J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)
13-3 (1973) 417-433

Sur une uniformité des surfaces constantes d'une fonction entière de deux variables complexes

Par

Hiroshi YAMAGUCHI

(Communiqué par Professeur Kusunoki, le 16 Septembre, 1972)*

Introduction. Il y a beaucoup de recherches sur les fonctions entières d'une variable complexe. Parmi elles la théorie de Nevanlinna est un des résultats les plus importants. Par exemple, Kneser et Stoll [1] ont montré q'une partie de sa théorie peut s'étendre au cas de plusieurs variables complexes. Or, récemment Nishino, dans ses mémoires successifs [2], a obtenu des résultats remarquables qui sont caractéristiques aux fonctions entières de plusieurs variables complexes et qui sont d'ailleurs invariants pour tout automorphisme de tout l'espace. Soit $f(x,y)$ une fonction entière de deux variables complexes, et soit z une valeur complexe. Une composante irréductible de la surface analytique dans l'espace (x,y), définie par l'équation $f(x,y)=z$, est dite une surface première de f avec sa valeur z. Elle se regarde comme une surface de Riemann ouverte d'une variable complexe. Nishino a montré dans ses mémoires (III) et (IV) les théorèmes suivants: (1) Soit E l'ensemble de z tel qu'il existe au moins une surface première de f, qui est simplement connexe et de type parabolique, avec sa valeur z [3]. Supposons de plus que la capacité logarithmique de E n'est pas nulle. Alors, pour tout z complexe, toute la surface première avec sa valeur z est simplement connexe et de type parabolique. (2) Supposons toute la surface première de f est de type parabolique. Soit E l'ensemble

* Révisé le 12 Janvier, 1973.

de z tel qu'il existe au moins une surface première de f, qui est équivalente à une surface de Riemann de genre g et ayant n composantes de frontière où $g<+\infty$ et $n<+\infty$, avec sa valeur z. Supposons de plus que la capacité logarithmique de E n'est pas nulle. Alors, pour tout z complexe sauf celles avec sa valeur appartenant à un ensemble fermé de la capacité logarithmique nulle, toute la surface première avec sa valeur z est l'est aussi.

Il me semble que ces résultats sont relatifs à l'uniformité par rapport à z des surfaces premières de f. Dans le présent mémoire, nous montrerons l'uniformité suivante: Supposons toutes les surfaces premières de f sont homéomorphes à des domaines sur le plan d'une variable complexe. Soit E l'ensemble de z tel qu'il existe au moins une surface première de f, de type parabolique, avec sa valeur z. Si l'on suppose que E est de capacité logarithmique non-nulle, alors, pour tout z complexe, toute la surface première avec sa valeur z est de type parabolique.

Pour la démonstration nous préparons un lemme suivant concernant l'ensemble pseudoconcave qui joue un rôle fondamental dans ce mémoire: Soit E un ensemble pseudoconcave dans un domaine dicylindrique $(|x|<\rho,\ |y|<\infty)$ tel que la projection E_c sur le plan y de la section de E par la droite analytique $x=c$ soit uniformément bornée pour $\{|c|<\rho\}$. Considérons la fonction

$$d_n(x)=\mathrm{Max}\sqrt[\binom{n}{2}]{\prod_{i<j}|y_i-y_j|} \qquad (n\geqq 2)$$

où $y_1, y_2, \dots, y_n$ sont n points quelconques dans E_x. Alors, pour tout n, $d_n(x)$ est une fonction logarithmiquement sousharmonique dans $\{|x|<\rho\}$. Par suite, le diamètre transfini de E_x l'est aussi.

Comme une application directe de ce lemme, nous donnerons une démonstration simple du théorème d'Oka[4]. De plus, nous donnerons une remarque sur la constante de Robin[3] dans la théorie de fonctions d'une variable complexe: Soit G un domaine quelconque du plan z. Nous désignons par $\lambda_G(t)$ la constante de Robin au point $z=t$. Alors $\lambda_G(t)$ est toujours une fonction surharmonique de t dans G.

Le présent mémoire se partage en quatre parties. Dans la première partie on démontre le lemme mentionné ci-dessus et donne un théorème pour un ensemble pseudoconcave. Dans les deuxième et troisième parties, on généralise ce lemme et ce théorème à une variété de Stein particulière. Ces faits seront nécessaires dans ce mémoire et ce qui suivra. Dans la dernière partie on donne une démonstration complète du théorème principal.

1. Ensemble pseudoconcave. Considérons, dans l'espace de deux variables complexes x et y, un domaine univalent $\mathfrak{D}$ et un ensemble E fermé dans $\mathfrak{D}$. Nous appelons E ensemble pseudoconcave pour $\mathfrak{D}$ si, pour toute hypersphère γ dans $\mathfrak{D}$, $\gamma-\gamma_{\cap}E$ est toujours un domaine d'holomorphie. Comme on sait bien, pour tel ensemble il y a quelques recherches interéssantes dues à Hartogs et à Oka[4]. J'ajouterai un autre théorème pour tel ensemble dans la suit.

En général, pour un ensemble quelconque S dans l'espace (x, y) et pour un point x_0 dans le plan x, l'ensemble (dans le plan y) de tous les points y tels que l'on ait $(x_0, y) \in S$ sera appelé section de S par la droite analytique $x=x_0$ et on la désignera par $S(x_0)$. Ceci peut être un ensemble vide, fini, dénombrable ou non-dénombrable.

