J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)
16-1 (1976) 71-92

# Parabolicité d'une fonction entière

Par

Hiroshi YAMAGUCHI

(Communiqué par Prof. Kusunoki, le 12 novembre, 1974)

## Introduction.

T. Nishino, dans ses mémoires successifs [5], est à faire nouvelles recherches sur les fonctions entières de plusieurs variables complexes. Soit $f(x, y)$ une fonction entière de deux variables complexes $x$ et $y$ et soit $z$ une valeur complexe. Une composante irréductible de la surface analytique dans l'espace $(x, y)$, définie par l'équation $f(x, y) = z$, est dite une surface première de $f$ avec valeur $z$. Elle se regarde comme une surface de Riemann ouverte d'une variable complexe. Elle est donc, ou bien de type parabolique, ou bien de type hyperbolique (voir, par exemple, [2]). En outre, au point de vue de topologie, elle est déterminée par son genre $g$ et par le nombre $n$ des composantes de sa frontière. Une surface première de laquelle $g$ et $n$ sont finis, est dite de type fini. Soit $(E)$ l'ensemble de toutes les fonctions entières de deux variable complexes. T. Nishino, dans le mémoire [IV], a donné la classification suivante de $(E)$: Une fonction $f$ de $(E)$ appartient à la classe $(P)$ si et seulement si toute surface première de $f$ est de type parabolique. Une fonction $f$ de $(P)$ appartient à la classe $(A)$ si et seulement si toute surface première de $f$ est de type fini. Il est évident que $(E) \supsetneqq (P) \supsetneqq (A)$. Dans son mémoire [V], sur les fonctions de la classe $(A)$ il est arrivé à un résultat définitif: *Supposons que $f$ appartient à la classe $(P)$. Soit $K$ l'ensemble de $z$ tel qu'il existe au moins une surface première de $f$, qui est de type fini, avec valeur $z$. Supposons de plus que la capacité logarithmique de $K$ dans le plan $z$ n'est pas nulle. Alors, $f$ appartient à la classe $(A)$. D'ailleurs, il est toujours possible de décomposer $f$ en la forme suivante: $f(x, y) = F[P(\xi(x, y), \eta(x, y))]$,* *où $P(x,y)$ est un polynôme dans l'espace $(x,y)$, $(\xi(x,y),\eta(x,y))$ est une automorpoisme analytique de l'espace $(x,y)$ et $F(z)$ est une fonction entière d'une variable complexe $z$.*

Or, dans le mémoire actuel, nous envisageons les fonctions entières de la classe $(P)$ et montrons deux théorèmes suivants:

**1.** *Soit $f\in(E)$ et soit $K$ l'ensemble de $z$ tel qu'il existe au moins une surface première de $f$ qui est de type parabolique avec valeur $z$. Si la capacité logarithmique de $K$ n'est pas nulle, alors $f\in(P)$.*
**2.** *Pour une fonction quelconque de la classe $(P)$, il n'existe jamais de surface première de type $(B)$ (pour définition et signification de type $(B)$ voir le mémoire [I, II] de T. Nishino).*

Pour la démonstration nous préparons un lemme comme suite. Soit $\mathfrak{D}$ un domaine multivalent étalé au-dessus d'un di-cylindre de la forme $(\Delta, C)$, où $\Delta$: $|z|<\rho$ et $C$: $|w|<\infty$, de deux variables complexes $z$ et $w$. On écrit $\mathfrak{D}(c)$ la fibre dans $\mathfrak{D}$ qui se trouve au-dessus de la droite analytique $z=c$. Supposons que pour tout $z$ dans $\Delta$, $\mathfrak{D}(z)$ est irréductible et qu'il y a au moins un feuillet de $\mathfrak{D}$ qui contient une partie univalente étalée au-dessus d'un voisinage de la droite analytique $w=0$ dans $(\Delta, C)$. On désigne par $O$ l'ensemble de tous les points dans la partie mentionnée ci-dessus qui se trouve au-dessus de la droite analytique $w=0$ et posons $O_c=\mathfrak{D}(c)\cap O$. On peut alors considère la fonction de Green $g(z,w)$ sur la fibre $\mathfrak{D}(z)$ (regardée comme une surface de Riemann ouverte d'une variable complexe), et la constante de Robin $\lambda(z)$ par rapport au point $O_c$ et au paramètre local $w$. C'est-à-dire,

$$g(z,w)=\log\frac{1}{|w|}+\lambda(z)+\mathrm{Re}\{\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z)w^n\} \tag{1}$$

dans un voisinage de $O_c$, où $g(z,w)\equiv+\infty$ dans $\mathfrak{D}(z)$ et $\lambda(z)=+\infty$ si et seulement si $\mathfrak{D}(z)$ est de type parabolique. Voici le

**Lemme.** *Si $\mathfrak{D}$, considéré comme une variété de dimension 2, est une variété de Stein, alors $\lambda(z)$ est une fonction surharmonique de $z$ dans $\Delta$.*

Non seulement ce lemme est une clef pour démontrer les Théorèmes 1 et 2, mais aussi il est utile de résoudre un *problème d'uniformisation* suivant: **3.** *Supposons que toute fibre $\mathscr{D}(z)$ est de type parabolique et de genre* 0. *Supposons de plus que $\mathscr{D}$ est une variété de Stein. Alors, $\mathscr{D}$ peut être transformée en un domaine univalent d'un dicylindre* $(|z'|<\rho, |w'|\leqq\infty)$ *dans l'espace de deux variables complexes $z'$ et $w'$ par une transformation analytique de la forme $z'=z$, $w'=f(z,w)$*. Au cas particulier, ceci donne une nouvelle démonstration du Lemme fondamental par T. Nishino [II, p. 253]. Il nous semble que notre théorème d'uniformisation deviendra une base de recherches sur les fonctions entières de la classe $(P)$.

## 1. Le domaine satisfaisant à la condition (a).

Nous avons vérifié, dans le mémoire [9], le lemme mentionné dans l'introduction au cas où toute fibre $\mathscr{D}(z)$ est de genre 0, et, dans [10], celui du cas où la frontière de $\mathscr{D}(z)$ ne se meut pas avec $z$. Dans la section actuel, d'abord nous traitons le cas où le domaine $\mathscr{D}$ de Stein satisfait aux conditions suivantes:

(a) La frontière $\partial\mathscr{D}(z)$ de $\mathscr{D}(z)$ se compose en nombre fini des courbes analytiques au sens réel et se meut doucement avec $z$.

(a′) Pour tout $z$ dans $\varDelta$, $\mathscr{D}(z)$ n'a aucun point de ramification comme un domaine multivalent étalé au-dessus du plan $w$.

En détail, la condition (a) signifie qu'il existe une fonction réelle $\Psi(z,w)$ qui est analytique aux 4 variables $x, y, u$ et $v$, où $z=x+iy$, $w=u+iv$, dans un voisinage de la frontière du domaine $\mathscr{D}$ et de laquelle $\partial\Psi/\partial u$ et $\partial\Psi/\partial v$ ne sont nulles en même temps à aucun point de $(z,\partial\mathscr{D}(z))$ et que $\{(z,w): z\in\varDelta, \Psi(z,w)=0\}=\bigcap_{z\in\varDelta}(z,\partial\mathscr{D}(z))$. Le principe de réflection donne que la fonction de Green $g(z,w)$ sur la fibre $\mathscr{D}(z)$ peut être uniquement étendue à la fonction $\hat{g}(z,w)$ qui est harmonique même au voisinage $V(z)$ de $\partial\mathscr{D}(z)$ et qui est positive dans $V(z)\cap\mathscr{D}(z)$, zéro sur $\partial\mathscr{D}(z)$ et négative $V(z)-\mathscr{D}(z)$. Il s'en suit naturellement que $\hat{g}(z,w)$ s'exprime une fonction de la classe $C^2$ par rapport aux variables $x, y, u$ et $v$ définie dans un voisinage de $\bigcup_{z\in\varDelta_0}(z,\partial\mathscr{D}(z))$, où $\varDelta_0$ est un sous-domaine quelconque contenu à l'intérieur complet de $\varDelta$. Pour simplicité écrivons à nouveau $\hat{g}(z,w)$ par $g(z,w)$. Pour démontrer le lemme, il suffit de voir que

$\lambda(z)$ est surharmonique au point $z=0$. Désormais nous nous bornons à justifier l'inégalité

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\lambda(z)\right]_{z=0}\leqq 0. \tag{2}$$

En abrégé, posons $C=\partial\mathcal{D}(0)$ et prenons que la direction de la courbe $C$ est positive par rapport au domaine $\mathcal{D}(0)$. La notation $\partial/\partial n$ désigne la dérivé normale à la direction intérieure et d$s$ l'élément d'arc. Posons $(\partial[\ ]/\partial n)\mathrm{d}s=\mathrm{d}^*[\ ]$. Comme d'habitude, sous les conditions (a) et (a'), la formule de Green nous donne

$$\lambda(z)-\lambda(0)=-\frac{1}{2\pi}\int_C g(z,\zeta)\,\mathrm{d}^*g(0,\zeta) \tag{3}$$

pour tout $z$ suffisamment voisin de $z=0$. En utilisant la dérivé complexe: $\partial/\partial w=1/z(\partial/\partial u-i(\partial/\partial v))$ et $\partial/\partial\bar{w}=1/2(\partial/\partial u+i(\partial/\partial v))$, nous avons le long de $C$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^*g(0,w)&=-\frac{\partial g(0,w)}{\partial v}\mathrm{d}u+\frac{\partial g(0,w)}{\partial u}\mathrm{d}v \\ &=\frac{1}{i}\left(\frac{\partial g(0,w)}{\partial w}\mathrm{d}w-\frac{\partial g(0,w)}{\partial\bar{w}}\mathrm{d}\bar{w}\right).\end{aligned} \tag{4}$$

