J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)
16-2 (1976) 375-393

Аналог теоремы Пэли-Винера для некоторой матричной группы

Сёич Андо

(Received August 2, 1975)

В предыдующих статьях [5], [6] был установлен аналог теоремы Пэли-Винера для группы линейных преобразований прямой линии и группы Гейзенберга. Там реализуются неунитарные представления в естественным образом возникающем счетно гильбертовом пространстве $\mathscr{C}$, и эти представления являются аналитическим продолжением тех неприводимых унитарных представлений, которые встречаются в формуле Планшереля. С помощью этих неунитарных представлений, определяется преобразование Фурье и характеризуются при преобразовании Фурье образы бесконечно дифференцируемых финитных функций на группах.

В настоящей работе рассматривается нильпотентная группа всех верхних треугольных вещественных матриц n-го порядка с единицами на главной диагонали. Показывается, что использованный в [5] и [6] прием применим также к нашей группе и формулируется аналог теоремы Пэли-Винера в той же форме. Доказательство проводится почти аналогично тому, как сделано раньше и элементарно, но технически несколько усложняется.

Автор выражает благодарность Д. П. Желобенко и его ученикам за полезные советы.

§1. Неунитарные представления

Группа G разлагается в полупрямое произведение: $G=N\cdot H$. Нормальная делитель N и подгруппа H состоят из элементов n и z следующих видов, соответственно

$$n=n(x)=\begin{bmatrix} 1_p & x \\ & 1_q \end{bmatrix}, \quad z=(z_1, z_2)=\begin{bmatrix} z_1 & \\ & z_2^{-1} \end{bmatrix},$$

где 1_p, 1_q —— единичные матрицы p—го и q—го порядка,

x —— вещественная $p\times q$ матрица,

z_1, z_2 —— матрицы p—го и q—го порядка.

(В дальнейшем предполагается, что $|p-q|\leqq 1$, $p+q=n$).

Обозначения и определения (1)

(i). Для любых комплексных $p\times q$ матриц λ и x, положим

$$<\lambda,\ x> = [tr({}^t\lambda\cdot x)]^{1/2},\ ||\lambda||_v = <\lambda,\lambda>^{1/2},$$

в частности, для $n=n(x)\in N$ положено $\|n\|_v=\|x\|_v$.

(ii). Пусть $\hat{N}$——совокупность всех не обязательно унитарных характеров коммутативной группы N. Такой характер имеет вид $\chi^\lambda(n)=\exp<\lambda,\ x>$ $(n=n(x)\in N)$, где λ некоторая $p\times q$ комплексная матрица. Мы пишем $N\ni\chi^\lambda$, или просто $N\ni\lambda$.

(iii). Определим коприсоединенное действие $\lambda\mapsto z^*\cdot\lambda$ группы H в пространстве $\hat{N}$ следующим образом: $\chi^{z^*\cdot\lambda}(n)=\chi^\lambda(z\cdot n\cdot z^{-1})$. Обозначим через $\|z\|$ операторную норму линейного преобразования $\lambda\mapsto z^*\lambda$, именно $\|z\|=\sup\|z^*\cdot\lambda\|_v$, где λ пробегает всю область $\|\lambda\|_v\leqq 1$.

(iv). Для $\lambda=[\lambda_{ij}]$, $_{1\leqq i\leqq p,\ 1\leqq j\leqq q}$ положим

$$\Delta_k(\lambda)=\det[\lambda_{ij}]_{1\leqq i\leqq k,\ q-k+1\leqq j\leqq q}.$$

Лемма 1. **(i)** *Многочлены* $\Delta_k(\lambda)$, $k=1,\ 2\ldots \min\ (p,\ q)$*—инвариант относительно коприсоединенного действия.* **(ii)** *Если заданы числа* $c_k\neq 0$, $(k=1,\ 2\ldots \min\ (p,\ q)$, *то множество* $\{\lambda\in\hat{N};\ \Delta_k(\lambda)=c_k,\ k=1,\ 2\ldots \min\ (p,\ q)\}$ *является орбитой относительно коприсоединенного действия группы* H.

В самом деле, при $z=(z_1,\ z_2)$, $z^*\cdot\lambda={}^tz_1\cdot\lambda\cdot{}^tz_2$ Из эгого, ясно **(i)**, а доказательство **(ii)** проводится математической индукцией, см. также. [2], [3].

Характер λ называется лежащим в общем положении, если

$$\Delta_k(\lambda)\neq 0,\ k=1,2\ldots\min(p,\ q).$$

Лемма 2. *Пусть* λ *лежит в общем положении. Изотропная подгруппа характера* λ *тривиальна, т.е. если* $z^*\cdot\lambda=\lambda$, *то* $z=e$.

В самом деле, достаточно показть это для λ следующих видов, так как они являются представителями орбит характеров в общем положении: при $p=q$, $q=p+1$ и $p=q+1$, соответственно

$$\lambda=\begin{bmatrix} 0 & & \lambda_1 \\ & \ddots & \\ \lambda_p & & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda=\begin{bmatrix} 0 & 0 & & \lambda_1 \\ \vdots & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 0 & \lambda_p & & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda=\begin{bmatrix} 0 & & \lambda_1 \\ & \ddots & \\ \lambda_q & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Пусть характер λ унитарен. Индуцированное им представление группы G осуществляется в пространстве $L^2(H, dz)$:

$$(1) \qquad T_g^\lambda\cdot\varphi(z)=\chi^\lambda(z\cdot n\cdot z^{-1})\varphi(zw), \text{ при } g=n\cdot w \qquad (n\in N,\ z\in H).$$

Более того, если λ лежит в общем положении, формула (1) задает неприводимое унитарное представление, см. А.А. Кириллов [3], G. Mackey [4]. Как мы будем видеть позднее, в формуле Планшереля встречаются только такие неприводимые представления.

Чтобы построить семейство неунитарных представлений, введем систему норм $\|\cdot\|_t (t\in R)$ и пространство $\mathscr{C}$. Сначала положим

$$\|\varphi\|_t=\left(\int_H e^{t\cdot\|z\|}|\varphi(z)|^2dz\right)^{1/2},$$

и $\mathfrak{H}(t)=L^2(H, e^{t\cdot\|z\|}dz)$. Очевидно, если $s<t$, то $\mathfrak{H}(s)\supset\mathfrak{H}(t)$. Положим $\mathscr{C}=\varprojlim_t \mathfrak{H}(t)$: проективный предел. Пространство $\mathscr{C}$ с нормами $\|\cdot\|_t(t\in R)$ полно.

