J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)
16-1 (1976) 185-200

Equation de Schrödinger et equation de particule brownienne

Par

Shigeyoshi OGAWA

(Communicated by Prof. Watanabe Feb. 13, 1975)

1. Introduction.

On s'intéresse à comprendre l'équation de Schrödinger, une équation fondamentale dans la théorie de la mécanique quantique, en termes propres au processus de mouvement brownien. L'idée essentielle de l'étude se trouve à la notion de processus aléatoire généralisé que nous allons étudier au paragraphe 2 de l'article. Or, en matière d'études probabilistes de l'équation, on se rappelerait aussitôt un problème mathématique provoqué par l'article très génial de monsieur R. P. Feynman publié en 1948 [1]: la justification d'une intégrale dite l'intégrale de Feynman.

Malheureusement des résultats obtenus dans ce domaine mathématique sont plus ou moins négatifs à ce propos et nous al'ons donc choisir un autre chemin. Et pourtant nous constatons que notre point de départ est à la pensée de M. Feynman. Celle-ci étant belle, il serait très agréable d'y trouver une vérité mathématique.

Justement pour nous rappeler son idée et pour expliquer en même temps la nôtre, nous imaginons maintenant une particlue se mouvant dans l'espace $\boldsymbol{R}^1$ où il n'existe qu'un potentiel $U(x)$ $(x\in\boldsymbol{R}^1)$ comme champs de force extérieure. Supposons que le mouvement de la particule est tel que sa trajectoire soit représentée par une fonction réelle du temps $\{X_t,\ t\geq 0\}$. Alors ce que M. Feynman a espéré, c'est d'obtenir une solution de l'équation de Schrödinger par une opération formelle, dite l'intégrale de Feynman, sur la fonction $\psi(t,x;X)=\exp\{i/\hbar\cdot\int_0^t L(X_s(t,x))ds\}$ $(i=\sqrt{-1})$ où $X.(t,x)$ est la trajectoire passant par le point (t, x) indiqué et où L est le Lagrangean du système, notamment $L(X_s(t, x)) = (m/2)(\dot{X}_s)^2 - U(X_s)$ ($s \leq t$, $\hbar$; la constante de Planck, m; la masse de la particule). Plus précisément, il a considéré la limite comme suit; $\lim_{n\to\infty}(2\pi\hbar i/mn)^{-(1/2)}\int_{\boldsymbol{R}^n}(\prod_{k=1}^{n}\psi(x_k, x_{k+1}))\prod_{k=1}^{n}\mu(dx_k)$; $\mu(dx)$, la mesure de Lebesgue et $\psi(x_k, x_{k+1}) = \exp\{(i/\hbar)\int_{t_k}^{t_{k+1}}L(X_s^k)ds\}$ où X^k. est une trajectoire continue, passant par les deux points (t_k, x_k) et (t_{k+1}, x_{k+1}) $(t_{k+1} = t_k + 1/n)$, qui minime la quantité $\int_{t_k}^{t_{k+1}}L(X.)ds$ (la trajectoire classique). En envisageant cette discussion formelle les mathématiciens, de leurs cotés, ont essayé de la justifier de quelques maniéres et se sont demandés, en particulier, la possibilité de la comprendre en terme de la théorie des processus aléatoires; l'existence d'un processus aléatoire X tel que l'espérance $E\psi(t, x; X)$ puisse être une solution de l'équation de Schrödinger. Aujourd'hui, on sait que l'intégrale de Feynman ne peut être comprise qu'au sens de distribution cylindrique (voir C. M. DeWitt [2], K. Itô [4]).

Malgré tout nous voulons comprendre l'idée de M. Feynman en terme du processus de mouvement brownien $\{B_t, t \geq 0\}$. Cela évidemment nous exige de faire un peu de saut de la pensée et peut-être une modification de son idée, mais on se confirmerait, espérons-nous, que notre idée est encore très fidèle à celle originelle de M. Feynman. Nous commençons la recherche par calculer, de la façon formelle bien entendu, la dérivée de la fonction $\psi(t, x; B.)$ et nous arrivons à la

$$(1, 1)^{(*)} \qquad \frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial t}\psi = \{m(\dot{B}.)^2 - U(X)\}\psi .$$

L'équation (1, 1) n'a aucun sens pour moment, mais ici se trouve notre point de départ: Essayer de lui donner un sens mathématique au lieu d étudier le problème de l'intégrale de Feynman. Puisque l'équation (1, 1) contient le terme $(\dot{B})$, *le bruit blanc*, cela nous oblige à chercher le sens dans un cadre de *la théorie des processus alētoires gēnēralisēs.* La difficulté principale de ce procédé, c'est que l'on doit traiter des produits de processus aléatoires généralisés de la forme $\psi(\dot{B}.)^2$. Heureusement, grâce à la bonne propriété de l'intégrale stochastique $\mathcal{J}_{1/2}$ introduite par l'auteur, ce point peut être surmonté d'une façon naturelle. Au paragraphe 3 on va appliquer la théorie développée au paragraphe 2 à

*) Un tel calcul peut être justifié en arrangeant des règles sur le calcul stochastique concernant le bruit blanc.

l'étude d'équations du type (1, 1) vues comme équations de processus aléatoires généralisés. On s'intéresse surtous à la relation entre des solutions d'équations de processus aléatoires généralisés et celles de l'équation de Schrödinger

$$(1,2) \qquad \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}\overline{\Phi}+\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\overline{\Phi}=U(x)\overline{\Phi}\,.$$

Pour faire se lier l'une avec l'autre, on introduira une condition importante, dite *la condition d'onde*, concernant la relation entre la B^+-dérivée d'un processus aléatoire généralisés et sa dérivée en x. C'est aussi par cette condition que l'équation (1, 2), ou bien une équation comme (1, 1), peut se lier avec une équation complexe de particule brownienne, (introduite et étudiée par l'auteur: [5], [7], [8]). D'après la discussion au paragraphe 3, on constatera enfin que ce n'est pas l'équation (1, 1), mais celle de (1, 3) ci-dessous qui peut correspondre à l'équation (1, 2);

$$(1,3) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\psi=\left\{2(\dot{B})^2+i\frac{U}{\hbar}\right\}\psi\,.$$