Puisque $\mathcal{D}$ est une variété de Stein et que $\mathcal{D}=\{(z,w):g(z,w>0\}$ et $\partial\mathcal{D}\cap\{z\in\Delta\}=\{(z,w):g(z,w)=0\}$, on sait que à tout point frontière $(z,\zeta)$ du domaine $\mathcal{D}$ tel que $z\in\Delta$, la fonction $g(z,w)$ s'exprime une de celles de E. E. Levi [4]. Alors, soit $(0,\zeta)$ un point quelconque sur $C$. On peut tracer un voisinage $(\gamma,\delta_\zeta)$ de $(0,\zeta)$ de la forme $\gamma:|z|\leqq\rho_0$, $\delta_\zeta:|w-\zeta|\leqq\rho_\zeta$ et une une surface analytique $\sigma_\zeta: w=f_\zeta(z)$ dans $(\gamma,\delta_\zeta)$ qui passe par $(0,\zeta)$ et qui reste dans $[(\bigcup_{z\in\gamma}V(z))-\mathcal{D}]$, où $\rho_0,\rho_\zeta$ sont des petits nombres positifs et $\rho_0$ ne depend pas de point $\zeta\in C$. D'après E. E. Levi, on peut faire à prendre $\sigma_\zeta$ de la forme

$$f_\zeta(z)=\zeta+\alpha_\zeta z+\beta_\zeta z^2$$

où $\alpha_\zeta$ et $\beta_\zeta$ sont des certaines constantes. A ce moment, le coefficient de degré un: $\alpha_\zeta=a_{1\zeta}+ia_{2\zeta}$ a été uniquement déterminé (indépendent en prenant $\sigma_\zeta$) par l'équation suivante:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial u}a_{1\zeta}+\dfrac{\partial g}{\partial v}a_{2\zeta}+\dfrac{\partial g}{\partial x}=0 \\[2ex] \dfrac{\partial g}{\partial v}a_{1\zeta}-\dfrac{\partial g}{\partial u}a_{2\zeta}+\dfrac{\partial g}{\partial y}=0 \end{cases}$$

où on sous-entend que les dérivées sont prises au point $(0,\zeta)$. En utilisant la dérivé complexe on a $[\partial g/\partial w]_{(0,\zeta)}\times\alpha_\zeta=-[\partial g/\partial z]_{(0,\zeta)}$. D'aprés l'hypothèse (a), on a $\alpha_\zeta=-[(\partial g/\partial z)/(\partial g/\partial w)]_{(0,\zeta)}$. En outre il vient $g(z,f_\zeta(z))\leqq 0=g(0,f_\zeta(0))$ dans $\gamma$, c'est-à-dire, la fonction $g(z,f_\zeta(z))$ dans $\gamma$ atteit le maximum local au point $z=0$. Par suite, nous avons

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)g(z,f_\zeta(z))\right]_{z=0}\leqq 0. \tag{5}$$

Puisque

$$\frac{\partial^2 g(z,f_\zeta(z))}{\partial\bar z\partial z}=\left[\frac{\partial^2 g}{\partial\bar z\partial z}+\frac{\partial^2 g}{\partial\bar w\partial z}\left(\overline{\frac{\mathrm{d}f_\zeta(z)}{\mathrm{d}z}}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 g}{\partial w\partial\bar z}\frac{\mathrm{d}f_\zeta(z)}{\mathrm{d}z}+\frac{\partial^2 g}{\partial\bar w\partial w}\left|\frac{\mathrm{d}f_\zeta(z)}{\mathrm{d}z}\right|^2\right]_{(z,f_\zeta(z))},$$

$\partial^2 g/\partial\bar w\partial w\equiv 0$ dans $\gamma$ et $[\mathrm{d}f_\zeta/\mathrm{d}z]_{z=0}=\alpha_\zeta=-[(\partial g/\partial z)/(\partial g/\partial w)]_{(0,\zeta)}$, nous avons

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)g(z,f_\zeta(z))\right]_{z=0}$$

$$=4\left[\frac{\partial^2 g}{\partial\bar z\partial z}-2\,\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial^2 g}{\partial w\partial\bar z}\frac{\partial g}{\partial z}\Big/\frac{\partial g}{\partial w}\right\}\right]_{(0,\zeta)}.$$

D'après l'inégalité (5) nous trouvons, pour tout $\zeta$ sur $C$,

$$\left[\frac{\partial^2 g}{\partial\bar z\partial z}\right]_{(0,\zeta)}\leqq 2\,\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial^2 g}{\partial w\partial\bar z}\frac{\partial g}{\partial z}\Big/\frac{\partial g}{\partial w}\right\}_{(0,\zeta)}. \tag{6}$$

Considérons l'intégrale suivante:

$$\mathrm{I}=-\frac{1}{2\pi}\int_C 2\,\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial^2 g}{\partial w\partial\bar z}\frac{\partial g}{\partial z}\Big/\frac{\partial g}{\partial w}\right\}_{(0,\zeta)}\mathrm{d}^*g(0,\zeta).$$

En vertu de (4), il vient

$$= -\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\left\{\int_C\left[\frac{\partial^2 g}{\partial w g \bar{z}}\frac{\partial g}{\partial z}\right]_{(0,\zeta)}\mathrm{d}\zeta\right\}$$

$$-\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\left\{\int_C\left[\frac{(\partial^2 g/\partial\bar{w}\partial z)(\partial g/\partial\bar{z})(\partial g/\partial w)}{\partial g/\partial\bar{w}}\right]_{(0,\zeta)}\mathrm{d}\zeta\right\}$$

$$= \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2.$$

D'abord calculons l'intégrale $\mathrm{I}_1$. La fonction $g(z, w)$ a la singulité logarithmique au point $O_z$ mais d'après l'expression (1) on sait que $[\partial g/\partial z]_{(0,w)}$ est une fonction harmonique dans tout le domaine $\mathscr{D}(0)$ et que $[\partial/\partial w(\partial g/\partial\bar{z})]_{(0,w)}\,\mathrm{d}w$ s'exprime une dérivé holomorphe de première sorte sur $\mathscr{D}(0)$, parce que, pour tout point $z$ fixé, $g(z, w)$ est une fonction harmonique par rapport à $w$ dans $\mathscr{D}(z)$ (sauf au point $O_z$). Par conséquent $[(\partial^2 g/\partial w\partial\bar{z})(\partial g/\partial z)]_{(0,w)}\,\mathrm{d}w$ devient une 1-forme regulière sur $\mathscr{D}(0)$ qui n'est plus nécessairement fermée. Grâce à la formule de Stokes, nous avons

$$-\frac{1}{\pi}\int_C\left[\frac{\partial^2 g}{\partial w\partial\bar{z}}\frac{\partial g}{\partial z}\right]_{(0,\zeta)}\mathrm{d}\zeta$$

$$= -\frac{1}{\pi}\iint_{\mathscr{D}(0)}\frac{\partial}{\partial\bar{w}}\left\{\left[\frac{\partial^2 g}{\partial w\partial\bar{z}}\frac{\partial g}{\partial z}\right]_{(0,w)}\right\}\mathrm{d}\bar{w}\wedge\mathrm{d}w$$

$$= -\frac{1}{\pi}\iint_{\mathscr{D}(0)}\left[\frac{\partial^3 g}{\partial\bar{w}\partial w\partial\bar{z}}\frac{\partial g}{\partial z}+\frac{\partial^2 g}{\partial w\partial\bar{z}}\frac{\partial^2 g}{\partial\bar{w}\partial z}\right]_{(0,w)}\mathrm{d}\bar{w}\wedge\mathrm{d}w.$$

Puisque $\partial^3 g/\partial\bar{w}\partial w\partial\bar{z}\equiv 0$, $\partial^2 g/\partial w\partial\bar{z}\equiv\overline{(\partial^2 g/\partial\bar{w}\partial z)}$ et $\mathrm{d}\bar{w}\wedge\mathrm{d}w = 2i\mathrm{d}u\mathrm{d}v$, il vient

$$= -\frac{2i}{\pi}\iint_{\mathscr{D}(0)}\left|\left[\frac{\partial^2 g}{\partial\bar{w}\partial z}\right]_{(0,w)}\right|^2\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Par conséquent nous avons $\mathrm{I}_1 = -2/\pi\iint_{\mathscr{D}(0)}|[\partial^2 g/\partial\bar{w}\partial z]_{(0,w)}|^2\mathrm{d}u\mathrm{d}v \leqq 0$. Ensuite envisageons l'intégrale $\mathrm{I}_2$. Soit $\zeta$ un point quelconque sur $C$ et soit $g^*(0, w)$ une fonction harmonique conjugée dans un voisinage de $\zeta$ contenu dans $V(0)$. Alors, $G(0, w) = g(0, w) + ig^*(0, w)$ y s'exprime une représentation conforme, $\mathrm{Re}\,G(0, \zeta) = 0$ sur la courbe $C$ et $1/i\{\mathrm{d}G(0, \zeta)\} < 0$ le long de $C$ par rapport à la direction de $C$. En vertu de $[\partial g/\partial w]_{(0,w)}\mathrm{d}w = \frac{1}{2}\mathrm{d}G(0, w)$ et de l'expression (4) nous avons $[\partial g/\partial w]_{(0,\zeta)}\mathrm{d}\zeta + [\partial g/\partial\bar{w}]_{(0,\zeta)}\mathrm{d}\bar{\zeta} = 0$ et $\mathrm{d}^*g(0, \zeta) < 0$ le long de $C$. Il vient donc que

$$\mathrm{I}_2=\mathrm{Im}\left\{-\frac{1}{\pi}\int_C\left[\frac{\partial^2 g}{\partial\bar{w}\partial z}\frac{\partial g}{\partial\bar{z}}\frac{\partial g}{\partial w}\Big/\frac{\partial g}{\partial\bar{w}}\right]_{(0,\zeta)}d\zeta\right\}$$

$$=\mathrm{Im}\left\{\frac{1}{\pi}\int_C\left[\frac{\partial^2 g}{\partial\bar{w}\partial z}\frac{\partial g}{\partial\bar{z}}\right]_{(0,\zeta)}d\bar{\zeta}\right\}$$

$$=\mathrm{I}_1.$$

Après tout nous avons

$$\mathrm{I}=-\frac{4}{\pi}\iint_{\mathfrak{D}(0)}\left|\left[\frac{\partial^2 g}{\partial\bar{w}\partial z}\right]_{(0,w)}\right|^2 du dv\leqq 0.$$