Предложение 1. *Формула* (1) *задает в пространстве $\mathscr{C}$ представление $\mathscr{D}_\lambda=(T_g^\lambda, \mathscr{C})$ индуцированное не обязательно унитарным характером $\lambda\in\hat{N}$:*

В самом деле, непрерывность T_g^λ вытекает из неравенства

$$(2) \qquad \|T_g^\lambda\cdot\varphi\|_t\leqq\|\varphi\|_{\tau^\lambda(t;g)},$$

где положено для $g=n\cdot w$ $(n\in N,\ w\in H)$,

$$\tau^\lambda(t:g)=\begin{cases}(t+2\|\mathrm{Re}\lambda\|_v\cdot\|n\|_v)\cdot\|w^{-1}\| & \text{при} \quad t\geqq-2\cdot\|\mathrm{Re}\lambda\|_v\cdot\|n\|_v,\\ (t+2\cdot\|\mathrm{Re}\lambda\|_v\cdot\|n\|_v)\cdot\|w\|^{-1} & \text{при} \quad t\leqq-2\cdot\|\mathrm{Re}\lambda\|_v\cdot\|n\|_v.\end{cases}$$

Предложение 2. *Для того, чтобы существовала нетривиальная инварианая билинейная форма между двумя прдставлениями $\mathscr{D}_{\lambda_1}$ и $\mathscr{D}_{\lambda_2}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось $z_0^*\cdot\lambda_1+\lambda_2=0$ при* *некотором* $z_0 \in H$. *В таком случае, если* λ_1 *и, следовательно,* λ_2 *—в общем положении, искомая форма принимает вид*

$$B(\varphi, \psi) = \quad \mathrm{const} \int_H \varphi(z_0 \cdot z) \psi(z) dz \qquad (\varphi, \psi \in \mathscr{C}).$$

Доказательство. Инвариантность относительно действия подгруппы H означает, что в силу теоремы о ядре (см. [1]),

$$B(\varphi, \psi) = (\omega(z), \int_H \varphi(z z') \psi(z') dz') \; (\varphi, \psi \in C_0^\infty(H),$$

где $\omega(z)$—обобщенная функция.

Инвариантность относительно $n = n(x) \in N$ влечет

$$(3) \qquad (\omega(z), < z^* \cdot \lambda_1 + \lambda_2, x > \cdot \varphi(z)) = 0.$$

Итак, обобщенная функция $\omega(z)$ сосредоточена на алгебраической поверхности $S_x = \{z \in H; < z^* \cdot \lambda_1 + \lambda_2, x > = 0\}$.

Рассмотрим два случая

(**а**) $z^* \cdot \lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$ для любого $z \in H$:

в этом случае $\bigcap_x S_x = \emptyset$, так что $\omega(z) = 0$.

(**б**) $z_0^* \cdot \lambda_1 + \lambda_2 = 0$ при некотором $z_0 \in H$:

в этом случае $\bigcap_x S_x = (z_0)$, и $\omega(z)$ сосредоточена в одной точке, если λ_1 и, следовательно, λ_2—в общем положении.

Действительно, пусть $z \in \bigcap_x S_x$, то $z^* \cdot \lambda_1 + \lambda_2 = 0$, и

с другой стороны $z_0^* \cdot \lambda_1 + \lambda_2 = 0$. Следовательно, $(z \cdot z_0^{-1})^* \cdot \lambda_1 = \lambda_1$, и, согласно Лемме 2, получим $z = z_0$.

Заметим, что в случае (б) инвариантной билинейной формой является, в частности,

$$B(\varphi, \psi) = \int_H \varphi(z_0 \cdot z) \psi(z) dz .$$

Покажем, что, если λ_1 и, следовательно, λ_2 в общем положении, искомая форма совпадает с этой формой с точностью до постоянного множителя.

Сделав подстановку $z \longrightarrow z_0 \cdot z$ и положив $\tilde{\omega}(z) = \omega(z_0 \cdot z)$ в формуле (3), получим

$$(3') \qquad (\tilde{\omega}(z),\ <z^*\cdot\lambda_2,\ x>\cdot\varphi(z)) = <\lambda_2,\ x>(\tilde{\omega},\ \varphi),$$

для любого x, а $\tilde{\omega}(z)$ конечно, сосредоточена в точке $z=e$. Без ущерба для общности можно считать, что λ_2 имеет такой вид как в доказательстве Леммы 2. Чтобы увериться в этом, достаточно сделать замену $z \longrightarrow w\cdot z\cdot w^{-1}$, где w из H выбран так, чтобы $w^*\cdot\lambda_2$ принимал выше упомянутый вид.

Для получения нашего утверждения, надо показать, что $\tilde{\omega}(z)$ не содержит дифференцирования, т.е. $(\tilde{\omega}, \varphi) = \text{const}\ \varphi(0)$. Для этого, достаточно показать следующее утверждение $P(l)$ математической индукцией.

$P(l)$: *$\tilde{\omega}(z)$ не содержит дифференцирования относительно переменных ξ_{ij}, $i\leqq l$ и η_{ij}, $j>q-l$, $1\leqq l\leqq \min\ (p\ q)$.*

(Условимся писать $z=(\xi,\ \eta)$, $\xi=(\xi_{ij})$, $\eta=(\eta_{ij})$).

$P(0)$ очевидно. Допустим, что $P(l)$ верно. Тогда можно заменить (3′) формулой

$$(\tilde{\omega}(z),\ <\lambda_2,\ \tilde{\xi}\cdot x\cdot\tilde{\eta}>\cdot\varphi(z)) = <\lambda_2,\ x>(\tilde{\omega},\ \varphi),$$

причем

$$\tilde{\xi} = \begin{bmatrix} 1_l & 0 \\ 0 & \xi_{ij} \end{bmatrix} (i.e,\ \xi_{ij}=0,\ i\leqq l), \qquad \tilde{\eta} = \begin{bmatrix} \eta_{ij} & 0 \\ 0 & 1_{l-1} \end{bmatrix} (i.e,\ \eta_{ij}=0,\ j>q-l).$$

Полагая $z=(\delta_{i,\ l+1}\cdot\delta_{jk})_{\substack{1\leq i\leq p,\\ 1\leq j\leq q}}$ получаем

$$<\tilde{\omega},\ \eta_{k,q-l}\cdot\varphi> = 0,$$

и также, полагая $x=(\delta_{ik}\cdot\delta_{j,\ q-l})_{\substack{1\leq i\leq p,\\ 1\leq j\leq q}}$ получаем

$$<\tilde{\omega},\ \xi_{l+1,k}\cdot\varphi> = 0.$$

Из этих рассуждений легко видеть, что $\tilde{\omega}(z)$ не содержит дифференцирования по отношению к $\eta_{k,q-l}$ и $\xi_{l+1,k}$. Индукция завершена.

