable au plus de surfaces premières de f avec la valeur a_0. Chaque surface première S_0 appartenant à la limite

10) R. Remmert, Dissertation, Münster 1957.

de la suite $\{S_j\}$ sera dite *limite de la suite* $\{S_j\}$ et nous dirons que *la suite* $\{S_j\}$ *tend vers* S_0. Alors, une suite (γ) peut tendre vers plusieurs surfaces premières différentes mais avec la même valeur pour toutes.

Soit ensuite S_0 une surface première de f. Si toute suite (γ) tendant vers S_0 n'admet pas d'autre limite que S_0 pour ses limites, S_0 s'appellera, dans le mémoire présent, *surface première régulière de* f, et, au contraire s'il n'en est pas ainsi, elle sera dite d'être *irrégulière.* Une suite (γ) qui consiste seulement en des surfaces premières régulières sera appelée *suite* (γ) *régulière de surfaces premières de* f ou, en peu de môts, *suite* (γ) *régulière.* Lorsqu'une surface entière donnée par l'équation $f=a$, a étant un nombre complexe, est irréductible dans tout l'espace, elle est évidemment une surface première régulière de f avec la valeur a. Au cas d'une variable complexe, toute surface première est régulière.

Considérons, maintenant, deux surfaces premières de f avec la même valeur. Désignons-les par S_1 et S_2. S'il y a une suite (γ) régulière qui tend vers S_1 et S_2 à la fois, elles seront dites *conjuguées l'une à l'autre.*

Cette notion de conjugaison, que l'on vient de définir, ne remplit pas nécessairement les conditions de l'équivalence; précisément dit, elle remplit toujours la condition de symétrie mais il n'en est pas ainsi pour la condition de transitivité. C'est-à-dire qu'il peut se faire qu'il y ait trois surfaces premières S_1, S_2 et S_3 de f telles qu'une suite (γ) régulière tende vers S_1 et S_2 et une autre vers S_2 et S_3 mais il n'existe aucune suite (γ) régulière tendant vers S_1 et S_3 à la fois.

Une surface première S'_0 de f s'appellera *surface conjuguée à* S_0 *de type* (α) si S'_0 est conjuguée à S_0 et que toute suite (γ) régulière tendant vers S_0 tend aussi vers S'_0. Au contraire, une surface conjuguée à S_0 qui n'est pas de type (α) sera dite *de type* (β). Cette notion de conjugaison de type (α) ou de type (β) ne remplit pas nécessairement même la condition de symétrié c'est-à-dire, il peut exister deux surfaces premières S_1 et S_2 de f telles qu'il y ait une suite (γ) tendant vers S_1 sans tendre vers S_2 malgré que toute suite (γ) tendant vers S_2 tende aussi vers S_1.

Ensuite, une surface première irrégulière S_0 de f sera dite *de type* (A') si S_0 n'a aucune surface conjuguée de type (β), c'est-à-dire si toutes les suites (γ) régulières qui tendent vers S_0 ont pour leur ensemble de limites le même système de surfaces premières de f. De plus, elle sera dite *de type* (A) si elle-même et toutes ses surfaces conjuguées sont de type (A'). Au contraire, une surface première irrégulière de f qui n'est pas de type (A') sera dite de type (B'). Si elle-même et toutes ses surface conjuguées sont de type (B'), elle sera dite *de type* (B).

Parmis les surfaces premières irrégulières de type (A), la notion de conjugaison remplit évidemment les conditions de l'équivalence. En ce moment, il y a un système de surfaces premières $\{S_j\}$ tel que toute suite (γ) tendant vers une surface première appartenant au système tend vers toutes les surfaces premières du système et seulement.

D'après la définition et le lemme 1, on voit que

Soient S_0 et S_0' deux surfaces premières de f qui ont au moins un point commun. Alors, elles sont nécessairement irrèguilères et l'une est une surface conjuguée à l'autre de type (α).

En effet, soit $\{S_j\}$ une suite (γ) régulière qui tend vers S_0 mais d'ailleurs quelconque et soit E l'ensemble des limites de la suite $\{S_j\}$. D'après le lemme 1, E contient nécessairement tous les points de S_0, ainsi particulièrement un point commun de S_0 et de S_0'. Donc E contient aussi tous les points de S_0'. Il en est de même lorsqu'on change S_0 et S_0'. Ceci signifie que l'énoncé est certainement vrai.

Il suit de cet énoncé que

Si, pour deux surfaces premières S_0 et S_0' de f, il y a un nombre fini de surfaces premières T_j $(j=0, 1, \cdots, \nu)$ de f telles que $S_0 = T_0$ et $T_\nu = S_0'$ et que T_{j-1} et T_j $(j=1, \cdots, \nu)$ aient au moins un point commun, alors S_0 et S_0' sont conjuguées l'une à l'autre de type (α).

Ceci est facilement démontré. Il suit aussi de cet énoncé que

Si une surface entière donnée par l'équation $f=a$, où a est un nombre complexe, est réductible mais connexe en tant qu'ensemble de points, toute surface première de f comprise dans la surface entière est de type (A).

8. **Exemples.** Avant de rechercher en détail les surfaces premières d'une fonction entière, on voit ici quelques exemples élémentaires afin d'entendre la notion générale de configulation des surfaces premières régulières ou celles d'irrégulières de type (A).

a). Le plus simple exemple pour cela est la fonction

$$f(x, y)=x \cdot y.$$

Pour une valeur a qui n'est pas nulle mais d'ailleur quelconque, toute surface première de f avec la valeur a est toujours régulière puisque la surface analytique donnée par l'équation $f=a$ est toujours irréductible pour $a \neq 0$. Mais, on a deux surfaces premières de f avec la valeur nulle, qui sont données par les équations $x=0$ et $y=0$ respectivement. Elles sont conjuguées l'une à l'autre de type (α) et irrégulières de type (A) puisqu'elles ont un point commun $(0, 0)$.

b). Soit $\varphi(x)$ une fonction entière d'une variable complexe x qui prend la valeur nulle en tout point d'un ensemble donné de points $\{a_j\}$ qui ne s'accumule en aucun point fini. Considérons une fonction de deux variables complexes x et y de la forme

$$f(x, y)=\varphi(x) \cdot y.$$

Pour une valeur a qui n'est pas nulle, mais d'ailleurs quelconque, toute surface première de f avec la valeur a est aussi régulière. Car, la surface entière donnée par l'équation $f=a$ est irréductible et peut s'exprimer sous la forme

$$y=a/\varphi(x).$$

D'autre part, celles avec la valeur nulle sont les droites analytiques définies par $x=a_j$ $(j=1, 2, \cdots)$ et par $y=0$ respectivement. Celles-ci sont toutes irrégulières de type (A) et deux quelconques d'elles sont conjuguées l'une à l'autre de type (α), pour la même raison que dans le cas a).

Par suite, on peut dire qu'il peut exister une infinité dénombrable de surfaces conjuguées à une seule surface première.

c). Soient $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ deux fonctions entières d'une variable complexe x telles que $\psi(x)$ prenne les valeurs a_j $(j=1, 2, \cdots)$, données à l'avance, respectivement en tous les points b_j $(j=1, 2, \cdots,)$ où $\varphi(x)$ prend la valeur nulle. Supposons de plus que a_j $(j=1, 2, \cdots)$ sont différentes deux à deux et non nulles. Avec ces fonctions, considérons une fonction entière de deux variables complexes x et y de la forme

$$f(x, y)=\psi(x)-\varphi(x)\cdot y.$$

Pour une valeur a qui n'est identique à aucune des a_j $(j=1, 2, \cdots)$, toute surface première de f avec la valeur a est régulière puisqu 'il n'y a qu'une seule composante irréductible de la surface entière donnée par l'équation $f-a=0$ que l'on peut écrire sous la forme

$$y=(\psi(x)-a)/\varphi(x),$$

où deux fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)-a$ n'ont aucun facteur commun. D'autre part, pour toute valeur a_j $(j=1, 2, \cdots)$, il y a deux surfaces premières de f avec la valeur a_j données par

$$x=b_j$$

et

$$y=\Psi_j(x)/\Phi_j(x),$$

où $\psi(x)-a_j=(x-b_j)\cdot\Psi_j(x)$ et $\varphi(x)=(x-b_j)\cdot\Phi_j(x)$. Elles sont toutes de type (A) et conjuguées l'une à l'autre de type (α), pour la même raison que dans le cas *a*).

Ceci indique qu'une fonction entière f peut avoir une infinité dénombrable de paires de surfaces premières irrégulières de f qui sont conjuguées l'une à l'autre de type (α). De plus, l'ensemble de toutes les valeurs que f prend sur ses surfaces premières irrégulières de type (A) peut être partout dense dans tout le plan d'une variable complexe.

d). Dans les exemples ci-dessus, toute paire de surfaces premières qui sont conjuguées l'une à l'autre ont un point commun. Mais, pour que deux surfaces premières soient conjuguées l'une à l'autre, il n'est pas nécessaire qu'elles aient un point commun. En effet, considérons une fonction entière de la forme

$$f(x, y) = (x^2 - 1) \cdot e^y.$$

Deux surfaces premières de f avec la valeur nulle qui sont données par $x = \pm 1$ sont certainement conjuguées l'une à l'autre sans avoir aucun point commun.

e). Il n'existe aucune restriction imposée à deux surfaces entières qui n'ont pas un point commun, pour qu'il y ait une fonction entière pour laquelle deux surfaces entières envisagées sont deux surfaces conjuguées l'une à l'autre. En effet, dans l'espace de deux variables complexes x et y, soient données deux surfaces entières S_0 et S'_0 qui n'ont aucun point commun, mais d'ailleurs quelconques. Soient, d'abord, p et p' deux points qui se trouvent sur S_0 et sur S'_0 respectivement et soit L une droite analytique qui passe par p et par p' à la fois. Ensuite, formons une fonction entière qui prend la valeur nulle sur les trois surfaces entières S_0, S'_0 et L avec l'ordre un. D'après le théorème de *Cousin*,[11] elle existe certainement. Alors, d'après le deuxième énoncé dans la section précédente S_0 et S'_0 sont conjuguées l'une à l'autre de type (α). Au contraire, formons une fonction entière g qui prend la valeur 1 en S_0 et la valeur -1 en S'. D'après aussi le théorème de *Cousin* on peut certainement construire une telle fonction de la façon habituelle. Maintenant, considérons une fonction de la forme

$$f = (g)^2 - 1.$$

Alors S_0 et S'_0 ne sont jamais conjuguées l'une à l'autre puisque, si une suite (γ) régulière de surfaces premières de cette fonction, que

11) loc. cit.

l'on désigne par $\{S_j\}$, tend vers S_0, la suite des valeurs $\{a_j\}$, où a_j ($j=1, 2, \cdots$) sont les valeurs que g prend en S_j respectivement, tend toujours vers 1. Donc la suite (γ) ne peut tendre vers S'_0.

