J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)
14-2 (1974) 195-213

Аналог теоремы Пэли-Винера для группы линейных преобразований прямой линии

Сёич Андо

посвящается памяти А. Кохари

Введение

Аналог теоремы Пэлй-Винера один важный предмет в теории представлений групп, и связан со следующими задачами: построить запас достаточно многих неунитарных представлений путем аналитического продолжения от "стандартных,, унитарных представлений, установить соотношения между ними, например, соотношения эквивалентности и т.д.

В случае комплексных полупростых групп Ли, эта задача уже изучена и решена Д.П. Желобенком в серии работ [9], [10] и [11].

Кроме того, в случае вещественных полупростых групп, лишь находятся работы Эренпрейса-Маутнера [6], [7] и А.И. Штерна [15].

С другой стороны, что касается разрешимых групп, мало изучается, а для группы движений эвклидова пространства, эта задача исследована в недавней стаье [12].

В этой статье, рассматривается разрешимая группа G линейных преобразований прямой линии, так называемая группа $ax+b$ и устанавливается аналог теоремы Пэли-Винера. Наш метод, может быть, применим к более широкому классу разрешимых групп. Для нашей группы, И.М. Гельфанд-М.А. Наймарк [2] перечислил все неприводимые унитарные представления, однако по своей форме эти представления нельзя продолжить аналитически до неунитарных представлений. Чтобы устранить эти недостатки, вводится не гильбертовое а счетно-гильбертовое пространство $\mathscr{C}$, и в этом пространстве можно провести аналитическое продожение представлений Гельфанда-Наймарка и получается серия неунитарных представления $\mathscr{D}_\lambda(\boldsymbol{C}\ni\lambda\neq 0)$. Они все операторно неприводимы (§1). Нам кажется, что этими исчерпываются все неприводимые (в некотором смысле) неунитарные представления.

На этой основе, мы исследуем преобразование Фурье бесконечно дифференцруемых функций с компактным носителем на группе $\boldsymbol{G}$. Как известно, для этой группы, образ преобразования Фурье является не оператором типа Гильберта-Шмидта а оператором карлемановского типа (§2). Характеристика образа пребразования Фурье как оператор карлемановского типа нам не удовлетворительна в связи с унитарными представлениями, но на этом здесь не останавливаемся.

Кстати выводится Формула Планшереля, которая уже получена для общих не-унимодулярных групп (Н. Тацуума [14]). Наша группа допускает вывести эту формулу простыми выкладками.

Основная теорема доказывается в §4, причем существенную роль играет "ядерное,, подпространство $\mathscr{C}_\infty$ (по этому поводу, см. Добавление). Полученная в §4 основная теорема формулируется следуя Д.П. Желобенко [10].

Автор пользуется случаем выразить благодарность профессору Т. Хираи за ряд бесед и ряд ценных советов, и также профессору А. Орихара, прочитавшему рукопись и сделавшему ряд полезных замечаний.

Обозначения

$\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{C}$—поля вещественных чисел и комплексных чисел
$\boldsymbol{R}_+$—мультипликативная группа положительных чисел
$\sqrt{-1}\boldsymbol{R}$—совокупность чисто мнимых чисел

Наша группа $\boldsymbol{G}$ отождествляется с группой всех матриц вида

$$(*) \qquad g=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ a\in\boldsymbol{R}_+,\ b\in\boldsymbol{R}.$$

В этой статье, буква g всегда обозначает общий элемент (*).
Группа $\boldsymbol{G}$ содержит две подгруппы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{N}$, имеющих вид

$$\boldsymbol{A}=\left\{\begin{pmatrix} a & \\ & 1 \end{pmatrix};\ a\in\boldsymbol{R}_+\right\},\quad N=\left\{n(b)=\begin{pmatrix} 1 & b \\ & 1 \end{pmatrix};\ b\in\boldsymbol{R}\right\}.$$

Пусть da и db обычная мера Лебега на $\boldsymbol{R}$ и положим

$$d\mu(a)=a^{-1}\,da,\quad dn(b)=db.$$

Тогда они инвариантные меры на группе $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{N}$, соответственно. Положим $dg=d\mu(a)dn(b)$. То dg является право-инвариантной мерой на группе $\boldsymbol{G}$. В алгебре Ли группы $\boldsymbol{G}$ берем в качестве базиса

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1 & \\ & 0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix} & 1\\ 0 & \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{X}_r$, $\boldsymbol{Y}_r$ ($\boldsymbol{X}_l$, $\boldsymbol{Y}_l$)—право (лево)-инвариантные дифференциальные операторы на группе $\boldsymbol{G}$, отвечающие к $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$, соответственно.

$\boldsymbol{D}_x=x\cdot\dfrac{d}{dx}$—дифференциальный оператор на группе $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{R}_+$.

$\boldsymbol{C}_0^\infty(\boldsymbol{G})$, $\boldsymbol{C}_0^\infty(\boldsymbol{R}_+)$—совокупность всех бесконечно дифференцируемых финитных функций на группе $\boldsymbol{G}$ и $\boldsymbol{R}_+$.

$[f]$—носитель функции f.

§1. Неунитарные представления

Как показано И. М. Гельфандом—М. А. Наймарком [2] (см. также [1] и [8]), любое неприводимое унитарное представление группы $\boldsymbol{G}$ является эквивалентным одному из следующих.

(I) Одномерные представления χ^λ: $\chi^\lambda(g)=a^\lambda$ ($\lambda\in\sqrt{-1}\cdot\boldsymbol{R}$),

(II) Бесконечномерные представления $\mathscr{D}_i^0$ и $\mathscr{D}_{-i}^0$ ($i=\sqrt{-1}$).

Для каждого $\lambda\in\sqrt{-1}\boldsymbol{R}$ представление $\mathscr{D}_\lambda^0$ осуществляется в пространстве $\mathfrak{H}_0=\boldsymbol{L}^2(\boldsymbol{R}_+,\ d\mu(x))$ формулой

$$(1)\qquad \boldsymbol{T}_g^\lambda\varphi(x)=e^{\lambda bx}\varphi(ax)\,.$$

В том случае, если $\lambda=0$, формула (1) задает регулярное представление группы $\boldsymbol{A}$ и как известно, разлагается в континуальной сумме одномерных представлений χ^λ. Оператор $\boldsymbol{T}_\gamma^\lambda$, где $\gamma=\begin{pmatrix}\gamma & \\ & 1\end{pmatrix}\gamma\in\boldsymbol{R}$, независим от $\lambda\in\boldsymbol{C}$ и можно положить $\boldsymbol{T}_\gamma=\boldsymbol{T}_\gamma^\lambda$. Тогда имеет место соотношение эквивалентности

$$(2)\qquad \boldsymbol{T}_\gamma\cdot\boldsymbol{T}_g^\lambda\cdot\boldsymbol{T}_\gamma^{-1}=\boldsymbol{T}_g^{\gamma\lambda}\qquad(\gamma\in\boldsymbol{R}_+)\,.$$

(Здесь $\gamma\lambda$—произведение двух чисел γ и λ).