Soit, en outre s un ensemble fermé de points sur le plan y. On suppose que s est borné en module. Posons

$$d_n(s)=\max \sqrt[\binom{n}{2}]{\prod_{i<j}|y_i-y_j|}$$

où n est un nombre entire $(\geqq 2)$ et y_ν $(\nu=1, \ldots, n)$ sont des points quelconques appartenant à s. On appellera, dans la suite, $d_n(s)$ diamètre d'ordre n de s. Comme on sait bien, la suite des nombres $d_n(s)$ $(n=2,3, \ldots)$ tend en décroissant vers une limite $d_\infty(s)$ lorsque n s'augmente indéfiniment. Ce n'est pas autre chose que le diamètre transfini de s introduit par Fékete[5]. Ceci se confond avec la capacité de s relativement au potentiel logarithmique dans le plan y.

Nous introduirons ensuite une notion suivante. Étant donné un ensemble pseudoconcave E pour un domaine $\mathfrak{D}$ sur l'espace (x, y), on dira que E jouit de la propriété $(\mathfrak{L})$ si, pour tout point p de E, il existe un voisinage U_p convenable de p et une surface analytique nonsingulière σ_p dans U_p qui passe par le point p et qui reste entièrement dans $E \cap U_p$. Comme on sait bien, tout ensemble pseudoconcave ne jouit pas nécessairement de la propriété $(\mathfrak{L})$. Mais, il y a un énoncé suivant. Soit E un ensemble pseudoconcave pour un domaine d'holomorphie $\mathfrak{D}$ dans l'espace (x, y). Désignons par $\mathfrak{G}$ le domaine donné de $\mathfrak{D}$ par l'exception de E. Il est, par définition, pseudoconvexe. Par suite, grâce à Oka[6], il y a une fonction plurisousharmonique φ dans $\mathfrak{G}$, qui jouit de la propriété (P_1) et de (α) au sens d'Oka. Désignons par $\mathfrak{G}_\alpha$ l'ensemble des points de $\mathfrak{G}$ donné par $\varphi < \alpha$, α étant un nombre reel quelconque, et posons $E_\alpha = \mathfrak{D} - \mathfrak{G}_\alpha$. Alors, par l'hypothèse, si l'on a $\alpha_1 < \alpha_2$, on a toujours $E_{\alpha_1} \supset E_{\alpha_2}$ et si α s'augmente indéfiniment, E_α tend vers E. Donc, on peut toujours trouver pour E une suite d'ensembles E_p $(p=1, 2, \ldots)$ pseudoconcaves jouissant de la propriété $(\mathfrak{L})$ dans $\mathfrak{D}$ tels que l'on ait $E_p \supset E_{p+1}$ et $\bigcap_{p=1}^{\infty} E_p = E$.

Maintenant, soit E un ensemble pseudoconcave pour un dicylindre (Δ, C) où Δ est un domaine quelconque sur le plan x et C signifie tout le plan y. Nous supposons ici que les sections $E(x)$ $(x \in \Delta)$ sont bornées en module uniformément dans tout comact dans Δ. Alors, on peut considérer le diamètre d'ordre n de $E(x)$ et le diamètre transfini de $E(x)$ comme des fonctions réelles dans Δ. On les désigne, pour simplifier l'écriture, par $d_n(x)$ et par $d_\infty(x)$. Prenons une suite d'ensembles pseudoconcaves E_p $(p=1, 2, \ldots)$ pour (Δ, C) comme ce qui précède. Alors, lorsqu'on prend un domaine quelconque Δ' dans l'intérieur complet de Δ et qu'on considère un domaine dicylindrique (Δ', C), les ensembles pseudoconcaves $E'_p = E_p \cap (\Delta', C)$ pour (Δ', C) ont les mêmes caractères que E pourvu que p surpasse un certain nombre entier p_0 dépendant de Δ'.

Nous allons montrer le

Lemme 1. (1) *Les fonctions* $d_n(x)$ $(n \geqq 2)$ *sont toujours logarithmiquement sousharmoniques dans* Δ. (2) *La fonction* $d_\infty(x)$ *l'est aussi.*

En effet, pour démontrer ce lemme, il suffit de montrer que le diamètre $d_n^{(p)}(x)$ d'ordre n de E'_p $(p\geqq p_0)$ est logarithmiquement sousharmonique dans $\varDelta'$ puisque la suite de fonctions $d_n^{(p)}(x)$ $(p=p_0, p_{0+1},\ldots)$ tend en décroissant vers $d_n(x)$ dans $\varDelta'$. Donc, on peut supposer, sans restreindre la généralité, que E jouit, dès le commencement, de la propriété $(\mathfrak{L})$.

D'abord, on peut voir facilement que log $d_n(x)$ est semi-continue supérieurement puisque E est un ensemble fermé dans le domaine dicylindrique $(\varDelta, C)$.

Ensuite, soit x_0 un point quelconque de $\varDelta$ et soit $\{y_1^0, y_2^0,\ldots, y_n^0\}$ un système de n points de la section $E(x_0)$ satisfaisant exactement à la relation

$$d_n(x_0)=\sqrt[\binom{n}{2}]{\prod_{i<j}|y_i^0-y_j^0|}.$$

On démontrera d'abord que chaque point $y_i^0(i=1,\cdots, n)$ se trouve sur la frontière de $E(x_0)$. Supposons, pour rèduire à absurde, qu'il n'est pas ainsi, c'est-à-dire, un des points $y_i^0(i=1,\cdots, n)$ se trouve dans l'intérieur complet de $E(x_0)$. Soit, pour fixer l'idèe, y_1^0 tel point et soit e la composante connexe de $E(x_0)$ qui contient y_1^0. Considérons ici la fonction non-négative sur le plan y définie par

$$s(y)=(\prod_{i=2}^{n}|y_j^0-y|)\times(\prod_{1<i<j}|y_i^0-y_j^0|).$$

Il est clair, par la définition de $d_n(x_0)$, que l'on a l'inégalité $d(x_0)^{\binom{n}{2}}\geqq s(y)$ pour tout y dans e. De plus, il y a un point y* sur la frontière de e tel que, pour tout point intérieur y de e, on a l'inégalité $s(y)<s(y^*)$, puisque la fonction $s(y)$ soit strictement sousharmonique dans tout le plan y. Ceci est absurde.