9. Surfaces premières d'ordre élevé. Dans cette section on verra une surface première d'ordre élevé. Soit f, de nouveau, une fonction entière de n variables complexes $x_1, \cdots, x_n$. Une surface première de f avec une valeur a sera dite d'ordre ν ou simplement d'ordre élevé si une fonction $f-a$ prend la valeur nulle d'ordre ν ($\nu>1$) sur la surface première envisagée.

Comme on sait bien, une surface première d'ordre élevé est donnée par les zéros communs de $n+1$ fonctions entières

$$f-a \quad et \quad \frac{\partial f}{\partial x_j} \quad (j=1, 2, \cdots, n)$$

où a est un certain nombre complexe. Donc, il n'y a qu'une infinité dénombrable au plus de surfaces premières d'ordre élevé.

Soit donnée une surface première S_0 de f avec une valeur a_0. Désignons par ν l'ordre de S_0, qui peut être un. Prenons, en outre, une droite analytique L qui passe par un point ordinaire p_0 de S_0. On dira que L passe par p_0 transversalement à S_0 si, en changeant le système de coordonnées par une transformation linéaire non-dégénérée telle que p_0 se ramène à l'origine et que L soit représenté par $x_j=0$ ($j=1, \cdots, n-1$), et en décrivant un polycylindre (Δ, Δ') de la forme

$$\begin{aligned} \Delta &: \ |x_j|<\rho \qquad (j=1, \cdots, n-1), \\ \Delta' &: \ |x_n|<\rho' \end{aligned}$$

convenablement, on peut exprimer S_0 dans (Δ, Δ'), dans la forme

$$x_n=\xi(x_1, \cdots, x_{n-1}),$$

où $\xi(x_1, \cdots, x_{n-1})$ est une fonction holomorphe et univalente dans Δ.

Représentons L par un paramètre complexe t sous la forme

$$x_j=\alpha_j t+\beta_j \qquad (j=1, \cdots, n),$$

où α_j et β_j ($j=1, \cdots, n$) sont des nombres complexes, et considérons une fonction holomorphe d'une variable complexe t

$$z=F(t)=f(\alpha_1 t+\beta_1, \cdots, \alpha_n t+\beta_n).$$

Soit R la surface de Riemann de la fonction inverse de F sur le plan d'une variable complexe z. Alors, la fonction F fait correspondre analytiquement et biunivoquement un voisinage de p_0 sur L à une partie de R au-dessus d'un voisinage de a_0. Désignons par q_0 un point de R qui correspond à p_0 par F. q_0 se trouve au-dessus de a_0 et dans l'intérieur de R; de plus, q_0 est un point critique d'ordre $\nu-1$ si et seulement si S_0 est d'ordre ν $(\nu>1)$.

Ensuite, décrivons un cercle C' autour de a_0 et de rayon ρ dans le plan z

$$C': \ |z-a_0|<\rho$$

et considérons une partie connexe de R qui est située au-dessus de C' et qui contient q_0. Dénotons-la C. On suppose ici que C n'a pas un point critique autre que q_0 et n'a aucun point frontière situé au-dessus du dehors du contour de C'. Ceci est toujours possible certainement. Soit, ensuite, Γ la partie sur L qui correspond à C par F. Elle est évidemment donnée par l'inégalité $|f-a_0|<\rho$ sur L.

Maintenant, on excepte q_0 de C et sépare C en ν feuillets, en le coupant C suivant la demi-droite l issue de a_0 parallèle à l'axe réel. A ce moment, on fait tous les points au-dessus de l appartenir au bord supérieur de la coupure. Désignons les feuillets par $C_1, \cdots, C_\nu$ et par γ_j $(j=1, 2, \cdots, \nu)$ les parties de Γ qui correspondent à C_j par F. Alors f prend dans chaque γ_j une et une seule fois toute valeur a dans C' sauf a_0.

Classifions les points de Γ. Deux points sont compris dans une même classe si et seulement s'ils se trouvent sur une même surface première de f. Si, pour toute valeur a' dans C' sauf a_0, l'ensemble de tous les points où f prend la valeur a' se classifie toujours en même nombre m de classes pourvu qu'on prenne ρ suffisamment petit, on dira que la surface première S_0 a *le quasi-ordre* m.

La définition ci-dessus du quasi-ordre ne dépend pas du choix *de* L.

En effet, soit L' une autre droite analytique qui passe transversalement à S_0 par un point ordinaire p_0' de S_0. D'après le corollaire 1 du lemme 1 on peut dire que, pour tout voisinage V de p_0, il y a un voisinage V' de p_0' tel que toute surface première de f qui passe au moins par un point de V' passe par un point de V. De plus, on peut dire que, pour tout voisinage U de p_0 sur L, toute surface première de f qui passe au moins par un point de V passe par un point de U, pourvu que V soit suffisamment petit. Ceci signifie que la définition est certainement indépendante du choix de L.

Voilà un exemple élémentaire. Considérons une fonction de la forme

$$f(x, y) = x^n \cdot (xy - 1).$$

Une surface première de f avec la valeur nulle est donnée par l'équation $x = 0$. Son ordre est n, mais son quasi-ordre est un, quel que soit le nombre entier positif n.

D'après la définition du quasi-ordre, si une surface première de f est d'ordre un, elle a toujours le quasi-ordre un, mais dans le cas d'ordre élevé, une surface première n'a pas nécessairement le quasi. ordre. De plus, il est évident que, pour une fonction entière quelconque f, il n'y a, s'il existe, qu'une infinité dénombrable au plus de surfaces premières de f qui n'ont pas le quasi-ordre, puisqu'il en est ainsi pour les surfaces premières d'ordre élevé.

Maintenant, soient S et S' deux surfaces premières de f avec la même valeur, conjuguées l'une à l'autre. Alors, même si S avait le quasi-ordre, il n'en serait pas nécessairement ainsi pour S'; ou, même si S et S' avaient les quasi-ordres respectivement, ceux-ci ne seraient pas nécessairement identiques. On dira ainsi qu'une surface première de f a *l'ordre total* m si elle-même et toutes ses surfaces conjuguées ont le même quasi-ordre m.

Voilà un exemple élémentaire. Considérons une fonction de la forme

$$f(x, y) = x^m \cdot y^n.$$

Les surfaces premières de f avec la valeur nulle sont données par les équations $x=0$ et $y=0$ et elles seulement sont conjuguées l'une à l'autre. De plus la première est d'ordre m et l'autre est d'ordre n. Mais, comme on peut voir facilement, ils ont le même quasi-ordre un, quels que soient les nombres entiers positifs m et n, pourvu que m et n sont relativement premier, c'est-à-dire ils ont l'ordre total un.

On peut dire, aussi, que, pour une fonction entière quelconque f, il n'y a qu'une infinité dénombrable au plus de surfaces premières de f qui n'a pas l'ordre total puisqu'il en est ainsi pour les surfaces premières d'ordre élevé et ses surfaces conjuguées.

Malheureusement, je ne sait pas s'il y a une fonction entière qui admet actuellement des surfaces premières n'ayant pas le quasi-ordre ou l'ordre total.

10. Tube normal autour d'une surface première. Pour définir l'irrégularité de type (A) et (B) des surfaces premières irrégulières, on suppose virtuellement l'existence de beaucoup de surfaces premières régulières telles qu'on puisse en extraire une suite d'elles qui tend vers une surface première quelconque. Dans la section suivante on verra le fait que, pour une fonction entière quelconque f, presque toute surface première de f est certainement régulière. Pour cela on établira ici une configuration qui joue un rôle important dans toute la suite.

Soit donnée une surface première quelconque de f avec la valeur a_0. Dénotons-la S_0. Soit L une droite analytique qui passe transversalement à S_0 par un point ordinaire p_0 de S_0. Considérons une partie Γ autour de p_0 sur L donnée par l'inégalité $|f-a_0| \leqq \rho$, où ρ est un nombre réel positif. On dira que Γ remplit *la condition* (N) si Γ est compris dans l'intérieur d'un voisinage de p_0, si L est transversale à toute surface première qui passe par un point de Γ et si toute surface première qui passe par un point de Γ est d'ordre un à l'exception de S_0 au plus. Cette condition est évidemment identique avec la condition que l'on a posé dans la section précédente. Donc, elle est toujours remplie certainement, pourvu que ρ soit suffisamment petit.

Ensuite, considérons l'ensemble de tous les points qui peuvent être joignés à un point de Γ par une surface première de f. On l'appellera *tube normal autour de* S_0 *par rapport à* Γ, afin de faire attentions à la condition (N) imposée à Γ, et on le désignera par Σ_Γ.

Alors, on peut, d'abord, dire que

Tout point qui peut être joigné à un point intérieur de Γ *sur* L *par une surface première de* f *est toujours un point intérieur de* Σ_Γ.

Il suit directement du corollaire 2 du lemme 1, puisque tout point intérieur de Γ sur L est certainement un point intérieur de Σ_Γ

D'autre part, Σ_Γ n'est pas nécessairement fermé dans tout l'espace malgré que Γ soit fermé. Par exemple, considérons la fonction de la forme

$$f(x, y) = x \cdot y,$$

et considérons la surface première de f donnée par l'équation $x=0$ comme S_0, le point $(0, 1)$ sur S_0 comme p_0, la droite analytique donnée par l'équation $x=1$ comme L et la partie sur L donnée par l'inégalité $|y| \leqq 1$ comme Γ. Alors, Σ_Γ est donnée évidemment par

$$|x \cdot y| \leqq 1 \quad et \quad y \neq 0.$$

Ceci n'est pas fermé certainement.

Par suite, considérons la fermeture de Σ_Γ. Elle s'appellera *tube normal fermé autour de* S_0 *par rapport à* Γ, et sera désignée par $\overline{\Sigma}_\Gamma$.

Alors, on peut dire que

Toute surface première de f *qui passe au moins un point de* $\overline{\Sigma}_\Gamma$ *est contenue dans* $\overline{\Sigma}_\Gamma$.

En effet, soit S une surface première de f qui passe par au moins un point q_1 de $\bar{\Sigma}_r$ et soit q_2 un point quelconque de S. D'après l'hypothèse, il y a une suite $\{S_j\}$ de surfaces premières de f, qui consistent en des surfaces premières passant par des points de Γ et que l'ensemble de limite de la suite $\{S_j\}$, que l'on désigne par E, contient q_1. Alors, puisque q_1 se trouve sur S, d'après le lemme 1, E contient tous les points de S, particulièrement le point q_2. Ceci signifie que S est compris dans $\bar{\Sigma}_r$. L'énoncé est donc démontré.

De plus, on peut dire que

Tout point d'une surface première de f qui passe par un point intérieur de $\bar{\Sigma}_r$ est aussi le point intérieur de $\bar{\Sigma}_r$.