Представление $\mathscr{D}_\lambda^0$ индуцировано от унитарного представления ν^λ подгруппы $\boldsymbol{N}$ такого, что $\nu^\lambda\ (n(b))=e^{\lambda b}$. Теперь потребуем построить представления "индуцированные,, от неунитарных характеров ν^λ подгруппы $\boldsymbol{N}$.

Для этой цели, введем пространство $\mathscr{C}$. Прежде всего, рассмотрим цепочку гильбертовых пространств $\mathfrak{H}(t)$ $(-\infty<t<+\infty)$, состоящих из таких функций φ, для которых сходится интеграл

$$\|\varphi\|_t=\left(\int_{R_+} e^{tx}|\varphi(x)|^2\, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{2}},$$

т.е. $\mathfrak{H}(t)=L^2(R_+,\ e^{tx}d\mu(x))$. Очевидно, что если $s<t$, то $\mathfrak{H}(s)\subset\mathfrak{H}(t)$. Положим $\mathscr{C}=\bigcap_{-\infty<t<\infty}\mathfrak{H}(t)$. Если снабдить множество $\mathscr{C}$ системой норм $\|\cdot\|_t$, пространство $\mathscr{C}$ становится счетно-гильбертовым. Как легко видеть, сопряженное с $\mathfrak{H}(t)$ пространство отождествляется с $\mathfrak{H}(-t)$ в том смысле, что всякий непрерывный линейный функционал F над $\mathfrak{H}(t)$ записывается единственным образом в виде

$$F(\varphi)=\int_{R_+} f(x)\cdot\varphi(x)\,d\mu(x),\ \varphi\in\mathfrak{H}(t), f\in\mathfrak{H}(-t)\,.$$

Следовательно, сопряженное с $\mathscr{C}$ пространство $\mathscr{C}'$ является $\bigcup_{-\infty<t<\infty}\mathfrak{H}(t)$. Заметим, что $C_0^\infty(R_+)$ всюду плотно в $\mathscr{C}$, и $\mathscr{C}'$ содержится в $L^1_{loc}(R_+,\ d\mu(x))$.

Предложение 1. *Формула* (1) *задает представление в пространстве* $\mathscr{C}$ для каждого $\lambda\in C$.

Доказательство. В самом деле, пространство $\mathscr{C}$ инвариантно относительно действий операторов T^λ_g. Более того, из определения норм, сразу следует

(3) $$\|T^\lambda_g\varphi\|_t=\|\varphi\|_{\tau^\lambda(t;g)},$$

где $$\tau^\lambda(t\,;\ g)=a^{-1}(t+2b\ Re\,\lambda).$$

Отсюда легко убедиться в том, что отображение $(g,\varphi)\mapsto T^\lambda_g\varphi$ от $G\times\mathscr{C}$ в $\mathscr{C}$ непрерывно, и наше утверждение доказано.

Таким образом, мы получили представление $\mathscr{D}_\lambda=(T^\lambda_g,\ \mathscr{C})$ для каждого $\lambda\in C$ и к тому же имеет место соотношение эквивалентности (2). Подчеркнем, что случай $\lambda=0$ не исключается.

Предложение 2. *Для пары* $\mathscr{D}_{\lambda_1}$ и $\mathscr{D}_{\lambda_2}$ $(\lambda_1,\ \lambda_2\neq0)$, *существует инвариантный билинейный функционал тогда и только тогда, когда* $\lambda_1^{-1}\cdot\lambda_2<0$. *Причем он задается с точностью до постоянного множителя, формлой*

$$B(\varphi, \psi)=\int_{\boldsymbol{R}_+} \varphi(c\cdot x)\psi(x)\, d\mu(x),$$

где положено $c=-\lambda_1^{-1}\cdot\lambda_2$.

Доказательство. Заметим, что билинейный функционал суженный на $\boldsymbol{C}_0^\infty(\boldsymbol{R}_+)$ также непрерывен. От инвариантности относительно действий подгруппы $\boldsymbol{A}$, следует, что

$$B(\varphi(ax), \psi(ax))=B(\varphi(x), \psi(x)),$$

для всех $a\in\boldsymbol{R}_+$ и φ, $\psi\in\boldsymbol{C}_0^\infty(\boldsymbol{R}_+)$. Другими словами, функционал B инвариантен относительно параллельных переносов $x\to ax$ ($a\in\boldsymbol{R}_+$). Согласно известной теореме о ядре Л. Шварца (см. [4], [41]), такой функционал имеет вид

$$B(\varphi, \psi)=\left\langle B_0(x), \int_{\boldsymbol{R}_+} \varphi(xy)\psi(y)\,d\mu(y)\right\rangle$$

$$=\int_{\boldsymbol{R}_+} \langle B_0(x), \varphi(xy)\rangle\psi(y)\,d\mu(y)$$

, где $B_0(x)$ некоторая обобщенная функция на $\boldsymbol{C}_0^\infty(\boldsymbol{R}_+)$. Рассчитывая инвариантность относительно действий подгруппы N, имеем

$$\int_{\boldsymbol{R}_+} \langle B_0(x), e^{\lambda_1 bxy}\varphi(xy)\rangle e^{\lambda_2 by}\psi(y)\,d\mu(y)$$

$$=\int_{\boldsymbol{R}_+} \langle B_0(x), \varphi(xy)\rangle\psi(y)\,d\mu(y)$$

для всех $b\in\boldsymbol{R}$ и φ, $\psi\in\boldsymbol{C}_0^\infty(\boldsymbol{R}_+)$. Отсюда вытекает

(4) $$\langle B_0(x), e^{\lambda_1 bxy}\varphi(xy)\rangle=e^{-\lambda_2 by}\langle B_0(x), \varphi(xy)\rangle$$

для всех $b\in\boldsymbol{R}$, $y\in\boldsymbol{R}_+$ и $\varphi\in\boldsymbol{C}_0^\infty(\boldsymbol{R}_+)$. Пусть $y=1$, дифференцируя обе части по b и далее полагая $b=0$, имеем

(5) $$\langle B_0(x), (x-c)\varphi(x)\rangle=0, \qquad \text{где } c=-\lambda_1^{-1}\lambda_2.$$

Если число c не принадлежит к $\boldsymbol{R}_+$, это эквивалентно тому, что $\langle B_0(x), \varphi(x)\rangle=0$ для всех $\varphi\in\boldsymbol{C}_0^\infty(\boldsymbol{R}_+)$. Именно $B_0(x)=0$. Если число c принадлежит к $\boldsymbol{R}_+$, легко проверить из условия (5), что $B_0(x)=\alpha_0\delta_c(x)$. Итак искомый функционал имеет вид

$$B(\varphi, \psi)=\alpha_0\int_{R_+} <\delta_c(x), \varphi(xy)>\psi(y)\,d\mu(y)$$

$$=\alpha_0\int_{R_+} \varphi(cy)\psi(y)\,d\mu(y)\,.$$

Очевидно, что этот функционал инвариантен относительно действий группы G и определен на всем пространстве $\mathscr{C}$.