Таким образом, в случае (б) мы получаем

$$B(\varphi,\ \psi) = \text{const}\int_H \varphi(z_0\cdot z)\psi(z)\,dz$$

и ясно, что эта форма имеет смысл над $\mathscr{C}$.

Из Предложения 2 легко получить

Предложение 3. (**i**) *Допустим, что непрерывный оператор A в $\mathscr{C}$ удовлетворяет соотношение $A\cdot T_g^{\lambda_1}=T_g^{\lambda_2}\cdot A$ для всех $g\in G$. Тогда существует $z_0\in H$ такой, что $z_0^*\cdot\lambda_1=\lambda_2$, причем A—левый сдвиг в H на z_0 с точностью до постоянного множителя, т.е. $A\varphi(z)=const\ \varphi(z_0\cdot z)$. В частности, если один из двух характеров—в общем положении а другой—не в общем положении, то нет такого оператора.*
(**ii**) *Представление $\mathscr{D}_\lambda$—операторно неприводимо при $\lambda\in\hat{N}$ в общем положении.* (**iii**) *Пусть $Im\lambda$—в общем положении. То представление $\mathscr{D}_\lambda$ можо продолжить до унитарного представления тогда и только тогда, когда $Re\lambda=0$, т.е. когда характер χ^λ унитарен.*

§2. Преобразование Фурье

Предварительно введем функцию $\|z\|_v$:

$$\|z\|_v=\|z_1\|_v\cdot\|z_2\|_v,\ \|z_i\|_v=(tr^t z_i\cdot z_i)^{1/2}\quad \text{при}\quad z=(z_1,\ z_2).$$

Ясно, что функция $\|z\|_v$ бесконечно дифференцируема.

Лемма 3. *Имеет место неравенство $\|z\|\leqq\|z\|_v\leqq\sqrt{pq}\cdot\|z\|$, следовательно, множество $\{z\in H;\ \|z\|\leq\alpha\}(\alpha\in R)$ компактно.*

Доказательство. Ясно что $z\cdot n(x)\cdot z^{-1}=n(Adz\cdot x)$ и $Adz\cdot x=z_1\cdot x\cdot z_2$ для $z=(z_1,\ z_2)$. Это означает, что

$$Adz|_{\mathfrak{N}}\cong z_1\otimes{}^t z_2\qquad (\mathfrak{N}\text{—алгебра Ли группы } N).$$

Итак, получили

$$\|z\|=\|(Adz|_{\mathfrak{N}})^*\|=\|Adz|_{\mathfrak{N}}\|=\|z_1\|\cdot\|z_2\|,$$

где $\|z_i\|$ совпадает с операторной нормой в R^p или R^q, и нетрудно проверить, что

$$\|z_1\|\leqq\|z_1\|_v\leqq\sqrt{p}\cdot\|z\|,\ \|z_2\|\leqq\|z_2\|_v\leqq\sqrt{q}\cdot\|z\|.$$

Тем самым Лемма доказана.

Возьмем в качестве компактных множеств в G следующие

$$Q_{\alpha,\gamma}=\{g=n\cdot z\,;\ ||z||\leqq\alpha,\ ||n||_v\leqq\gamma\}.$$

Согласно Лемме 3, точная верхняя грань $\alpha'=\sup\limits_{\|z\|\leqq\alpha}\|z^{-1}\|$, конечна. Каждому компакту $Q_{\alpha,\gamma}$ поставим в соответствии функцию:

$$\tau^{\lambda}(t\,;Q_{\alpha,\gamma})=\begin{cases}\alpha'(t+2\gamma||\mathrm{Re}\lambda||_v), & \text{при}\quad t\geqq-2\gamma||\mathrm{Re}\lambda||_v,\\ \alpha^{-1}(t+2\gamma||\mathrm{Re}\lambda||_v), & \text{при}\quad t\leqq-2\gamma||\mathrm{Re}\lambda||_v.\end{cases}$$

Лемма 4. *Допустим, что $f\in L^1(G)$ и ее носитель содержится в компакте $Q_{\alpha,\gamma}$. Тогда преобразование Фурье функции f*

$$T_f^{\lambda}=T^{\lambda}(f)=\int_G f(g)\cdot T_g^{\lambda}\ dg$$

сходится сильно и определяет непрерывный оператор в $\mathscr{C}$, т.е.

$$||T_f^{\lambda}\cdot\varphi||_t\leqq||f||_{L^1}\cdot||\varphi||_{\tau^{\lambda}(t;Q_{\alpha,\gamma})}\qquad(\varphi\in\mathscr{C}).\tag{4}$$

Это следует из неравенства (2), или можно показать непосредственно. Это неравенство играет существенную роль в данной статье.

Выше определенный оператор T_f^{λ} является интегральным оператором с ядром:

$$T_f^{\lambda}\cdot\varphi(w)=\int_H K_f^{\lambda}(w,\ z)\cdot\varphi(z)\,dz,$$

где

$$K_f^{\lambda}(w,\ z)=\int_N f(w^{-1}\cdot n\cdot z)\chi^{\lambda}(n)\,dn.$$

Пусть $f\in L^1(G)\cap L^2(G)$. Формула Планшереля легко выводится.

Формула Планшереля

$$||f||_{L^2}^2=\frac{1}{(2\pi)^s}\int_{R^s}tr[(T_f^{\lambda})^*\cdot T_f^{\lambda}]\omega(\lambda)\,d\lambda\qquad(s=\min(p,\ q)),$$

где

$$\omega(\lambda)=\prod_{i=2}^{p}\lambda_i^{2i-2}\qquad(p=q),$$

$$\omega(\lambda)=\prod_{i=1}^{s}|\lambda|_i^{2i-1}\qquad(|p-q|=1),\qquad \text{также см. [2], [3].}$$

Обозначения и определения (II).

$\mathfrak{G}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{H}$—алгебра Ли группы G, и подалгебры отвечающйе N и H, соответственно.

Тогда $\mathfrak{G}=\mathfrak{N}\oplus\mathfrak{H}$: прямая сумма как векторные пространства.

$U(\mathfrak{G})$, $U(\mathfrak{N})$, $U(\mathfrak{H})$: универсальные обертывающие алгебры алгебр $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{H}$, соответственно.