Par comparaison avec l'équation (1, 1), on remarquerait que l'équation (1, 3) correspond au cas d'une particule dont la masse est pûrement imaginaire ! On ne sait pas, l'auteur tout le moins, si cette idée etrange peut être admise à la physique. Mais c'est dans cette situation que la condition d'onde vient prendre la forme; $E(2\sqrt{m'\hbar}\dot{B}-(\hbar/i)(\partial/\partial x))\psi=0(m'=-im)$. Si l'on entend par $2\sqrt{m'\hbar}\dot{B}$ l'implusion de la particule considérée, la relation ci-dessus est exactement la règle faite à la théorie de la mécanique quantique.

Qu'il me soit permis de remercier ici Professeur T. KÔRI et Mlle. P. MALO pour leurs suggestions utiles et encouragements.

2. Processus aléatoire généralisé et le bruit blanc.

Dans ce paragraphe on va étudier des processus aléatoires généralisés, surtous les produits de ceux-ci par le bruit blanc. La discussion se limite au cas de deux variables $(t, x)\in[0, T]\times \boldsymbol{R}^1$, mais elle va s'appliquer naturellement aux cas des plusieurs variables. Pour la généralité de la théorie des distribution, ou de la théorie des processus aléatoires généralisés, on va se référer aux livres de L. Schwartz [9] et de Gel'fand-Vilenkin [3]. Et pour les sujets concernant des B^+-dérivées et l'intégrale stochastique au sens de $\mathcal{I}_{1/2}$ on en trouve dans les articles de l'auteur [6], [7].

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé auquel est défini le processus de mouvement brownien $\{B_t, t \geq 0\}$ et soit $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ l'ensemble des variables aléatoires complexes, module carré intégrables par rapport à la mesure P. Pour un domaine quelconque G, on entend par $\mathcal{D}(G)$ l'ensemble de tous fonctions réelles définies dans G, indéfiniment derivables et à support compact.

Définition 1. Un processus aléatoire généralisé X est une application linéaire et continue (au sens usual) de $\mathcal{D}([0, \mathrm{T}] \times \boldsymbol{R}^1)$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. On entend par $\langle X, \phi \rangle$ la valeur de X au point $\phi \in \mathcal{D}$ et par $\mathcal{A}([0, T] \times \boldsymbol{R}^1)$ l'ensemble de tous processus aléatoires généralisés sur $\mathcal{D}([0, T] \times \boldsymbol{R}^1)$.

Tous processus aléatoires X tels que $E\int_K |X|^2 \mathrm{dtdx} < +\infty$ pour tous compacts $K \subset [0, T] \times \boldsymbol{R}^1$, deviennent des éléments de $\mathcal{A}([0, T] \times \boldsymbol{R}^1)$ par la formulle habituelle $\langle X, \phi \rangle = \int X\phi dtdx$. De même, tous les dérivées $D_t^p D_x^q X (D_t^p = (\partial/\partial t)^p, D_x^q = (\partial/\partial x)^q, p, q = 1, 2, \cdots)$ d'un tel processus X appartiennent à la classe par $\langle D_t^p \cdot D_x^q X, \phi \rangle = (-1)^{p+q} \langle X, D_t^p \cdot D_x^q \phi \rangle$. Une mesure aléatoire μ définite dans $[0, T] \times \boldsymbol{R}^1$, à valeurs complexes est effectivement un élément de $\mathcal{A}([0, T] \times \boldsymbol{R}^1)$ pourvu que $E|\mu(K)|^2 < +\infty$ pour tous compacts $K : \langle \mu, \phi \rangle = \int \phi \mu(dtdx)$.

Exemple 1. En particulier, le processus du bruit blanc $\dot{B}$, la dérivée de $B.$, est un élément de $\mathcal{A}([0, T] \times \boldsymbol{R}^1)$ tel que $\langle \dot{B}, \phi \rangle = (-1) \langle B., \dot{\phi} \rangle = \int dx \int \phi(s, x) dB_s = \int dB_s \int \phi(s, x) dx$, où $\int \cdot dB.$ est l'intégrale de Wiener.

On ne discute pas ici la généralité de processus aléatoires généralisés. Ce que l'on veut faire, c'est d'introduire des produits de la forme $X \cdot (\dot{B})^n$ comme éléments de $\mathcal{A}([0, T] \times \boldsymbol{R}^1)$. Evidemment il n'est possible que pour des éléments X d'une certaine sous-classe de $\mathcal{A}([0, T] \times \boldsymbol{R}^1)$, comme il en était de même dans la théorie des distributions. Ainsi on est amené à la notion de B^+-*différentiabilité des processus* *aléatories généralisés* que l'on va exprimer plus tard.

Considérons un sous-ensemble des fonctions $\phi(t, x)$ de la forme

$$\phi(t,x) = \sum_{j:\text{fini}} u_j(x) v_j(t) \quad \text{où } u_j \in \mathcal{D}(\boldsymbol{R}^1) \text{ et } v_j \in \mathcal{D}([0,T]).$$

Alors il est bien connu que cet sous-ensemble de $\mathcal{D}([0, \mathrm{T}] \times \boldsymbol{R}^1)$, disons $\boldsymbol{M}([0, T] \times \boldsymbol{R}^1)$, est dense dans $\mathcal{D}([0, T] \times \boldsymbol{R}^1)$, (Théorème III de [9]). L'espace $L^2(\Omega)$ étant complet, il en résulte que pour déterminer un processus aléatoire généralisé X, il suffit de savoir tous ses valeurs $\langle X, \cdot \rangle$ sur $\boldsymbol{M}([0, T] \times \boldsymbol{R}^1)$. Et réciproquement, on peut montrer facilement l'énoncé suivant qui est une variation triviale du "*Théorème des noyaux*" dû à L. Schwartz (voir [3]).