Nous ici multiplions les deux côtés de l'inégalité (6) par $-1/2\pi\cdot d^*g(0,\zeta)>0$ et intégrons le long de $C$. Nous avons alors

$$-\frac{1}{2\pi}\int_C\left[\frac{\partial^2 g}{\partial\bar{z}\partial z}\right]_{(0,\zeta)}d^*g(0,\zeta)\leqq$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_C 2\,\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial^2 g}{\partial w\partial\bar{z}}\frac{\partial g}{\partial z}\Big/\frac{\partial g}{\partial w}\right\}_{(0,\zeta)}d^*g(0,\zeta)=\mathrm{I}.$$

Puisque $g(z,w)$ est de la classe $C^2$ rapport aux variables $x$, $y$, $u$ et $v$, il s'en suit en vertu de la formule (3) que

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\lambda(z)\right]_{z=0}=4\left[\frac{\partial^2}{\partial\bar{z}\partial z}\{\lambda(z)-\lambda(0)\}\right]_{z=0}$$

$$=4\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_C\left[\frac{\partial^2 g}{\partial\bar{z}\partial z}\right]_{(0,\zeta)}d^*g(0,\zeta)\right\}$$

$$\leqq-\frac{16}{\pi}\iint_{\mathfrak{D}(0)}\left|\left[\frac{\partial^2 g}{\partial\bar{w}\partial z}\right]_{(0,w)}\right|^2 du dv\leqq 0.$$

Par conséquent, l'inégalité (2) est complètement démontrée. On sait donc que $\lambda(z)$ est une fonction surharmonique dans $\Delta$ sous les conditions (a) et (a$'$). **C.Q.F.D.**

D'après l'argument ci-dessus nous avons une remarque: *Supposons que $\mathfrak{D}$ est pseudoconvexe par rapport aux deux côtés, autrement-dit, pour tout point frontière $(z,\zeta)$ du domaine $\mathfrak{D}$ tel que $z\in\Delta$, le domaine et le complémentaire de $\mathfrak{D}$ sont pseudoconvexes au même temps. Alors on peut poser l'égalité suivante:*

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\lambda(z)=-\frac{16}{\pi}\iint_{\mathcal{D}(z)}\left|\left[\frac{\partial^2 g}{\partial\bar{w}\partial z}\right]_{(z,w)}\right|^2 dudv.$$

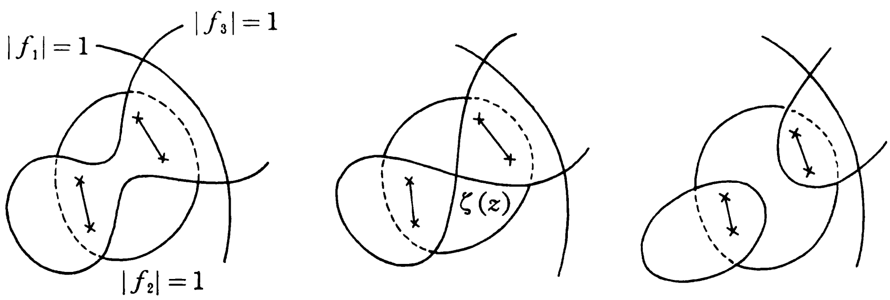
En second lieu, considérons la variété de Stein $\mathcal{D}$ qui satisfait seulement à la condition (a) et qui ne satisfait pas nécessairement à (a′). Considérons le système de tous les points de ramification de $\mathcal{D}(z)$. Il consiste das fonctions algébroides en nombre fini $\{\xi_1(z),\cdots,\xi_n(z)\}:w^n+\alpha_1(z)w^{n-1}+\cdots+\alpha_n(z)=0$ où $\alpha_i(z)$ $(i=1,\cdots,n)$ sont des fonctions holomorphes et uniformes de $z$ dans $\Delta$. D'après la condition (a) aucun $\xi_i(z)$ n'est contenue dans la frontière du domaine $\mathcal{D}(z)$. Soit $(k_i-1)$ l'ordre de ramification du point $\xi_i(z)$. D'abord, nous examineons $\lambda(z)$ au point $z_0$ tel que $\xi_i(z_0)\neq\xi_j(z_0)$ pour $i\neq j$ $(i,j=1,\cdots,n)$. Soit $\Delta_0=\{|z-z_0|<\rho_0\}$ un voisinage de $z_0$ dans lequel $\xi_i(z)\neq\xi_j(z)$ $(i\neq j)$ pour aucun $z$. Quel que soit $\varepsilon$ un nombre positif suffisamment petit, pour tout $z$ dans $\Delta_0$ on peut tracer sur $\mathcal{D}(z)$, pour tout $i$, un cercle autour du point $\xi_i(z)$ avec rayon $\varepsilon:\gamma_{z,\varepsilon,i}=\{|w-\xi_i(z)|\leqq\varepsilon\}$ de façon que $\{\gamma_{z,\varepsilon,i}\}_{i=1,\cdots,n}$ sont mutuellement disjoints et ils ne contiennent pas de point $O_z$. En détail, $\gamma_{z,\varepsilon,i}=\{w\in\mathcal{D}(z):w=\xi_i(z)+re^{\sqrt{-1}k_i\theta},\ 0\leqq r\leqq\varepsilon$ et $0\leqq\theta\leqq 2\pi\}$. Considérons le domaine suivante: $\mathcal{D}_\varepsilon=\bigcup_{z\in\Delta_0}(z,\mathcal{D}(z)-\bigcup_{i=1}^n\gamma_{z,\varepsilon,i})$. Puique $\xi_i(z)$ est une fonction holomorphe de $z$, il s'en résulte que $\mathcal{D}_\varepsilon$ est une variété de Stein. De plus il satisfait aux conditions (a) et (a′). Par suite, d'après l'argument mentionné ci-dessus la constante de Robin $\lambda_\varepsilon(z)$ de $\mathcal{D}_\varepsilon(z)$ (par rapport au point $O_z$ et au paramètre local $w$) définit une fonction surharmonique de $z$ dans $\Delta_0$. On sait donc que celle de $\mathcal{D}(z)$ y est aussi surharmonique, parce que $\lambda_\varepsilon(z)$ tend en croissant vers $\lambda(z)$ quand $\varepsilon$ tend vers 0. Ensuite, soit $z_0$ un point singulier quelconque dans $\Delta$, autrement-dit, $\xi_i(z_0)=\xi_j(z_0)$ pour certains $i,j$ $(1\leqq i<j\leqq n)$. Par la méthode habituelle il n'est pas difficile de vérifier que $\lambda(z)$ est une fonction continue dans tout le domaine $\Delta$. En autre côté l'ensemble les points singuliers est isolé dans $\Delta$. Il s'en immédiatement que $\lambda(z)$ est surharmonique au point $z_0$. Nous savons donc que le lemme est démontré sous la seul hypothèse (a).

## 2. Le domaine satisfaisant à la condition (b).

Envisageons la variété de Stein $\mathcal{D}$ tel que pour tout $z$ dans $\Delta$

la frontière $\partial\mathcal{D}(z)$ de $\mathcal{D}(z)$ se compose en nombre fini des courbes analytiques au sens réel mais que, pour certain $z_0$, $\partial\mathcal{D}(z_0)$ a au moins un point $\zeta_0$ auquel $\partial\Psi/\partial w(z_0, \zeta_0)=0$. Par suite, en général on a les circonstances d'un voisinage du point $(z_0, \zeta_0)$ comme suite: on peut trouver l'are lisse $\ell$ dans un voisinage suffisamment petit $\delta: |z-z_0| < \rho_0$ qui passe par $z_0$ de la manière que, désignant par $\delta'$ l'un côté de $\delta$ coupé par $\ell$ et l'autre par $\delta''$, si $z_1$ et $z_2$ sont des points quelconques dans $\delta'$, alors on peut changer continuellement $\partial\mathcal{D}(z_1)$ en $\partial\mathcal{D}(z_2)$ et au cas où $z_1, z_2 \in \ell$ ou $z_1, z_2 \in \delta''$ ainsi de suite. Alors, si $z$ traverse $\ell$ de $\delta'$ en $\delta''$, le genre de $\mathcal{D}(z)$ ou le nombre des composantes de la frontière de $\mathcal{D}(z)$ peut être changé à tout point $z$ sur $\ell$. D'après le raisonnement dans la section 1 $\lambda(z)$ est surharmonique dans $\delta' \cup \delta''$. Il s'agit maintenant d'étudier $\lambda(z)$ au point $z_0$ sur $\ell$.