Предложение 3. 1°. *Представление $\mathscr{D}_\lambda$ при $\lambda \neq 0$ все операторно неприводимо* (*см.* [5])

2°. *Два представления $\mathscr{D}_{\lambda_1}$ и $\mathscr{D}_{\lambda_2}(\lambda_1, \lambda_2 \neq 0)$, эквивалентно друг другу тогда и только тогда, когда $\lambda_1^{-1}\lambda_2>0$, и сплетающий оператор совпадает с оператором T_γ до постоянного множителя, где $\gamma=\lambda_1^{-1}\lambda_2$. Напомним, что имеет место соотношение* (2).

3°. *Представление $\mathscr{D}_\lambda$ можно расширить до унитарного представления тогда и только тогда, когда $\lambda \in \sqrt{-1}\cdot R$.*

4°. *Для пары представлений $\mathscr{D}_0$ и $\mathscr{D}_\lambda(\lambda \neq 0)$ нет не тривиального сплетающего оператора.*

Доказательство. Докажем лишь части 2° и 4°. Остальные утверждения можно проверить подобным образом.

Часть 2°. Пусть непрерывный в пространстве $\mathscr{C}$ оператор A переносит оператор $T_g^{\lambda_1}$ в $T_g^{\lambda_2}$, то есть

$$A\cdot T_g^{\lambda_1}=T_g^{\lambda_2}\cdot A \qquad \text{для всех } g\in C.$$

Тогда легко проверяется, что билинейный функционал определяемый формулой

$$B(\varphi, \psi)=(A\varphi, \psi)=\int_{R_+} (A\varphi)(x)\cdot\psi(x)\,d\mu(x)$$

инвариантен относительно $T_g^{\lambda_1}\times T_g^{-\lambda_2}(g\in G)$. В силу Предложения **2**, $\lambda_1^{-1}\lambda_2>0$. Обратное утверждение очевидно.

Часть 4°. Допустим, что $T_g^0\cdot A=A\cdot T_g^\lambda$ для всех $g\in G$. Сначала, заметим, что для каждого элемента ψ из $\mathscr{C}'$, существует единственный элемент ψ^* из $\mathscr{C}'$, что $<A\varphi, \psi>=<\varphi, \psi^*>$. Следовательно, полагая $g=n(b)$ получим

$$<A\varphi, \psi> = <AT_g^\lambda\varphi, \psi> = <T_g^\lambda\varphi, \psi^*>$$

$$= \int_{R_+} e^{\lambda bx}\cdot\varphi(x)\cdot\psi^*(x)\,d\mu(x)\,.$$

Если $Re\ \lambda\neq 0$, переходя к пределу при $b\to\infty$ или $b\to-\infty$, и если $Re\lambda=0$, по теореме Риманна-Лебега, можно вывести, что $<A\varphi, \psi>=0$ для всех $\psi\in\mathscr{C}'$. Итак сразу следует $A=0$.

В заключение, если $A\cdot T_g^0=T_g^\lambda\cdot A$ для всех $g\in G$, то очевидно наше утверждение.

Замечание к 3° Пред. 3

Если расширить представление $\mathscr{D}_\lambda$ ($\lambda\in\sqrt{-1}\cdot R$, $\lambda\neq 0$) до унитарного представления, полученное представление есть не что иное, как представление $\mathscr{D}_\lambda^0$.

§2. Преобразование Фурье (I)

Сопоставим к функции $f\in C_0^\infty(G)$ преобразование Фурье, т.е. оператор действующий в пространстве $\mathscr{C}$ и определяемый формулой

$$T_f^\lambda = \int_G f(g)T_g^\lambda dg\,. \tag{6}$$

Предложение 4. *Когда функция $f\in L^1=L^1(G, dg)$ и ее носитель $[f]$ компактен, интеграл* (6) *суммируем и имеет место*

$$\|T_f^\lambda\varphi\|_t \leqq \|f\|_{L^1}\cdot\|\varphi\|_{\tau^\lambda(t;[f])}\,, \tag{7}$$

где положено для каждого компакта Q на G

$$\tau^\lambda(t\,;Q) = \sup_{g\in Q}\cdot\tau^\lambda(t\,;\ g)\,.$$

Это неравенство непосредственное следствие из равенства (3).

Неравенство (7) показывает непрерывность отображения: $\varphi\mapsto T_f^\lambda\varphi$ от пространства $\mathfrak{H}(s)$, ($s=\tau^\lambda(t\,;[f])$) в пространстве $\mathfrak{H}(t)$ для каждого $t\in R$ и следовательно, оператор T_f^λ является непрерывным в пространстве $\mathscr{C}$. Это неравенство играет существенную роль в этой статье, в частности, в доказательстве основной теоремы в §**4**.

Оператор T_f^λ, если $f\in L^1(G, dg)$ и ее носитель $[f]$ компактен, является интегральным оператором с ядром $\kappa_f^\lambda(x, a)$ карлемановского типа

$$(8) \qquad T_f^\lambda \varphi(x) = \int_{R_+} \kappa_f^\lambda(x, a) \cdot \varphi(a)\, d\mu(a) ,$$

$$(8)' \qquad \kappa_f^\lambda(x, a) = \int_R f(ax^{-1}, b) e^{\lambda x b}\, db ,$$

где положено $f(g) = f(a, b)$.

Заметим, как отображение от пространства $\mathfrak{H}(s)$ $(s = \tau^\lambda(t\,; [f]))$ в пространстве $\mathfrak{H}(t)$, оператор T_f^λ не обязательно типом Гильберта-Шмидта и оказывается лишь карлемановском типом. Не используется этот факт. От отношения (2) вытекает

$$(9) \qquad \kappa_f^{\gamma\lambda}(x, a) = \kappa_f^\lambda(\gamma x, \gamma a) \qquad (\gamma > 0) .$$

Предложение 5 (**Формула Планшереля**). *Для* $f \in L^2 = L^2(G, dg)$, *имеет место равенство*

$$2\pi \| f \|_{L^2}^2 = \sum_{\pm} \| \sqrt{x} \cdot T_f^{\pm i} \|_{H-S}^2 = \| \sqrt{x} \cdot T_f^{+i} \|_{H-S}^2 + \| \sqrt{x} \cdot T_f^{-i} \|_{H-S}^2,$$

где $\|\cdot\|_{H-S}$ *означает норму Гильберта-Шмидта оператора, рассматриваемого только в пространстве* $\mathfrak{H}(0) = L^2(R_+, d\mu(x))$,

$\sqrt{x}\cdot$ *оператор умножения на* $\sqrt{x}$.