Théorèm 1; *Soit* $B(u, v)$ $(u \in \mathcal{D}(\boldsymbol{R}^1), v \in \mathcal{D}([0, T]))$ *une forme bilinéaire, séparément continue telle que* $E\{|B(u, v)|^2\} < \infty$ *pour tous* u *et* v. *Alors il existe un élément* X *de* $\mathcal{A}([0, T] \times \boldsymbol{R}^1)$ *qui satisfait à la relation;* $B(u, v) = \langle X, uv \rangle$ *pour tous* u *et* v.

Soit X un élément de $\mathcal{A}([0, T] \times \boldsymbol{R}^1)$. La forme $\langle X, uv \rangle$ étant linéaire et continue en v (par rapport à la topologie de $\mathcal{D}([0, T])$ bien entendu) pour chaque u fixé, elle définit donc un élément de $\mathcal{A}([0, T])$, que l'on désigne par $X_t(u)$ et on l'appelle *la coupe temporelle de X.* Car la coupe temporelle de X ainsi définie est un élément de $\mathcal{A}([0, T])$, elle n'est pas nécessairement définie pour tous t dans $[0, T]$. Pourtant il y a des cas où l'on dit qu'un processus de la coupe temporelle de X jouit de telles et de telles propriétés sur l'intervalle $[0, T]$. Cela veut dire que l'on a réussi à modifier les valeurs de $X_t(u)$ sur un ensemble négligeable de t, en sorte qu'il s'identifie avec un processus aléatoire jouissant des propriétés précisées. Evidemment cette modification ne change rien le caractére du X comme élément de $\mathcal{A}([0, T] \times \boldsymbol{R}^1)$.

Sous cette convention, on va exprimer maintenant la

Définition 2. Un élément X de $\mathcal{A}([0, T] \times \boldsymbol{R}^1)$ est dit B^+-différentiable dans l'intervalle $[0, T]$ pourvu que le processus de sa coupe temporelle $\{X_t(u), t \geq 0\}$ soit uniformement $B^+(M_4)$-différentiable dans l'intervalle $[0, T)$ pour chaque $u \in \mathcal{D}(\boldsymbol{R}^1)$ fixé; il existe un processus aléatoire $\{Y_t(u),\ 0\leq t\leq T\}$ tel que pour chaque u fixé

(D, 1) $Y.(u)$ est progressivement mesurable par rapport à la tribu

$$\mathcal{B}_{[0,t]}\times\mathcal{F}_t \text{ où } \mathcal{F}_t=\sigma(B_s;\ s\leq t).$$

(D, 2) $E|Y_t(u)|^4$ est bornée dans $[0,T)$.

(D, 3) $$\lim_{h\downarrow 0}\sup_{\substack{0<s-t\leq h\\ 0\leq s,t<T}} E\left\{\frac{1}{(s-t)^2}|X_s(u)-X_t(u)-Y_t(u)(B_s-B_t)|^4\right\}=0.$$

On désigne la relation par $(\partial/\partial B_t)X_t(u)=Y_t(u)$, ou bien par $\widehat{X_t(u)}=Y_t(u)$. Il va sans dire que l'opération $\partial/\partial B_t$ est linéaire et que la B^+-dérivée $Y_t(u)$ de $X_t(u)$ est unique à une équivalence près pour chaque u.

Il n'est pas difficile de voir que l'application $u\to Y_t(u)$ (t; fixé) est linéaire et continue par rapport à la topologie de $\mathcal{D}(\boldsymbol{R}^1)$. En effet, fixons un sous-ensemble compact K de $\boldsymbol{R}^1$ et un point t dans $[0,T)$. D'aprés les conditions (D, 1) et (D, 3), on obtient alors l'inégalité; $E|Y_t(u)|^2\leq 2\sup_{T\geq s>t}E|F(s,t;u)|^2$ où $F(s,t;u)=(X_s(u)-X_t(u))/\sqrt{s-t}$ et $u\in\mathcal{D}(K)$. Puisque pour chaque t fixé $X_t(\cdot)$ est une application linéaire, continue de $\mathcal{D}(K)$ dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$, l'application $u\to F(s,t;u)$ en est de même pour chaque $s>t$ fixés. D'autre part, il résulte de l'inégalité ci-dessous que $\sup_{T\geq s>t}E|F(s,t;u)|^2$ est finie pour chaque $u\in\mathcal{D}(K)$:

$$E|F(s,t;u)|^2\leq 2E|Y_t(u)|^2$$
$$+2E\left\{\frac{1}{s-t}|X_s(u)-X_t(u)-Y_t(u)(B_s-B_t)|^2\right\}.$$

On voit donc que la famille d'applications linéaires $\{F(s,t;\cdot),\ T\geq s>t\}$ est équicontinue d'après le théorème de Banach-Steinhaus et que l'application $Y_t(\cdot)$ est continue par rapport à la topologie de $\mathcal{D}(K)$. K étant arbitraire il en résulte la conclusion.

D'après ce que l'on vient de démontrer, on voit que la forme $\langle Y.(u),v\rangle=\int Y_s(u)v(s)ds$ est bilinéaire et séparément continue en $u\in\mathcal{D}(\boldsymbol{R}^1)$, $v\in\mathcal{D}(T)$. Par conséquent, elle définit un élément $\widehat{X}$ de $\mathcal{A}([0,T]\times\boldsymbol{R}^1)$ tel que sa coupe temporelle $\widehat{X}.(u)$ s'identifie avec $Y.(u)$. On l'appelle la B^+-dérivée de X: $\langle\widehat{X},uv\rangle=\langle\widehat{X.(u)},v\rangle$.