D'après l'hypothèse pour E, on peut donc tracer, pour chaque point (x_0, y_i^0) $(i=1,\cdots, n)$, un voisinage (γ, δ_i), de la forme γ: $|x-x_0|\leqq r$, δ_i: $|y-y_i^0|\leqq\rho_i$, dans $(\varDelta, C)$ et une surface analytique non-singulière σ_i dans (γ, δ_i) qui passe par (x_0, y_i^0) et qui reste dans $(\gamma, \delta_i)\cap E$. En ce moment, on peut supposer, sans restreindre la généralité, σ_i $(i=1,\ldots, n)$

sont représentées par la forme

$$y=\xi_i(x) \quad (i=1,\dots, n)$$

où $\xi_i(x)$ sont des fonctions holomorphes et uniformes dans γ, si nécessaire en diminuant r suffisamment petit. Considérons la fonction dans γ définie par

$$D_n(x)=\sqrt[\binom{n}{2}]{\prod_{i<j}|\xi_i(x)-\xi_j(x)|}$$

Elle est une fonction sousharmonique dans γ. Donc, il existe toujours un point x^* sur la frontière de γ tel que l'on ait $D_n(x^*) \geqq D_n(x_0)$. Or, les points $\xi_i(x^*)$ $(i=1,\dots, n)$ se trouvent dans la section $E(x^*)$. Il suit de là que $d_n(x^*) \geqq D_n(x^*) \geqq D_n(x_0)=d_n(x_0)$. Nous avons ainsi vu que la fonction $d_n(x)$ n'atteint jamais son maximum strict local à aucun point de l'intérieur de $\varDelta$.

En dernière lieu, soit γ un cercle fermé arbitraire à l'intérieur complet de $\varDelta$ et soit h une fonction harmonique arbitraire dans γ. Considérons la fonction dans γ définie par

$$\psi(x)=e^{h(x)+ih(x)^*}$$

où $h(x)^*$ est une fonction harmonique conjuguée de $h(x)$. $\psi(x)$ est holomorphe et non-nulle dans γ. Considérons la transformation $\mathfrak{T}$ biunivoquement pseudoconforme de (γ, C)

$$\mathfrak{T}: \begin{cases} x=x \\ y'=\psi(x)y. \end{cases}$$

Désignons par E' l'image de $E \cap (\gamma, C)$ par $\mathfrak{T}$. Il est évident que E' est un ensemble pseudoconcave pour (γ, C') où C' signifie le plan de y', qui a le même caractère de E. D'où on peut considérer le diamètre $d'_n(x)$ d'ordre n de $E'(x)$ comme une fonction réelle dans γ. De plus, on peut dire qu'il y a un point x^* sur la frontière de γ tel que l'on ait $d'_n(x^*) \geqq d'_n(x)$ pour tout point x dans γ. D'un autre coté, soient $y_1, y_2, \dots, y_n$ n points quelconques de $E(x)$ et soient $y'_1, y'_2, \dots, y_n'$ leurs images par $\mathfrak{T}$, c'est-à-dire, $y'_i=y_i\psi(x)$ $(i=1,\dots, n)$. Alors, on a l'égalité

$$\prod_{i<j} |y'_i - y_j'| = (\prod_{i<j} |y_i - y_j|) \, |\psi(x)|^{\binom{n}{2}}.$$

D'ou, on a $d'_n(x) = d_n(x) \, |\psi(x)|$ pour tout x dans γ. Par suite, $d_n(x^*) \, |\psi(x^*)| \geqq d_n(x) \, |\psi(x)|$, ou

$$log \; d_n(x^*) + h(x^*) \geqq log \; d_n(x) + h(x)$$

Autrement dit, log $d_n(x) + h(x)$ n'atteint jamais son maximum strict local à aucun point l'intérieur de γ. Il en résulte que log $d_n(x)$ est une fonction sousharmonique dans $\varDelta$. De plus, il s'ensuit que log $d_\infty(x)$ l'est aussi, parce que $d_2(x) \geqq d_3(x) \geqq \ldots\ldots$ et $\lim_{n\to\infty} d_n(x) = d_\infty(x)$. Donc, la proposition est complètement démontrée. C.Q.F.D.

Le lemme 1 donne une démonstration simple du théorème d'Oka[4] qui a généralisé un théorème bien connu de Hartogs. Voici ce théorème.