Доказательство. Функция $\kappa_f^{i\rho}(1, a)$ от $\rho \in R$ является преобразованием Фурье функции $f(a, b)$ по b, и в силу классической теоремы Планшереля получим для $f \in L^2 = L^2(G, dg)$

$$\int_R |\kappa_f^{i\rho}(1, a)|^2 d\rho = (2\pi) \int_R |f(a, b)|^2 db .$$

Интегрируя обе части по $d\mu(a)$

$$2\pi \| f \|_{L^2}^2 = \int_{R_+} d\mu(a) \int_R |\kappa_f^{i\rho}(1, a)|^2 d\rho$$

заменяя порядок интегрирования

$$(2\pi) \| f \|_{L^2}^2 = \sum_{\pm} \int_{R_+} d\rho \int_{R_+} |\kappa_f^{\pm i\rho}(1, a)|^2 d\mu(a)$$

далее, заменяя a на $a\rho^{-1}$, и рассчитывая равенство (9)

$$(2\pi)\|f\|_{L^2}^2=\sum_{\pm}\int_{R_+}\int_{R_+}|\sqrt{\rho}\,\kappa_f^{\pm i}(\rho, a)|^2\,d\mu(a)\,d\mu(\rho)\,.$$

Тем самым доказано наше утверждение.

Замечание. Н. Тацуума уже получил общим методом эту формулу для произвольных не-унимодулярных групп (см. [14]).

§3. Преобразование Фурье (II)

Введем пространство $\mathscr{C}_\infty$, состоящее из функций φ, все производные которых $\boldsymbol{D}_x^n\cdot\varphi(x)$ $(n=0, 1, 2\ldots)$ в обобщенном смысле, также принадлежат пространству $\mathscr{C}$. Естественно снабдить пространство $\mathscr{C}_\infty$ системой норм

$$\|\varphi\|_{t,p}=\|\boldsymbol{D}_x^p\varphi\|_t\,, \qquad (p=0, 1, 2\ldots, t\in\boldsymbol{R})\,.$$

С этой топологией пространство $\mathscr{C}_\infty$ есть полно.

Лемма 1. *Допустим, что* $f\in\boldsymbol{C}_0^\infty(\boldsymbol{G})$.
Тогда имеют место соотношения

1°. $(1+\boldsymbol{D}_x)^p\cdot\boldsymbol{T}_f^\lambda=\boldsymbol{T}^\lambda_{\mathbf{X}_r^p f}$

$(\lambda x)^p\cdot\boldsymbol{T}_f^\lambda\cdot(-\lambda x)^q=\boldsymbol{T}^\lambda_{\mathbf{Y}_r^p\mathbf{Y}_l^q f}$ *на пространстве* $\mathscr{C}$,

2°. $\boldsymbol{T}_f^\lambda\cdot(-\boldsymbol{D}_x)^q=\boldsymbol{T}^\lambda_{\mathbf{X}_l^q f}$ *на пространстве* $\mathscr{C}_\infty$,

$(p, q=0, 1, 2\ldots$ $)$.

Доказательство опущено. Соотношение 1° Леммы 1 показывает, что образ оператора $\boldsymbol{T}_f^\lambda$ целиком содержится в пространстве $\mathscr{C}_\infty$. Что касается его непрерывности, имеет место

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{T}_f^\lambda\cdot\varphi\|_{t,p}&=\|\boldsymbol{D}_x^p\boldsymbol{T}_f^\lambda\varphi\|_t\\ &\leqq\|(\boldsymbol{X}_r-1)^pf\|_{\boldsymbol{L}^1}\cdot\|\varphi\|_{\tau^\lambda(t;[f])}.\end{aligned}\tag{10}$$

Это непосредственно следует из равенства (7) и определения норм $\|\cdot\|_{t,p}$.

Теорема 1. *Предположим, что* $f\in\boldsymbol{C}_0^\infty(\boldsymbol{G})$. *Тогда оператор* $\boldsymbol{T}_f^\lambda$ *обладает следующими свойствами*:

1°. *Для произвольных полиномов* ∂_1 *и* ∂_2 *от* $\boldsymbol{D}_x$ *и* λx
(*пусть* $\partial_i=\boldsymbol{P}_i(\boldsymbol{D}_x, \lambda x)$, $i=1, 2$),

имеет место неравенство

$$\|\partial_1 \cdot \boldsymbol{T}_f^\lambda \cdot \partial_2 \cdot \varphi\|_t \leqq \|\tilde{\partial}_1 \tilde{\partial}_2 f\|_{L^1} \cdot \|\varphi\|_{\tau^\lambda(t;[f])} \qquad (t \in \boldsymbol{R},\ \varphi \in \mathscr{C}).$$

Здесь положено $\tilde{\partial}_1 = P_1(\boldsymbol{X}_r - 1,\ \boldsymbol{Y}_r),\ \tilde{\partial}_2 = P_2(-\boldsymbol{X}_l,\ -\boldsymbol{Y}_l)$.

2°. *Эквивалентность:* $\boldsymbol{T}_\gamma \boldsymbol{T}_f^\lambda \boldsymbol{T}_\gamma^{-1} = \boldsymbol{T}_f^{\gamma\lambda} \qquad (\gamma \in \boldsymbol{R}_+)$,

3°. *Слабая аналитичность: Для всех обобщенных функций* $F \in \mathscr{C}'_\infty$ *(сопряженное с* $\mathscr{C}_\infty$*) и для всех* $\varphi \in \mathscr{C}$, $<F, \boldsymbol{T}_f^\lambda \varphi>$ *есть целая аналитическая функция от комплексного переменного* $\lambda \in \boldsymbol{C}$ *(не исключая* $\lambda = 0$*). Особенно, для дельта-функции* δ_{x_0} *такой, что* $<\delta_{x_0}, \varphi> = \varphi(x_0)$, *имеем оценку*

$$(11) \qquad |<\delta_{x_0}, \boldsymbol{T}_f^\lambda \varphi>| \leqq Ce^{\beta |Re\lambda| x_0},$$

где C *не зависит от* λ.

Замечание к 1°. Соотношения в Лемме 1 показывают, что оператор $\boldsymbol{T}^\lambda_{\tilde{\partial}_1 \cdot \tilde{\partial}_1 \cdot f}$ является расширением оператора $\partial_1 \cdot \boldsymbol{T}_f^\lambda \cdot \partial_2$, иными словами, оператор $\partial_1 \cdot \boldsymbol{T}_f^\lambda \cdot \partial_2$ допускает расширение на все пространство $\mathscr{C}$, и левая часть в 1° понимается в этом смысле.

Доказательство. Свойство 1° вытекает из Леммы 1 и неравенства (10). Свойство 2° следует из равенства (2). Докажем свойство 3°. Как легко видеть, каждый функционал $F \in \mathscr{C}'_\infty$ имеет вид таков

$$<F, \psi> = \sum_{k=0}^{n} \int_{\boldsymbol{R}_+} h_k(x) \boldsymbol{D}_x^k \cdot \psi(x)\, d\mu(x),$$

где $h_k(x)$ некоторые функции из $\mathscr{C}'$ (см. [3], [4]).