Proposition 1. *Soit X un élément de $\mathcal{A}([0,T]\times\boldsymbol{R}^1)$ qui est B^+-différentiable. Alors le processus aléatoire généralisé $D_x{}^pX$ $(p=1,2,\cdots)$ en est de même et l'ordre de deux opérations, $\wedge$, $D_x{}^p$ est changeable pour un tel X:*

$$(2,1)\qquad \langle\widehat{(D_x{}^pX)},\phi\rangle=\langle D_x{}^p\hat{X},\phi\rangle \text{ pour } \phi\in\mathcal{D}([0,T]\times\boldsymbol{R}^1).$$

Preuve; Il suffit de vérifier la relation (2,1) pour tous functions de la forme $\phi=uv$ $(u\in\mathcal{D}(\boldsymbol{R}^1),\ v\in\mathcal{D}([0,T]))$. Soit $Y.(u)$ la B^+-dérivée de $X.(u)$. La discussion ci-dessus montre que $Y.(u)$ est la coupe temporelle de $\hat{X}$. Donc, on a $\langle D_x{}^p\hat{X},uv\rangle=\langle\langle D_x{}^p\hat{X},u\rangle,v\rangle$ $=(-1)^p\langle\langle Y,\ D_x{}^pu\rangle,\ v\rangle=(-1)^p\langle\langle\widehat{X,\ D_x{}^pu}\rangle,\ v\rangle=\langle\langle\widehat{D_x{}^pX,\ u}\rangle,\ v\rangle=$ $\langle\langle\widehat{(D_x{}^pX)},u\rangle,v\rangle$ d'où résulte la conclusion.

Exemple 2. (i) (Fonction B-entière) Soit $f(z)$ $(z\in\boldsymbol{C})$ une fonction entière et soient X^1, X^2 des processus aléatoires réels uniformement B^+-différentiables dans l'intervalle $[0,T]$. Un processus aléatoire X est dit une fonction *B-entière* (au sens strict) s'il admet la représentation $X_t=f(X_t{}^1+iX_t{}^2)$ P-p.s. pour chaque t. Alors une fonction B-entière au sens strict est encore uniformement B^+-différentiable et on a la relation

$$(2,2)\qquad \hat{X}_t=f'(Z_t)\hat{Z}_t \quad \text{où} \quad Z=X^1+iX^2$$

et f' la dérivée de f. (ii) Soit $Y(B_t+x)$ un élément de $\mathcal{A}([0,T]\times\boldsymbol{R}^1)$ défini par $\langle Y,uv\rangle=\int_0{}^Tv(s)ds\int_0{}^\infty u(x-B_s)dx$. Alors le processus aléatoire généralisé $Y(B_t+X)$ est B^+-différentiable et sa B^+-dérivée $\hat{Y}$ est donnée par $\delta(B_t+x)$; $\langle\delta,uv\rangle=\int_0{}^Tu(-B_s)v(s)ds$.

Désignons par $\mathcal{S}^1([0,T]\times\boldsymbol{R}^1)$ l'ensemble de tous éléments X de $\mathcal{A}([0,T]\times\boldsymbol{R}^1)$ tels qu'ils soient B^+-différentiables et que les coupes temporelles $\hat{X}.(u)$ de $\hat{X}$ soient Riemann-intégrables sur $[0,T]$ au sens de $L^2(\Omega)$ pour chaque $u\in\mathcal{D}(\boldsymbol{R}^1)$. Alors pour un tel élément X, on peut définir l'intégrale stochastique $\mathcal{J}_k(X,uv)=\int X_s(u)v(s)dB_s$ $(0\leq k\leq1)$ suivant la même discussion donnée dans [6] et [7]; c'est-à-dire qu'on a $\mathcal{J}_k(X,uv)=\mathcal{J}_0(X,uv)+k\int\hat{X}_s(u)v(s)ds$ où $\mathcal{J}_0(X,uv)=\int X_s(u)\cdot v(s)d^0B_s$, l'intégrale stochastique de Itô.

Maintenant on est à poser la

Définition 3 ; soit X un élément de $\mathcal{S}^1([0,T]\times \boldsymbol{R}^1)$. Le produit $X\cdot\dot{B}$ est un élément de $\mathcal{A}([0,T]\times\boldsymbol{R}^1)$ défini par

$$(2,3)\quad \langle X\cdot\dot{B}, uv\rangle = \int X_s(u)v(s)dB_s\,,\quad u\in\mathcal{D}(\boldsymbol{R}^1),\ v\in\mathcal{D}([0,T]),$$

où l'intégrale stochastique est comprise au sens de $\mathcal{I}_{1/2}$.

(Remarque 1) (i) La définition est cohérente avec celle de $\dot{B}$ dennée dans l'exemple 1.
(ii) Car $\hat{v}=0$ pour $v\in\mathcal{D}([0,T])$, l'égalité $(2\cdot 3)$ peut s'écrire comme suit

$$(2,4)\qquad \langle X\cdot\dot{B}, uv\rangle = \tfrac{1}{2}\langle\widehat{X}, uv\rangle + \int X_s(u)v(s)d^0B_s\,.$$

Les deux derniers dans $(2\cdot 4)$ sont des applications bi-linéaires et séparément continues en u, v, donc elle vraiment définit un élément de $\mathcal{A}([0,T]\times\boldsymbol{R}^1)$.