Естественным образом

$$U(\mathfrak{G})=U(\mathfrak{N})\cdot U(\mathfrak{H}).$$

dT^{λ}: дифференциал представления T^{λ}, т.е.

$$dT^{\lambda}(X)=\frac{d}{dt}T^{\lambda}_{\exp tX}|_{t=0} \qquad (X\in\mathfrak{G}).$$

dT^{λ} расширяется по ассоциативности до представления алгебры $U(\mathfrak{G})$. Для простоты условимся писать, для $X\in U(\mathfrak{H})$ и $Y\in U(\mathfrak{N})$

$$dT^{\lambda}(X)=\partial(X), \qquad dT^{\lambda}(Y)=\chi^{\lambda}_{Y},$$

или, что то же самое,

$$(\partial X)\cdot\varphi(z)=\frac{d}{dt}\varphi(z\cdot\exp tX)|_{t=0}, \quad \text{если} \quad X\in\mathfrak{H},$$

$$(\chi^{\lambda}_{Y}\cdot\varphi)(z)=\chi^{\lambda}(z\cdot Y\cdot z^{-1})\cdot\varphi(z), \quad \text{если} \quad Y\in\mathfrak{N},$$

где

$$\chi^{\lambda}(z\cdot Y\cdot z^{-1})=<\lambda,\ Adz\cdot Y>=\frac{d}{dt}\chi^{\lambda}(z\cdot\exp tY\cdot z^{-1})|_{t=0}.$$

X_l, X_r — лево, право инвариантные дифференциальные операторы на G отвечающие $X\in\mathfrak{G}$, соответственно.

Лемма 5. *Пусть* $f\in C_0^{\infty}(G)$, $X\in\mathfrak{H}$ *и* $Y\in\mathfrak{N}$. *Тогда*

(i) $T^{\lambda}(X_r^p\cdot f)=\partial(X)^p\cdot T^{\lambda}(f)$,

(ii) $T^{\lambda}(X_l^p\cdot f)=T^{\lambda}(f)\cdot\partial(-X)^p$,

(iii) $T^{\lambda}(Y_r^p\cdot f)=(\chi^{\lambda}_{Y})^p\cdot T^{\lambda}(f)$,

$T^{\lambda}(Y_l^p\cdot F)=T^{\lambda}(f)\cdot(-\chi^{\lambda}_{Y})^p, \qquad (p=0,\ 1,\ 2\ldots).$

Это легко проверяется. Заметим, что (**ii**) имеет смысл в подпространстве

$$\mathscr{C}_\infty = \{\varphi \in \mathscr{C} : \partial(X)\cdot\varphi \in \mathscr{C} \quad \text{для всех} \quad X \in U(\mathfrak{H})\}.$$

Здесь производные понимаются в обобщенном смысле. Если определить в $\mathscr{C}_\infty$ полу-нормы формулой

$$\|\varphi\|_{t,X} = \|\partial(X)\cdot\varphi\|_t \qquad (t \in R,\ X \in U(\mathfrak{H})),$$

то пространство $\mathscr{C}_\infty$ полно. Непрерывная линейная форма на $\mathscr{C}_\infty$ записывается в виде

$$(F, \psi) = \sum_{k=1}^{m} \int_H h_k(z)\cdot\partial(X_k)\psi(z)\,dz,$$

где $h_k(z) \in \mathfrak{H}(t)$ для некоторого $t \in R$, а $X_k \in U(\mathfrak{H})$.

Предложение 4. (**i**) *Допустим, что* $f \in C_0^\infty(G)$ *и ее носитель содержится в компакте* $Q_{\alpha,\gamma}$. *Тогда преобразование Фурье* T_f^λ *обладает ниже приведенными свойствами* (1°), (2°) *и* (3°). (**ii**) *Пусть задано компактное множество* $Q_{\alpha,\gamma}$. *Если операторнозначная функция* T^λ *от* $\lambda \in \hat{N}$, *значение которой—оператор, действующий в пространстве* $\mathscr{C}$, *обладает этими свойствами* (1°), (2°) *и* (3°), *то существует единственная функция* f *такая, что бесконечно дифференцируема, и ее носитель содержится в заданном компакте* $Q_{\alpha,\gamma}$ *и* $T^\lambda = T_f^\lambda$.

(**1**). *Для любых* $\partial_k = dT^\lambda(X_k)$ $(X_k \in U(\mathfrak{G}),\ k=1, 2)$, *существует такая постоянная* $C(\partial_1, \partial_2)$, *что имеет место*

$$\|\partial_1\cdot T^\lambda\cdot\partial_2\cdot\varphi\|_t \leqq C(\partial_1, \partial_2)\cdot\|\varphi\|_{\tau^\lambda(t;Q_{\alpha,\gamma})},$$

где $C(\partial_1, \partial_2)$ *не зависит от* t, λ *и* φ, *а* $\tau^\lambda(t;Q_{\alpha,\gamma})$—*вспомогательная функция, отвечающая заданному компакту* $Q_{\alpha,\gamma}$.

(**2°**). *Соотношение эквивалентности*:

$$L_{z_0}\cdot T^\lambda\cdot L_{z_0}^{-1} = T^{z_0^*\cdot\lambda} \qquad (z_0 \in H,\ \lambda \in \hat{N}),$$

где L_{z_0}—*левый сдвиг на* z_0.

(**3**°). *Слабая аналитичность: Для любых* $F\in\mathscr{C}'_\infty$ (*пространство, сопряженное к* $\mathscr{C}_\infty$) *и* $\varphi\in\mathscr{C}$, $<F,\ \partial_1\cdot T^\lambda\cdot\partial_2\cdot\varphi>$ — *целая аналитическая функция от* $\lambda\in\hat{N}$, *где* ∂_1 *и* ∂_2 *те же, что и в* (**1**°).

Замечание. Из неравевства в (1°), нетрудно убедиться в том, что $\partial_1\cdot T^\lambda\cdot\partial_2$ допускает замыкание на все пространство $\mathscr{C}$, и если применять для последнего то же обозначение, то свойство (1°) также справедливо для всех $\varphi\in\mathscr{C}$.

Доказтельство части (**i**). Свойство (1°) — следствие неравенства (4) и Леммы 5; свойство (2°) очевидно, так как $L_{z_0}\cdot T^\lambda_g=T_g{}^{z_0^*\cdot\lambda}\cdot L_{z_0}$. Свойство (3°) вытекает из выше сказанного о форме функционалов над $\mathscr{C}_\infty$ и Леммы 5. Часть (**ii**) мы докажем в следующем параграфе.

§3. Доказательство части (ii) Предложения 4

Доказательство разобьем на семь пунктов (**a**) ~ (**ж**).