En effet, soit S' une surface première de f qui passe par un point q_1 dans l'intérieur de $\bar{\Sigma}_r$, et soit q_2 un point quelconque de S'. Prenons un voisinage V_1 de q_1 dans $\bar{\Sigma}_r$. D'après le corollaire 2 du lemme 1, toutes les surfaces premières de f qui passent par au moins un point de V_1 couvrent un voisinage V_2 suffisamment petit de q_2 entièrement. Ceci signifie, d'après l'énoncé précédent, que q_2 est un point intérieur de $\bar{\Sigma}_r$.

Au moyen du tube normal fermé $\bar{\Sigma}_r$ par rapport à Γ autour d' une surface première de f on peut savoir si une surface première est régulière ou non.

Si une surface première S de f qui passe par un point intérieur de Γ est irrégulière, toute surface conjuguée à S est comprise entièrement dans $\bar{\Sigma}_r$.

En effet, soit S' une surface conjuguée à S. D'après l'hypothèse, il y a une suite (γ) de surfaces premières $\{S_j\}$ de f qui tend vers S et S' à la fois. De plus, S_j passe par un point de Γ dès que j surpasse un nombre entier suffisamment grand. Ceci signifie que S' est comprise entièrement dans $\bar{\Sigma}_r$.

Maintenant, désignons par $\mathfrak{A}_r$ l'ensemble de tous les points de $\bar{\Sigma}_r$ en dehors de Σ_r. Il consiste en un système de surfaces premières de f, qui ne passent par aucun point de Γ. Ensuite, désignons par $\mathfrak{a}_r$ l'ensemble de toutes les valeurs que f prend aux points de $\mathfrak{A}_r$. Il est compris dans le cercle C' de la form $|a-a_0|\leqq\rho$. Alors, il est clair que, pour toute valeur a de $\mathfrak{a}_\Gamma$, il y a au moins une surface première irrégulière de f passant par un point de Γ avec la valeur a.

Lorsque S_0 est d' ordre un, f prend toute valeur a telle que $|a-a_0|\leqq\rho$ une et une seul fois dans Γ. D'où il suit facilement que

Si S_0 est d'ordre un, une surface première de f passant un point de Γ avec la valeur a est irrégulière si et seulement si a appartient à $\mathfrak{a}_\Gamma$.

11. Existence des surfaces premières régulières. Considérons, de nouveau, une surfaces première S_0 de f avec la valeur a_0, un tube normal Σ_r autour de S_0 et son fermeture $\bar{\Sigma}_r$ etc, sous les mêmes significations comme ceux qui précèdent.

Soit Δ_r un polycylindre fermé autour de l'origine de rayon r comme

$$\Delta_r: \ |x|\leqq r \quad (j=1, \cdots, n)$$

et soit α_r un ensemble de toutes les valeurs que f prend sur toutes les surfaces premières, comprises dans $\mathfrak{A}_r$ et passant au moins un point de Δ_r. Alors, on peut dire d'abord que

α_r est un ensemble fermé sans point intérieur dans le cercle C'.

En effet, prenons une suite de valeurs $\{a_j\}$ $(a_j\in\alpha_r)$, qui tend vers une valeur a. Soit S_j $(j=1, 2\cdots)$ une surface première de f passant par au moins un point de Δ_r et comprise dans $\mathfrak{A}_r$, sur laquelle f prend la valeur a_j. Notons p_j $(j=1, 2\cdots)$ un point quelconque de $S_j\cap\Delta_r$. L'ensemble de points $\{p_j\}$ a au moins un point d'accumulation dans Δ_r puisque Δ_r est fermé. Désignons-le par p_0. Soit T une surface première de f qui passe par p_0. Alors T ne passe par aucun point de Γ, car si ce n'est pas vrai, d'après le lemme 1, toute surface premièr S_j passe nécessairement par un point de Γ dès que j surpasse un nombre entier assez grand. Ceci est en contradiction avec l'hypothèse, c'est-à-dire, α_r est fermé. Supposons, ensuite, qu'il y a un point intérieur b de α_r. Il n'y a qu'un nombre fini au plus de surfaces premières de f avec la valeur b qui passe par au moins un point de Δ_r. Désignons-les par $T_1, \cdots, T_\mu$. Prenons dans Δ_r un point quelconque q_j de chaque T_j $(j=1, \cdots, \mu)$ et un voisinage U_j de chaque q_j $(j=1, \cdots, \mu)$, suffisamment petit pour que $U_j \cap T_k$ soit vide, où $j \neq k$ $(j, k=1, 2, \cdots, \mu)$. Alors, il y a un voisinage, que l'on désigne par δ, de b tel que toute surface première de f avec une valeur a dans δ passe par un point de quelqu'un de U_j $(j=1, \cdots, \mu)$. De plus, pour tout U_j, l'ensemble de toutes les valeurs que f prend sur les surfaces premières, comprises dans $\mathfrak{A}_r$ et passant par au moins un point intérieur de U_j n'a aucun point intérieur. Car, $\mathfrak{A}_r$ n'a pas de point intérieur. Ceci est en contradiction avec l'hypothèse, puisque la somme d'un nombre fini au plus d'ensembles fermés n'ayant aucun point intérieur n'a aussi aucun point intérieur. L'énoncé est donc démontré.

De l'énoncé précédent, il suit que

L'ensemble de tous les points qui se trouvent sur quelqu'une des surfaces premières irrégulières de f dans Σ est de première catégorie au sens de L. Baire.

En effet, conservons les notations ci-dessus et prenons un nombre entier N pour r. Soit σ_N l'ensemble de tous les points qui se trouvent sur les surfaces premières irrégulières de f telles qu'elle-même et ses surfaces conjuées passant par au moins un point dans Δ_r. Alors on peut dire que σ_N est aussi un ensemble fermé sans point intérieur. Car, sur toute surface première irrégulière comprise dans σ_N, f prend nécéssairement une valeur appartenant à α_N, et α_N est un ensemble fermé sans point intérieur. L'ensemble considéré peut être regardé comme somme de tous les σ_N, où $N=1, 2, \cdots$. Il en résulte que l'énoncé est certainement vrai.

Pour un point quelconque p de tout l'espace, on peut former toujours un tube normal autour de la surface première passant par p. Il comprend certainement un voisinage assez petit de p. Donc, d'après le théorème de *Borel-Lebesgue*, il y a une infinité dénombrable au plus de tubes normaux dont la somme couvre tout l'espace. D'après ce qu'on a vu jusqu'ici, on a le

Théorème 2. *Pour une fonction entière quelconque f de plusieurs variables complexes, l'ensemble de tous les points qui se trouvent sur quelqu'une de surfaces premières irrégulières de f est toujours de première catégorie au sens de L. Baire.*

Combinant les théorèmes 1 et 2, on obtiendra facilement le

Corollaire 1. *Pour toute surface première quelconque S de f, il y a une suite (γ) régulière qui tend vers S.*

Rappelons encore les définitions sur la régularité et l'irrégularité des surfaces premières. Pour définir la notion de surface régulière, on a utilisé une suite (γ) quelconque de surfaces premières, et, au contraire, on s'est borné aux suites (γ) régulières, pour définir l'irrégularité de type (A) ou de type (B). Mais quant à ce point, on peut dire que

Corollaire 2. *Pour toute paire de surfaces premières conjuguées l'une à l'autre de f, il y a toujours une suite (γ) régulière de surfaces premières qui tend vers les deux surfaces premières considérées à la fois.*

En effet, soient S_1 et S_2 deux surfaces premières conjuguées l'une à l'autre de f. Prenons deux points p_1 et p_2 sur S_1 et sur S_2, et deux voisinages quelconques V_1 et V_2 de p_1 et de p_2 respectivement. D'après la définition il y a une suite de surfaces premières de f qui tend vers S_1 et vers S_2 à la fois. Désignons-les par $\{T_j\}$. Alors, toute surface première T_j passe au moins par un point dans V_1 et par un point dans V_2 à la fois, dès que j surpasse un nombre entier suffisamment grand. Soit T_k une telle surface et soient q_1 et q_2 deux points sur T_k qui se trouvent dans V_1 et dans V_2 respectivement. Désignons ensuite par U_1 et U_2 deux voisinages de q_1 et de q_2 dans V_1 et dans V_2 respectivement. D'après le corollaire 1 au théorème 2, il y a une suite (γ) régulière de surfaces premières qui tend vers T_k. Alors, d'après le lemme 1 on peut dire que, cette suite-ci étant désignée par $\{T'_j\}$, toute surface première T'_j passe au moins par un point dans U_1 et par un point dans U_2 à la fois, dès que j surpasse un nombre entier suffisamment grand; une telle surface première passe évidemment par un point de V_1 et par un point de V_2 à la fois. Car, on peut prendre V_1 et V_2 arbitrairement petits et trouver une suite (γ) régulière de surfaces premières de f qui tend vers S_1 et vers S_2 à la fois. Donc le corollaire est certainement démontré.

III. Surfaces premières irrégulières de type (A) et de type (B).

12. Paire de surfaces premières conjuguées l'une à l'autre. On a vu, dans la partie précédente, que, pour une fonction entière quelconque f de plusieurs variables complexes, presque toutes les surfaces premières de f sont toujours régulières. Par suite, on peut traiter certainement des surfaces premières irrégulières S au moyen d'une suite (γ) qui consiste en surfaces premières régulières seulement et qui tend vers S.

Il s'agit, maintenant, de traiter des surfaces premières irrégulières en détail. Dans cette section, pour une fonction entière f donnée quelconque, on va d'abord considérer une paire de surfaces premières irrégulières qui sont conjuguées l'une à l'autre.

Soient S_0 et S'_0 une paire de surfaces premières irrégulières de f avec une même valeur a_0 qui sont conjuguées l'une à l'autre. Prenons deux droites analytiques L et L' passant transversalement à S_0 et à S'_0 en des points ordinaires p_0 de S_0 et p'_0 de S'_0 respectivement. Considérons encore des parties Γ et Γ' autour de P_0 et de P'_0 sur L et sur L' données par la même inégalité $|f-a_0|\leqq\rho$, qui satisfont à la condition (N) et désignons par Σ_Γ et par $\Sigma_{\Gamma'}$ les tubes normaux autour de S_0 et de S'_0 par rapport à Γ et à Γ' respectivement.

Il est évident que tout point de Γ tel que l'on puisse joindre à un point de Γ' par une surface première de f est compris certainement dans $\Sigma_{\Gamma'}$. Désignons $\Gamma\cap\Sigma_{\Gamma'}$ par $\mathfrak{C}$ et $\Gamma'\cap\Sigma_\Gamma$ par $\mathfrak{C}'$. $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{C}'$ sont ouverts dans Γ et dans Γ' respectivement. Il est clair aussi que la fermeture $\overline{\mathfrak{C}}$ de $\mathfrak{C}$ est identique avec la partie commune de Γ et de $\overline{\Sigma}_{\Gamma'}$ et il en est de même pour $\mathfrak{C}'$.