В том случае, когда $\psi = \boldsymbol{T}_f^\lambda \varphi$, ввиду соотношения 1° Леммы 1, достаточно доказать тот частный случай, когда функционал F записывается в виде

$$<F, \psi> = \int_{\boldsymbol{R}_+} h(x) \cdot \psi(x)\, d\mu(x),$$

где $h(x)$ некоторая функция из $\mathscr{C}'$. В таком случае, доказательство нетрудно проводится.

§4. Преобразование Фурье (III)

Основая теорема

В этой параграфе, доказывается справедливость обратного утверждения Теоремы **1**. В дальнейшем, в качестве компактного множества $\boldsymbol{Q}$ на группе G, рассматривается только такое, имеющее вид

$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}_{\alpha_1,\alpha_2;\,\beta}=\left\{g=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & 1\end{pmatrix};\ 0<\alpha_1\leqq a\leqq\alpha_2,\ |b|\leqq\beta\right\}.$$

Тогда по определению

$$\tau^{\lambda}(t\,;\boldsymbol{Q})=\sup_{g\in Q}\cdot\tau^{\lambda}(t\,;\,g)=\begin{cases}\alpha_1^{-1}(t+2\beta\,|Re\lambda\,|)\,;\ \text{при}\ t\geqq-2\beta\,|Re\lambda\,|\,,\\ \alpha_2^{-1}(t+2\beta\,|Re\lambda\,|)\,;\ \text{при}\ t\leqq-2\beta\,|Re\lambda\,|\,.\end{cases}$$

Основная теорема принимает следующую формулировку.

Теорема 2. *Зафиксируем одну функцию $\tau^{\lambda}(t)=\tau^{\lambda}(t\,;\boldsymbol{Q})$, отвечающую некоторому компакту $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}_{\alpha_1,\alpha_2;\beta}$. Положим, что каждому комплексному числу λ задан оператор $\boldsymbol{T}^{\lambda}$ в пространстве $\mathscr{C}$, выполняющий упомянутые ниже условия, то существует единственная такая функция f из $\boldsymbol{C}_0^{\infty}(\boldsymbol{G})$, что $\boldsymbol{T}^{\lambda}=\boldsymbol{T}_f^{\lambda}$ и ее носитель $[f]$ содержится в заданном компакте $\boldsymbol{Q}$.*

1°. *Для произвольных полиномов ∂, ∂' от $\boldsymbol{D}_x$ и λx, имеет место неравненство*

$$||\partial\cdot\boldsymbol{T}^{\lambda}\cdot\partial'\cdot\varphi||_t\leqq C(\partial,\,\partial')||\varphi||_{\tau^{\lambda}(t)},\qquad(t\in\boldsymbol{R},\ \phi\in\mathscr{C}_{\infty})\,.$$

где $C(\partial,\partial')$ постоянная, не зависящая от λ, t и φ.

2°. *Соотношение эквивалентности*:

$$\boldsymbol{T}_{\gamma}\boldsymbol{T}^{\lambda}\boldsymbol{T}_{\gamma}^{-1}=\boldsymbol{T}^{\gamma\lambda}\qquad(\gamma\in\boldsymbol{R}_{+})\,.$$

3°. *Слабая аналитичность: Для каждого функционала $F\in\mathscr{C}'_{\infty}$ и каждой функции $\varphi\in\mathscr{C}_{\infty}$, $<F,\ \partial\boldsymbol{T}^{\lambda}\partial'\varphi>$ есть целая аналитическая функция от $\lambda\in\boldsymbol{C}$ (не исключая точку $\lambda=0$).*

Доказательство мы разобьем на восемь пунктов.

(**а**). **Лемма 2.** *Для произвольных ∂ и ∂', оператор $\partial\cdot\boldsymbol{T}^{\lambda}\cdot\partial'$ расширя-*

ется на все пространство $\mathscr{C}$ *и полученный оператор также удовлетворяет условиям* 1° *и* 3°.

Действительно, так как пространство $\mathscr{C}_\infty$ всюду плотно в пространстве $\mathscr{C}$, выберем для элемента $\varphi\in\mathscr{C}$ произвольную последовательность из $\mathscr{C}_\infty$ $\{\varphi_j\}_{j=1,2,3\dots}$ сходящуюся к элементе φ, такую, что $\|\varphi_j-\varphi\|_{\tau^\lambda(t)}\to 0$ при $j\to\infty$. Условие 1° обеспечивает сходимость последовательности $\{\partial \boldsymbol{T}^\lambda\partial'\varphi_j\}_{j=1,2\dots}$ в пространстве $\mathfrak{H}(t)$ и предел не зависит от выбора последовательности $\{\varphi_j\}_{j=1,2,\dots}$ и нормы $\|\cdot\|_t$. Затем можно положить $\partial\boldsymbol{T}^\lambda\partial'\varphi=\lim\limits_{j\to\infty}\partial\boldsymbol{T}^\lambda\partial'\varphi_j$. Тогда имеем

$$\|\partial \boldsymbol{T}^\lambda\partial'\varphi\|_t=\lim_{i\to\infty}.\|\partial\boldsymbol{T}^\lambda\partial'\varphi_j\|_t\leqq C(\partial,\partial')\lim_{j\to\infty}.\|\varphi_j\|_{\tau^\lambda(t)}$$
$$=C(\partial,\partial')\|\varphi\|_{\tau^\lambda(t)}\,.$$

Далее, пусть $F\in\mathscr{C}'_\infty$, то

$$<F,\,\partial\boldsymbol{T}^\lambda\partial'\varphi>=\lim_{j\to\infty}.<F,\,\partial\boldsymbol{T}^\lambda\partial'\varphi_j>.$$

Теперь можно доказать, что последовательность $<F,\,\partial\boldsymbol{T}^\lambda\partial'\varphi_j>$ целых аналитических функций равномерно сходится в любом компакте K комплексной плоскости $\boldsymbol{C}$.

Действительно, как и в доказательстве Теоремы **1**, достаточно доказать в том случае, когда

$$<F,\,\psi>=\int_{\boldsymbol{R}_+}h(x)\psi(x)\,d\mu(x),\qquad h(x)\in\mathfrak{H}(-r)$$

где r некоторое вещественное число.

В таком случае,

$$|<F,\,\partial\boldsymbol{T}^\lambda\partial'(\varphi_j-\varphi_k)>|\leqq\|h\|_{-r}\|\partial\boldsymbol{T}^\lambda\partial'(\varphi_j-\varphi_k)\|_r$$
$$\leqq C(\partial,\,\partial')\|h\|_{-r}\|\varphi_j-\varphi_k\|_{\tau^\lambda(r)}$$
$$\leqq C(\partial,\,\partial')\|h\|_{-r}\|\varphi_j-\varphi_k\|_{\sup\limits_{\lambda\in\boldsymbol{K}}.\tau^\lambda(r)}$$

Таким образом, условия 1° и 3° Теоремы 2, справедливы для всех $\varphi\in\mathscr{C}$.