Théorème d'Oka. *Sous la même configuration du lemme* **1**, *si, pour tout point x appartenant à un ensemble de capacité logarithmique non-nulle dans le domaine $\varDelta$, l'ensemble $E(x)$ continent qu'un nombre fini (qui pouvent changer avec x) de points du plan y, il en est ainsi pour tout point du domaine $\varDelta$ de façon que la section $E(x)$ consiste des fonctions algebroides en nombre fini.*

En effet, il existe un entier positif n tel que la capacité de la sous-ensemble e_n de $\varDelta$:

$$e_n = \{x \in \varDelta : \; E(x) \text{ contient justement } n \text{ points distincts}\}$$

est positive et que celles des ensembles e_k $(0 \leqq k \leqq n-1)$ sont nulles. Considérons le diamètre $d_{n+1}(x)$ d'ordre $n+1$ de l'ensemble $E(x)$. D'après (1) du lemme 1, log $d_{n+1}(x)$ est une fonction sousharmonique dans $\varDelta$ et, de plus, elle prend la valeur $-\infty$ en tout point de e_n; par suite, log $d_{n+1}(x) \equiv -\infty$ dans tout $\varDelta$. On sait donc que $E(x)$ consiste en justement n points distincts $\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\}$ pour tout x dans $\varDelta$

sauf un ensemble σ convenable qui est fermé et de capacité nulle au plus. Posons

$$a_i(x)=(-1)^i \ \Sigma \ f_{k_1}(x)\dots f_{k_i}(x)$$

où $1\leqq k_1<\dots<k_i\leqq n$, $(i=1,2,\dots,n)$. Alors, $a_i(x)$ $(i=1,2,\dots,n)$ sont des fonctions holomorphes et uniformes dans $\Delta-\sigma$ et, de plus, pour tout compact Δ' dans Δ, elles sont bornées en module dans $\Delta'-\sigma$. Donc, $a_i(x)$ sont des fonctions holomorphes dans tout Δ. Il est évident que l'ensemble E coincide avec l'ensemble de points satisfaisant à l'équation suivante

$$y^n+a_1(x)y^{n-1}+\dots+a_n(x)=0 \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Du fait (2) du lemme 1 et d'après le même raisonnement ci-dessus, nous avons immédiatement le

Théorème 1. *Sous la même configuration du lemme 1, si, pour tout point x appartenant à un ensemble de capacité logarithmique non-nulle dans le domaine Δ, la capacité logarithmique de l'ensemble $E(x)$ est nulle dans le plan y, il en est ainsi pour tout point du domaine Δ.*

Un des problèmes principaux dans le present mémoire est de généraliser ce résultat au domaine multivalent étalé au-dessus un domaine dans l'espace de deux variables complexes.

Nous donnerons ici une remarque de la constante de Robin[3] d'un domaine du plan z d'une variable complexe comme un corollaire du lemme 1, mais ceci est indépendant des problèmes successifs. Soit G un domaine univalent du plan z. Soit t un point quelconque dans G. Considérons au point t la constante de Robin (par rapport à la coordonnée z même) du domaine G et la désignons par $\lambda_G(t)$. Elle est regardée comme une fonction de la paramétre t dans G. Nous allons montrer le

Corollaire. *$\lambda_G(t)$ est une fonction surharmonique dans G.*

En effet, considérons le domaine dicylindrique $G\times G$ dans l'espace de deux variables complexes z et u et la transformation

$$\mathfrak{T}: \begin{cases} x=z \\ y=\dfrac{1}{u-z} \end{cases}$$

de l'espace (z, u) à l'espace (x, y). Nous désignons par $\mathfrak{G}$ l'image du domaine $G\times G$ par $\mathfrak{T}$ et posons $E=(x\in G, |y|\leqq\infty)-\mathfrak{G}$. Il est évident que cet ensemble E est sous la configuration du lemme 1. Donc, le diamètre transfini $d_\infty(x)$ de la section $E(x)$ est une fonction logarithmiquement sousharmonique dans G. Or, d'après le théorème de Szegö[7], $-\log\, d_\infty(x)$ n'est pas autre chose que la constante de Robin $\lambda_G(x)$. Donc, le corollaire est démontré.

2. Domaines de type (S). Soit $\mathfrak{D}$ un domaine multivalent étalé au-dessus d'un dicylindre de la forme $(\varDelta, C)$, où $\varDelta$ est un domaine dans le plan z et C signifie tout le plan de u, dans l'espace de deux variables complexes z et u. Dans ce mémoire, un domaine multivalent peut en général avoir des points de ramification. Pour c dans $\varDelta$, désignons par $\mathfrak{D}(c)$ la sous-variété analytique de $\mathfrak{D}$ donnée par $z=c$. Ceci peut être regardée comme une surface de Riemann étalé au-dessus du plan u.

On suppose ici que $\mathfrak{D}$ satisfait aux conditions suivantes:

1° $\mathfrak{D}$ est une variété de Stein.

2° Pour tout c dans $\varDelta$, $\mathfrak{D}(c)$ est connexe et „*schlichtartig*", c'est-à-dire, $\mathfrak{D}(c)$ est homéomorphe à un domaine univalent du plan d'une variable complexe.

3° Pour tout c dans $\varDelta$, $\mathfrak{D}(c)$ n'a aucun point singulier comme une surface analytique dans $\mathfrak{D}$.

4° Il y a au moins un feuillet de $\mathfrak{D}$ qui contient une partie univalente justement étalée au-dessus d'un voisinage de la droite analytique $u=0$ dans $(\varDelta, C)$.

On l'appelle, dans ce mémoire, un domaine de type (S). On désigne par O l'ensemble de tous les points dans la partie exprimée en 4°, qui se trouvent au-dessus de la droite analytique $u=0$. Nous désignons par O_c le seul point commun de O et de $\mathfrak{D}(c)$.