Lemme 2. *Pour toute surface première S de f qui passe par un point frontière p de $\mathfrak{C}$ dans l'intérieur de Γ, il y a au moins une surface conjuguée à S qui passe par un point de Γ', c'est-à-dire, S est toujours irrégulière.*

En effet, soit $\{p_j\}$ une suite de points appartenant à $\mathfrak{C}$, qui tend vers p et soient S_j $(j=1, 2, \cdots)$ les surfaces premières passant par p_j. D'après la définition de $\mathfrak{C}$, il y a au moins un point commun de S_j et Γ'. Dénotons q_j $(j=1, 2, \cdots)$ un tel point. L'ensemble de points $\{q_j\}$ a au moins un point d'accumulation dans Γ'. Désignons par q' un tel point et par S' la surface première passant par q'. Alors S' est certainement une surface conjuguée à S. Donc, le lemme est démontré.

Lemme 3. *Soit S une surface première régulière de f avec une valeur a, qui passe par un point p de Γ. Si S ne passe par aucun point de Γ', il existe un nombre réel positif ε_0 tel que toute surface première de f, qui rencontre un voisinage de p sur L donné par l'inégalité $|f-a|<\varepsilon_0$, ne passe par aucun point de Γ', c'est-à-dire, le point p se trouve en dehors de $\overline{\mathfrak{C}}$ dans Γ.*

En effet, s'il n'en était pas ainsi, pour tout nombre réel positif ε, il y aurait au moins un point de Γ où $|f-a|<\varepsilon$ tel que la surface première passant par ce point passe par un point de Γ'. Par suite, il y aurait une suite de tels points $\{p_j\}$ dans Γ qui tend vers p. Ceci signifierait que p appartient à $\overline{\Sigma}_{\Gamma'}$, c'est-à-dire, à la frontière de $\mathfrak{C}$. C'est en contradiction avec l'hypothèse d'après le lemme 2, donc le lemme 3 est démontré.

Corollaire 1. *Pour que S_0' soit une surface conjuguée de type (α) à S_0, il faut et il suffit que p_0 soit un point intérieur de $\overline{\mathfrak{C}}$.*

En effet, il est clair d'abord que p_0 appartient toujours à $\overline{\mathfrak{C}}$ puisque S_0' est une surface conjuguée à S_0. Supposons que S_0' est une surface conjuguée de type (β) à S_0. D'après la définition, il y a une suite (γ) régulière qui tend vers S_0 sans tendre vers S'_0. Désignons-la par $\{T_j\}$ et par p_j $(j=1, 2, \cdots)$ un des points communs de T_j et de Γ. La suite de points $\{p_j\}$ tend vers p_0. De plus, d'après le lemme 3, pour chaque point p_j, il y a un voisinage sur L, que l'on désigne par τ_j $(j=1, 2, \cdots)$, tel que toute surface première passant par un point de τ_j ne passe par aucun point de Γ'. Donc p_0 ne peut être un point intérieur de $\overline{\mathfrak{C}}$. Au contraire, supposons que p_0 est un point intérieur de $\overline{\mathfrak{C}}$. Soit σ un voisinage de p_0 sur L qui est compris dans $\overline{\mathfrak{C}}$. Alors, d'après aussi le lemme 3, toute surface première régulière de f qui passe par un point de σ passe toujours par un point de Γ'. De plus, pour une suite (r) régulière quelconque, que l'on désigne, à nouveau, par $\{T_j\}$, tendant vers S_0 mais d'ailleur quelconque, tout T_j passe par un point de σ dès que j surpasse un nombre entier suffisamment grand. Évidemment la suite $\{T_j\}$ tend vers S'_0 puisque Γ' satisfait à la condition (N). Donc le corollaire est démontré.

On remarque ici que l'énoncé ne dépend jamais du choix du nombre ρ, qui définit Σ_Γ et $\Sigma_{\Gamma'}$.

Corollaire 2. *Supposons que $\overline{\mathfrak{C}}$ a un point frontière dans l'intérieur de Γ. Soit S une surface première de f qui passe par un point frontière q de $\overline{\mathfrak{C}}$ dans l'intérieur de Γ. Alors, toute surface conjuguée à S qui passe par un point de Γ' est de type (β). C'est-à-dire, S est une surface première irrégulière de type (B').*

En effet, soit S' une surface conjuguée à S qui passe par un point q' dans Γ'. Considérons comme ci-dessus deux tubes normaux Σ_{Γ_0} et $\Sigma_{\Gamma_0'}$ autour de S et de S' donnés par la même inégalité $|f-a|\leqq\rho_0$ où a est la valeur de f en S, respectivement, tels que Γ_0 et Γ'_0 soient deux parties autour de q et de q', comprises dans Γ et dans Γ'. Désignons $\Gamma_0\cap\Sigma_{\Gamma_0'}$ par $\mathfrak{C}_0$. Puisque S et S' soient conjuguées l'une à l'autre, q appartient à $\overline{\mathfrak{C}}_0$. De plus, on peut dire que q est un point frontière de $\overline{\mathfrak{C}}_0$, car $\overline{\mathfrak{C}}_0$ est compris dans $\overline{\mathfrak{C}}$ et q est un point frontière de $\overline{\mathfrak{C}}$. Donc, d'après le corollaire 1 du lemme 3, S' est une surface conjuguée de type (β) de S.

On remarque ici que l'inverse n'est pas nécessairement vrai.

Maintenant, supposons que, deux surfaces premières S_0 et S_0' ont le même quasi-ordre ν. Alors, on peut supposer, en diminuant ρ suffisamment petit si nécessaire, que, pour toute valeur a telle que $|a-a_0|\leqq\rho$, il existe toujours justement ν surfaces premières distinctes avec la valeur a qui passent au moins par un point de Γ, et il en est de même pour Γ'.

Alors, en conservant les notations ci-dessus, on aura le

Lemme 4. *p_0 est un point intérieur de $\overline{\mathfrak{C}}$ si et seulement si p_0' est celui de $\overline{\mathfrak{C}}'$.*

En effet, supposons, pour le réduire à l'absurde, que p_0 soit un point frontière de $\overline{\mathfrak{C}}$ tandis que p_0' soit un point intérieur de $\overline{\mathfrak{C}}'$. Il y a alors un nombre réel positif $\rho'(\rho'\leqq\rho)$ tel que la partie de Γ' donnée par l'inégalité $|f-a_0|\leqq\rho'$ soit comprise dans $\overline{\mathfrak{C}}'$. Désignons-la par Γ_0' et par Γ_0 la partie de Γ donnée aussi par la même inégalité-ci. Soit q un point extérieur de $\overline{\mathfrak{C}}$ dans Γ_0 et soit b_0 la valeur de f en q. Il y a alors un nombre réel positif ε suffisamment petit pour que le voisinage τ de q donné par l'inégalité $|f-b_0|<\varepsilon$ soit en dehors de $\overline{\mathfrak{C}}$ dans Γ_0. f prend toute valeur b telle que $|b-b_0|<\varepsilon$, une et une seule fois dans τ. Il n'y a qu'un nombre fini de points dans Γ_0' en lesquels f prend la valeur b_0. Désignons-les par $q_1', \cdots, q_\mu'$ et par τ_j ($j=1, \cdots, \mu$) les voisinages de q_j' sur L' donnés aussi par la même inégalité $|f-b_0|<\varepsilon$. Or, puisque toute surface première de f qui passe par un point de τ ne passe par aucun point de Γ_0' et que le nombre des surfaces premières distinctes avec la valeur b' ($|b'-b_0|<\varepsilon$) qui passent au moins par un point de Γ_0 et par un point de Γ_0' sont identique, il existe au moins une surface première avec la valeur b' qui passe par un point de Γ_0' sans passer par aucun point de Γ_0. Pour chaque j ($j=1, \cdots, \mu$), désignons par σ_j l'ensemble de tous les points dans τ_j qui n'appartient pas Σ_Γ. Évidemment σ_j

est fermé sans point intérieur dans τ_j puisque Γ'_0 est compris dans $\overline{\mathfrak{C}}'$. Ceci est impossible car la somme d'un nombre fini d'ensembles fermés sans point intérieur l'est aussi. Donc le lemme est démontré.

Corollaire 1. *Sous la même condition comme ci-dessus, si S'_0 est une surface conjuguée de type (α) à S_0, S_0 est aussi celle de type (α) à S'_0.*

D'après le corollaire 1 du lemme 3, et le lemme 4, on peut le démontrer facilement.

Sous les mêmes conditions que dans ce corollaire-ci, il existe deux tubes normaux Σ_r et $\Sigma_{r'}$ donnés par la même inégalité $|f-a_0| \leqq \rho$, autour de S_0 et de S'_0, tels que $\overline{\mathfrak{C}}$ et $\overline{\mathfrak{C}}'$ sont identiques à Γ et à Γ' respectivement. A ce moment, on aura le

Corollaire 2. *Si S_0 et S'_0 sont de quasi-ordre un, pour une surface première irrégulière S de f qui passe par un point de Γ d'ailleurs quelconque, toute surface conjuguée à S qui passe par un point de Γ' est de type (α).*

En effet, supposons, pour le réduire à l'absurde, qu'il existe une surface première irrégulière S passant par un point p de Γ telle que la surface conjuguée à S passant par un point p' de Γ' soit de type (β). Désignons-la par S'. Considérons deux tubes normaux Σ_{r_0} et $\Sigma_{r_0'}$ donnés par la même inégalité $|f-b| \leqq \rho_0$, où b est la valeur de f en S, autour de S et de S' tels que $\Gamma_0 \subset \Gamma$ et $\Gamma'_0 \subset \Gamma'$. Désignons $\Gamma_0 \cap \Sigma_{r_0'}$ par $\mathfrak{C}_0$ et $\Gamma'_0 \cap \Sigma_{r_0}$ par $\mathfrak{C}'_0$. D'après le corollaire 1 au lemme 3, p est un point frontière de $\overline{\mathfrak{C}}_0$. Soit q un point extérieur de $\overline{\mathfrak{C}}_0$ dans Γ_0. Alors une surface première passant par q ne passe par aucun point de Γ'_0, mais elle passe un point de Γ' certainement. Ceci est en contradiction avec l'hypothèse, puisqu'il existe certainement une surface première passant par un point de Γ'_0 avec la même valeur que celle que f prend en q. Le corollaire est donc démontré.