Or, considérons un domaine $\mathcal{D}_{\rho_0}$ multivalent étalé au-dessus d'un dicylindre $(|z-z_0|<\rho_0, |w|<\infty)$ tel qu'il consiste de tous les points auxquels $|f_i(z, w)|<1$ $(i=1, \cdots, n)$ et $|z-z_0|<\rho_0$ où $f_i(z, w)$ est une fonction holomorphe par rapport à deux variables $z$ et $w$ dans un voisinage de $\mathcal{D}_{\rho_0}$ et que la frontière de $\mathcal{D}_{\rho_0}(z_0)$ a un seul point singulier $\zeta_0$ auquel nous avons les conditions suivantes: $|f_1(z_0, \zeta_0)|=1$, $|f_i(z, \zeta_0)|<1$ $(i=2, \cdots, n)$ pour tout $z \in \ell$ et $[\partial|f_1|/\partial w]_{(z_0, \zeta_0)}=0$. En pareil cas, nous appelons que $\mathcal{D}_{\rho_0}$ satisfait à la condition (b). Un simple exemple suivante feront mieux comprendre cette configuration: $\partial\mathcal{D}_{\rho_0}(z)$ se meut avec $z$ comme suite:




$z \in \delta'$ $\qquad$ $z \in l$ $\qquad$ $z \in \delta''$

où pour tout $z \in \ell$, $(z, \zeta(z))$ est le seul point singulier de $\partial\mathcal{D}_{\rho_0}(z)$. Pour simplicité d'écriture posons $\mathcal{D}=\mathcal{D}_{\rho_0}$. D'après le principe d'Oka, nous réalise $\mathcal{D}$ comme une variété analytique $\Sigma$ dans le polycylindre (C): $|w_i|<1$ $(i=1,\cdots,n)$ de l'espace des $n$ variables complexes $(w_1,\cdots,w_n)$. $\Sigma$ est définie par l'équation: $w_i=f_i(z,w)$, $(z,w)\in\mathcal{D}$ $(i=1,\cdots,n)$. On écrit $\Sigma(z)$ la sous-variété de $\Sigma$ correspondant à $\mathcal{D}(z)$. La frontière de $\Sigma(z)$ se situe entièrement sur le contour de (C). Ici, nous projetons $\Sigma$ au plan $w_1$. Désignons par $\mathcal{D}^*$ l'image de $\Sigma$ et par $O^*$ celle de la surface analytique dans $\Sigma$ qui correspond à la droite analytique $O$ (dans $\mathcal{D}$ qui se trouve au-dessus de la droite analytique $w=0$). On peut supposer, sans perdre la généralité, que $O^*$ se situe au-dessus de la droite $w_1=0$. Parce que les résultats de la section précédente et du mémoire précédent [11], sont vrais à l'occasion d'une surface analytique: $w=f(z)$ $(|z-z_0|<\rho_0)$ et d'un paramètre local $w_1$: $w_1=\eta(w)$ au lieu de la droite analytique $O$ et du paramètre local $w$, où $\eta$ est une représentation conforme. Par suite, on peut tenir que la constante de Robin $\lambda^*(z)$ de $\mathcal{D}^*(z)$ par rapport à $O_z^*$ n'est pas autre chose que celle $\lambda(z)$ de $\mathcal{D}(z)$ par rapport à $O_z$. Nous désignons par $C_i(z)$ $(i=1,2,\cdots n)$ la partie de la frontière de $\mathcal{D}^*(z)$ qui correspond à celle sur $|f_i|=1$ de la frontière de $\mathcal{D}(z)$. L'arc $C_1(z)$ alors se trouve au-dessus d'une partie du cercle $\{|w_1|=1\}$ dans le plan $w_1$. Nous désignons de plus les points d'intersection des $C_i(z)$ aver $C_j(z)$ par $\{A_{ij}^{(k)}(z)\}_k$ pour $i\neq j$. Au cas de la figure ci-dessus nous avons seulement $C_i^{(z)}$ $(i=1,2,3)$ et $A_{13}^{(k)}(z)$ $(k=1,2)$. Maintenant soit $\varepsilon$ positif suffisamment petit. On peut trouver une variété de Stein $\mathcal{D}_\varepsilon^*=\bigcup_{z\in\delta}(z,\mathcal{D}_\varepsilon^*(z))$ tel que $\mathcal{D}_\varepsilon^*(z)\subset\mathcal{D}^*(z)$, la frontière de $\mathcal{D}_\varepsilon^*(z)$ coïncide avec celle de $\mathcal{D}^*(z)$ sauf au voisinage des point $\{A_{ij}^{(k)}(z)\}_k$ $(i,j=1,\cdots,n)$ et, de plus, elle est lisse et se meut avec $z$ doucement au voisinage des points $\{A_{ij}^{(k)}(z)\}$. Pour simplicité, nous allons faire un $\mathcal{D}_\varepsilon$ au cas de la figure ci-dessus. En notant que $|f_1(z,A_{13}^{(k)}(z))|=|f_3(z,A_{13}^{(k)}(z))|=1$, $|f_2(z,A_{13}^{(k)}(z))|<e^{-\varepsilon}$ $(<1)$ pour $k=1,2$, posons $\Sigma_\varepsilon=\Sigma\cap\{(w_1,w_2,w_3):|w_1|,|w_3|<e^{-\varepsilon},|w_2|<1\}\cup\{(w_1,w_2,w_3):(\log|w_1|+\varepsilon)^2+(\log|w_3|+\varepsilon)^2<\varepsilon^2$ pour $e^{-\varepsilon}<(|w_1|,|w_3|)<1$ et $|w_2|<1\}$. Si nous désignons par $\mathcal{D}_\varepsilon^*$ l'image projetté de $\Sigma_\varepsilon$ au plan $w_1$, ce domaine satisfait à notre condition. Considérons tous les points de ramification $\{\xi_i(z)\}$ de $\mathcal{D}_\varepsilon^*(z)$. Le nombre $N$ de ces points du cas où $z\in\delta'$ s'égale à celui du cas où $z\in\ell\cup\delta''$ plus un. Sans perdre la généralité, on peut supposer que l'ordre de ramification de $\xi_i(z)$ est un pour tout $i$. Ecrivons par $(z, \zeta^*(z))$ auquel le point singulier $(z, \zeta(z))$ $(z \in \ell)$ de la frontière de $\mathcal{D}(z)$ projette. Le point $(z, \zeta^*(z))$ est tel singulier de la frontière du domaine $\mathcal{D}_\varepsilon{}^*(z)$ $(z \in \ell)$. Soit V un petit di-cylindre $\{(z, w_1) : |z - z_0| < r_0$ et $|w_1 - \zeta^*(z_0)| < r_1)$ dans l'espace $(z, w_1)$ et considérons la composante connexe $\mathcal{V}$ du sous-domaine de $\mathcal{D}$ étalé au-dessus de V, qui contient un point voisin de $(z_0, \zeta^*(z_0))$. Posons à nouveau $\delta = \{|z - z_0| < r_0\}$. Alors, le point de ramification $\xi_N(z)$ où $z \in \delta'$ se trouve sur la fibre $\mathcal{V}(z)$. Pour $z \in \delta'$ la fibre $\mathcal{V}(z)$ est donc connexe mais la fibre $\mathcal{V}(z)$ pour $z \in \ell$ ou $\delta''$ se compose des deux feuilles au-dessus du demi-cercle: $\{w_1 : |w_1 - \zeta^*(z_0)| < r_1$ et $|w_1| < 1\}$. Quel que soit $z \in \delta'$ (ou $\delta''$), il existe une partie commune contenue dans toute frontière de $\mathcal{D}_\varepsilon{}^*(z)$ qui consiste des deux arcs $L_1', L_2'$ (ou $L_1'', L_2''$) qui se trouvent au-dessus de $(|w_1| = 1) \cap (|w_1 - \zeta^*(z_0)| < r_1)$. Désignons par $L_\varepsilon(z)$ ce qui reste de la frontière $\partial\mathcal{D}_\varepsilon{}^*(z) : L_\varepsilon(z) = \partial\mathcal{D}_\varepsilon{}^*(z) - \{L_1', L_2'$ (ou $L_1'', L_2'')\}$. Désignons par $\lambda_\varepsilon{}^*(z)$ la constante de Robin de $\mathcal{D}_\varepsilon{}^*(z)$. Traçons, pour tout $i$, le petit cercle autour du point $\xi_i(z) : \gamma_i(z) = \{w_1 = \xi_i(z) + r_i{}^2 e^{2\sqrt{-1}\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ où $\{|t_i| < r_i\}$ est le paramètre local au point $\xi_i(z)$. Alors, en vertu de la formule de Stokes nous avons, pour tout $z$ dans $\delta' \cup \delta''$,

$$\begin{aligned}
&\lambda_\varepsilon{}^*(z+h) - \lambda_\varepsilon{}^*(z) \\
&\quad = -\frac{1}{2\pi} \int_{L_\varepsilon(z)} g(z+h, \zeta)\, \mathrm{d}^* g(z, \zeta) \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_i(z)} g(z+h, \zeta)\, d^* g(z, \zeta) - g(z, \zeta)\, \mathrm{d}^* g(z+h, \zeta)
\end{aligned}$$

où $p = N$ si $z \in \delta'$ et $p = N-1$ si $z \in \delta''$ et où $h$ est un nombre complexe suffisamment petit. Soit $\Psi_\varepsilon(z, w)$ une fonction de la classe $C^2$ par rapport aux variables $x, y, u$ et $v$ telle que $\Psi_\varepsilon(z, w) = 0$ définit la frontière $L_\varepsilon(z)$. A ce moment $\partial\Psi_\varepsilon / \partial w$ n'est nulle à aucun point de $L_\varepsilon(z)$. D'après la méthode d'Hadamard-Schiffer (cf. [8]) il vient