(**a**) Алгебра $\mathfrak{H}$ разлагается в пямую сумму: $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}_1\oplus\mathfrak{H}_2$, где $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$— алгебры Ли всех верхних треугольных вещественных матриц p-го и q-го порядка с нулями на главной диагонали, соответственно. В качестве базиса в $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$, возьмем

$$X^1_{ij}=(\delta_{ik}\cdot\delta_{jl})_{1\leq k,l\leq p},\quad X^2_{ij}=(\delta_{ik}\cdot\delta_{jl})_{1\leq k,l\leq q}.$$

Лемма 6. *Используем обозначение для* $z\in H$

$$z=(\xi,\ \eta)\qquad и\qquad \xi=(\xi_{ij}),\ \eta=(\eta_{kl}).$$

Имеют место соотношения

$$\partial(X^1_{ij})=\sum_{k\leq i}\xi_{ki}\cdot\partial/\partial\xi_{kj},\quad \partial(X^2_{ij})=-\sum_{l\geq j}\eta_{lj}\cdot\partial/\partial\eta_{il},$$

или обратно

$$\partial/\partial\xi_{ij}=\sum_{k\leq i}\hat{\xi}_{ik}\cdot\partial(X^1_{kj}),\qquad \partial/\partial\eta_{ij}=-\sum_{l\geq j}\hat{\eta}_{lj}\cdot\partial(X^2_{il}),$$

где положено

$$\hat{\xi}=(\widehat{\xi_{ij}})={}^t\xi^{-1}\qquad и\qquad \hat{\eta}=(\hat{\eta}_{ij})={}^t\eta^{-1}.$$

Доказательство опускаем.

Так как $\hat{\xi}_{ik}$ и $\hat{\eta}_{ij}$—многочлены от $\xi_{\alpha\beta}$, и $\eta_{\alpha\beta}$, принадлежность ψ к $\mathscr{C}_\infty$ эквивалентна тому, что $P(\partial/\partial\xi, \partial/\partial\eta)\cdot\psi\in\mathscr{C}$ для произвольных многочленов P.

(б). Существование ядра интегрирования

Воспользуемся следующей простой леммой.

Лемма 7. *Пусть $P(\partial/\partial z)$ многочлен от $\partial/\partial\xi_{ij}$ и $\partial/\partial\eta_{kl}$ и $\psi\in\mathscr{C}_\infty$. То имеем*

$$P(\partial/\partial z)[e^{t\cdot\|z\|_v}\cdot\psi(z)]=\sum_\nu R_\nu(z, t)\cdot\|z\|_v^{-N(\nu)}\cdot[P_\nu(\partial/\partial z)\psi(z)]e^{t\cdot\|z\|_v},$$

где $R_\nu(z, t)$*-многочлены от* ξ_{ij} *и* η_{kl}.

$N(\nu)$*—положительные числа,*

$P_\nu(\partial/\partial z)$*—многочлены от* $\partial/\partial\xi_{ij}$, $\partial/\partial\eta_{kl}$.

Доказательство легко проводится индукцией по порядку P.

Пусть $\psi\in\mathscr{C}_\infty$. Из сказанного в пункте (а) и Леммы 7, $P(\partial/\partial z)[e^{t\|z\|_v}\cdot\psi(z)]\in\mathscr{C}$ для любых многочленов P, и по лемме С.Л. Соболева, функция $e^{t\|z\|_v}\cdot\psi(z)$ совпадает с некоторой C^∞—функцией везде за исключением множества меры нуль и ограничена т.е. при некотором $M>0$, $e^{t\|z\|_v}\cdot|\psi(z)|\leqq M(t\in R)$, поэтому $\psi(z)$ стремится к нулю, когда $\|z\|_v\to\infty$.

Так как $\mathscr{C}\subset L^1(G)$, мы имеем для $\psi\in\mathscr{C}_\infty$

$$\psi(w)=(-1)^d\int_{w_1}^\infty\cdots\int_{w_d}^\infty\prod_{i=1}^d\partial/\partial z_i\cdot\psi(z)\,dz\qquad(d=\dim H).$$

Здесь для краткости, через $(z_1, z_2\ldots z_d)$ обозначаются координаты $z=(\xi, \eta)=((\xi_{ij}), (\eta_{kl}))_{1\leqq i<j\leqq p, 1\leqq k<l\leqq q}$.

По условию (1°), можно положить $\psi=T^\lambda\cdot\varphi\,(\varphi\in\mathscr{C})$ и применить полученное выше равенство. По неравенству Шварца, имеем при $t>0$

$$|T^\lambda\cdot\varphi(w)|\leqq\left(\int_{w_1}^\infty\cdots\int_{w_d}^\infty e^{-t\cdot\|z\|}dz\right)^{1/2}\cdot\left\|\prod_{i=1}^d\partial/\partial z_i\cdot T^\lambda\cdot\varphi\right\|_t.$$

Согласно Лемме 6, $\prod_{i=1}^d\partial/\partial z_i$ можно записать в виде

$$\prod_{i=1}^d\partial/\partial z_i=\sum_\nu R_\nu(z)\cdot\partial(X_\nu),$$

где $X_\nu \in U(\mathfrak{H})$ а $R_\nu(z)$ — многочлены, следовательно, их можно оценить следующим образом: при некотором $r>0$

$$|R_\nu(z)| \leqq \text{const}\|z\|^r,$$

поэтому, для произвольного $\varepsilon>0$, найдется такая постоянная $A(\varepsilon)$, что

$$|R_\nu(z)| \leqq A(\varepsilon)\cdot e^{\varepsilon\|z\|/2}.$$

Итак,

$$\|\prod_{i=1}^{d} \partial/\partial z_i \cdot T^\lambda \varphi\|_t$$

$$\leqq \sum_\nu \|R_\nu(z)\cdot\partial(X_\nu)\cdot T^\lambda\varphi\|_t \leqq A(\varepsilon)\cdot\sum_\nu \|\partial(X_\nu)\cdot T^\lambda\varphi\|_{t+\varepsilon}.$$

Условие (1°) означает наличие постоянных C_ν таких, что

$$\|\partial(X_\nu)\cdot T^\lambda\varphi\|_{t+\varepsilon} \leqq C_\nu\cdot\|\varphi\|_{\tau^\lambda(t+\varepsilon, Q_{\alpha,\gamma})}.$$

Таким образом, получим

$$|T^\lambda\cdot\varphi(w)| \leqq \text{const}\left(\int_H e^{-t\cdot\|z\|}dz\right)^{1/2}\cdot\|\varphi\|_{\tau^\lambda(t+\varepsilon, Q_{\alpha,\gamma})} \qquad (t>0),$$

где const не зависит от t, λ и φ.