13. Surface première ayant l'ordre total. Dans la section présente, on se borne à une surface première de f ayant l'ordre total. En conservant les notations précédentes, on considère une surface première S_0 d'ordre total ν avec une valeur a_0. Alors on aura le

Lemme 5. *Pour que S_0 soit de type (A'), il faut et il suffit que toute surface conjuguée à S_0 soit formée de points intérieurs d'un tube normal fermé $\overline{\Sigma}_r$ autour de S.*

En effet, supposons, d'abord, qu'il existe une surface conjuguée à S_0 sur laquelle il y a au moins un point qui se trouve sur la frontière de $\overline{\Sigma}_r$ quoique S_0 soit de type (A'). Soit S'_0 une de telles surfaces conjuguées à S_0. Alors tous les points de S'_0 se trouvent nécessairement sur la frontière de $\overline{\Sigma}_r$. Soit L' une droite analytique passant transversalement à S'_0 en un point ordinaire p'_0 de S'_0. Considérons un tube normal $\Sigma_{r'}$ autour de S'_0 par rapport à Γ', où Γ' est une partie autour de P'_0 sur L' donnée par l'inégalité $|f-a_0|\leqq\rho'$ $(\rho'<\rho)$ qui satistait à la condition (N). Désignons $\Gamma'\cap\Sigma_r$ par $\mathfrak{C}'$. D'après ce qu'on a dit ci-dessus, p'_0 est un point frontière de $\overline{\mathfrak{C}}'$. Il suit de là et du corollaire 1 au lemme 3 que S_0 est une surface conjuguée de type (β) à S'_0. Par suite, d'après le corollaire 1 au lemme 4, S'_0 est aussi une surface conjuguée de type (β) à S_0. Ceci est en contradiction avec l'hypothèse. Au contraire, supposons maintenant que S_0 est une surface première de type (B'). D'après la définition, il y a au moins une surface conjuguée de type (β) à S_0. Désignons par S'_0 une telle surface et considérons aussi sous les mêmes notations, un tube normal Σ_r autour de S'_0. D'après aussi le corollaire 1 au lemme 4, S_0 est une surface conjuguée de type (β) à S'_0. Donc, d'après le corollaire 1 au lemme 3, p'_0 est un point frontière de $\overline{\mathfrak{C}}'$, c'est-à-dire il y a au moins un point frontière de $\overline{\Sigma}_r$ sur S'_0. Ceci est en contradiction avec l'hypothèse, donc le lemme 5 est démontré.

On remarque ici que, le fait qu'une surface S'_0 conjuguée à S_0 se trouve sur la frontière d'un tube normal fermé $\overline{\Sigma}_r$ autour de S_0, ne dépend jamais du choix d'un tube normal autour de S_0.

Maintenant, soit S_0 une surface première irrégulière de type (A') qui a l'ordre total et soit S'_0 une surface conjuguée à S_0. Considérons deux tubes normaux Σ_r et $\Sigma_{r'}$ autour de S_0 et de S'_0 comme d'habitude, tels que Γ' soit compris dans $\overline{\Sigma}_r$. Il en existe certainement d'après le lemme 5. D'après le corollaire 1 au lemme 3, S_0 est une surface conjuguée de type (α) à S'_0, et d'après le corollaire 1 au lemme 4, S' est aussi une surface conjuguée de type (α) à S_0. C'est-à-dire, une suite (γ) régulière tend vers S'_0 si et seulement si elle tend vers S_0. Ceci signifie certainement que S'_0 est aussi de type (A'). D'après ce qu'on a vu jusqu'ici, on a le

Théorème 3. *Soit S_0 une surface première irrégulière d'une fonction entière f ayant l'ordre total. Si S_0 est de type (A'), toute surface conjuguée à S_0 est aussi de type (A'), c'est-à-dire elle est de type (A).*

On remarque ici que, du théorème 3, il suit que pour une fonction entière quelconque f il n'y a qu'une infinité dénombrable au plus de surfaces premières irrégulières de f qui ne sont pas de type (A) ni de type (B), puisqu'il en est ainsi pour les surfaces premières de f qui n'ont pas l'ordre total.

14. Surface première n'ayant pas le quasi-ordre ou l'ordre total. Ensuite, dans la section présente, on considère une surface première de f qui n'a pas le quasi-ordre ou l'ordre total.

Soit S_0 une surface première de f avec la valeur a_0 d'ordre ν. Reprenons les notations dans la section 9. Σ_Γ est un tube normal autour de S_0 par rapport à Γ, où Γ est la partie donnée par l'inégalité $|f-a_0|\leqq\rho$ sur une droite analytique L passant transversalement à S_0 en un point ordinaire p_0 de S_0, qui satisfait à la condition (N). Γ se partage en ν parties de la forme d'eventail, que l'on désigne par $\gamma_1, \cdots, \gamma_\nu$, telles que, dans chaque γ_j, f prenne toute valeur a pour $|a-a_0|\leqq\rho$, sauf a_0, une et une seule fois. Considérons, pour toute paire $(s, t)(s, t=1, \cdots, \nu)$, l'ensemble de tous les points de γ_s qui peuvent être joignés à un point de γ_t par une surface première de f. Désignons-le par $\mathfrak{E}_{st}$ $(s, t=1, \cdots, \nu)$. $\mathfrak{E}_{st}$ est ouvert dans γ_s. D'autre part, désignons par $N(a)$ le nombre des surfaces premières avec la valeur a qui passent au moins par un point de Γ. Alors, si S_0 n'a pas le quasi-ordre, il y a une paire a_1 et a_2 de valeurs telles que $N(a_1)<N(a_2)$, où $|a_j-a_0|<\rho'$ $(j=1,2)$, quelque petit que soit ρ'. Par suite, il y a une paire γ_s et γ_t telles que le point dans γ_s et celui dans γ_t, où f prend la valeur a_1, se trouvent une même surface première sans qu'il n'en est ainsi pour a_2. Envisageons maintenant ce $\mathfrak{C}_{st}$-ci. Il n'est jamais identique à γ_s. Par suite, il y a au moins un point frontière de $\mathfrak{C}_{st}$ dans l'intérieur de γ_s. Désignons par q un tel point. Soit S une surface première de f qui passe par q et soit S' celle qui passe par un point de γ_t avec la même valeur que S. Alors, on peut dire que S n'est pas régulière. Car, d'après le lemme 1, S et S' sont certainement distinctes. De plus, il existe une suite (γ) de surfaces premières qui tend vers S et vers S' à la fois, puisque q est un point frontière de $\mathfrak{C}_{st}$.

Donc, on a le

Théorème 4. *Toutes surfaces premières de f qui n'ont pas le quasi-ordre sont toujours la limite d'une suite de surfaces premières irrégulières de f.*

Ensuite on considère une surface première qui n'a pas l'ordre total, tandis qu'elle-même et toutes ses surfaces conjuguées ont le quasi-ordre.

Soit donnée une surface première S_0 de f ayant le quasi-ordre n avec la valeur a_0. Soit, en outre, S_0' une surface conjuguée à S_0 qui a aussi le quasi-ordre m mais, $n \neq m$. Considérons, comme d'habitude, deux tubes normaux Σ_Γ et $\Sigma_{\Gamma'}$ autour de S_0 et de S_0' respectivement, où Γ et Γ' sont données par la même inégalité $|f-a_0| \leqq \rho$ sur L et sur L' sous la même signification des notations que dans ce qui précède. Supposons, d'abord, que $n > m$. Désignons $\Gamma \cap \Sigma_{\Gamma'}$ par $\mathfrak{C}$. Elle est ouverte dans Γ et de plus il existe au moins un point extérieur de $\mathfrak{C}$ dans l'intérieur de Γ. Car, pour toute valeur a telle que $|a-a_0| \leqq \rho$, il y a $n-m$ surfaces premières avec la valeur a qui passent par un point de Γ sans passer par aucun point de Γ'. Donc si $\overline{\mathfrak{C}}$ est identique à Γ, la somme d'un nombre fini d'ensembles fermés sans point intérieur couvre entièrement le cercle $|a-a_0| \leqq \rho$. Ceci est évidemment impossible. Soit q un point frontière de $\overline{\mathfrak{C}}$ dans l'intérieur de Γ et soit S une surface première de f qui passe par q.

Alors, d'après le corollaire 2 au lemme 3, S est certainement irrégulière de type (B'). Il s'ensuit que S_0 est la limite d'une suite de surfaces premières irrégulières de type (B'). De plus, pour la surface première S ci-dessus, il y a une surface conjuguée à S passant par un point de Γ'. Parmi de telles surfaces premières de type (B'), il existe au moins une surface première ayant l'ordre total un, puisque la frontière de $\overline{\mathfrak{C}}$ comprit un ensemble continu. Il s'ensuit donc que S_0' est aussi la limite d'une suite de surfaces premières irrégulières de type (B'), d'après le corollaire 1 au lemme 4.

Donc, on aura le

Théorème 5. *Soit S_0 une surface première de f telle qu'elle-même et toutes ses surfaces conjuguées aient le quasi-ordre. Si S_0 n'a pas l'ordre total, elle est la limite d'une suite de surfaces premières irrégulières de type (B').*

IV. Famille de surfaces premières irrégulières de f.

15. Surface première irrégulière isolée etc. Considérons, pour une fonction entière f, la famille de toutes les surfaces premières irrégulières de f. Désignons-la par Ω. On recherchera, dans ce qui suit, la structure de Ω.

En général, soit donnée une famille F de surfaces premières de f. Pour une surface première S et pour un tube normal Σ_r autour de S, on désigne par F_r la famille partielle de F formée de toutes les surfaces premières de F qui sont comprises dans Σ_r, et par Γ_F l'ensemble de tous les points de Γ qui se trouvent sur quelqu'une des surfaces premières appartenant à F_r. On dira qu'une surface première S de F est isolée si, pour un tube normal quelconque Σ_r autour de S, le point commun de Γ et de S est isolé dans Γ_F. Une surface première S sera appelée surface première d'accumulation si, sous la même signification des notations, le point commun de Γ et de S est un point d'accumulation de Γ_F. Ensuite, la famille F sera dite partout discontinue ou continue, suivant que, pour toute surface première S de F et pour un tube normal convenable Σ_r autour de

S, Γ_F est partout discontinu ou continu.[12] Une surface première S sera appelée surface d'extrémité de F si le point commun de Γ et de S est un point d'extrémité de Γ_F, s'il peut être considére. Enfin, une famille F sera dite connexe si elle est connexe en tant qu' ensemble de points dans tout l'espace. D'après le lemme 1, les définitions ci-dessus ne dépendent pas du choix du tube normal.

Pour une surface première S et pour un tube normal quelconque Σ_r, autour de S, Ω_r sera appelée une famille de surface premières irrégulières autour de S.

Théorème 6. *Soit S_0 une surface première irrégulière de f avec une valeur a_0. S'il n'y a que des surfaces premières irrégulières de type (A') dans une famille de surfaces premières irrégulières autour de S_0, il en est de même pour toute surface conjuguée à S_0. En conséquence, S_0 est de type (A).*

En effet, soit S' une surface conjuguée à S_0. Prenons deux tubes normaux Σ_r et $\Sigma_{r'}$ autour de S_0 et de S_0' donnés par la même inégalité $|f-a_0|\leqq\rho$, comme d'habitude. Considérons ensuite $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{C}'$ sous la même signification des notations. Alors, d'après le corollaire 2 au lemme 3, $\overline{\mathfrak{C}}$ est nécessairement identique à Γ. Je dit maintenant que $\overline{\mathfrak{C}}'$ est aussi identique de Γ', En effet, si ce n'etait pas vrai, il y aurait un point frontière de $\overline{\mathfrak{C}}'$ dans l'intérieur de Γ'. Par suite, il existerait au moins une surface première d'ordre total un, qui passe par un point frontière de $\overline{\mathfrak{C}}'$. Désignons une telle surface première par S'. Alors, il y aurait une surface S conjuguée à S' qui passe par un point de Γ. D'après le corollaire 1 au lemme 3, S serait une surface conjuguée de type (β) à S', et, de plus d'après le corollaire 1 au lemme 4, S' serait aussi celle de type (β) à S. Ceci est en contradiction avec l'hypothèse. Il s'ensuit qu'une surface première régulière de f passe par un point de Γ' si et seulement si elle passe par un point de Γ. Donc le théorème 6 est certainement

12) Un ensemble mal enchainé entre deux quelconques de ses points est dit partout discontinu. Au contraire, celui bien enchainé entre deux quelconques de ses points est appelé ensemble continu.

démontré.