Nous allons ici introduire une fonction $\lambda(z)$ dans Δ comme ce qui suit. Soit φ une fonction plurisousharmonique jouissant de la propriété (P_1) et de (α) dans $\mathfrak{D}$ et désignons par $\mathfrak{D}_\alpha$ la partie de $\mathfrak{D}$ donnée par $\varphi<\alpha$. Prenons ensuite un domaine quelconque Δ' dans l'intérieur complet de Δ. Alors, tout O_c $(c\in\Delta')$ est contenu dans $O\cap\mathfrak{D}_\alpha(c)$ pourvu que α surpasse un certaine nombre α_0. Cela posé, on peut construire pour chaque c dans Δ' la fonction de Green sur $\mathfrak{D}_\alpha(c)$ (plus exactement, sur la composante connexe de $\mathfrak{D}_\alpha(c)$ qui contient O_c), que l'on désigne par $g_\alpha(p, c)$, telle que, au voisinage de O_c dans $\mathfrak{D}_\alpha(c)$

$$g_\alpha(u, c)=\log\frac{1}{|u|}+\lambda_\alpha(c)+h_\alpha(u, c)$$

où $h_\alpha(u, c)$ est une fonction harmonique dans un voisinage du $u=0$ sur le plan u et $h_\alpha(0, c)=0$. $\lambda_\alpha(c)$, la constante de Robin de $\mathfrak{D}_\alpha(c)$ par rapport à u, est une fonction réelle dans Δ'. De plus, lorsqu'on fait tendre α vers l'infini, elle tend en croissant vers une limite $\lambda(c)$ qui peut être infinie. On peut regarder $\lambda(c)$ comme une fonction dans Δ puisque Δ' est arbitraire. Ceci est la constante de Robin, par rapport à u, de $\mathfrak{D}(c)$. Maintenant on aura le

Lemme 2. *La fonction $\lambda(z)$ est surharmonique dans Δ.*

En effet, il suffit pour cela de dire que, pour chaque α $(\geqq\alpha_0)$, la fonction $\lambda_\alpha(z)$ est surharmonique dans Δ'. Soit c un point quelconque de Δ'. Par l'hypothèse 2° à $\mathfrak{D}$, on peut faire correspondre biunivoquement $\mathfrak{D}(c)$ à un domaine d'une variable complexe par une fonction holomorphe $\psi_1(p)$. Ensuite formons une fonction $\psi(p)$ dans $\mathfrak{D}$ telle que l'on ait $\psi(p)=\psi_1(p)$ sur la sous-variété $\mathfrak{D}(c)$. Grâce à Oka[8], ceci est toujours possible de façon habituelle, puisque d'après l'hypothèse, $\mathfrak{D}$ est une variété de Stein et que $\mathfrak{D}(c)$ n'a aucun point singulier. Cela posé, par le même raisonnement que de Nishino [9], on sait qu'il existe un voisinage U de $\mathfrak{D}(c)$ dans $\mathfrak{D}$ tel que l'on puisse regarder z et

$v=\psi(p)$ comme un système de coordonnées locales dans U.

Soit $\alpha(z)$ et $\beta(z)$ les traces de $\psi(p)$ et de $\partial\psi/\partial u$ sur $\mathrm{O}\cap U$. Elles sont certainement holomorphes au voisinage de c. On peut alors tracer autour de c un cercle γ: $|z-c|<r$ suffisamment petit tel que l'on ait $\gamma\Subset\Delta'$ et $\mathfrak{D}_\alpha\cap(\gamma,|u|<\infty)\Subset U$. Ensuite considérons la transformation de la forme

$$\begin{cases} z=z \\ w=\dfrac{\beta(z)}{v-\alpha(z)} \end{cases}$$

et désignons par $\mathfrak{D}_\alpha^*$ l'image de $\mathfrak{D}_\alpha\cap(\gamma,|u|<\infty)$. $\mathfrak{D}_\alpha^*$ est donc un domaine univalent dans $(\gamma,|w|\leqq\infty)$. Pour tout z dans γ, $\mathfrak{D}_\alpha(z)$ est analytiquement équivalente à la section $\mathfrak{D}_\alpha^*(z)$ comme une surface de Riemann d'une variable complexe. Dans ce cas un voisinage de O_z: $u=0$ sur $\mathfrak{D}_\alpha(z)$ correspond à un voisinage de $w=\infty$ sur $\mathfrak{D}_\alpha^*(z)$ de manière que

$$(a) \qquad w=\frac{1}{u}+a_0(z)+a_1(z)u+a_2(z)u^2+\dots$$

Considérons le complémentaire, désigné par E_α, de $\mathfrak{D}_\alpha^*$ dans $(\gamma,|w|\leqq\infty)$. Il est évident que E_α est un ensemble pseudoconcave pour $(\gamma,|w|<\infty)$ qui jouit de la condition du lemme 1. Il s'ensuit que le diamètre transfini $d_\infty^{(\alpha)}(z)$ de la section $E_\alpha(z)$ est logarithmiquement sousharmonique dans γ. D'après la condition (a), grâce à Szegö, la constante de Robin $\lambda_\alpha(z)$ (pour la coordonnée u) de $\mathfrak{D}_\alpha(z)$ est égale à $-\log d_\infty^{(\alpha)}(z)$. On a ainsi conclu que $\lambda_\alpha(z)$ est une fonction surharmonique dans γ. Puisque c est un point quelconque de Δ,' $\lambda_\alpha(z)$ est une fonction surharmonique dans tout Δ'. C.Q.F.D.