Эта оценка позволяет выразить T^λ в виде интегрального оператора с ядром (см. [5])

$$T^\lambda\cdot\varphi(w) = \int_H K^\lambda(w, z)\cdot\varphi(z)\,dz \qquad (\varphi\in\mathfrak{H}(s)),$$

где $$K^\lambda(w, \cdot)\in\mathfrak{H}(-s),\ s=\tau^\lambda(t+\varepsilon, Q_{\alpha,\gamma}) \qquad (t,\ \varepsilon>0).$$

Далее из условия (2°) следует

$$K^{z_0',\lambda}(w, z) = K^\lambda(z_0\cdot w, z_0\cdot z) \qquad \text{для почти всех } z\in H.$$

(в). Дифференцируемость ядра

(в. 1) *Для произвольных многочленов* $P(\partial/\partial z)$ *имеет место*

$$P(\partial/\partial z)\cdot K^\lambda(w, \cdot)\in\mathfrak{H}(-s-\varepsilon),$$

где $s=\tau^{\lambda}(t+\varepsilon, Q_{\alpha,\gamma})$ и ε фиксированы.

Действительно, по Лемме 6 можно представить $P(\partial/\partial z)$ в виде

$$P(\partial/\partial z)\cdot\varphi(z)=\sum_{\nu}\partial(X'_{\nu})\cdot[F_{\nu}(z)\cdot\varphi(z)],$$

где $X'_{\nu}\in U(\mathfrak{H})$ а $F_{\nu}(z)$—многочлены. Подобно тому, как сделано в пункте (б), интегральный оператор $T^{\lambda}\cdot\partial(X'_{\nu})$ задается ядром $K^{\lambda}_{\nu}(w, z)$, $(K^{\lambda}_{\nu}(w, \cdot)\in\mathfrak{H}(-s))$ и, следовательно, $T^{\lambda}\cdot P(\partial/\partial z)$ задается ядром $\sum_{\nu} K^{\lambda}_{\nu}(w, z)\cdot F_{\nu}(z)$.
Итак, в обобщенном смысле, имеем

$$P^{*}(\partial/\partial z)\cdot K^{\lambda}(w, z)=\sum_{\nu} K^{\lambda}_{\nu}(w, z)\cdot F_{\nu}(z),$$

где P^{*}—оператор сопряженный к $P(\partial/\partial z)$.

Если выбрать постоянную $B(\varepsilon)$ для любого $\varepsilon>0$ так, чтобы $|F_{\nu}(z)|\leqq B(\varepsilon)\cdot e^{\varepsilon\cdot\|z\|/2}$, то получаем наше утверждение.

(**в. 2**). *Функцию* $K^{\lambda}(w, z)$ *можно считать бесконечно дифференцируемой относительно* z.

Если мы покажем, что для любых многочленов $P(\partial/\partial z)$

$$(*)\qquad P(\partial/\partial z)[e^{-\sigma\|z\|_{v}}\cdot K^{\lambda}(w, z)]\in L^{2}(H, dz),$$

то по лемме С.Л. Соболева, $e^{-\sigma\cdot\|z\|_{v}}\cdot K^{\lambda}(w, z)$ может считаться бесконечно дифференцируемой.

Как показано в пункте (в. 1), для любых многочленов $P(\partial/\partial z)$

$$P(\partial/\partial z)\cdot K^{\lambda}(w, z)\in\mathfrak{H}(-s-\varepsilon),$$

значит,

$$e^{-\sigma\cdot\|z\|}\cdot P(\partial/\partial z)\cdot K^{\lambda}(w, z)\in\mathfrak{H}(\varepsilon'),$$

где σ и ε' определены так, чтобы $s+\varepsilon=2\sigma-\varepsilon'$.
Поэтому

$$e^{-\sigma\cdot\|z\|_{v}}\cdot P(\partial/\partial z)\cdot K^{\lambda}(w, z)\cdot\in\mathfrak{H}(\varepsilon'),$$

так как $\|z\|\leqq\|z\|_{v}$ (Лемма 3).

С другой стороны, из Леммы 7

$$P(\partial/\partial z)\cdot[e^{-\sigma\cdot\|z\|_v}\cdot K^\lambda(w, z)]$$

$$=\sum_\nu R_\nu(z, \sigma)\cdot\|z\|_v^{-N(\nu)}\cdot[P_\nu(\partial/\partial z)\cdot K_\nu^\lambda(w, z)]e^{-\sigma\cdot\|z\|_v},$$

где $R_\nu(z, \sigma)$—многочлены от z, которые можно оценить следующим образом

$$|R_\nu(z, \sigma)| \leqq D(\varepsilon)\cdot e^{\varepsilon\cdot\|z\|/2} \qquad (D(\varepsilon)\text{—постоянная}).$$

Как только что показано,

$$[P_\nu(\partial/\partial z)\cdot K_\nu^\lambda(w, z)]e^{-\sigma\cdot\|z\|_v}\in\mathfrak{H}(\varepsilon'),$$

учитывая эту оценку, получаем утверждение (*), и доказательство закончено.

(г). Точно таким же рассуждением, как сделано в [5], можно показать

(г. 1) *Если функция* $\varphi(z)\in\mathscr{C}$ *равна нулю почти всюду вне* $\eta'\leqq\|z\|\leqq\eta$, *то функция* $T^\lambda\cdot\varphi(w)$ *равна нулю почти всюду вне* $\alpha^{-1}\cdot\eta'\leqq\|w\|\leqq\alpha'\cdot\eta$.

(г. 2) *Когда* w *фиксировано, ядро интегрирования* $K^\lambda(w, z)$ *имеет свой носитель внутри* $max(\alpha'^{-1}\cdot\|w\|, 1)\leqq\|z\|\leqq\alpha\cdot\|w\|$.

(По поводу α и α', мы отсылаем к определению $\tau^\lambda(t; Q_{\alpha,\gamma})$ перед Леммой 4).

(д). Аналитичность ядра $K^\lambda(e, z)$ по $\lambda\in\hat{N}$

Как показано в (г. 2), функцию $K^\lambda(e, z)$ можно считать бесконечно дифференцируемой с ограниченным носителем внутри $\|z\|\leqq\alpha$, поэтому для любых многочленов $P(\partial/\partial z)$, имеем

$$P(\partial/\partial z)\cdot K^\lambda(e, z)=\int_{[z, z_0]}\prod_i \partial/\partial z_i'\cdot P(\partial/\partial z')\cdot K^\lambda(e, z')dz',$$

где интегрирование проводится по параллелепипеду

$$[z, z_0]=\{z\in H;\ z_i\leqq z_i\leqq(z_0)_i,\ i=1, 2\ldots d\},$$

и z_0 выбран так, чтобы все вершины кроме z лежали вне $\|z\|\leqq\alpha$.