(б). **Существование ядра и его дифференцируемость.** Функция $\psi\in\mathscr{C}_\infty$ по своему определению, является абсолютно непрерывной и $\lim\limits_{x\to\infty}\psi(x)=0$, поэтому имеем

$$-\psi(x)=\int_x^\infty \boldsymbol{D}_x\psi(x)\,d\mu(x)\,.$$

В силу неравненства Шварца

$$|\psi(x)|\leqq\left(\int_x^\infty e^{-tx}\,d\mu(x)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_x^\infty e^{tx}|\boldsymbol{D}_x\psi(x)|^2\,d\mu(x)\right)^{\frac{1}{2}}$$

для всех $t>0$. Затем

$$|\psi(x)|\leqq\left(\int_x^\infty e^{-tx}\,d\mu(x)\right)^{\frac{1}{2}}\|\boldsymbol{D}_x\psi\|_t\,.$$

Теперь положим $\psi=\boldsymbol{T}^\lambda\varphi$. Из условия 1°

$$|\boldsymbol{T}^\lambda\varphi(x)|\leqq C\left(\int_x^\infty e^{-tx}\,d\mu(x)\right)^{\frac{1}{2}}\|\varphi\|_{\tau^\lambda(t)}\qquad(t>0)\,,$$

где C постоянная, не зависящая от x, λ, t и φ. Следовательно, для фиксированных x, λ и t ($t>0$), функционал: $\varphi\mapsto\boldsymbol{T}^\lambda\varphi(x)$ на $\mathfrak{H}(s)$ $(s=\tau^\lambda(t))$ непрерывно и согласно теореме Ф. Рисса, существует единственная функция $H^\lambda(x,a)$ из $\mathfrak{H}'(s)=\mathfrak{H}(-s)$, зависящая лишь от параметров x и λ, такая, что

$$\boldsymbol{T}^\lambda\varphi(x)=\int_{\boldsymbol{R}_+}H^\lambda(x,a)\varphi(a)\,d\mu(a)\tag{12}$$

для всех $\varphi\in\mathfrak{H}(s)$, $(s=\tau^\lambda(t),\ t>0)$, и имеет место неравенство

$$\|H^\lambda(x,\cdot)\|_{-s}\leqq C\left(\int_x^\infty e^{-ta}\,d\mu(a)\right)^{\frac{1}{2}}\qquad(t>0)\,.$$

Подобным образом для операторов $\boldsymbol{T}^\lambda\cdot\boldsymbol{D}_x^n$ $(n=1,2,\ldots)$, имеем

$$\boldsymbol{T}^\lambda\cdot\boldsymbol{D}_x^n\varphi(x)=\int_{\boldsymbol{R}_+}H_n^\lambda(x,a)\varphi(a)\,d\mu(a)\tag{13}$$

где $H_n^\lambda(x,a)$ единственная функция из $\mathfrak{H}(-s)$ $(s=\tau(t),\ t>0)$.

С другой стороны, заменяя в равенстве (12) $\varphi(x)$ на $\boldsymbol{D}_x^n\varphi(x)$ и особенно полагая $\varphi\in\boldsymbol{C}_0^\infty(\boldsymbol{R}_+)$

$$\boldsymbol{T}^\lambda\boldsymbol{D}_x^n\varphi(x)=\int_{\boldsymbol{R}_+}H^\lambda(x,a)\boldsymbol{D}_a^n\varphi(a)\,d\mu(a)\,.\tag{12$'$}$$

Из равенств (13) и (12)′, можно заключить, что производная $(-\boldsymbol{D}_a)^n H^\lambda(x, a)$ в обобщенном смысле совпадает с $H^\lambda_n(x, a)$, т.е. все производные по a функции $H^\lambda(x, a)$ принадлежат к $\mathscr{C}' \subset \boldsymbol{L}^1_{loc.}(\boldsymbol{R}_+, d\mu(x))$.

То по теореме Никодима, функция $H^\lambda(x, a)$ от a рассматривается как бесконечно дифференцируемой. Далее, из условия 2°, очевидно

$$H^{\gamma\lambda}(x, a) = H^\lambda(\gamma x, \gamma a) \qquad (\gamma > 0)\,.$$

(в). **Лемма 3.** *Оператор* $\boldsymbol{T}^\lambda$ *переносит функцию с носителем внутри отрезка* $[\eta_1, \eta_2]$ *в функцию с носителем внутри отрезка* $\left[\frac{\eta_1}{\alpha_2}, \frac{\eta_2}{\alpha_1}\right]$

Доказательство. Для простоты, положим $\psi = \boldsymbol{T}^\lambda \varphi$. Из условия 1°,

$$\int_0^\infty e^{tx} |\psi(x)|^2 \, d\mu(x) \leqq C \int_0^\infty e^{\tau^\lambda(t)x} |\varphi(x)|^2 \, d\mu(x)\,,$$

где C постоянная, не зависящая от t и λ. Тем более, справедливо каково бы ни было число $\zeta > 0$

$$\int_\zeta^\infty e^{tx} |\psi(x)|^2 d\mu(x) \leqq C \int_{\eta_1}^{\eta_2} e^{\tau^\lambda(t)x} |\varphi(x)|^2 d\mu(x)\,.$$

Пусть $t > 0$, тогда обе функции e^{tx} и $e^{\tau^\lambda(t)x}$ от x возрастают, поэтому

$$e^{t\zeta} \int_\zeta^\infty |\psi(x|^2 d\mu(x) \leqq Ce^{\tau^\lambda(t)\eta_2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} |\varphi(x)|^2 d\mu(x)\,,$$

и значит

$$\int_\zeta^\infty |\psi(x)|^2 d\mu(x) \leqq C' \exp.\left(\frac{\eta_2}{\alpha_1} - \zeta\right)t,$$

где C' постоянная, не зависящая от t. Если $\frac{\eta_2}{\alpha_1} < \zeta$, переходя к пределу при $t \to \infty$, получим

$$\int_\zeta^\infty |\psi(x)|^2 \, d\mu(x) = 0$$

итак $\psi(x) = 0$, всюду при $x > \alpha_1^{-1}\eta_2$, потому что $\psi = \boldsymbol{T}^\lambda \varphi$ абсолютно непрерывна. Подобным образом, в случае $t > -2\beta|Re\lambda|$, получаем $\psi(x) = 0$. всюду при $x < \frac{\eta_1}{\alpha_2}$.