Comme une conséquence immédiate du lemme 2, nous avons le

Théorème 2. *Soit $\mathfrak{D}$ un domaine de type (S). Si, pour tout point z appartenant à un ensemble de capacité logarithmique non-nulle dans le domaine Δ, la sous-variété $\mathfrak{D}(z)$ est de type parabolique, c'est-à-dire, $\lambda(z)=+\infty$, il en est ainsi pour tout point du domaine Δ.*

3. Domaines de type (G). Soit $\mathfrak{D}$ un domaine multivalent étalé au-dessus d'un dicylindre de la forme $(\varDelta, C)$ comme dans la section 2. On suppose ici que $\mathfrak{D}$ satisfait aux conditions 1°, 3°, 4° pour d'être de type (S) et au lieu de 2° la condition suivante:

2′ Pour tout c dans $\varDelta$, $\mathfrak{D}(c)$ est connexe et homéomorphe à une surface de Riemann d'une variable complexe de genre fini g indépendant de c.

On l'appelle un domaine de type (G). Nous allons voir que l'on peut avoir un théorème pareil pour un tel domaine. Soit c un point quelconque de $\varDelta$. Traçons deux courbes de Jordan (analytiques au sens réel) fermées $\tau_c^{(1)}$ et $\tau_c^{(2)}$ sur la section $\mathfrak{D}(c)$ comme ce qui suit.

1) $\tau_c^{(i)}$ $(i=1,2)$ sont les frontières de sous-domaines T_i $(i=1,2)$ de $\mathfrak{D}(c)$ respectivement, où chaque T_i est une surface de Riemann ouverte de genre g ayant une seule composante de frontière $\tau_c^{(i)}$ et ne contenant pas le point O_c et, de plus, on a $T_1 \Subset T_2$.

2) Chaque courbe $\tau_c^{(i)}(i=1,2)$ et la partie $T_1 - T_2$ ne contiennent aucun point critique algébrique de $\mathfrak{D}(c)$ et $T_1 - T_2$ est analytiquement équivalente à un domaine annulaire sur le plan de w.

On peut supposer que ce domaine annulaire est donné par $\eta < |w| < 1$, où η est un nombre positif convenable. Désignons le par R et par $\mathfrak{T}$ la transformation analytique et biunivoque de $T_1 - T_2$ à R, où $\mathfrak{T}(\tau_c^{(1)}) = \{|w|=1\}$ et $\mathfrak{T}(\tau_c^{(2)}) = \{|w|=\eta\}$. D'après l'hypothèse, on peut trouver pour chaque point p de $\overline{T_1 - T_2}$, un voisinage univalent U_p sur $\mathfrak{D}$ de la forme $|z-c| < r$ et $|u-a| < r_p$ où (c, a) sont les coordonnées de p et r, r_p sont des nombres réels positifs convenables, de plus, r ne dépend pas de p. Posons $\Omega = \bigcup_p U_p(p \in \overline{T_1 - T_2})$ et désignons par ζ la transformation analytique de Ω dans $\mathfrak{D}(c)$ qui fait correspondre (z, u) $(\in U_p)$ à (c, u) $(\in \mathfrak{D}(c))$. Soit γ un cercle $|z-c| < r$ et soit $\mathfrak{D}_\gamma$ une partie de $\mathfrak{D}$ consiste en tous les points de $\mathfrak{D}$ qui se trouvent au-dessus de (γ, C). Alors, en posant $\zeta^{-1}(\tau_c^{(i)}) = \tau^{(i)}$ $(i=1, 2)$, $\mathfrak{D}_\gamma$ se partage en deux parties par $\tau^{(2)}$. Désignons par $\mathfrak{D}_\gamma'$ la partie qui ne contient pas T_2. Maintenant, considérons un domaine dicylindrique $\mathfrak{G}$ de la forme $\gamma \times \{0 < |w| < \eta\}$ et attachons $\mathfrak{D}_\gamma'$ et $\mathfrak{G}$ en identifiant le point p de Ω ayant (z, u) comme ses coordonnées dans U_p et $(z, \mathfrak{T}(\zeta(p)))$ de $\mathfrak{G}$. Nous avons ainsi à nouveau une variété analytique que l'on désigne par $\mathfrak{D}_\gamma^*$. On peut facilement construire la section $\mathfrak{D}_\gamma^*(z)$ pour $z \in \gamma$ et, de plus, elle est évidemment schlichtartig. Je dis ici que

$\mathfrak{D}_\gamma^*$ *est une variété de Stein de dimension 2.*

En effet, grâce au théorème de Nishino[10] il suffiit pour cela de voir que $\mathfrak{D}_\gamma^*$ admet une fonction $\Phi(p)$ plurisousharmonique jouissant de la propriété (P_1) et de (α) au sens d'Oka. Nous allons construire une telle fonction. Puisque le domaine originaire $\mathfrak{D}$ est une variété de Stein, il est évident que $\mathfrak{D}$ admet une fonction $\Phi_1(p)$ plurisousharmonique jouissant des propriétés ci-dessus. On peut supposer que l'on ait $\Phi_1(p) \geqq 0$ dans $\mathfrak{D}$.