La légitimité de la définition se trouve à la

Proposition 2. (i) *Soit $f(\xi B_t+x)$ une function B-entière au sens strict, où ξ un nombre complexe quelconque. Alors, au sens de processus aléatoire généralisé, on a l'égalité*

$$(2,5)\qquad D_t f(\xi B_t+x) = \hat{f}(\xi B_t+x)\dot{B}\,.$$

(ii) *Soit X un processus aléatoire généralisé tel que $X_t(u)=\int_0^t Y_s(u)\times dB_s$ $(0\leq t\leq T, u\in\mathcal{D}(\boldsymbol{R}^1))$ où $Y.$ est un élément de $\mathcal{S}^1([0,T]\times\boldsymbol{R}^1)$. Alors, on a l'égalité*

$$(2,6)\qquad D_t X = Y\cdot\dot{B}\,.$$

Preuve. En appliquant la formule de Itô au processus $f_t(u)=\int f\cdot(\xi B_t+x)u(x)dx$ et au $X_t(u)$, on obtient les égalités $(2\cdot 5)$, $(2\cdot 6)$.

Pour introduire les produits $X\cdot(\dot{B})^n$ $(n\geq 2)$ comme éléments de $\mathcal{A}([0,T]\times\boldsymbol{R}^1)$, il nous faut faire un saut de pensée et dont la pertinance, croit-on, ne pourrait être examinée que par des conséquences qu'il apporte.

Dans la suite, on entend par $\mathscr{S}^m([0,T]\times\boldsymbol{R}^1)$ l'ensemble de tous éléments X de $\mathscr{A}([0,T]\times\boldsymbol{R}^1)$ qui soient $(m-1)$-fois B^+-différentiables et dont les $\widehat{X}, \widehat{X}^{(2)}, \cdots, \widehat{X}^{(m-1)}(\wedge_{(k)}=(\partial/\partial B)^k)$ appartiennent encore à la classe $\mathscr{S}^1([0,T]\times\boldsymbol{R}^1)$.

Définition 4. Soit X un élément de $\mathscr{S}^m([0,T]\times\boldsymbol{R}^1)$. Le produit $X\cdot(\dot{B})^n$ $(n\leq m)$ est alors un élément de $\mathscr{A}([0,T]\times\boldsymbol{R}^1)$ défini par

$$\langle X\cdot(\dot{B})^n, uv\rangle=\frac{1}{2^{n-1}}\int\widehat{X_t(u)}^{(n-1)}\cdot v(t)\,dB_t\,,\quad u\in\mathscr{D}(\boldsymbol{R}^1),\quad v\in\mathscr{D}([0,T]),\tag{2,7}$$

avec la convention $\widehat{X}^{(0)}=X$.

L'égalité (2·7) est effectivement cohérente avec la définition 3. Voici une de ses conséquences:

Proposition 3. *Un élément X de $\mathscr{A}([0,T]\times\boldsymbol{R}^1)$ est dit B-entière au sens faible, si pour chaque fonction u de $\mathscr{D}(\boldsymbol{R}^1)$ la coupe temporelle $X.(u)$ peut s'identifier avec une fonction B-entière au sens strict. Alors, tous les fonctions B-entières au sens faible sont des solutions de l'équation suivante*

$$D_tX-2X\cdot(\dot{B})^2=0\,.\tag{2,8}$$

Preuve D'abord on constate que l'égalité (2·5) est encore valide pour tous les fonctions B-entières au sens faible. En effet, dans sa démonstration, on n'a untilisé que le fait que la coupe temporelle $f_t(u)$ est B-entière au sens strict pour chaque u. Donc, on a l'égalité; $D_tX=\widehat{X}\cdot\dot{B}$ pour tous fonctions B-entières au sens faible. Mais, d'après la définition 4, le terme $\widehat{X}\cdot\dot{B}$ égale à $2X\cdot(\dot{B})^2$ d'où la conclusion.

Intuitivement dit, la définition 4 exprime que l'opération de multiplication par $\dot{B}$ équivaut à l'opération $\sqrt{2}\,(D_t)^{1/2}$, si l'on se limite au cas des fonctions B-entières au sens faible.

Quant à l'application de la théorie, il y a des cas où l'on ne s'intéresse qu'à des espérances de processus alétoires généralisés. Deux éléments X et Y de $\mathscr{A}([0,T]\times\boldsymbol{R}^1)$ sont dits faiblement équivaux, s'ils ont la même espérance: $E\langle X-Y,\phi\rangle=0$ pour tous ϕ de $\mathscr{D}([0,T]\times\boldsymbol{R}^1)$. La relation est désignée par $X\sim Y$.

Pour un processus aléatoire généralisé X, la forme $E\langle X,\phi\rangle$ est encore linéaire et est continue, il existe donc un et un seul élément EX de $\mathscr{D}'([0,T]\times\boldsymbol{R}^1)$ tel que $EX\sim X$. Il importe de remarquer que $X\cdot(\dot{B})^n\sim(1/2^n)\widehat{X}^{(n)}$ pour $X\in\mathscr{S}^m([0,T]\times\boldsymbol{R}^1)$ $(n\leq m)$.

3. Equation de Schrödinger et la condition d'onde.

Il est clair maintenant que l'équation (1, 1), ou bien (1, 3), gagne le sens comme celle de processus aléatoires généralisés. Dans ce paragraphe, on va étudier surtous la relation entre des équations de ce type et l'équation de Schrödinger (1, 2). Les résultats de l'étude nous montrera que l'idée originelle de M. Feynman doit être modifiée, tant qu'on veut la comprendre en terme du processus de mouvement brownien.

Par préférence, on s'occupe d'abord de l'équation (1, 3);

$$D_t\psi-2\psi(\dot{B})^2=iV(x)\psi \quad \text{où} \quad V(x)=\frac{U(x)}{h}. \tag{3, 1}$$

En générale, on peut penser d'équations du type comme suit

$$\frac{1}{\xi}D_t\psi-2\psi(\dot{B})^2=\frac{i}{\xi}V(x)\psi, \tag{3, 2}$$

où ξ est un nombre complexe tel que $|\xi|^2=1$. On l'appelle *l'équation à la phase* ξ^2; l'équation (3, 1) est, par exemple, celle à la phase 1, alors que (1, 1) en est à la phase -1. En réalité, on ne va traiter que celles aux phases 1 et -1.