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \lambda_\varepsilon{}^*}{\partial z} &= -\frac{1}{2\pi} \int_{L_\varepsilon(z)} \left( \frac{\partial \Psi_\varepsilon(z, \zeta)/\partial z}{|\partial \Psi_\varepsilon(z, \zeta)/\partial \zeta|} \right) \left( \frac{\partial g(z, \zeta)}{\partial n_\zeta} \right)^2 \mathrm{d}s_\zeta \\
&\quad + 2 \sum_{i=1}^{p} \left[ \frac{\partial g(z, t_i)}{\partial t_i} \right]^2_{t_i = 0} \\
&= \chi^{(1)}(z) + 2 \sum_{i=1}^{p} \chi_i{}^{(2)}(z)
\end{aligned}$$

Il est évident que $\chi^{(1)}(z)$ et $\chi_i^{(2)}(z)$ pour $i=1, \cdots, N-1$ tendent vers $\chi^{(1)}(z_0)$ et $\chi_i^{(2)}(z_0)$ respectivement si $z$ tend vers $z_0$. En outre, par la démonstration du lemme dans le mémoire [10, p. 66], $\chi_N(z)$ tend vers 0 en $z(\in\delta')$ tendant vers $z_0$. Par conséquent, la dérivé $\partial\lambda_\varepsilon^*/\partial z$ est continue au point $z_0$. On sait donc que $\partial\lambda_\varepsilon^*/\partial z$ est continue dans tout le domaine $\delta$. Puisque $\lambda_\varepsilon^*(z)$ est surharmonique de la casse $C^2$ dans $\delta'\cup\delta''$, il s'en suit que $\lambda_\varepsilon^*(z)$ est aussi surharmonique dans tout $\delta$. Si l'on fait $\varepsilon$ tendre vers 0, $\lambda_\varepsilon^*(z)$ tend en croissant vers la constante de Robin de $\mathscr{D}^*(z):\lambda(z)$, qui est égale à celle de $\mathscr{D}(z):\lambda(z)$. Par suite, nous avons que $\lambda(z)$ est surharmonique dans $\delta$ sous la condition (b).

**3. Le cas général.**

Soit $\mathscr{D}$ une variété de Stein quelconque mentionnée dans l'introduction. Grâce au théorème de R. Remmert [7], on peut enterrer le domaine $\mathscr{D}$ comme une variété analytique $\Sigma$ dans l'espace $(w_1, \cdots, w_n)$ des $n$ variables complexes. On écrit $\Sigma(z)$ la sous-variété de $\Sigma$ correspondant à la fibre $\mathscr{D}(z)$ de $\mathscr{D}$. Soit $Q_R$ l'hypersphère autour de l'origine avec rayon $R$: $Q_R=\{|w_1|^2+\cdots+|w_n|^2<R^2\}$ et posons $\Sigma_R=\Sigma\cap Q_R$ et $\Sigma_R(z)=\Sigma(z)\cap Q_R$. Soit $\Delta_0$ un sous-domaine quelconque tel que $\Delta_0\Subset\Delta$. Prenons un nombre $R$ assez grand tel que le domaine $\Sigma_{R,\Delta_0}=\bigcup_{z\in\Delta_0}(z, \Sigma_R(z))$ contient la partie qui correspond à l'ensemble $\bigcup_{z\in\Delta_0}(z, O_z)$. Prenons $(w^*)=(w_1^*, \cdots, w_n^*)$ un point frontière quelconque de la fibre $\Sigma_{R,\Delta_0}(z_0)$. Pour simplicité, posons $(w^*)=(R, 0, \cdots, 0)$. Puisque $\Sigma$ est non-singulière, on peut supposer que, dans un voisinage de $(w^*)$, $\Sigma(z)$ est déterminée par l'équation suivante: $w_1=f_1(z, w_2)=\alpha_{10}(z)+\alpha_{11}(z)w_2+\alpha_{12}(z)w_2^2+\cdots$, $w_i=f_i(z, w_2)=\alpha_{i0}(z)+\alpha_{i1}(z)w_2+\alpha_{i2}(z)w_2^2+\cdots$ $(i=3, \cdots, n)$ où $w_2$ parcourt dans un voisinage de 0 et où $\alpha_{10}(z_0)=R$, $\alpha_{i0}(z_0)=0$ $(i=3, \cdots, n)$. Soit $\Psi(z, w_2)=|f_1(z, w_2)|^2+|w_2|^2+|f_2(z, w_2)|^2+\cdots+|f_n(n, w_2)|^2-R^2$. Si $\alpha_{11}(z_0)\neq 0$, l'arc défini par $\Psi(z_0, w_2)=0$ est regulier au point $(w^*)$, parce que $[\partial\Psi/\partial w_2]_{(z_0,0)}=\alpha_{11}(z_0)\neq 0$. Donc la frontière de $\mathscr{D}_R(z_0)$ (auquel $\Sigma_R(z_0)$ correspond) est regulier au point $\zeta^*$ (auquel le point $(w^*)$ correspond). Si $\alpha_{11}(z_0)=0$, le point $(w^*)$ est un point singulier de la frontière de $\Sigma_R(z)$. Peut-être il existe le cas suivant: Quand on développe $\Psi(z_0, w_2)$ par $\xi, \eta$ où $w_2=\xi+i\eta$ comme suite: $\Psi(z_0, w_2)$

$=A\xi^2+2B\xi\eta+C\eta^2+$ {le terme éléve}, alors il vient $B^2-AB=0$. C'est-à-dire, nous avons, au point $(z_0, w^*)$, les égalités suivantes: $\Psi=\partial\Psi/\partial\xi =\partial\Psi/\partial\eta=(\partial^2\Psi/\partial\xi\partial\eta)^2-\partial^2\Psi/\partial\xi^2\cdot\partial^2\Psi/\partial\eta^2=0$. Par suite, en général, tous les points $z$ tels que la fibre $\mathcal{D}_R(z)$ a au moins un point frontière $(w^*)$ de la sorte mentionné ci-dessus est au plus un ensemble fini dans $\Delta_0$. Si nécessaire, il suffit de changer le rayon $R$ un peu. Nous désignons par $\{z_1, \cdots, z_p\}$ cet ensemble fini. Si $(w^*)$ est un point singulier quelconque de la frontière de $\Sigma_R(z)$ pour certaine $z$ dans $\Delta_0-\{z_1, \cdots, z_p\}$, alors la projection sur le plan $w_2$, par exemple, de $\partial\Sigma_R(z)$ consiste, dans un voisinage de $w_2^*$ (la projection du point $(w^*)$), de deux arcs qui traversent l'un à l'autre au point $w_2^*$ avec les tangents disjointes. Soit $\varepsilon$ un nombre positif quelconque suffisamment petit. Traçons dans $\Delta_0$ le cercle $\gamma_{z_i,\varepsilon}$ autour du point $z_i$ avec rayon $\varepsilon$ et posons $\Delta_{0,\varepsilon}=\Delta_0-\bigcup_{i=1}^{p}\gamma_{z_i,\varepsilon}$.

Or, soit $q$ un nombre positif quelconque assez grand. Pour tout point frontière de $\Sigma_{R,\Delta_0,\varepsilon}(z):(w_z^*)=(w_{1,z}^*, \cdots, w_{n,z}^*)$, considérons le plan analytique de dimension $n-1:\pi((w):(w_z^*))=0$ qui passe par le point $(w_z^*)$ et qui y tache à l'hypersphère $Q_R$. Prenons $M$ $(=M(q, (w_z^*)))$ assez grand tel que $|\pi((w):(w_z^*))|$ est $>1/M$ pour tout $(w)$ dans l'hypersphère $Q_{(q/q+1)R}$. Grâce au théorème de Borel-Lebesque il n'est pas difficile de vérifier que nous pouvons trouver un nombre fini des points frontières $\{(w_{z_1}^{(1)}), \cdots, (w_{zN(q)}^{N(q)})\}$ du domaine $\Sigma_{R,\Delta_0,\varepsilon}$ de la manière que, si l'on pose $\Sigma_{R,\Delta_0,\varepsilon p}=\{(w)\in\Sigma_{R,\Delta_0,\varepsilon}: |\pi((w):(w_{z_i}^{(i)}))|>1/M$ pour tout $i=1,2,\cdots,N(p)\}$, cette variété contient $\Sigma_{(q/q+1)R,\Delta_0,\varepsilon}$ dans l'intérieur et que la frontière de la sous-variété $\Sigma_{R,\Delta_0,\varepsilon,p}(z)$ est entièrement contenue dans l'intérieur complet de $\Sigma_{R,\Delta_0,\varepsilon}(z)$ pour tout $z\in\Delta_{0,\varepsilon}$. Quand on désigne par $\mathcal{D}_{R,\varepsilon,p}$ la partie de $\mathcal{D}$ auquel $\Sigma_{R,\Delta_0,\varepsilon,p}$ correspond, il est évident que le domaine $\mathcal{D}_{R,\varepsilon,q}$ satisfait à la condition (b) de la section précédente. Si nécessaire, il suffit de chager $M$ un peu. Par suite, la constante de Robin $\lambda_{R,\varepsilon,q}(z)$ de la fibre $\mathcal{D}_{R,\varepsilon,q}(z)$ définit une fonction surharmonique de $z$ dans $\Delta_{0,\varepsilon}$. Si l'on fait $q\to+\infty$ et ensuite $\varepsilon\to0$, on sait que la constante de Robin $\lambda_R(z)$ de $\mathcal{D}_R(z)$ (à laquelle $\Sigma_{R,\Delta_0}(z)$ correspond) est aussi surharmonique dans $\Delta_0-\{z_1, \cdots, z_p\}$. En autre côté, $\lambda_R(z)$ est évidemment continue dans tout le domaine $\Delta_0$. Donc, elle est aussi surharmonique dans $\Delta_0$. Enfin, en faisant $R$ tendre vers $+\infty$, il vient que la constante de Robin $\lambda(z)$ de $\mathcal{D}(z)$ est surharmonique dans $\Delta_0$, parce que $\lambda_B(z)$ tend en croissant vers $\lambda(z)$. Par conséquent, le lemme a été complètement démontré pour une variété de stein $\mathfrak{D}$ quelconque. **C.Q.F.D.**