Posons

$$m_{\tau_1} = \min_{p \in (\gamma, \tau_1)} \Phi_1(p)$$

$$M_{\tau_2} = \max_{p \in (\gamma, \tau_2)} \Phi_1(p).$$

Elles sont certainement finies. Ensuite considérons la fonction $h(w)$ strictement sousharmonique d'une variable complexe w dans $0 < |w| \leqq 1$:

$$h(w) = |w|^2 + M \log \frac{1+\eta}{2|w|}$$

où M est un nombre réel positif suffisamment grand pour que

$$\begin{aligned} h(w) &< m_{\tau_1} && \text{sur } |w| = 1 \\ &> M_{\tau_2} && \text{sur } |w| = \eta. \end{aligned}$$

Formons la fonction $\Phi_2(p)$ dans $\mathfrak{D}_\gamma^*$ de la manière que

$$\begin{aligned} \Phi_2(p) &= \Phi_1(p) && \text{dans } \mathfrak{D}_\gamma^* - (\gamma, 0 < |w| \leqq 1) \\ &= \max(\Phi_1(p), h(p)) && \text{dans } \mathfrak{D}_\gamma^* \cap (\gamma, \eta \leqq |w| \leqq 1) \\ &= h(p) && \text{dans } (\gamma, 0 < |w| \leqq \eta) \end{aligned}$$

et posons, dans $\mathfrak{D}_\gamma^*$.

$$\Phi(p) = \Phi_2(p) - \log(r - |z - c|)$$

où z désigne la projection sur le plan z du point p. Il est évident que la fonction $\Phi(p)$ ainsi obtenue est plurisousharmonique et jouit des propriétés demandées. Par suite, $\mathfrak{D}_\gamma{}^*$ est une variété de Stein.

Le domaine $\mathfrak{D}_\gamma{}^*$ satisfait donc aux condtions $1°, 2°, 3°$ et $4°$ des domaines de type (S), tandis que $\mathfrak{D}_\gamma{}^*$ n'est pas étalé au-dessus d'un dicylindre de la forme (γ, C) comme le domaine orginaire $\mathfrak{D}$. Mais nôtre raisonnement dans la démonstration du lemme 2 est applicable à cette variété $\mathfrak{D}_\gamma{}^*$. Il s'ensuit que, pour tout z dans γ, la constante de Robin $\lambda^*(z)$ de $\mathfrak{D}_\gamma{}^*(z)$ est une fonction surharmonique. D'ou nous allons montrer le

Théorème 3. *Soit $\mathfrak{D}$ un domaine de type (G). Si, pour tout z appartenant à un ensemble de capacité non-nulle dans Δ, la surface de Riemann $\mathfrak{D}(z)$ est de type parabolique, il en est ainsi pour tout point z dans Δ.*

En effet, désignons par e l'ensemble de capacité non-nulle comme ci-dessus. Alors, il existe au moins un point c dans e tel que, pour un voisinage δ de c quelque petit qu'il soit, l'intersection $e \cap \delta$ est de capacité non-nulle. En appliquant l'argument précédent à la surface $\mathfrak{D}(c)$ nous pouvons construire un domaine modifié $\mathfrak{D}_\gamma{}^*$ comme ce qui précède. Alors, on a $\lambda^*(z) \equiv +\infty$ dans tout γ, parce que $\lambda^*(z) = +\infty$ pour tout z dans $e \cap \delta$. Cela signifie certainement que $\mathfrak{D}(z)$ est de type parabolique pour tout z dans γ. En répétant le même raisonnement à tout point de la frontière de γ, nous avons ainsi conclus que, pour tout z dans Δ, $\mathfrak{D}(z)$ est de type parabolique. C.Q.F.D.

4. Théorème principal. Dans la section présente nous donnerons une propriété des surfaces constantes d'une fonction entière de deux variables complexes x et y. Une composante irréductible de la surface analytique dans tout l'espace (x, y), définie par l'équation

$$f(x, y) - a = 0$$

où f est une fonction entière une fois fixée pour tout et a est un nombre complexe quelconque, sera appelée, avec Nishino, surface première de f avec sa valeur a. Soit donnée une surface première quelconque S_0 de f avec sa valeur a_0. Soit L une droite analytique qui passe transversalement à S_0 par un point ordinaire p_0 de S_0. Supposons ici que L est donnée par $x=0$. Ceci ne restreit pas la généralité. Considérons une partie Γ autour de p_0 sur L donnée par l'inégalité $|f-a_0| < \rho$, où ρ est un nombre réel positif. On dira que Γ satisfait à la condition (N) si Γ est comprise dans l'intérieur d'un voisinage de p_0, si L est transversale à toute la surface première qui passe par un point de Γ et si toute surface première passant par Γ est d'ordre un à l'exception de S_0 au plus. Elles sont toujours remplies certainement, pourvu que l'on prend ρ suffisamment petit. Ensuite considérons l'ensemble de tous les points dans l'espace (x, y) qui peuvent être joignés au point de Γ par une surface première S de f et qui sont des points non-singuliers de S. On l'appelle, avec Nishino[11], tube normal autour de S_0 par rapport à Γ et on le désigne par Σ_Γ.

Ici, supposons dans la suite toutes les surfaces premières de f sont schlichtartig regardées comme des surfaces de Riemann ouvertes. En ce moment, d'après le théorème de Nishino, un point singulier quelconque d'une surface première S de f est toujours un point commun de S et d'autre surface première de f[12].

D'abord, considérons une surface première S_0 de f avec sa valeur a_0 qui est d'ordre un. Alors, le domaine d'holomorphie de la fonction obtenue par la résolution de l'équation dans $(x, y) \in \Sigma_\Gamma$: $f(x, y)-z=0$ par rapport à y au-dessus de (Γ^*, C) est un domaine multivalent $\mathfrak{R}$ étalé au-dessus du dicylindre (Γ^*, C) où Γ^*: $|z-a| < \rho$ et C: $|x| < \infty$. En tant que variété, $\mathfrak{R}$ est analytiquement équivalente à Σ_Γ. On peut dire que le domaine $\mathfrak{R}$ est de type (S).