Заметим, что верна (см. [5])

Лемма. *Пусть P^* сопряженный к P оператор. Тогда оператор $T^\lambda\cdot P(\partial/\partial z)$, определенный в $\mathscr{C}_\infty$, допускает затыкание на все пространство $\mathscr{C}$ и имеет место*

$$(T^\lambda\cdot P(\partial/\partial z))\cdot\varphi(w)=\int_H P^*(\partial/\partial z)\cdot K^\lambda(w,\ z)\cdot\varphi(z)\,dz\ (\varphi\in\mathscr{C}_\infty).$$

В этом смысле, можно писать также для $\varphi\in\mathscr{C}$

$$[T^\lambda\cdot P(\partial/\partial z)\cdot\varphi](w)=\int_H K^\lambda(w,\ z)\cdot P(\partial/\partial z)\varphi(z)\,dz.$$

Пусть $\chi_{[z,z_0]}$—характеристическая функция указанного выше множества $[z,\ z_0]$. Применяя выше приведенную лемму, имеем

$$P(\partial/\partial z)\cdot K^\lambda(e,\ z)=\int_H K^\lambda(e,\ z')\cdot P^*(\partial/\partial z')\cdot\chi_{[z,z_0]}(z')\,dz',$$

где $P^*(\partial/\partial z')$—оператор сопряженный к $\prod_i \partial/\partial z'_i\cdot P(\partial/\partial z')$.

Согласно пункту (в. 1),

$$P^*(\partial/\partial z)\cdot\varphi(z)=\sum_\nu \partial(X''_\nu)\cdot[F_\nu(z)\cdot\varphi(z)].$$

где $X''_\nu\in U(\mathfrak{H})$ а $F_\nu(z)$—многочлены, следовательно, имеем, $F_\nu\cdot\varphi\in\mathscr{C}$, если $\varphi\in\mathscr{C}$. Таким образом, получим

$$\begin{aligned}P(\partial/\partial z)\cdot K^\lambda(e,\ z)&=\sum_\nu\int_H K^\lambda(e,\ z')\cdot\partial(X''_\nu)\cdot F_\nu(z')\cdot\chi_{[z,z_0]}(z')\,dz'\\&=\sum_\nu\langle\delta_{w=e}(w),\ T^\lambda\cdot\partial(X''_\nu)\cdot(F_\nu\cdot\chi_{[z,z_0]})\rangle,\end{aligned}$$

и по условию (3°), $P(\partial/\partial z)\cdot K^\lambda(e,\ z)$—целая аналитическая функция от $\lambda\in\hat{N}$.

(е). Порядок роста и тип целой функции $P(\partial/\partial z)\cdot K^\lambda(e,\ z)$

Положим $\psi_\nu=T^\lambda\cdot\partial(X''_\nu)\cdot(F_\nu\cdot\chi_{[z,z_0]})$. Тогда $\psi_\nu\in\mathscr{C}_\infty$ по условию (1°). Носитель функции $\chi_{[z,z_0]}$ очевидно ограничен, скажем, лежит в $\|z\|\leqq\beta$. Как показано в (г. 1), носитель функции ψ_ν лежит в $\|w\|\leqq\alpha'\cdot\beta$, поэтому

$$\psi_\nu(e)=\int_{[e,w_0]}\prod_{i=1}^d \partial/\partial w_i\cdot\psi_\nu(w)\,dw,$$

где область интегрирования выбрана так, чтобы все вершины параллелепипеда $[e,\ w_0]$ кроме e лежали вне $\|w\|\leqq\alpha'\cdot\beta$.

Пусть $\delta=\sup_{w\in[e,w_0]}\|w\|$. Как показано в пункте (б),

$$\prod_i \partial/\partial w_i=\sum_\rho R_\rho(w)\cdot\partial(X_\rho)\qquad(X_\rho\in U(\mathfrak{H})),$$

и получим

$$\psi_\nu(e)=\sum_\rho\int_{[e,w_0]} R_\rho(w)\cdot\partial(X_\rho)\cdot\psi_\nu(w)\,dw. \tag{4}$$

Введем вспомогателельную функцию

$$E_m(w)=\exp\left[\frac{1}{m}(2\delta)^{2m+1}\cdot\|w\|_v^{-2m}\right] \qquad (m>0),$$

и заменим в равенстве (4) ψ_ν на $\psi_\nu\cdot E_m$.
Учитывая Лемму можно убедиться, что

$$\partial(X_\rho)\cdot[\psi_\nu(w)\cdot E_m(w)]$$
$$=\sum_\sigma R_{\rho,\sigma}(w)\cdot\|w\|_v^{-N(\rho,\sigma)}\cdot[\partial(X_{\rho,\sigma})\cdot\psi_\nu(w)]\cdot E_m(w),$$

где $N(\rho,\sigma)>0$, $R_{\rho,\sigma}(w)$—многочлены, а $X_{\rho,\sigma}\in U(\mathfrak{H})$.
Итак,

$$J_\nu=\psi_\nu(e)\cdot E_m(e)$$
$$=\sum_{\rho,\sigma}\int_{[e,w_0]}\frac{R_\rho(w)\cdot R_{\rho,\sigma}(w)}{\|w\|_v^{N(\rho,\sigma)}}[\partial(X_{\rho,\sigma})\cdot\psi_\nu(w)]\cdot E_m(w)\,dw.$$

Многочлены $R_\rho(w)\cdot R_{\rho,\sigma}(w)$ мажорируем так, чтобы

$$|R_\rho(w)\cdot R_{\rho,\sigma}(w)|\leqq\mathrm{const}\,\|w\|_v^r\leqq C_{m,\varepsilon}\cdot e^{\varepsilon\cdot\|w\|_v} \quad \text{при любом} \quad \varepsilon>0,$$

где $C_{m,\varepsilon}$—постоянная. Учитывая $\|w\|_v>1$

$$|J_\nu|\leqq C_{m,\varepsilon}\sum_{\rho,\sigma}\int_{[e,w_0]} e^{\varepsilon\|w\|_v}\cdot|\partial(X_{\rho,\sigma})\cdot\psi_\nu(w)|\cdot E_m(w)\,dw,$$

по неравенству Шварца

$$\leqq C_{m,\varepsilon}\left(\int_{[e,w_0]} e^{-t\cdot\|w\|+2\varepsilon\cdot\|w\|_v}\cdot E_m(w)^2\,dw\right)^{1/2}\cdot\sum_{\rho,\sigma}\|\partial(X_{\rho,\sigma})\cdot\psi_\nu\|_t.$$

Применяя условие (1°) к $\psi_\nu=T^\lambda\cdot\partial(X_\nu'')\cdot F_\nu\cdot\chi_{[z,z_0]}$, найдем такую постоянную $C(\rho,\sigma)$, что

$$\|\partial(X_{\rho,\sigma})\cdot\psi_\nu\|_t\leqq C(\rho,\sigma)\cdot\|F_\nu\cdot\chi_{[z,z_0]}\|_{T^\lambda(t;Q_{\alpha,\gamma})},$$

где $C(\rho, \sigma)$ не зависит от λ.