Théorème 7. *Soit S_0 une surface première irrégulière de type (B'). Alors, dans un tube normal quelconque autour de S_0, il y a une famille continue qui ne consiste qu'en des surfaces premières irrégulières de type (B')*

En effet, soit S_0' une surface conjuguée de type (β) à S_0. Prenons, comme d'habitude, deux tubes normaux Σ_r et $\Sigma_{r'}$ donnés par la même inégalité $|f-a_0|\leqq\rho$, où a_0 la valeur de f en S_0, autour de S_0 et de S_0' respectivement. Considérons ensuite $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{C}'$ sous la même signification des notations. Alors, d'après le corollaire 1 au lemme 3, le point commun p_0 de S_0 et de Γ se trouve sur la frontière de $\overline{\mathfrak{C}}$, et d'après le corollaire 2 au lemme 3, toute surface première passant par un point frontière de $\overline{\mathfrak{C}}$ dans l'intérieur de Γ est de type (B'). La frontière de $\overline{\mathfrak{C}}$ dans l'intérieur de Γ consiste, évidemment, en des ensembles continus et leurs limites. Donc le théorème 7 est certainement démontré.

Théorème 8. *Pour une surface première irrégulière S_0 de f, si la famille de surfaces premières irrégulières autour de S_0 est partout discontinue, il en est de même pour toute surface conjuguée à S_0. En conséquence, S_0 est de type (A).*

En effet, d'après les théorèmes 6 et 7, il suffit, pour le démontrer, qu'on voit la première partie de l'énoncé seulement. Supposons, pour le réduire à l'absurde, qu'il y a une surface S_0', conjuguée à S_0, telle que, dans tout tube normal autour de S_0', il existe une famille partielle continue de Ω. Prenons aussi deux tubes normaux Σ_r et $\Sigma_{r'}$, donnés par la même inégalité $|f-a_0|\leqq\rho$, où a_0 est la valeur de f en S_0, autour de S_0 et de S_0' respectivement, de manière que Ω_r soit partout discontinue. Considérons $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{C}'$ sous la même signification des notations. Soit F une famille partielle continue de Ω comprise dans $\Sigma_{r'}$. Alors, d'après le même raisonnement qu'on a fait dans la démonstration du théorème 6, on a $\Gamma=\overline{\mathfrak{C}}$ et $\Gamma'=\overline{\mathfrak{C}}'$. Il y a une surface première d'ordre total un qui appartient à F, puisque F est continue. Désignons-la par S'. Alors il y a une surface S conjuguée à S' qui passe par un point de Γ, puisqu'une surface première régulière passe par un point de Γ si et seulement si elle passe par un point de Γ', mais S peut être identique à S'. Prenons encore deux tubes normaux Σ_{r_0} et $\Sigma_{r_0'}$ donnés par la même inégalité $|f-a|\leqq\rho_0$, où a est la valeur de f en S, autour de S et de S', tels que $\Gamma_0\subset\Gamma$ et $\Gamma_0'\subset\Gamma'$. Désignons $\Gamma_0\cap\Sigma_{r_0'}$ par $\mathfrak{C}_0$ et $\Gamma_0'\cap\Sigma_{r_0}$ par $\mathfrak{C}_0'$. Alors, on aura aussi $\overline{\mathfrak{C}}_0=\Gamma_0$ et $\overline{\mathfrak{C}}_0'=\Gamma_0'$, puisqu'il n'y a que des surfaces premières irréglières de type (A') dans Σ_{r_0}. D'après l'hypothèse, désignant par $\mathfrak{A}$ l'ensemble de toutes les valeurs de f, prises sur les surfaces premières appartenant à $\Omega_{r_0'}$, on voit que $\mathfrak{A}$ comprend un ensemble continu. Je dis maintenant que toute surface première, passant par un point de Γ_0, avec une valeur de $\mathfrak{A}$, est irrégulière. En effet, soit T une telle surface première et soit T' une surface première avec la même valeur, que f prend en T, passant par un point de Γ_0'. Alors, si T est identique à T', elle est irrégulière d'après l'hypothèse. Ou, si T n'est est pas identique à T', T' est évidemment une surface conjuguée à T. Donc T est toujours irrégulière. Par suite, Ω_{r_0} doit comprendre une famille partielle continue de Ω puisque T est de quasi-ordre un. Il est donc en contradiction avec l'hypothèse. Le théorème est certainement démontré.

Théorème 9. *Si une surface première irrégulière S_0 de f est isolée dans Ω toute surface conjuguée à S_0 est aussi isolée dans Ω. En conséquence, S_0 est de type (A).*

En effet, soit S_0' une surface conjuguée à S_0. En conservant les notation précédentes, considérons deux tubes normaux Σ_r et $\Sigma_{r'}$ autour de S_0 et de S_0' tels que Ω_r consiste en S_0 seulement. Alors, $\mathfrak{C}$ n'a aucun point frontière dans l'intérieur de Γ, différent du point commun p_0 de S_0 et de Γ, puisque toute surface première qui passe par un point frontière de $\mathfrak{C}$ est irrégulière. De plus, on peut dire que $\mathfrak{C}'$ n'a aussi aucun point frontière dans l'intérieur de Γ', différent du point p_0' commun de S_0' et de Γ'. Car, s'il y a un point frontière q' de Γ' dans l'intérieur de Γ', alors, d'après le lemme 2, une surface première S' passant par q' est irrégulière et de plus, il y a une surface conjuguée à S' qui passe au moins par un point de Γ. Ceci est en contradiction avec l'hypothèse, puisque la deuxième surface première est aussi irrégulière et comprise dans Ω_r. Il signifie évidemment que S'_0 est aussi isolée dans Ω. Donc, le théorème est certainement démontré.

16. Famille partielle continue de $\boldsymbol{\Omega}$. Nous allons, maintenant, envisager une famille partielle continue de Ω. D'après le théorème 1, pour une fonction entière quelconque, il n'existe jamais une famille partielle de Ω qui contient un point intérieur en tant qu'ensemble de points dans l'espace. D'après ce que nous avons vu dans la section précédente, on peut dire que les surfaces premières irrégulières de type (B') forment un certain nombre de familles continues, à peu près. Malheureusement, je n'ai pas un exemple d'une fonction entière pour laquelle il y a une famille continue consistant en des surfaces premières irrégulières de type (A') seulement. On peut construire facilement une telle sorte de fonction dans un polycylindre. Mais, pour construire une telle fonction entière globalement dans tout l'espace, il reste encore quelques difficultés devant moi, malgré que j'en croie à l'existence.

Quant à une famille partielle continue de Ω, on aura l'énoncé suivant.

Soit F une famille continue qui est comprise dans Ω. Alors il existe une famille partielle continue F_0 de F telle qu'il y ait une famille continue consistant seulement en des surfaces conjuguées aux surfaces premières appartenant à F_0.

En effet, prenons une surface première S_0 d'ordre un et d'ordre total un comprise dans F. Elle existe certainement puisque F est continue. Prenons, comme d'habitude, un tube normal Σ_r autour de S_0. Considérons F_r pour ce tube, et désignons par $\mathfrak{A}$ l'ensemble de toutes les valeurs que f prend sur les surfaces premières de F_r. Alors, on peut d'abord dire que, pour toute valeur a de $\mathfrak{A}$, il n'y a qu'une surface première avec la valeur a dans F_r puisque f prend la valeur a, une et une seule fois dans Γ. Considérons ensuite la famille de toutes les surfaces premières S de f en lesquelles f prend les valeurs de $\mathfrak{A}$. Ceci consiste évidemment en une infinité dénombrable au plus de familles continues dans chacune desquelles il y a au plus une surface première avec chaque valeur a de $\mathfrak{A}$. Désignons-les par G_j $(j=1, 2, \cdots)$ à l'exception de F_r. Toute surface conjuguée à une des surfaces premières de F_r est comprise dans quelqu'une des G_j. Soit $\mathfrak{A}_j$ l'ensemble de toutes les valeurs a de $\mathfrak{A}$ telles qu'une surface conjuguée à la surface première de F_r avec la valeur a soit comprise dans G_j. Puisque la somme de toutes les $\mathfrak{A}_j$ est identique à $\mathfrak{A}$ et que $\mathfrak{A}$ est un ensemble continu, d'après le théorème de *L. Baire*, il y a une partie continue $\mathfrak{A}_0$ de $\mathfrak{A}$ telle qu'une des $\mathfrak{A}_j$ soit partout dense dans $\mathfrak{A}_0$. Soit $\mathfrak{A}_\nu$ une des telles $\mathfrak{A}_j$ et soient F_0 et G_0 la famille partielle de F et celle de G_ν, consistant en toutes les surfaces premières avec les valeurs contenues dans $\mathfrak{A}_0$ respectivement. Alors la famille de toutes les surfaces conjuguées comprise dans G_ν aux surfaces premières de F_0 est partout dense dans G_0 en tant qu'ensemble de points. Je dis, maintenant, que toute surface première appartenant à G_0 est une surface conjuguée à quelqu'une des surfaces premières de F_0. Soit S' une surface première appartenant à G_0, et soit a la valeur de f en S'. Soit S une surface première avec la valeur a qui est comprise dans F. Évidemment $S \neq S'$. Considérons de plus un tube normal Σ_{r_0} autour de S tel que $\Gamma_0 \subset \Gamma$. D'après l'hypothèse, $\bar{\Sigma}_{r_0} \cap G_0$ est partout dense dans G_0 et $\bar{\Sigma}_r$ est fermé, donc S' est certainement comprise dans $\bar{\Sigma}_r$. Donc, l'énoncé est certainement démontré.

On remarque ici qu'il est évident que, quand on varie une surface première S de F_0 continûment, la surface conjuguée S' à S qui est comprise dans G_ν varie aussi continûment dans G_0.

Si F est une famille continue de surfaces premières irrégulières de type (B'), il existe une famille partielle continue F_0 de F pour laquelle il existe une autre famille continue qui ne consiste qu'en des surfaces conjuguées de type (β) à des surfaces premières de F_0.