D'après le lemme, nous avons immédiatement un

**Théorème** *Soit $\mathfrak{D}$ une variété de Stein et soit $K=\{z: z\in \Delta$ et $\mathfrak{D}(z)$ est de type parabolique$\}$. Si la capacité logarithmique de $K$ dans le plan $z$ n'est pas nulle, alors toute fibre $\mathfrak{D}(z)$ pour $z\in\Delta$ est aussi de type parabolique.*

## 4. Prabolicité d'une fonction entière.

Soit $f(x,y)$ une fonction enière de deux variables complexes $x$ et $y$ et soit donnée une surface première $S_0$ de $f$ avec valeur $a_0$. Soit $L$ une droite analytique qui passe transversalement à $S_0$ par un point ordinaire $p_0$ de $S_0$. Avec T. Nishino [I], considérons une partie $\Gamma$ autour de $p_0$ sur $L$ donnée par l'inégalité $|f-a_0|<\rho$, où $\rho$ est un nombre positif suffisamment petit. Ensuite considérons l'ensemble de tous les points dans l'espace $(x,y)$ qui peuvent être joignés au point de $\Gamma$ par une surface première $S$ de $f$ et qui ne sont pas des points singuliers de sorte que $S$ y s'intersecte l'autre surface première de $f$. On l'appelle tube normal autour de $S_0$ par rapport à $\Gamma$ et on le désigne par $\Sigma_\Gamma$. Supposons que $S_0$ est d'ordre un. Alors, le domaine d'holomorphie de la fonction obtenue par résolution də l'équation dans $(x,y)\in\Sigma_\Gamma: f(x,y)-z=0$ par rapport à y au-dessus de $(\Gamma^*, C)$ est un domaine multivalent $\mathfrak{R}$ étalé au-dessus du dicylindre $(\Gamma^*, C)$, où $\Gamma^*=\{|z-a|<\rho\}$ et $C=\{|x|<\infty\}$. En tant que variété, $\mathfrak{R}$ est équivalent à $\Sigma_\Gamma$. De plus, d'après T. Nishino [II, p. 256], $\mathfrak{R}$ est un des domaine $\mathfrak{D}$ de Stein mentionné dans l'introduction. Par suite le lemme y est applicable.

Or, soit $f$ une fonction entière quelcoque. Posons $K=\{z$: il existe au moins une surface première de $f$ avec valeur $z$ qui est de type parabolique$\}$ et supposons que la capacité logarithmique de $K$ dans le plan $z$ n'est pas nulle. Alors, comme d'habitude le fait mentionné ci-dessus et le Théorème dans la section précédente nous fournissent que toute surface première de $f$ qui est d'ordre un est de type parabolique. Il s'agit maintenant de la surface première $S_0$ de $f$ d'ordre $n$ ($n \geqq 2$). Comme d'abitude, en étudiant une surface de Riemann de dimension complexe 2 de la fonction $(f(x,y)-a_0)^{1/n}$, nous avons que $S_0$ est aussi de type parabolique (pour ample détail, voir [III] et encore [9]). Donc le Théorème 1 dans l'introduction est démontré. **C.Q.F.D.**

Nous allons vérifier le Théorèmè 2 d'après le raisonnement par l'absurdité. Pour cela, supposons maintenant qu'il existe au moins une surface première $S_0$ de $f$ avec valeur $z_0$ de type (B). C'est-à-dire, il y a au moins une surface première conjuguée $S_0'$ de $S_0$ de type ($\beta$). Sans perdre la généralité, on peut supposer que $S_0$ et $S_0'$ sont tous d'ordre un. En abrégé, posons $z_0=0$. Considérons les tubes normals $\Sigma_\Gamma$ et $\Sigma_{\Gamma'}$ autour des surfaces premières $S_0$ et $S_0'$ aux points ordinaires $p_0$ et $p_0'$ respectivement. On suppose que $\Gamma$ et $\Gamma'$ se trouvent au-dessus des droites analytiques $x=a$ et $x=a'$. En posant $\Gamma^*=\{|z|<\rho\}$ et $\Gamma^*=\{|z|<\rho'\}$, supposons de plus que $\rho=\rho'$. Ceci ne restreint pas la généralité. Pour tout $z$ dans $\Gamma$ $(=\Gamma'^*)$, nous écrivons par $S_z$ et $S_z'$ les surfaces premières avec valeur $z$ qui sont contenus dans $\Sigma_\Gamma$ et $\Sigma_{\Gamma'}$, respectivement. Soit $r$ un petit nombre positif. Traçons sur toute surface $S_z'$ le cercle $\gamma_{z,r}'$ autour du point $S_z'\cap\Gamma'$ avec rayon $r$ tel qu'il se trouve au-dessus du cercle dans le plan $x$: $\{|x-a'|\leqq r\}$. Posons $\Delta_r'=\bigcup_{z\in\Gamma'^*}\gamma_{z,r}$ et considérons la sous-variété suivante de $\Sigma_\Gamma$: $\Sigma_{\Gamma r}=\Sigma_\Gamma-\Delta_r'$. Posons $\Sigma_{\Gamma,r}=\bigcup_{z\in\Gamma^*}(z,\Sigma_{\Gamma,r}(z))$. Il est évident que $\Sigma_{\Gamma,r}$ peut se regarder comme un des domaine $\mathscr{D}$ de Stein mentionné dans l'introduction. Divisons $\Gamma^*$ deux parties $\Gamma_1^*$, $\Gamma_2^*$ de façons que $z\in\Gamma_1^*$ si et seulement si $S_z$ s'intersecte $\Delta_r'$, et $\Gamma_2^*=\Gamma^*-\Gamma_1^*$. Il est clair que pour tout $z$ danz $\Gamma_1^*$ $\Sigma_{\Gamma,r}(z)=S_z-\gamma_{z,r}'$ et donc elle est de type hyperbolique. Mais d'après l'hypothèse que $f\in(P)$, pour tout $z$ dans $\Gamma_2^*$, $\Sigma_{\Gamma,r}(z)=S_z$ et elle est de type parabolique. Immédiatement, $\Gamma_1^*$ est ouverte non-vide dans $\Gamma^*$. En autre côtè, puisque la surface première conjuguée $S_0'$ de $S_0$ est de type ($\beta$), il existe au moins un point $\zeta$ dans $\Gamma_2^*$ tel que $\{|z-\zeta|<r_0\}\Subset\Gamma_2^*$ pour certain nombre positif $r_0$. Cela est absurde au Théorème de la section précédente. Par suite, le Théorèm 2 de l'introduction a été demontré.

**C.Q.F.D.**

Soif $f \in (E)$. Avec T. Nishino, une surface première $S$ de $f$ est dite *irrégulière*, quand on a autre surface première $S'$ tel qu'il existe au moins une suite $\{S_n\}$ des surfaces premières de $f$ dont l'ensemble d'accumulation contient $S$ et $S'$ également. D'après avoir modifié un peu la démonstration du Théorème 2, nous avons une

**Remarque.** *Supposons $f \in (P)$. Soit $e_f$ l'ensemble tous les points $z$ dans le plan $z$ tel qu'il existe au moins une surface première irrégulière de $f$ avec valeur $z$. Alors, la capacité logarithmique de $e_f$ dans le plan $z$ est nulle.*

## 5. Problème d'uniformisation.

Dans la section actuelle, en utilisant le lemme par la même méthode que celle dans la démonstration de Théorème 2, nous allons vérifier le problème d'uniformisation mentionné dans l'introduction. On écrit $U$ le feuillet de $\mathscr{D}$ qui contient une partie univalente de $\mathscr{D}$ qui a été justement étalée au-dessus d'un voisinage de droite $O$: $w=0$ dans $(\Delta, C)$. Sans perdre la généralité, on peut supposer que $U$ se situe sur le di-cylindre $(|z|<\rho, |w|<2)$. Désignons encore par $I$ l'ensemble de tous les points dans $U$, qui se trouvent au-dessus de la droite analytique $w=1$ et par $I_z$ le seul point commun de $I$ et de la fibre $\mathscr{D}(z)$. Soit $z$ un nombre quelconque dans $\Delta$. D'après l'hypothèse que $\mathscr{D}(z)$ est schlichtartig et de type parabolique, il existe seulement une fonction holomorphe et uniforme dans $\mathscr{D}(z)$ sauf au point $O_z$, que nous désignons par $f(z, w)$, de façon que $f(z, I_z)=0$, que nous avons un développement de Laurent au voisinage de $O_z$ suivant:

$$f(z, w)=\frac{1}{w}+c_0(z)+c_1(z)w+\cdots \tag{7}$$

et que $f(z, w)$ biunivoquement transforme $\mathscr{D}(z)$ dans un domaine univalent dans le plan $w'$. Elle définit donc une fonction uniforme dans tout le domaine $\mathscr{D}$. Nous nous bornons à vérifier que $f(z, w)$ est holomorhe au même temps par rapport à la variable $z$. En remarquast que $f(z, w)$ peut être construite par l'approximation comme suite, nous allons vérifier ce fait. Puisque $\mathscr{D}$ est une variété de Stein,