(г)$\cdot H^{\lambda}(x, a)=0$ для a вне интервала $[\alpha_1 x, \alpha_2 x]$, где x фиксировано. В самом деле, как показано в пункте (б)

$$T^{\lambda}\varphi(x)=\int_{R_+} H^{\lambda}(x, a)\varphi(a)\,d\mu(a) \qquad (\varphi\in\mathfrak{H}(s),\ s=\tau^{\lambda}(t),\ t>0)\,.$$

Если x лежит вне интервала $\left[\frac{\eta_1}{\alpha_2}, \frac{\eta_2}{\alpha_1}\right]$, функционал $\varphi\mapsto T^{\lambda}\varphi(x)$ над подпространством

$$\{\varphi\in\mathfrak{H}(s)\,;\ \varphi(x)=0 \quad \text{почти всюду вне интервала } [\eta_1, \eta_2]\}$$

тождественно равен нулю в силу (в), поэтому

$$H^{\lambda}(x, a)=0 \qquad \text{для } a \text{ всюду в интервале } [\eta_1, \eta_2]\,,$$

так как функция $H^{\lambda}(x, a)$ от a, бесконечно дифференцируема.

Обратно, для x заданного, выбирая интервал $[\eta_1, \eta_2]$ вне интервала $[\alpha_1 x, \alpha_2 x]$, мы получаем наше утверждение.

Следствие. Функция $H(a)=H^{\lambda}(1, a)$ имеет свой носитель внутри интервала $[\alpha_1, \alpha_2]$ и принадлежит к $C_0^{\infty}(R_+)$.

(д). **Аналитичность ядра от λ.** Из пункта (г), $H^{\lambda}(a)\in C_0^{\infty}(R_+)$, и имеем

$$D_a^n H^{\lambda}(a_0)=\int_{R_+} D^{n+1}H^{\lambda}(a)\chi_{a_0}(a)\,d\mu(a)\,,$$

где χ_{a_0} характеристическая функция интервала $[\alpha_1, a_0]$
Очевидно $\chi_{a_0}\in\mathscr{C}$ и это равенство означает

$$D_a^n H^{\lambda}(a_0)=\int_{R_+} H^{\lambda}(a)(-D_a)^{n+1}\cdot\chi_{a_0}(a)\,d\mu(a)=<\delta_{x_0=1},\ T^{\lambda}(-D_a)^{n+1}\chi_{a_0}>\,.$$

По условию 3° заключается аналитичность функции $D_a^n H^{\lambda}(a_0)$ от λ.

(е). **Лемма 4.** *Если функция φ имеет ее носитель в интервале $[\eta_1, \infty)$, имеет место*

$$|(\lambda x)^n T^{\lambda}\varphi(x)|\leqq C(\varphi, x, n)e^{\beta|Re\lambda|x} \qquad (n=0, 1, 2\ldots)\,,$$

где $C(\varphi, x, n)$ постоянная, независимая от λ.

В самом деле, как показано в пункте (**в**), **Лемме 3,** носитель $[\boldsymbol{T}^\lambda\varphi]$ лежит внутри интервала $\left[\frac{\eta_1}{\alpha_2}, \infty\right)$, поэтому

$$(\lambda x)^n \boldsymbol{T}^\lambda\varphi(x) = \int_{\frac{\mu_1}{\alpha_2}}^{x} \boldsymbol{D}_y(\lambda y)^n \boldsymbol{T}^\lambda\varphi(y)\, d\mu(y)$$

по неравенству Шварца и по определению норм $\|\cdot\|_t$

$$|(\lambda x)^n \boldsymbol{T}^\lambda\varphi(x)| \leqq \left(\int_{\frac{\eta_1}{\alpha_2}}^{x} e^{-tx}\, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{2}} \|\boldsymbol{D}_x(\lambda x)^n \boldsymbol{T}^\lambda\varphi\|_t$$

для каждого $t \in \boldsymbol{R}$. Из условия 1°

$$|(\lambda x)^n \boldsymbol{T}^\lambda\varphi(x)| \leqq C\left(\int_{\frac{\mu_1}{\alpha_2}}^{x} e^{-tx}\, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{\tau^\lambda(t)}$$

где C постоянная, независимая от λ и t.
Положив в частности $t = -2\beta|Re\,\lambda|$, т.е. $\tau^\lambda(t) = 0$, получим

$$|(\lambda x)^n \boldsymbol{T}^\lambda(x)| \leqq C' e^{\beta|Re\lambda|x}$$

где C'-постоянная, независимая от λ.

(**ж**). **Порядок целой аналитической функции.** Подобно тому, как сделано в пункте (**д**), можно показать

$$\lambda^m \boldsymbol{D}_a^n H^\lambda(a) = \langle \delta_{x=1}, (\lambda x)^m \boldsymbol{T}^\lambda(-\boldsymbol{D}_x)^{n+1}\chi_a \rangle \qquad (m, n = 0, 1, 2\ldots)$$

где χ_a характеристическая функция интервала $[\alpha_1, a]$.
Следовательно, из пункта (**е**) **Леммы 4**,

$$|\lambda^m \boldsymbol{D}_a^n H^\lambda(a)| \leqq C(m, n, a) e^{\beta|Re\lambda|} \tag{14}$$

причем $C(m, n, a)$ постоянная, независимая от λ.

(**з**). Положим

$$f(g) = f(a, b) = \frac{1}{2\pi}\int_{\boldsymbol{R}} H^{i\rho}(a) e^{-i\rho b}\, d\rho\,.$$

В силу классической теоремы Пэли-Винера, оценка (14) обеспечивает принадлежность функции $f(g)$ к $\boldsymbol{C}_0^\infty(\boldsymbol{Q}) = \{h(g) \in C_0^\infty(\boldsymbol{G});\ [h] \subset \boldsymbol{Q}\}$ и предыдующее рассуждение в §2 показывает, что $T^{\lambda}=T^{\lambda}_{f}$. Тем самым основная теорема полностью доказана.

§5. Окончательная формулировка

Мы сопоставили каждому компакту $Q=Q_{\alpha_1,\alpha_2;\beta}$ на группе G, функцию $\tau^{\lambda}(t;Q)$. Введем пространство $\mathscr{B}(Q)$ операторных функций T^{λ} от $\lambda\in C$, действующих в пространстве $\mathscr{C}$, и удовлетворяющих условиям 1°, 2°, и 3° Теоремы **2**, §**4**.

Если определить систему норм формулой

$$||T^{\lambda}||_{\partial,\partial'}=\sup_{\lambda\in C}.\ \sup_{t\in R}.\ \sup_{\varphi}.\frac{||\partial T^{\lambda}\partial'\varphi||_t}{||\varphi||_{\tau^{\lambda}(t;Q)}},$$

причем ∂ и ∂' обозначают произвольные полиномы от D_x и λx, множество $\mathscr{B}(Q)$ становится пространством Фреше. Это можно доказать подобно доказательству пункта (**a**) Теоремы **2**, §**4**.

Аналог теоремы Пэли-Винера.

Пусть $C_0^{\infty}(Q)=\{f\in C_0^{\infty}(G);$ *носитель* $[f]\subset Q\}$.

Преобразование Фурье устанавливает топологический изоморфизм между $C_0^{\infty}(Q)$ *и* $\mathscr{B}(Q)$, *следовательно, между* $C_0^{\infty}(G)$ *и индуктивным пределом* $\varinjlim_{Q}\mathscr{B}(Q)$.