3.1. Equation à la phase 1 ; La définition suivante est fondamentale.

Définition 5. Un processus aléatoire généralisé $\psi(t,x,\omega)$ de la classe $\mathscr{S}^2([0,T]\times\boldsymbol{R}^1)$ est appellé la fonction d'onde du type $\boldsymbol{T}(j)$ $(j=\pm1,\pm i)$ pourve qu'il satisfait à la condition suivante, dite la condition d'onde:

(3, 3) $\hat{\psi}=k\sqrt{(\hbar/m)}\psi_x$ au sens de processus aléatoire généralisé où $k=\sqrt{j}$ ou $-\sqrt{j}$

(Remarque 2) Il est intéressant de remarquer que la condition implique

(3, 4) $E(2\sqrt{m\hbar}\cdot\dot{B}-k\hbar D_x)\psi=0.$

Si l'on entend par $2\sqrt{m\hbar}\cdot\dot{B}$ l'impulsion $\hat{p}$ de la particule considérée (une particule brownienne) et si l'on se limite au cas de fonction d'onde du type $\boldsymbol{T}(-1)$, l'équation (3·4) nous donne exactement la méme régle faite dans la théorie de la mécanique quantique;

(3, 4)′
$$\hat{p}\leftrightarrow\pm\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}.$$

Proposition 4. *Soit ψ une solution d'onde du type $\boldsymbol{T}(-i)$ de* (3, 1). *Alors l'espérance $\overline{\psi}(t,x)=E\psi(t,x,\omega)$ est une solution de* (1, 2).

Preuve Tous d'abord, on constate que le processus aléatoire généralisé $\psi_x(=D_x\psi)$ est de la classe $\mathscr{S}^1([0,T]\times\boldsymbol{R}^1)$ d'après la proposition 1, et que les deux $\hat{\psi}\dot{B}$, $k\sqrt{(\hbar/m)}\psi_x\dot{B}$ définissent le méme processus aléatoire généralisé. Donc on voit que $2E\langle\psi(\dot{B})^2,\phi\rangle=E\langle\hat{\psi}\dot{B},\phi\rangle=k\sqrt{(\hbar/m)}E\langle\psi_x\dot{B},\phi\rangle=k/2\sqrt{(\hbar/m)}E\langle(\hat{\psi}_x),\phi\rangle=k/2\sqrt{(\hbar/m)}E\langle(\hat{\psi})_x,\phi\rangle=-(i\hbar/2m)\times E\langle\psi_{xx},\phi\rangle$ pour tous $\phi\in\mathscr{D}([0,T]\times\boldsymbol{R}^1)$; $2\psi(\dot{B})^2\sim-(i\hbar/2m)\psi_{xx}$. Par conséquent; $0=E\langle\psi_t-2(\dot{B})^2\psi-iV\psi,\phi\rangle=E\langle\psi_t+(i\hbar/2m)\psi_{xx}-iV\psi,\phi\rangle$ pour tous $\phi\in\mathscr{D}([0,T]\times\boldsymbol{R}^1)$, d'où résulte la conclusion.

(Remarque 3) (i) Il est aussi facile de voir que si ψ est une solution d'onde du type $\boldsymbol{T}(i)$, son espérance $\overline{\psi}$ est une solution d'une équation comme suit

(1, 2)′
$$-\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}\overline{\psi}+\frac{h}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\overline{\psi}=-V(x)\overline{\psi}.$$

(ii) D'autre part, l'espérance d'une solution d'onde du type $\boldsymbol{T}(\pm1)$ ne satisfait pas à une équation du type Schrödinger.

Or la démonstration ci-dessus nous montre que l'équation (3, 1) admet une autre expression (sous la condition d'onde), notamment une équation de particule brownienne

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi-\eta\sqrt{\frac{\hbar}{m}}\,\dot{B}\,\frac{\partial}{\partial x}\psi=iV\psi\,, \tag{3, 5}$$

où η est un nombre complexe.

Dans les articles précédents ([5], [7], [8]) on a étudié le problème de Cauchy de l'équation pour le cas où les quantités η, $iV(x)$ sont réelles. On n'y a pas explicitement introduit la notion de processus aléatoires généralisés, avec laquelle les choses deviennent plus claires comme on le voit maintenant dans le

Théorème 2; (i) *Une solution du type $T(\eta^2)$ de (3, 1) satisfait à l'équation (3, 5). Inversement, toute solution de (3, 5) est nécessairement une solution du type $T(\eta^2)$ de (3, 1).*
(ii) *L'espéranbe $E\psi$ d'une solution ψ de (3, 5) pour $\eta=\pm\sqrt{-i}$ est donc une solution de (1, 2). Inversement, si une solutiou ψ de (3, 5) pour η quelconque est telle que son espérance $E\psi$ satisfasse à l'équation (1, 2). Alors la solution ψ est nécessairement du type $T(-i)$.*

Preuve. (i) La première partie étant évidente, on va montrer la reste. Soit ψ une solution de (3·5). D'après la définition 3, on voit que la coupe temporelle de ψ satisfait à la relation;

$$\psi_t(u)-\eta\sqrt{\frac{\hbar}{m}}\int_0^t\psi_s'(u)\,dB_s=\psi_0(u)+i\int_0^t\psi_s(uV)\,ds \qquad \text{pour}$$

tout $u\in\mathcal{D}(\boldsymbol{R}^1)$, où $\psi_.'(u)$ est la coupe temorelle de $D_x\psi$. Il en résulte que ψ est une solution d'onde du type $\boldsymbol{T}(\eta^2)$ et d'où la conclusion d'après la définition 4.
(ii) Evident.