$\mathcal{D}$ admet une fonction $\Phi(z, w)$ réelle analytique plurisousharmonique dans $\mathcal{D}$ jouissant de la propriété $(P_0)$ et $(\alpha)$ au sens d'Oka [6, p. 195]. Soit $\rho_0$ un nombre positif quelconque tel que $\rho>\rho_0>0$ et posons $\Delta_0=\{|z|<\rho_0\}$. Pour simplicité, désormais posons à nouveau $\Delta=\Delta_0$. Soit $R$ un nombre positif quelconque suffisamment grand tel que $\{(z, w): \Phi(z, w)<R\}$ contient $O$ et $I$ et soit $r$ un nombre positif qvelconque tel que $1>r$. Alors, considérons les composantes connexes $\mathcal{D}_{R,r}$ et $\mathcal{D}_r$ contenant $O$ et $I$ des sous-domaines de $\mathcal{D}$ suivantes:

$$\{(z, w): \Phi(z, w)<R\} - \{(z, w) \in U: |w-1|<r\}$$

et

$$\mathcal{D} - \{(z, w) \in \mathcal{D}: |w-1|<r\},$$

respectivement. Il est évident que $\mathcal{D}_{R,r}$ et $\mathcal{D}_r$ sont des variétés de Stein et que la frontière de la fibre $\mathcal{D}_{R,r}(z)$ se compose des courbes lisses en nombre fini. Par suite, il existe la fonction de Green dans $\mathcal{D}_{R,r}(z)$ avec singularité logarithmique au point $O_z$, qui est $\not\equiv +\infty$ et que nous désignons par $g_{R,r}(z, w)$. De plus, désignons par $\lambda_{R,r}(z)$ la constante de Robin par rapport au point $O_z$ et au paramètre local $w$, c'est-à-dire, au voisinage de $O_z$,

$$g_{R,r}(z, w) = \log \frac{1}{|w|} + \lambda_{R,r}(z) + \operatorname{Re}\{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(R,r)}(z) w^n\}.$$

D'après notre clef lemme nous savons que $\lambda_{R,r}(z)$ définit une fonction surharmonique dans $\Delta$. Faisons $R$ tendre vers $+\infty$. Alors, $g_{R,r}(z, w)$ tend vers une fonction $g_r(z, w)$ uniformément à l'intérieur complet de $\mathcal{D}_r(z)$ quelconque, qui n'est pas autre chose que la fonction de Green dans $\mathcal{D}_r(z)$ avec singularité au point $O_z$. Elle a un développement suivant au voisinage de $O_z$:

$$g_r(z, w) = \log \frac{1}{|w|} + \lambda_r(z) + \operatorname{Re}\{\sum_{p-1}^{\infty} a_n^{(r)}(z) w^n\}.$$

Ici, $\lambda_r(z) < +\infty$ pour tour $z$ dans $\Delta$ et $\lambda_r(z)$ est aussi surharmonique dans $\Delta$. Soit $g_r^*(z, w)$ une fonction harmonique conjuguée de $g_r(z, w)$ dans $\mathcal{D}_r(z)$ telle que $g_r^*(z, O_z)=0$. Puisque $\mathcal{D}(z)$ est schlichtartig et de type parabolique, il est bien connu que

$$w' = f_r(z, w) = e^{\{g_r(z, w) - \lambda_r(z) + i g_r^*(z, w)\}}$$

est une uniformisation analytique de $\mathcal{D}_r(z)$ de manière que nous avons un développement au voisinage de $O_z$ suivant:

$$f_r(z, w) = \frac{1}{w} + c_0^{(r)}(z) + c_1^{(r)}(z)w + \cdots$$

et $f_r(z, w)$ transforme le petit cercle: $\{w \in \mathcal{D}(z) : |w-1| = r\}$ en un petit cercle autour de l'origine: $\{|w'| = e^{-\lambda_r(z)}\}$ dans le plan $w'$. En faisant $r$ tendre vers 0, on sait immédiatement que $f_r(z, w)$ tend vers la fonction $f(z, w)$ (définie au début de la section actuelle) parce que $\mathcal{D}(z)$ est de type parabolique. Envisageons la fonction $f(z, w)$ dans un voisinage de $I_z$. D'après $f(z, I_z) = 0$ on prend que $f(z, w)$ y se développe comme suite

$$f(z, w) = b_1(z)(w-1) + b_2(z)(w-1)^2 + \cdots. \tag{8}$$

Nous allons vérifier que la fonction $-(\lambda_r(z) - \log 1/r)$ dans $\Delta$ tend vers $\log|b_1(z)|$ en $r$ tendant vers 0. En effet, en appliquant le théorème de Koebe à la fonction biunivoque et holomorphe $f(z, w)$ dans le cercle $\{w \in \mathcal{D}(z) : |w-1| < 1\}$ nous avons pour tout $w$ de ce cercle

$$\frac{|w-1|}{(1+|w-1|)^2} \leqq \left|\frac{f(z, w)}{b_1(z)}\right| \leqq \frac{|w-1|}{(1-|w-1|)^2}$$

On écrit $S_r(z)$ l'image du cercle $\{|w-1| = r\}$ par $f(z, w)$, qui décrit une courbe fermée autour de $w' = 0$ dans le plan $w'$. Posons $[S_r(z)] = \{$l'intérieur limité par $S_r(z)\}$, $[S_r^{(1)}(z)] = \{w' : |w'-1| < r|b_1(z)|/(1+r)^2\}$ et $[S_r^{(2)}(z)] = \{w' : |w'-1| < r|b_1(z)|/(1-r)^2\}$ et posons de plus que $T_r(z) = \{|w'| \leqq \infty\} - [S_r(z)]$ et $T_r^{(i)}(z) = \{|w'| \leqq \infty\} - [S_s^{(i)}(z)]$ pour $i = 1, 2$. Il vient alors $T_r^{(2)}(z) \subseteqq T_r(z) \subseteqq T_r^{(1)}(z)$. Soit $\lambda_r'(z)$ ($\lambda_{1,r}'(z)$ ou $\lambda_{2,r}'(z)$) la constante de Robin du domaine $T_r(z)$ ($T_r^{(1)}(z)$ ou $T_r^{(2)}(z)$, respectivement) par rapport au point l'infini $w' = \infty$ et au paramètre local $1/w'$. On a immédiatement que $\lambda_{2,r}'(z) \leqq \lambda_r'(z) \leqq \lambda_{1,r}'(z)$ et $\lambda_{1,r}'(z) = \log(1+r)^2/r|b_1(z)|$, $\lambda_{2,r}'(z) = \log(1-r)^2/r|b_1(z)|$. En autre côté, en remarquant que le coefficient de $1/w$ dans l'expression (7) est un, il est bien connu [1] que $\lambda_r'(z)$ n'est pas autre chose que $\lambda_r(z)$ : la constante de $\mathcal{D}_r(z)$ par rapport au point $O_z$ et au paramètre local $w$. Il s'en suit que

$$\log\frac{(1-r)^2}{|b_1(z)|}\leqq\lambda_r(z)-\log\frac{1}{r}\leqq\log\frac{(1+r)^2}{|b_1(z)|}$$

et donc que $\lim_{r\to 0}\{-(\lambda_r(z)-\log 1/r)\}=\log|b_1(z)|$ uniformément dans $\varDelta$. De plus, $\log|b_1(z)|$ est uniformément bornée d'en haut dans $\varDelta$. En effet, d'après le théorème d'aire, nous avons $\sum_{n=1}^{\infty} n|2^{n+1}c_n(z)|^2\leqq 1$. Puisque $b_1(z)=[\partial f/\partial w]_{w=1}=-1+\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z)$, l'inégalité de Schwarz nous donne $|b_1(z)|\leqq 1+\sum_{n=1}^{\infty} n|c_n(z)|\leqq 1+\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|\sqrt{n}\,2^{n+1}c_n(z)|^2}\times\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n}/2^{n+1})^2}\leqq\frac{3}{2}$. Par suite $\log|b_1(z)|\leqq\log\frac{3}{2}$ pour aucun $z$ dans $\varDelta$. Pour tout $r$ fixé, la fonction $-(\lambda_r(z)-\log 1/r)$ définit une fonction sousharmonique dans $\varDelta$. Il s'en résulte que $\log|b_1(z)|$ y est aussi sousharmonique. Soit maintenant $\mathscr{S}$ la surface analytique de ramification de $\mathscr{D}$ et soit $\varGamma: w=\alpha(z),\ z\in\varDelta_0$ une section holomorphe quelconque dans $\mathscr{D}-\mathscr{S}-O$, où $\varDelta_0$ est un sous-domaine de $\varDelta$. On peut alors regarder $\{|w-\alpha(z)|<r\}$ comme un paramètre local au point $\alpha(z)$ dans $\mathscr{D}(z)$, où $r$ est un nombre positif quelconque suffisamment petit. Par le même argument mentionné plus haut, on peut faire une seule fonction $f(z,w,\varGamma)$ dans $\mathscr{D}(z)$ tel que $f(z,\alpha(z),\varGamma)=0$ et, au voisinage de $O_z$,

$$f(z,w,\varGamma)=\frac{1}{w}+\alpha_0(z)+\alpha_1(z)w+\cdots$$

et que $f(z,w,\varGamma)$ s'exprime une uniformisation analytique de $\mathscr{D}(z)$. On prend que $f(z,w,\varGamma)$ se développe au voisinage du point $\alpha(z)$ de façon que

$$f(z,w,\varGamma)=b_{1,\varGamma}(z)(w-\alpha(z))+b_{2,\varGamma}(z)(w-\alpha(z))^2+\cdots.$$