В самом деле, Теорема **2**, §**4** показывает, что каждой операторной функции T^{λ} из $\mathscr{B}(Q)$, соответствует единственная функция $f\in C_0^{\infty}(Q)$ такая, что $T^{\lambda}=T^{\lambda}_{f}$, и имеет место $\|T^{\lambda}\|_{\partial_1,\partial_2}\leqq\|\tilde{\partial}_1\cdot\tilde{\partial}_2 f\|_{L^1}$ причем $\tilde{\partial}=P_1(X_r-1,Y_r)$ и $\tilde{\partial}_2=P_2(-X_l,-Y_l)$, если $\partial_i=P_i(D_x,\lambda x)$, $(i=1,2)$. Итак, отображение: $f\mapsto T^{\lambda}_{f}$ от $C_0^{\infty}(Q)$ на $\mathscr{B}(Q)$, непрерывно.

С другой стороны, формула Планшереля обеспечивает взаимно однозначность этого отображения. Согласно хорошо известной теореме Банаха-Штейнгауза, это отображение является топологическим изоморфизмом, что и требовалось доказать.

Добавление.

1. Замечание о пространстве $\mathscr{C}$ и $\mathscr{C}_{\infty}$.

Пространства $\mathscr{C}$ и $\mathscr{C}_{\infty}$ не инвариантны относительно инверсии $x\mapsto x^{-1}$ на R_+. Если требовалось инвариантность, достаточно заменить их определения следующим. Пусть $\mathfrak{H}(t)$ гильбертово пространство, состоящее из всех функций, для которых сходится интеграл

$$\|\varphi\|_t=\left(\int_0^\infty e^{tM(x)}|\varphi(x)|^2\,d\mu(x)\right)^{\frac{1}{2}}\qquad (t\in\boldsymbol{R}),\ \text{где } M(x)=\frac{x+x^{-1}}{2}.$$

то есть $\mathfrak{H}(t)=\boldsymbol{L}^2(\boldsymbol{R}_+,\ e^{tM(x)}d\mu(x))$. Очевидно, что если $s<t$, то $\mathfrak{H}(s)\supset\mathfrak{H}(t)$. Положим $\mathscr{C}=\bigcap_{-\infty<t<\infty}\mathfrak{H}(t)$ и

$$\mathscr{C}_\infty=\{\varphi\in\mathscr{C}\,;\,\boldsymbol{D}_x^n\varphi\in\mathscr{C}\qquad n=0,1,2\ldots\}.$$

Здесь производные понимаются в обобщенном смысле. Если снабдить системой норм $\|\varphi\|_{t,p}=\|\boldsymbol{D}_x^p\varphi\|_t$ ($p=0, 1, 2\ldots$, $t\in\boldsymbol{R}$), пространство $\mathscr{C}_\infty$ оказывается ядерным (см. [3], [4]). Но это определение нам не полезным, так как в пункте (**в**) доказательства Теоремы **2** мы сталкиваемся со трудностью.

2. В формулировке аналога теоремы Пэли-Винера не встречаются одномерные неунитарные представления χ^λ ($\lambda\notin\sqrt{-1}\boldsymbol{R}$).

Отдел Математики
Факультет Естественных Наук
Киото Университет.

Поступила в редакцию
22 июня 1973 г.

Литература

[1] Н.Я. Виленкин, Специальные функции и теория представлений групп. ФМЛ, 1965
[2] I.M. Gelfand & M.A. Naimark, Unitary represenations of the group of linear transformations of the straight line, DokladyAcademy Nauk. 55-7, 1947
[3] И.М. Гельфанд и Г.Е. Шилов, Обобщенные функции Вып. 2 ФМЛ, 1958
[4] И.М. Гельфанд и Н.Я. Виленкин, Обобщенные функции Вып. 4 ФМЛ, 1961
[5] И.М. Гельфанд, М.И. Граев и Н.Я. Виленкин, Обобщенные функции Вып. 5 ФМЛ 1965
[6] L. Ehrenpreis & F.I. Mautner, Some properties of the fourier transforms on semi-simple Lie groups I: Ann. of Math. 61 (1965) 406-439.
[7] L. Ehrenpreis & F.I. Mautner, Some properties of fourier transforms on semi-simple Lie grotps II: Trans. of Amer. Math. Soc. 84 (1957) 1-55.
[8] Д.П. Желобенко, О гармоническом анализе функций на полупростых группах Ли, Известия АН СССР, серия Матем. 27 (1963), 1343-1394.
[9] Л.П. Желобенко, Операционное исчисление на полупростой комплексной группе Ли, Известия АН СССР, серия матем. 33 (1969) 931-973.
[10] Л.П. Желобенко, О гармоническом анализе функций на полупростых группах Ли, Известия АН СССР, серия матем. 33(1969), 1255-1295.

[11] A. Kohari, Harmonic analysis on the group of linear transformations of the straight line, Proc. Japan Acad., 37 (1961) 250-254.
[12] K. Kumahara & K. Okamoto, An analogue of the Payley-Wiener theorem for the Euclidean motion group, Proc. Japan Acad., 47 (1971)
[13] L. Schwartz, Théorie des distributions, Hermann. tome I (1950), tome II (1951)
[14] N. Tatsuuma, Plancherel formula for non-unimodular locally compact groups, J. Math. Kyoto Univ. 12 (1972)
[15] А.И. Штерн, О вполне неприводимых представлениях вещественной унимодулярной группой второго порядка, ДАН СССР, 154 (1964).

Дополнение к пункте (д) доказательства Теоремы 2.

Лемма

$$\int_{\boldsymbol{R}_+} \boldsymbol{D}_a^n H^\lambda(x, a)\varphi(a)\, d\mu(a) = [\boldsymbol{T}^\lambda\cdot(-\boldsymbol{D}_x)^n]\varphi\cdot(x)\ ,$$

$$(\varphi\in\mathscr{C},\ n=0,\ 1,\ 2\ldots)\ ,$$

где $[\boldsymbol{T}^\lambda\cdot(-\boldsymbol{D}_x)^n]$ *обзначает расширение на все пространство* $\mathscr{C}$ *оператора* $\boldsymbol{T}^\lambda\cdot(-\boldsymbol{D}_x)^n$ *над* $\mathscr{C}_\infty$.

В самом деле, для $\varphi\in\mathscr{C}_\infty$, интегрируя по частям

$$\int_{\boldsymbol{R}_+} \boldsymbol{D}_a^n\cdot H^\lambda(x, a)\varphi(a)\, d\mu(a) = \int_{\boldsymbol{R}_+} H^\lambda(x, a)(-\boldsymbol{D}_a)^n\varphi(a)\, d\mu(a)$$

$$= \boldsymbol{T}^\lambda\cdot((-\boldsymbol{D}_x)^n\varphi)\cdot(x)$$

значит, обе части Леммы совпадают над плотным подпространством $\mathscr{C}_\infty$ и они определяют непрерывные линейные функционала на всем пространстве $\mathscr{C}$ для x фиксированного.