En effet, 1° si (x, y) est un point quelconque de la frontière de Σ_Γ, il existe une surface première de f qui passe par (x, y) et qui est contenue dans le complèmentaire de Σ_Γ. Donc, Σ_Γ est pseudoconvexe. Grâce à Oka, il est une variété de Stein. 2° pour tout z dans Γ^*, la section

$\mathfrak{R}(z)$ de $\mathfrak{R}$ par la droite analytique $z=z$ est identique à S'_z qui est S_z sauf des points communs de S_z et des autres surfaces premières de f et, donc, $\mathfrak{R}(z)$ est connexe. D'après l'hypothèse à f, elle est schlichtartig. 3° pour tout z dans Γ^*, S'_z n'a aucun point singulier. 4° pour tout z dans Γ^*, on obtient, par la résolution de l'équation $f(x, y)-z=0$ par rapport à y, une fonction de x holomorphe dans un cercle autour du point commun de L et de S'_z car $\sum_\Gamma$ est normal.

En vertu du lemme 2, la fonction $\lambda(z)$ dèfinie pour $\mathfrak{R}$ comme on a fait dans la section 2 est donc une fonction surharmonique dans Γ^*. D'un autre coté, il est évident que $\mathfrak{R}(z)$ et S_z sont simultanément de type parabolique ou non puisque S'_z est donné de S_z par l'exception d'une infinite dénombrable au plus de points. Par suite, si, pour tout z appartenant à un ensemble de capacitè non-nulle dans Γ^*, la surface première S_z de f avec sa valeur z est de type parabolique, il en est ainsi pour tout z du domaine Γ^*.

Il s'agit maintenant de surface première S_0 de f d'ordre $n\,(\geqq 2)$. Considérons un tube normal $\sum_\Gamma$ autour de S_0 et conservons les notations dans ce qui précède. Soit $\mathfrak{D}$ une surface de Riemann de la fonction $(f(x, y)-a_0)^{1/n}$. Alors, lorsqu'on prend un voisinage U de Γ dans $\sum_\Gamma$ il y a au moins une partie univalente de $\mathfrak{D}$ qui se trouve justement au-dessus U. Désignons par $\tilde{U}$ une de celles et désignons par $\tilde{\Gamma}$ l'ensemble de tous les points de $\tilde{U}$ qui se trouvent au-dessus de Γ. En ce moment, l'ensemble de tous les points qui se trouvent au-dessus d'une surface première S'_z de f dans $\sum_\Gamma$ forme un nombre fini de surfaces analytiques irréductibles dans $\mathfrak{D}$. En suite, considérons une partie de $\mathfrak{D}$ consiste de tous les points qui situent au-dessus d'un point de $\sum_\Gamma$ et qui sont joignés à un point de $\tilde{\Gamma}$ par une des surfaces analytiques irréductibles comme ci-dessus. Désignons la par $\mathfrak{R}$. Alors, d'aprés la même considérations, $\mathfrak{R}$ peut être regaredée comme un domaine de type (S). Par suite, il est évident de voir que, si, pour tout z appartenant à un ensemble de capacité non-nulle dans Γ^*, il y ait au moins une surface première avec sa valeur z de f dans $\sum_\Gamma$ qui est de type parabolique, alors, toute surface dans $\sum_\Gamma$ est de type parabolique.

Donc, en répétant tour à tour le même argument dans la page 448, nous sommes arrivés au

Théorème 4. *Supposons $f(x, y)$ est une fonction entière de deux variables complexes x et y telle que toutes les surfaces premières de f sont schlichtartig. Si, pour tout z appartenant à un ensemble de capacité non-nulle dans le plan z, au moins une surface première dans $f(x, y)=z$ est de type parabolique, alors, toute surface première de f est de type parabolique.*

FACULTY OF EDUCATION
SHIGA UNIVERSITY

References

[1] W. Stoll, Die beiden Hauptsätze der Wertverteilungstheorie bei Funktionen mehrerer Veränderlichen (I), (II), Acta Math. **90**, 1–115 (1953) et **92**, 55–169 (1954).
[2] T. Nishino, Nouvelles recherches sur les fonctions entières de plusieurs variables complexes (I), (II), (III), (IV), J. of Math. of Kyoto Univ. **8-1**, 49–100 (1968), **9-2**, 221–274 (1969), **10-2**, 245–271 (1970) et à paraître dans le même journal.
[3] Voir, par exemple, L. V. Ahlfors et L. Sario, Riemann surfaces, Princeton Univ. Press (1960).
[4] K. Oka, Note sur les familles de fonctions analytiques multiforme etc., J. of Sci. of the Hiroshima Univ. *A*-**4**, 93–98 (1934); Voir, de plus, T. Nishino, Sur les ensembles pseudoconcaves, J. of Math. of Kyoto Univ. **1-2**, 225–245 (1962).
[5] M. Fékete, Uber die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten, Math. Zeitsch. **17**, 228–249 (1923).
[6] K. Oka, Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, Iwanami Shoten, Tokyo, Japan (1961), p. 199.
[7] G. Szegö, Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn M. Fékete, Math. Zeitschr. **21**, 203–208 (1924).
[8] loc. cit., p. 230.
[9] loc. cit. (II), p. 225.
[10] T. Nishino, Sur les espaces analytiques holomorphiquement complets, J. of Math. of Kyoto Univ. **1-2**, 247–254 (1962).
[11] loc. cit., (I), p. 72.
[12] Voir Nishino (II), pp. 264–269. Il considère le cas toutes les surfaces premières de f sont simplement connexes. Mais on peut démnstrer ce fait par son raisonnemnet.