D'après l'énoncé ci-dessus, on peut considérer, pour une famille partielle continue quelconque F de Ω, la famille partielle continue et connexe de F, que l'on désigne par F_0 et qui remplit les conditions suivantes,

a). Il y a une famille continue et connexe F'_0 qui ne consiste qu'en des surfaces conjuguées à des surfaces premières de F_0.

b). S étant une surface première de F_0 générale, quand on varie S continûment, la surface S' conjuguée à S, qui est comprise dans F'_0, varie aussi continûment.

c). Des familles continues et counexes F_1 et F'_1 qui sont plus grandes que F_0 et F'_0 respectivement, ne peuvent jamais remplir les conditions *a*) et *b*).

Si deux familles continues et connexes F_0 et F'_0 sont en relation sous les conditions *a*) et *b*), F'_0 sera appellée famille continue conjuguée à F_0 ou on dira que F_0 a une famille continue conjuguée F'_0. Si elle remplit aussi *c*), elle sera dite maximale.

Même si une famille continue et connexe F de Ω a une famille continue conjuguée F', il n'est pas nécessaire que toutes les surfaces conjuguées aux surfaces premières de F qui n'appartiennent pas à F' forment une famille continue. Par suite, nous allons considérer une famille partielle continue et connexe F de Ω, pour laquelle toutes les surfaces conjuguées aux surfaces premières de F forment des familles continues conjuguées à F respectivement. Si F est maximale, elle sera appelée *une composante de* Ω.

17. Composante de $\boldsymbol{\Omega}$. Enfin, on considère une famille partielle continue de Ω dans un cas plus simple. Soit F une famille continue comprise dans Ω telle que, pour toute surface première S de F, on puisse prendre un tube normal Σ_r autour de S suffisamment petit pour que F_r soit identique à Ω_r, et que Γ_F soit toujours une courbe de Jordan connexe. A ce moment, on dira que Σ_r remplit la condition (C).

Les conditions ci-dessus ne dépendent pas du choix du tube normal Σ_r pourvu qu'il soit suffisamment petit. La structure d'une famille partielle continue générale de Ω est très compliquée, mais, dans un cas simple comme ci-dessus, on aura quelques propriétés comme ce qui suit. Soit F, dans tout ce qui suit, une telle famille partielle continue et connexe de Ω.

1). *Soit F_0 une famille partielle continue et connexe de F, admettant une famille conjuguée continue F_0'. Si, pour une surface première S de F_0, la surface conjuguée à S, qui appartient à F_0', est de type (β), il y a un tube normal Σ_r autour de S tel qu'il en soit de même pour toute surface première de F_r.*

En effet, désignons par S' la surface conjuguée à S, appartenant à F_0', et considérons comme d'habitude deux tubes normaux Σ_r et $\Sigma_{r'}$, donnés par la même inégalité $|f-a|\leqq\rho$, où a est la valeur de f en S, autour de S et de S' respectivement, de manière que Σ_r remplisse la condition (C). Soit $\mathfrak{C}$ la partie commune de Γ et de $\Sigma_{r'}$, et soit p un point commun de Γ et de S. Alors, d'après le corollaire 1 au lemme 3, p est un point frontière de $\overline{\mathfrak{C}}$. De plus la frontière de $\overline{\mathfrak{C}}$ dans Γ est identique à Γ_F. Car toute surface première passant par un point frontière de $\overline{\mathfrak{C}}$ dans Γ est toujours irrégulière de type (B'), c'est-à-dire tout point frontière de $\overline{\mathfrak{C}}$ dans Γ est compris dans Γ_F. Au contraire, puisqu'il y a au moins un point extérieur de $\overline{\mathfrak{C}}$ dans Γ, la frontière de $\overline{\mathfrak{C}}$ sépare Γ au moins en deux parties. Γ_F est, d'après l'hypothèse, une courbe de Jordan connexe, elle est donc identique à la frontière de $\overline{\mathfrak{C}}$.

D' après le même raisonnement, il suit de là que, si une surface première S_0 appartenant à F est de type (B') et d'ordre total un, il existe pour une surface conjuguée quelconque S_0' de type (β) à S_0, une famille partielle continue et connexe F_0 de F telle que S_0 soit comprise dans F_0 sans être une surface d'extrémité de F_0 et qu'elle ait une famille conjuguée continue comprenant S_0'.

2). *Soit F_0 une famille partielle continue et connexe de F ayant une famille conjuguée continue F_0', et soit S_0 une surface première irrégulière appartenant à F_0 telle qu'une surface conjuguée S_0' à S_0 appatenant à F_0' soit de type (α). S'il y a une suite de sur-*

faces premières $\{S_j\}$ telle que, S'_j étant des surfaces conjuguées à S_j appartenant à F'_0, S'_j soit toute de type (β). Alors S_0 et S'_0 ne peuvent être de quasi-ordre un à la fois.

En effet, supposons que S_0 et S'_0 soient de quasi-ordre un. Prenons deux tubes normaux Σ_Γ et $\Sigma_{\Gamma'}$ donnés par la même inégalité $|f-a_0|\leqq\rho$, où a_0 est la valeur de f en S_0, autour de S_0 et de S'_0, de manière qu'ils remplissent la condition (C), et qu'il y ait une seule surface première, avec une valeur quelconque a telle que $|a-a_0|<\rho$, passant par un point de Γ. Désignons, comme d'habitude, par p_0 le point commun de S_0 et de Γ, par p'_0 celui de S'_0 et de Γ', par $\mathfrak{C}$ la partie commune de Γ et de $\Sigma_{\Gamma'}$ et par $\mathfrak{C}'$ celle de Γ' et de Σ_Γ. Alors, d'après le corollaire 1 au lemme 3, p_0 est un point intérieur de $\overline{\mathfrak{C}}$. Supposons, dès d'abord, $\overline{\mathfrak{C}}$ est identique à Γ. Soit S_j une surface première de la suite passant par un point Γ. Désignons par S'_j une surface conjuguée à S_j appartenant à F'_0. Considérons ensuite deux tubes normaux Σ_{Γ_0} et $\Sigma_{\Gamma_0'}$ donnés aussi par la même inégalité $|f-b|\leqq\rho_0$, où b est la valeur de f en S_j, autour de S_j et de S'_j, tels que Γ_0 et Γ'_0 soient compris dans Γ et dans Γ', et désignons par $\mathfrak{C}_0$ la partie commune de Γ_0 et de $\Sigma_{\Gamma_0'}$, et par $\mathfrak{C}'_0$ celle de Γ'_0 et de Σ_{Γ_0} respectivement. D'après le même corollaire, p_j est un point frontière de $\overline{\mathfrak{C}'_0}$, où p_j est un point commun de S_j et de Γ_0. Prenons un point q en dehors de $\overline{\mathfrak{C}'_0}$ dans Γ_0. Alors une surface première de f passant par q ne passe par aucun point de Γ'_0. Mais, elle passe par au moins un point de Γ'. Ceci est en contradiction avec l'hypothèse, puisqu'il existe certainement une surface première passant par un point de Γ'_0 avec la même valeur que celle que f prend en q. Donc l'énoncé est démontré.

D'après le même raisonnement, il suit de là que, si une surface première S_0 appartenant à F est de type (A') et d'ordre total un, et s'il y a une suite $\{S_j\}$ de surfaces premières irrégulières de type (B') qui tend vers S_0, alors toutes les surfaces conjuguées de type (β) à S_j tendent vers l'infini lorsque j augmente indéfiniment.

3). *Supposons que F_0 est maximale. Lorsqu'il existe une surface* *d'extrêmité S_0 de F_0 qui appartient à F_0, une surface S'_0 conjuguée à S_0 et appartenant à F'_0 ne peut être de type* (β).

En effet, supposons que S'_0 soit de type (β). Prenons, autour de S_0 et de S'_0, deux tubes normaux Σ_r et $\Sigma_{r'}$ donnés par la même inégalité $|f-a_0|\leqq\rho$, où a_0 est la valeur de f en S, tels qu'ils remplissent la condition (C). En conservant les notations précédentes on voit que p_0 est un point frontière de $\overline{\mathfrak{C}}$. Ainsi, la frontière de $\overline{\mathfrak{C}}$ sépare Γ au moins en deux parties. Puisque, d'après l'hypothèse, Γ_Ω est une courbe de Jordan connexe, que l'on désigne par l, l est nécessairement identique à la frontière de $\overline{\mathfrak{C}}$. D'après le corollaire 1 au lemme 3, pour toute surface première S qui passe par un point de l, il y a une surface conjuguée S' de type (β) à S qui passe par un point de Γ'. Prenons une surface première S_1 n'appartenant pas à F_0 et passant par un point de l, et désignons par S'_1 une surface conjuguée à S_1 passant par un point de Γ'. Alors, lorsque S_1 tend continûment vers S_0 le long de l, S'_1 tend aussi vers S'_0 continûment, puisque, parmi les surfaces premières passant par un point de Γ et par celui de Γ', il n'y a aucune surface première d'ordre élevé, différente de S_0 et de S'_0. Ceci est en contradiction avec l'hypothèse que F_0 est maximale, donc l'énoncé est démontré.

Considérons, maintenant, une composante F_0 de Ω comprise dans F.

4). *Supposons que F_0 ne contient que des surfaces premières irrégulières d'ordre total un. Alors, si F_0 contient au moins une surface première irrégulière de type* (B), *F_0 ne contient que des surfaces premières irrégulières de type* (B).

En effet, d'après le théorème 3, toute surface première irrégulière de F_0 est de type (A) ou bien de type (B). Soient S_0 une surface première irrégulière de type (B) appartenant à F_0, S'_0 une surface conjuguée de type (β) à S_0, et F'_0 la famille conjuguée continue qui comprend S'_0. Alors, d'après 1), toute surface première appartenant à F'_0 est une surface conjuguée de type (β) à une surface première de F_0. Ceci signifie que l'énoncé est certainement vrai.

5). *Supposons que F_0 a une surface d'extrémité S_0 et que S_0 est une surface régulière. Alors, lorsqu'on fait tendre vers S_0 une surface première S appartenant à F_0, toute surface conjuguée à S tend vers l'infini en même temps.*

En effet, supposons qu'une surface S' conjuguée à S tend vers S_0' lorsqu'on fait tendre S vers S_0. Considérons deux tubes Σ_r et $\Sigma_{r'}$ comme d'habitude autour de S_0 et de S_0' et désignons $\Gamma \cap \Sigma_{r'}$ par $\mathfrak{C}$. Alors, Γ_F est compris certainement dans la frontière de $\mathfrak{C}$, donc il en est de même pour le point commun de Γ et de S_0. Ceci est en contradiction avec l'hypothèse, puisque toute surface première passant par un point frontière de $\mathfrak{C}$ est toujours irrégulière.