En désignant par $\lambda_{\varGamma,r}(z)$ la constante de Robin de $\mathscr{D}_{\varGamma,r}(z)=\mathscr{D}(z)-\{w\in\mathscr{D}(z):|w-\alpha(z)|\leqq r\}$ par rapport au point $O_z$, l'on a $\lim_{r\to 0}\{-(\lambda_{\varGamma,r}(z)-\log 1/r)\}=\log|b_{1,\varGamma}(z)|$. Puisque $w=\alpha(z)$ est holomorphe, le domaine $\bigcup_{z\in\varDelta_0}(z,\mathscr{D}_{\varGamma,r}(z))$ est une variété de Stein. Par suite, $\lambda_{\varGamma,r}(z)$ est surharmonique dans $\varDelta_0$ et donc $\log|b_{1,\varGamma}(z)|$ y est sousharmonique.

Or, d'après l'hypothèse que $\mathscr{D}(z)$ est de type parabolique, le théorème d'unicité nous donne

$$f(z,w,\varGamma)=f(z,w)-f(z,\alpha(z)).$$

Il s'en suit que $b_{1,\varGamma}(z)=[\partial f(z,w,\varGamma)/\partial w]_{w=\alpha(z)}=[\partial f(z,w)/\partial w]_{w=\alpha(z)}$, et donc que $\log|[\partial f(z,w)/\partial w]_{w=\alpha(z)}|$ est sousharmonique dans $\Delta_0$. De plus, $\log|\partial f/\partial w|$ est harmonique par rapport à $w$ quel que soit $z$ fixè. En autre côté, il est évident d'après le théorème d'aire que $\log|\partial f/\partial w|$ est localement bornée d'en haut dans $\mathcal{D}-\mathcal{S}-O$. On sait enfin que $\log|\partial f/\partial w|$ définit une fonction plurisousharmonique dans $\mathcal{D}-\mathcal{S}-O$. Par suite la matrice hessienne

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 \log|\partial f/\partial w|}{\partial z\partial\bar{z}} & \dfrac{\partial^2 \log|\partial f/\partial w|}{\partial z\partial\bar{w}} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 \log|\partial f/\partial w|}{\partial\bar{z}\partial w} & \dfrac{\partial^2 \log|\partial f/\partial w|}{\partial w\partial\bar{w}} \end{bmatrix}$$

est nonnégative dégénérée où on entend que toutes les dérivés s'éffectuent au sens de distribution (voir par exemple [3]). Puisque $f$ est holomorphe par rapport à la variable $w$ pour aucune $z$ fixé, nous avons $(\partial^2\log|\partial f/\partial w|)/\partial w\partial\bar{w}\equiv 0$. Il vient donc que $(\partial^2\log|\partial f/\partial w|)/\partial\bar{z}\partial w$ est égale à 0 au seds de distribution. Pour tout $w$ fixé, la fonction $(\partial\log|\partial f/\partial w|)/\partial w$ est localement summable par rapport à l'élément d'aire $dxdy$ et la dérivé de cette fonction par rapport à $\bar{z}$ au sens de distribution est égale à 0. Il s'en résulte que $(\partial\log|\partial f/\partial w|)/\partial w$ est holomorphe par rapport à $z$. Par suite $(\partial^2 f/\partial w^2)/(\partial f/\partial w)$ définit une fonction holomorphe par rapport à deux variables complexes $z$ et $w$ dans $\mathcal{D}-\mathcal{S}-O$. Désignons cette fonction par $\varphi(z,w)$. C'est-à-dire, $f(z,w)$ satisfait à l'équation différentielle lineaire suivante:

$$\frac{\partial^2 f(z,w)}{\partial w^2}=\varphi(z,w)\frac{\partial f(z,w)}{\partial w}$$

et satisfait à deux condition suivantes:

$$[wf(z,w)]_{O_z}=1 \quad \text{et} \quad [f(z,w)]_{I_z}=0.$$

En abrégé, posons $h(z,w)=w^2(\partial f(z,w)/\partial w)$. D'après l'expression (7), nous avons, au voisinage de la droite $O$, un développement suivant:

$$h(z,w)=-1+c_1(z)w^2+2c_2w^3+\cdots.$$

Par suite, $(\partial h/\partial w)/h$ est identiquement 0 sur la droite $O$ et de plus holomorphe dans $\mathcal{D}-\mathcal{S}-O-\Theta$, parce que $(\partial h/\partial w)/h=((\partial^2 f/\partial w^2)w^2+2w(\partial f/\partial w))/w^2(\partial f/\partial w)=\varphi(z,w)+2/w$ où $\Theta$ singnifie toutes les surfaces analytiques dans $\mathscr{D}$ sauf à la droite $O$ qui se trouvent au-dessus de la droite analytique $w=0$. Donc, $(\partial h/\partial w)/h$ est holomorphe dans $\mathscr{D}-\mathscr{S}-\Theta$ par rapport à deux variables complexes $z$ et $w$, que nous désignons par $\Psi(z, w)$. C'est-à-dire, $h(z, w)$ satisfait à l'équation différentielle suivante: $\partial h(z, w)/\partial w=\Psi(z, w)h(z, w)$ et satisfait à la condition initiale $[h(z, w)]_{O_z}=-1$. On a donc $h(z, w)=-\exp \int_0^w \Psi(z, w)dw$. Le second membre est holomorphe dans $\mathscr{D}-\mathscr{S}-\Theta$ par rapport aut $z$ et $w$. Par suite, $\partial f/\partial w=h(z, w)/w^2$ est holomorphe dans $\mathscr{D}-\mathscr{S}-\Theta-O$, et en vertu de l'expression (8) il s'en suit que $b_n(z)$ holomorphe dans $\varDelta$ pour tout $n=1, 2, \cdots$. On sait donc que $f(z, w)$ est holomorphe dans un voisinage de $I$ par rapport à deux variables complexes $z$ et $w$. D'après la continuation analytique, il est évident que $f(z, w)$ est holomorphe dans $\mathscr{D}-\mathscr{S}-\Theta-O$. En outre, si $V$ désigne un petit voisinage de la droite analytique $O$, on a immédiatement que $f(z, w)$ est bornée: $f|(z, w)|\leqq M$ dans $\mathscr{D}-V$. Pour cela, par exemple, soit $V=\{(z, \in U\subset\mathscr{D}: |w|<\frac{1}{2}\}$. Alors, d'après le théorème de Koebe on prend 9/2 comme $M$. Par suite, $f(z, w)$ est aussi holomorphe dans tout le domaine $\mathscr{D}$ sauf à la droite $O$ et elle a l'expression (7) au voisinage de $O$. Considérons la trasformation suivante $T: z'=z, w'=f(z, w)$. Elle trasforme analytiquement $\mathscr{D}$ en domaine *univalent* du di-cylindre $(|z'|<\rho, |w'\leqq\infty)$. Par conséquent, le Théorème 3 mentionné dans l'introduction a été complètement démontré.

**C.Q.F.D.**

FACULTY OF EDUCATION
SHIGA UNIVERSITY

**Bibliographies**

[1] L. V. Ahlfors and A. Beurling, Conformal invariants and function-theoretic null-sets, Acta Math., **83** (1950) 101-129.

[2] L. V. Ahlfors and L. Sario, Riemann surfaces, Princeton Univ. Press, 1960.

[3] P. Lelong, La convexité et les fonctions analytiques de plusieurs variables complexes, J. Math. Pures et Appl., **9** (1952) 191-219.

[4] E. E. Levi, Studii sui punti singolari essenziali delle funzioni de una o più variabili complesse, Ann. di Mat., **17** (1909) 61-87.

[5] T. Nishino, Nouvelles recherches sur les fonctions entières de plusieurs variables complexes,
[I] J. Math. Kyoto Univ., 8 (1968) 49-100,
[II] Fonctions entières qui se réduisent à celle d'une variable, ibd', **9** (1969)

221–274,

[III] Sur quelques propriétés topologiques des surfaces premières, ibd., **10** (1970) 245–271,

[IV] Types de surfaces premières, ibd., **13** (1973) 217–272,

[V] Fonctions qui se réduisent aux polynômes, ibd., **15** (1975) 527–553.

[6] K. Oka, Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, Iwanami Shoten, Tokyo 1961.

[7] R. Remmert, Sur les espaces analytiques holomorphiquement séparables et holomorphiquement convexes, C. R. Acad. Sci., Paris, **243** (1953) 118–121.

[8] S. E. Warschawaski, On Hadamard's variation formula for Green's function, J. Math. and Mech., **9** (1960) 497–509.

[9] H. Yamaguchi, Sur une uniformité des surfaces constantes d'une fonction entière de deux variables complexes, J. Math. Kyoto Univ., **13** (1973) 417–433.

[10] H. Yamaguchi, Sur le mouvement des constantes de Robin, ibd., **15** (1975) 53–71.