Наконец

$$|J_\nu| \leqq C_{m,\varepsilon}\cdot \sum_{\rho,\sigma} C(\rho, \sigma)\|F_\nu \cdot \chi_{[z,z_0]}\|_{\tau^\lambda(t; Q_{\alpha,\gamma})} \cdot I(t)^{1/2},$$

где положено

$$I(t) = \int_{[e,w_0]} \exp[-t\cdot\|w\| + 2\varepsilon\cdot\|w\|_v]\cdot E_m(w)^2\, dw.$$

Согласно Лемме 3

$$I(t) \leqq \int_{[e,w_0]} \exp\left[(-t + 2\varepsilon\cdot\sqrt{pq})\cdot\|w\| + \frac{2(2\delta)^{2m+1}}{m}\cdot\|w\|^{-2m}\right] dw.$$

Теперь положим $t = -2\gamma\cdot\|\mathrm{Re}\lambda\|_v$, тогда $\tau^\lambda(t; Q_{\alpha,\gamma}) = 0$, и рассмотрим функцию под знаком exp:

$$L(x) = lx + \frac{2(2\delta)^{2m+1}}{m}\cdot x^{-2m}, \qquad l = 2\gamma\cdot\|\mathrm{Re}\lambda\|_v + 2\varepsilon\cdot\sqrt{pq},\ x = \|w\|.$$

Функция $L(x)$ монотонно убывает при $0 \leqq x \leqq \left(\frac{4}{l}\right)^{\frac{1}{2m+1}}\cdot 2\delta$, поэтому при достаточно больших m, монотонно убывает по крайней мере в интервале $1 \leqq x \leqq \delta$ (Напомним, что $\delta = \sup_{w\in[e,w_0]} \|w\|$.). В этом случае подынтегральная функция достигает максимума в точке $w = e$. Таким образом, получаем

$$|J_\nu| \leqq \mathrm{const}\cdot\exp\left[\gamma\cdot\|\mathrm{Re}\lambda\|_v + \varepsilon\sqrt{pq} + \frac{(2\delta)^{2m+1}}{m}\right].$$

Из этого сразу следует искомая оценка

$$|\psi_\nu(e)| \leqq \mathrm{const}\cdot e^{\gamma\cdot\|\mathrm{Re}\lambda\|_v},$$

где const не зависит от $\lambda \in \hat{N}$, и имеем для любых многочленов P

$$|P(\partial/\partial z)\cdot K^\lambda(e, z)| \leqq \sum_\nu |\psi_\nu(e)| \leqq \mathrm{const}\cdot e^{\gamma\cdot\|\mathrm{Re}\lambda\|_v}.$$

Здесь заметим, что условия (1°) и (3°) справедливы также для $Y \in \mathfrak{N}^c$, комплексификации алгебры $\mathfrak{N}$. Применяя полученную оценку к оператору $(\chi_Y^\lambda)^r\cdot T^\lambda$ $(Y \in \mathfrak{N}^c)$ с ядром $\langle\lambda, Adw\cdot Y\rangle^r\cdot K^\lambda(w, z)$ легко получаем

$$\|\lambda\|_v^r\cdot|P(\partial/\partial z)\cdot K^\lambda(e, z)| \leqq M(r, P)\cdot e^{\gamma\cdot\|\mathrm{Re}\lambda\|_v},$$

где $M(r, P)$ не зависящая от λ постоянная $(r=0, 1, 2\ldots\ldots)$.

(ж). Если определить функцию $f(g)$ формулой: при $g=n(x)\cdot z$

$$f(g)=f(n(x)\cdot z)=\frac{1}{(2\pi)^s}\int_{R^s}K^{\sqrt{-1}\cdot\lambda}(e, z)e^{\sqrt{-1}\cdot<\lambda, x>}d\lambda$$

$$(s=\min(p, q)),$$

то из показанного в пункте (д) и (е), функция $f(g)$ является бесконечно дифференцируемой с носителем в области $\|z\|\leqq\alpha$, $\|n\|_v\leqq\gamma$, и ясно, что $T^\lambda=T_f^\lambda$.

§4. Аналог теоремы Пэли-Винера

Сформулируем аналог теоремы Пэли-Винера аналогично тому, как и в [5]. Сопотавим каждому компактному множеству $Q_{\alpha,\gamma}$ совокупность $\mathscr{B}(Q_{\alpha,\gamma})$ операторных функций $T=(T^\lambda)$ от $\lambda\in\hat{N}$, действующих в пространстве $\mathscr{C}$, и обладающих свойствами (1°), (2°) и (3°). Если определить полунормы в $\mathscr{B}(Q_{\alpha,\gamma})$ формулой

$$\|T\|_{\partial_1,\partial_2}=\sup_{\lambda\in\hat{N}}\sup_{t\in R}\sup_{\varphi\in\mathscr{C}}\frac{\|\partial_1\cdot T^\lambda\cdot\partial_2\cdot\varphi\|_t}{\|\varphi\|_{\tau^\lambda(t;Q_{\alpha,\gamma})}},$$

$\mathscr{B}(Q_{\alpha,\gamma})$ становится пространством Фреше. Чтобы убедиться в этом, достаточно использовать полноту пространства $\mathscr{C}_\infty$ с его топологией. (Более того, $\mathscr{C}_\infty$ является даже ядерным, см. [5]).

Основная теорема гласит

Аналог теоремы Пэли-Винера: *Преобразование Фурье* $f\mapsto T_f^\lambda$ *устанавливает топологический изоморфизм между* $C_0^\infty(Q_{\alpha,\gamma})$ *и* $\mathscr{B}(Q_{\alpha,\gamma})$.

Для доказательства см. [5].

Киото Университет

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] F. Bruhat, Distributions sur un groupe localement compact et applications a l'étude des représentations des groupes p-adiques; Bull. Soc. math. France. 89 (1961) pp. 43-75.

[2] J. Diximier, Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents IV, Can. J. Math. 11 (1959), pp. 321-344

[3] A.A. Кириллов, Унитарные представления нильпотентных групп Ли, Успехи. мат. наук, 17 (1962), pp. 57-110

[4] G. Mackey, Induced representations of locally compact groups I, Ann. of Math. 55 (1952) pp. 101-139

[5] С. Андо, Аналог теоремы Пэли-Винера для группы линейных преобразований прямой линии, J. Math. Kyoto Univ. 14-2 (1974) pp. 195-213

[6] S. Ando, Paley-Wiener type theorem for the Heisenberg groups, Proc. of Japan Acad. (to appear).