Notons que le Théorème 2 nous donne la réponse pour la question proposée dans [8]. Le schéma ci-dessous exprime la relation entre les équations (1, 2), (3, 1) et (3, 5);

$$\begin{tikzcd} \begin{array}{c}\text{Eq.}(3,1)\\ \text{avec } (3,3) \text{ du type } T(-i)\end{array} \arrow[rr, "E\psi"] \arrow[dr, shift left] & & \text{Eq.}(1,2) \\ & \begin{array}{c}\text{Eq.}(3,5)\\ (\eta=\pm\sqrt{-i})\end{array} \arrow[ur, "E\psi"'] \arrow[ul, shift left] & \end{tikzcd}$$

A la question d'existence d'une solution d'onde du type $\boldsymbol{T}(-i)$ on va répondre par

Exemple 3; On suppose que la fonction $V(x)$ soit la restriction sur l'axe réel d'une fonction entière $\overline{V}(z)$ telle que l'intégrale $E\exp\cdot\{\mathcal{R}e\int_0^t\overline{V}(k\sqrt{\hbar/m}(B_t-B_s)+x)ds\}$ $(k=\sqrt{-i}$ ou $-\sqrt{-i})$ soit convergeante pour tout t. (par exemple, $V(x)=$constante ou$=$cx, ou bien $=cx^2$ etc.). Soit $\psi_0(z)$ une fonction entière telle que $|\psi_0(x+iy)|\leq C\cdot\exp(by^2)$ (C, b; des constantes réelles positives et indépendantes de x et de y). Alors il est facile de voir que la fonction $\psi(t,x,\omega)=\psi_0\cdot(k\sqrt{\hbar/m}(B_t+x))\cdot\exp\{\int_0^t\overline{V}(k\sqrt{\hbar/m}(B_t-B_s)+x)ds\}$ est de la classe $\mathcal{S}^2([0,T_b]\times\boldsymbol{R}^1)$ où $T_b=m/2b\hbar>0$. De plus, à l'aide de la proposition 2, on voit qu'elle est une solution de $(3\cdot5)$ du type $\boldsymbol{T}(-i)$ au sens fort.

3.2. Equation à la phase -1; Considérons l'équation $(3\cdot2)$ pour $\xi=i$. On voit que tous les énoncés établis dans le cass précédent restent encore vrais, si l'on remplace le terme "$\boldsymbol{T}(-i)$" par $\boldsymbol{T}(-1)$. Par exemple, la proposition 4 devient comme suit

Proposition 4′; *Soit ψ une solution d'onde du type $\boldsymbol{T}(-1)$ de*

$$\frac{1}{i}D_t\psi-2\psi(\dot{B})^2=V(x)\psi\,. \tag{3, 6}$$

Alors, son espérance $\overline{\psi}$ est une solution de l'équation $(1\cdot2)$.

Dans ce cas, l'équation complexe de particule brownienne devient

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi-ik\sqrt{\frac{\hbar}{m}}\,\dot{B}\frac{\partial}{\partial x}\psi=iV\psi\,,\ k=i \text{ ou } -i\,. \tag{3, 5)$'$}$$

Il est trés souhaitable que l'équation (3·6) possède une solution du type $\boldsymbol{T}(-1)$. Parce que c'est cette équation qui est fidèle à l'idée originelle de M. Feynman, et parce que la solution de ce type possède la bonne propriété expliquée dans la remarque 2. Mais, en regardant la proposition 3, on constate qu'il est peu probable qu'une telle solution existe. D'ailleurs on a le

Théorème 3. *On suppose que la fonction $V(x)$ soit non constante et de la classe $\mathcal{E}$, alors pour l'équation (3, 6) il n'existe pas une solution nontriviale du type $\boldsymbol{T}(-1)$.*

Preuve; Soit ψ une solution satisfaisant à la condition d'onde de (3·3) pour un $k(=i$ ou $-i)$. On va montrer que celle-ci est nécessairement zéro comme élément de $\mathcal{A}([0,T]\times\boldsymbol{R}^1)$.

$\hat{\psi}$ étant un élément de $\mathcal{S}^1([0,T]\times\boldsymbol{R}^1)$, la coupe temporelle $\hat{\psi}_t(u)$ $(u\in\mathcal{D}(\boldsymbol{R}^1))$ est presque sûrement continue dans $[0,T]$. Par conséquent on peut supposer que pour chaque u fixé la relation suivante est valide presque sûrement pour tous t dans $[0,T]$:

$$\hat{\psi}_t(u)=k\sqrt{\frac{\hbar}{m}}\,\psi_t'(u) \tag{3, 8}$$

où $\psi'_\cdot(u)$ est la coupe temporelle du ψ_x. De la relation (3·8) résulte l'existence d'un élément $a(t,\omega;u)$ de $\mathcal{A}([0,T])$ tel que $\hat{a}(t,\omega;u)=0$ P-p.s. dans $[0,T]$ et que $\psi_t(u)=k\sqrt{\hbar/m}\int_0^t\psi_s'(u)\,dB_s+a(t,\omega;u)$ à une constante près. Autrement dit, au sens de processus aléatoire généralisé sur $\mathcal{D}([0,T])$, on a l'égalité

$$D_t\psi_t(u)=k\sqrt{\frac{\hbar}{m}}\,\psi_t'(u)\dot{B}+\dot{a}(t,\omega;u). \tag{3, 8$'$}$$

D'autre part, on sait que ψ satisfait dans ce cas à l'équation de particule brownienne (3·5)$'$ qui implique aussitôt

$$D_t\psi_t(u)=ik\sqrt{\frac{\hbar}{m}}\,\psi_t'(u)\dot{B}+i\psi_t(uV). \tag{3, 5$''$}$$

De ces équations (3·5)$''$, (3·8)$'$ on obtient l'égalité:

$$D_t((1-i)\psi_t(u)+a(t,\omega;u))=i\int^t\psi_s'(uV)\,dB_s+ia(t,\omega;uV).$$

Celle-ci montre que la coupe temporelle $\psi_t(u)$ est différentiable en t au sens ordinaire et ce fait n'est possible qu'au moins pour le cas: $\psi'.(u) = \langle D_x\psi, u\rangle = 0$ presque sûrement pour chaque u. C'est-à-dire que $\psi(t, x, \omega) = \psi(t, \omega)$ ne dépend pas de x. Du fait que $\psi(t, \omega)$ est une solution de $(3\cdot5)'$, on trouve finalement $\psi = 0$.