6). *Supposons aussi que F_0 a une surface d'extrémité S_0 et que S_0 est une surface première de type (A) et d'ordre total un. Alors, lorsqu'on fait tendre vers S_0 une surface première S appartenant à F, toute surface conjuguée de type (β) à S tend vers l'infini en même temps.*

En effet, supposons qu'une surface conjuguée S' de type (β) de S tend vers une surface première S_0' lorsqu'on fait tendre S vers S_0. Considérons aussi deux tubes normaux Σ_r et $\Sigma_{r'}$ autour de S_0 et de S_0' respectivement et désignons $\Gamma \cap \Sigma_{r'}$ par $\mathfrak{C}$. Alors, Γ_F est certainement compris dans la frontière de $\overline{\mathfrak{C}}$, donc il en est de même pour le point commun de S_0 et de Γ. Ceci est en contradiction avec l'hypothèse, puisque toute surface première passant par un point frontière de $\overline{\mathfrak{C}}$ est toujours irrégulière de type (B).

Ce qu'on a vu jusqu'ici se résume dans le

Théorème 10. *Si une composante F_0 de Ω comprise dans F ne contient que des surfaces premières irrégulières d'ordre total un, F_0 consiste en des surfaces premières irrégulières de type (A) seulement ou bien F_0 consiste en celles de type (B) seulement. Si, de plus, F_0 a une surface d'extrémité appartenant à F_0, elle doit être de type (A).*

V. Existence des surfaces premières irrégulières de type (B).

18. On a vu, jusqu'ici, quelques propriétés des surfaces premières irrégulières d'une fonction entière, sans mentionner l'existence d'une fonction entière qui a des surfaces premières irrégulières de type (B). Dans cette dernière partie on construira une fonction entière de deux variables complexes qui a certainement des surfaces premières irrégulières de type (B).

En 1904, *Picard*[13)] a obtenu des nouvelles fonctions transcendantes qui sont des solutions de certaines équations fonctionnelles et qui sont des généralisations de celles de *Poincaré,* comme ce qui suit:

$$\begin{aligned} f(ax, by) &= P(f(x, y), \; g(x, y)) \\ g(ax, by) &= Q(f(x, y), \; g(x, y)), \end{aligned}$$

où P et Q sont des fonctions rationnelles holomorphes à l'origine qui se développent à l'origine en séries de Taylor

$$\begin{aligned} &P = af + \cdots \\ &Q = bg + \cdots, \qquad \left(\begin{array}{l} \cdots \textit{ signifie des termes au moins} \\ \textit{du second degre,} \end{array}\right) \end{aligned}$$

et, a et b sont des nombres complexes tels que $|a| > 1$, $|b| > 1$, et que, pour tout couple de nombres entiers p_1 et p_2 avec $p_1 + p_2 \geqq 2$, on ait

$$\begin{aligned} a^{p_1} b^{p_2} - a \neq 0 \\ a^{p_1} b^{p_2} - b \neq 0. \end{aligned}$$

Picard a montré que toute équation fonctionnelle comme ci-dessus a un système de solutions holomorphes à l'origine de la forme

$$\begin{aligned} &f = x + \cdots \\ &g = y + \cdots, \qquad \left(\begin{array}{l} \cdots \textit{ signifie des termes au moins} \\ \textit{du seconde degre} \end{array}\right). \end{aligned}$$

13) E. Picard, Sur certaines équations fonctionnelles et sur une classe de surfaces algébriques, C. R. Paris, **139** (1904), p. 5–9.

De plus, f et g sont holomorphes ou méromorphes dans tout l' espace des variables complexes x et y suivant que les fonctions rationnelles P et Q sont entières ou non.

En suite, en 1922, *Fatou*[14] a remarqué que l'image de tout l' espace des variables complexes x et y par la transformation définie par ces fonction-là:

$$(A) \qquad \begin{aligned} u &= f(x, y) \\ v &= g(x, y) \end{aligned}$$

a au moins un point extérieur dans l'espace des variables complexes u et v, si la transformation donnée par (P, Q) est birationnelle dans tout l'espace et si elle admet au moins un point invariant p autre que l'origine, tel que deux racines de l'équation

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial x} - \lambda & \dfrac{\partial P}{\partial y} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} & \dfrac{\partial Q}{\partial y} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

en λ au point p soient plus grandes que l'unité en module.

En dernier lieu, en 1932, *Bieberbach*[15] a montré que la transformation (A) est toujours holomorphe et biunivoque lorsque P et Q sont rationnelles entières, et il a proposé un exemple d'une paire de polynômes P et Q pour lesquels ce qu'on a dit ci-dessus est realisé actuellement. Ce sont

$$P = g$$
$$Q = 2f + \varphi(g),$$

où

$$\varphi(z) = z(z-1)(2z-1) - z.$$

En ce moment, un domaine obtenu par cette transformation (A)

14) P. Fatou, Sur les fonctions mér morphes de deux variables. Sur certaines fonctions uniformes de deux variables. C. R. Paris **175** (1922) p. 862–865 et p. 1030–1033.

15) L. Bieberbach, Beispiel zweier ganzer Funktionen zweier komplexer Variablen, welche eine schlichte volumtreue Abbildung des R_4 auf einen Teil seiner selbst vermitteln, S. B. preuß. Akad. Wiss. (1933).

de tout l'espace ne contient aucun point dans un voisinage du point $(1, 1)$ suffisamment petit.

Notre construction de l'exemple d'une fonction entière qui a de surfaces premières irrégulières de type (B) est essentiellement fondée sur cette transformation-ci.

19. Soient, a nouveau, $f(x, y)$ et $g(x, y)$ deux fonctions entières des deux variables complexes x et y telles que la transformation donnée par

$$(A) \qquad \begin{aligned} u &= f(x, y) \\ v &= g(x, y) \end{aligned}$$

fait correspondre tout l'espace de x et y holomorphiquement et biunivoquement à un domaine D dans l'espace de deux variables complexes u et v, de façon que l'origine soit un point extérieur à D et le point $(1, 0)$ soit celui d'intérieur à D, c'est-à-dire il y a un nombre réel positif ρ tel que le dicylindre Δ_1 de la forme $|x| \leqq \rho$, $|y| \leqq \rho$ se trouve en dehors de D et que le dicylindre Δ_2 de la forme $|x-1| \leqq \rho$, $|y| \leqq \rho$ soit contenu dans D respectivement.

Considérons ensuite une fonction de u et v de la forme

$$\varphi = v^2 + a^2u^2,$$

où a est un nombre réel positif plus petit que $\rho/2$, mais d'ailleurs quelconque, et envisageons les surfaces premières de cette fonction situées dans le domaine D. Pour toute valeur complexe c, la surface première de φ avec la valeur c est donnée par

$$v = \sqrt{c - a^2u^2},$$

où le deuxième membre est une fonction analytique qui est définie sur une surface de Riemann étalée sur le plan d'une variable complexe u. Dénotons-la R_c. Il y a deux points critiques de R_c d'ordre un au-dessus de $\pm\sqrt{c}/a$. Coupant R_c suivant une droite linéaire qui joigne ces deux points critiques, on sépare R_c en deux branches. Alors, deux branches se contiguent sur la courbe linéaire correspondant à la coupure de R_c, donc celles contiguent dans Δ_1

seulement pourvu que c soit suffisamment petit en module.

Soit Γ un cercle donné par $|v|<\rho$ sur la droite analytique définie par l'équation $u=1$. Pour toute valeur c telle pue $0<|c-a^2|<\rho^2$, la surface première de φ avec la valeur c rencontre Γ en deux points $(1, \pm\sqrt{c-a^2})$ qui correspondent à deux points qui se trouvent sur les deux branches différentes de R_c au-dessus du point $u=1$. Dans le cas où $c=a^2$, le point de R_c au-dessus du point $u=1$ est un point critique. Désignons, ensuite, par $\mathfrak{C}$ l'ensemble de tous les points dans Γ, de coordonnées $(1, p)$, tels qu'on puisse joindre deux points $(1, p)$ et $(1, -p)$ par un chemin qui se trouve sur une surface première de φ passant par ces deux points-ci et qui est compris entièrement dans D. On regarde un point $(1, 0)$ comme point de $\mathfrak{C}$. Alors il est évident que $\mathfrak{C}$ est ouvert et non vide, et qu'il existe au moins un point n'appartenant pas à la fermeture $\overline{\mathfrak{C}}$ de $\mathfrak{C}$ dans l'intérieur de Γ par exemple $(1, \pm i\cdot a)$ i étant l'unité imaginaire. Donc il existe au moins un point frontière de $\overline{\mathfrak{C}}$ dans l'intérieur de Γ. Soit $(1, \xi)$ un tel point. Désignons par S_0 et par S'_0 deux parties, situées dans D, d'une surface première de φ qui passent par deux points $(1, \xi)$ et $(1, -\xi)$ respectivement. Elles ne sont pas connexes dans D. Prenons deux suites de points $\{(1, \xi_j^1)\}$ et $\{(1, \xi_j^2)\}$ tendant vers $(1, \xi)$ à la fois telles que $(1, \xi_j^1)\in\mathfrak{C}$ et $(1, \xi_j^2)\notin\overline{\mathfrak{C}}$ $(j=1, 2, \cdots)$, et désignons par S_j^ν $(\nu=1, 2;\ j=1, 2, \cdots)$ la partie, située dans D et passant par $(1, \xi_j^\nu)$, de l'une des surfaces premières de φ. Alors je dis que deux limites des suites $\{S_j^1\}$ et $\{S_j^2\}$ ne sont jamais identiques. En effet, soient Γ_0 et Γ'_0 deux cercles sur la droite analytique $u=1$ données par $|v-\xi|<\varepsilon$ et par $|v+\xi|<\varepsilon$, où ε est un nombre réel positif tel que $\varepsilon<|\xi|$. Alors, toutes les surfaces S_j^ν $(\nu=1, 2;\ j=1, 2, \cdots)$ passent par un point de Γ_0, dès que j surpasse un nombre entier assez grand. Supposons donc que toute d'elles passe par un point de Γ_0, dès d'abord. D'après la définition de $\mathfrak{C}$, toute S_j^1 passe aussi par un point de Γ'_0, par suite, la suite $\{S_j^1\}$ tend vers S_0 et vers S'_0 à la fois. Au contraire, S_j^2 ne passe aucun point de Γ_0, par suite, d'après le lemme 1, la limite de la suite $\{S_j^2\}$ ne contient pas S'_0.

Maintenant, considérons une fonction entière de deux variables complexes x et y de la forme

$$F(x, y) = [g(x, y)]^2 + a^2 [f(x, y)]^2.$$

Évidemment une surface première de F correspond exactement à l'une des composantes irréductibles dans D des surfaces premières de φ restreintes à D. Désignons par T_0 et par T_0' les surfaces premières de F correspondant à S_0 et à S_0' respectivement. Alors, on peut dire que T_0' est certainement une surface conjuguée de type (β) à T_0. En effet, désignons par T_j^ν $(\nu=1, 2;\ j=1, 2, \cdots)$ une surface première de F qui correspond à S_j^ν. La suite $\{T_j^1\}$ tend vers T_0 et vers T_0' à la fois, mais, il n'en est pas ainsi pour la suite $\{T_j^2\}$.

On en conclut qu'

Il existe certainement une fonction entière qui admet des surfaces premières irrégulières de type (B).

Kyoto University