4. Un commentaire de la condition d'onde.

Il est facile de voir que si élément X de la classe $\mathscr{S}^1([0, T] \times \boldsymbol{R}^1)$ satisfait à condition d'onde $(3\cdot3)$ pour un k, alors il est nécessairement de la classe $\mathscr{S}^\infty([0, T] \times \boldsymbol{R}^1)$; d'après la proposition 1, on a toujours l'égalité suivante.

$$\hat{X}^{(n)} = \left(k\sqrt{\frac{\hbar}{m}}\right)^{n-1} (D_x^{n-1}X) = \left(k\sqrt{\frac{\hbar}{m}}\right)^{n-1} D_x^{n-1}(\hat{X}) \tag{4, 1}$$

$$= \left(k\sqrt{\frac{\hbar}{m}}\, D_x\right)^{n} X, \quad (n \geq 1).$$

Donc le terme $\mathscr{S}^2([0, T] \times \boldsymbol{R}^1)$ dans la définition 6 peut être remplacé par $\mathscr{S}^1([0, T] \times \boldsymbol{R}^1)$.

Prenons une fonction d'onde X du type $\boldsymbol{T}(-i)$ ou du $\boldsymbol{T}(i)$. On voit qu'elle satisfait à l'équation $(\wedge - kM\cdot D_x)(\wedge + kM\cdot D_x)(\wedge - \bar{k}M\cdot D_x)(\wedge + \bar{k}M\cdot d_X)X = 0$ ($\bar{k}$; le complexe conjugé de k, M; $M = \sqrt{\hbar/m}$). C'est-à-dire qu'on a

$$((\wedge)^4 + (M\cdot D_x)^4)X = 0. \tag{4, 2}$$

De même, si X est du type $\boldsymbol{T}(-1)$, on obtient

$$((\wedge)^2 + (M\cdot D_x)^2)X = 0, \tag{4, 3}$$

et pour X du type $\boldsymbol{T}(1)$

$$((\wedge)^2 - (M\cdot D_x)^2)X = 0. \tag{4, 4}$$

Autrement dit, la condition d'onde du type $\boldsymbol{T}(\pm i)$ ou du type $\boldsymbol{T}(-1)$ demande que la fonction aléatoire X soit "*B-harmonique*", une fonction satisfaisante à une équation comme $(4\cdot2)$ ou bien comme $(4\cdot3)$. Ce n'est pas un usage excessif du mot. En effect, si l'on prend une fonction harmonique $f(x, y)$ $(x, y \in \boldsymbol{R}^1)$, alors on trouvera que le processus aléatoire $X(t, x) = f(cB_t, x)$ (c; constante) est B-harmonique.

Naturellement *une fonction B-entière est B-harmonique.* Mais l'énoncé réciproque n'est plus vrais. L'étude détaillée de ces deux notions devra se faire à une autre place.

Considérons l'équation simple comme suit

$$D_t\psi-2\psi(\dot{B})^2=0\,. \tag{4, 5}$$

Si l'on cherche des solutions d'onde du type $\boldsymbol{T}(\pm i)$, $\boldsymbol{T}(1)$ ou bien $\boldsymbol{T}(-1)$, on trouve aussitôt que l'espérance de chaque solution satisfait à

(i) *Equation de Schrödinger*; $(1/i)\,(\partial/\partial t)\bar{\psi}=\pm\,(\hbar/2m)\,(\partial^2/\partial x^2)\bar{\psi}$, pour la solution du type $\boldsymbol{T}(\pm i)$.

(ii) *Equation de la chaleur au temps renversé*; $(\partial/\partial t)\bar{\psi}+(\hbar/2m)(\partial^2/\partial x^2)\bar{\psi}=0$, pour la solution du type $\boldsymbol{T}(-1)$.

(iii) *Equation de la chaleur*; $(\partial/\partial t)\bar{\psi}=(\hbar/2m)\,(\partial^2/\partial x^2)\bar{\psi}$, pour la solution du type $\boldsymbol{T}(1)$.

On est parti de l'équation (4, 5) pour arriver à des équation déterministes dont les types sont assez différents de l'une et de l'autre. On peut trouver la cause de ce fait à des choix de la condition d'onde, ou plus précisément dans la différence entre des équations (4, 2), (4, 3) et (4, 4).

MATHEMATICAL INSTITUTE
TÔHOKU UNIVERSITY

Référence

[1] Feynman, R. P.: Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mecanics. Rev. Modern Physics, Vol. 20, No. 2 (1948).

[2] Dewitt, C. M.: Feyman's path integral. Comm. Math. Phys. **28**, 47–67 (1972).

[3] Gel'fand, I. M. et N. Ya. Vilenkin: Les Distribution, tome 4. Dunod, Paris 1967.

[4] Itô, K.: Wiener Integral and Feynman Integral. 4-th Berkeley Symp. Vol. II (1961).

[5] Ogawa, S.: Equation uni-dimensionelle de particule brownienne. (en japonais) thèse de "Master of Sciences", l'Université de Kyoto. Japon (1969).

[6] Ogawa, S.: On a Riemann-definition of the stochastic integral, (I) et (II). Proc. Japan Acad. Vol. 46, No. 2 (1970).

[7] Ogawa, S.: A partial differential equation with the white noise as a coefficient. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **28**, 53–71 (1973).

[8] Ogawa, S.: Sur la question d'unicité des solutions du problème de Cauchy d'un système d'équations de particule brownienne. à parître (C. R. Acad. Sci., Paris 1975).

[9] Schwartz, L.: Théorie des Distributions. Hermann, Paris. 1966.