J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)
17-3 (1977) 567-603

Représentations supercuspidales du groupe métaplectique

Par

S. RALLIS et G. SCHIFFMANN

(Communicated by Prof. H. Yoshizawa, Feb. 23, 1977)

Soit k un corps local de caractéristique différente de 2, muni d'un caractère additif continu et non trivial. D'après A. Weil ([8]), à toute forme quadratique non dégénérée Q sur un k-espace vectoriel E est associée une représentation π_Q du groupe métaplectique (revêtement d'ordre 2 de $SL_2(k)$) dans $L^2(E)$. La représentation naturelle ν du groupe orthogonal $O(Q)$ dans $L^2(E)$ commute à π_Q. Dans ce travail, on suppose k non archimédien et Q anisotrope. On a donc $n=\dim(E)\leq 4$. Le cas $n=1$ est trivial; les cas $n=2$ ou 4 sont connus ([7], [6], [1], [4]) de sorte que les résultats originaux concernent le cas $n=3$. Toutefois notons que sur certains points, nos démonstrations sont considérablement plus simples que celles de [1] par exemple.

On commence par décomposer $\pi_Q\times\nu$. Une représentation ϑ de $O(Q)$ est dite sphérique si elle est irréductible et contenue dans ν. On montre qu'il existe une injection de l'ensemble des classes de représentations sphériques dans l'ensemble des classes de représentations unitaires irréductibles du groupe métaplectique G telle que, en notant $\vartheta\longmapsto\pi_{Q,\vartheta}$ cette injection, on ait

$$\pi_Q\times\nu\sim\bigoplus_{\vartheta}(\pi_{Q,\vartheta}\otimes\vartheta).$$

De plus, si ϑ est non triviale, $\pi_{Q,\vartheta}$ est supercuspidale. Si ϑ est triviale et si $n=3$ ou 4 alors $\pi_{Q,\vartheta}$ est de carré intégrable. On explicite ensuite les différents cas possibles. Pour $n=1$, 2 ou 4, la détermination des représentations sphériques est facile; par contre un problème se pose pour $n=3$. Dans ce cas, le groupe orthogonal est essentiellement H^*/k^* où H est l'algèbre de quaternions sur k. Si la caractéristique résiduelle p de k est différente de 2, on peut montrer que toutes les représentations irréductibles de H^*/k^* sont sphériques. Il en résulte qu'à toute représentation irréductible de H^*/k^* est associée d'une part, suivant [4], une représentation unitaire de carré intégrable de $\mathrm{PGL}_2(k)$ et d'autre part une représentation unitaire de carré intégrable de G. On obtient ainsi une injection de la série discrète de $\mathrm{PGL}_2(k)$ dans celle de G. Il est très probable que c'est la version locale de la correspondance de Shimura

This work was done while the second author was visiting Kyoto University under the sponsorship of the Japan Society for the Promotion of Science.

entre formes automorphes de poids pair et de de poids demi-entier. Le premier point ouvert est de déterminer les représentations sphériques pour $p=2$ et $n=3$.

On aborde ensuite le problème de la comparaison des représentations construites à partir de deux formes quadratiques non équivalentes ayant respectivement n et n' variables. Il y a deux situations. La première, qui correspond aux cas $n+n'=4$, s'étudie très facilement. On montre en particulier que les représentations supercuspidales construites à partir d'une forme à une variable peuvent aussi s'obtenir à partir de formes à trois variables. La deuxième situation correspond aux cas où $n+n'=6$. Nous avons seulement pu constater que l'espace des opérateurs d'entrelacement était de dimension infinie (cela résulte de [4]). Le deuxième problème ouvert est d'expliciter les équivalences au moins pour deux formes ternaires. Un résultat précis serait nécessaire pour pouvoir passer au groupe métalinéaire ce qui semble indispensable si on désire travailler globalement à la façon de [4].

Enfin dans un dernier § et en supposant $p\neq 2$ on calcule la mesure de Plancherel de G ou, plus précisément sa partie "impaire". On en déduit en particulier que toute représentation de carré intégrable "impaire" de G peut être construite à l'aide d'une forme ternaire (rappelons que les "paires" se construisent à l'aide de la forme à quatre variables). Un troisième problème ouvert est d'étudier le cas $p=2$.

§ 1. La représentation de Weil

Soient k un corps local, non archimédien, de caractéristique différente de 2 et τ un caractère additif de k, continu et non trivial. La mesure de Haar dx de k est la mesure autoduale par rapport à τ et $d^*x=dx/|x|$. Soient $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers de k, $\mathcal{P}$ son idéal maximal et q le cardinal de $\mathcal{O}/\mathcal{P}$; on note p la caractéristique résiduelle de k.

Soit $\langle\cdot|\cdot\rangle_k$ le symbole de Hilbert de k. Si σ est un élément de $SL_2(k)$, on pose

$$\sigma=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad j(\sigma)=\begin{cases} c & \text{si } c\neq 0 \\ a & \text{si } c=0 \end{cases}.$$

Soient σ et σ' deux éléments de $SL_2(k)$ et $\sigma''=\sigma\sigma'$; posons

$$\varepsilon(\sigma, \sigma')=\langle j(\sigma)j(\sigma'')|j(\sigma')j(\sigma'')\rangle_k.$$

Kubota [9] a montré que ε est un 2-cocycle borélien sur $SL_2(k)$, à valeurs dans Z_2 et trivial au voisinage de l'élément neutre. Soit $Mp_2(k)$ l'extension centrale correspondante de $SL_2(k)$ par Z_2. Un élément g de $Mp_2(k)$ est donc un couple (σ, ε) où $\sigma\in SL_2(k)$ et $\varepsilon=\pm 1$; la loi de groupe est

$$(\sigma, \varepsilon)(\sigma', \varepsilon')=(\sigma\sigma', \varepsilon\varepsilon'\varepsilon(\sigma, \sigma'))$$

et on peut munir canoniquement $Mp_2(k)$ d'une structure de k-groupe analytique telle que la projection sur $SL_2(k)$ soit localement un isomorphisme de variété analytique. Rappelons que cette extension est non triviale. Par définition

$Mp_2(k)$ est le groupe métaplectique; on le note G.

Soit Q une forme quadratique non dégénérée sur un k-espace vectoriel E de dimension finie n. Si

$$B(X, Y)=Q(X+Y)-Q(X)-Q(Y)$$

alors on définit la transformation de Fourier sur E à l'aide du bicaractère $\tau\circ B$ et de l'unique mesure de Haar de E autoduale relativement à ce bicaractère.

On sait ([8]) que pour tout $t\in k^*$, il existe un nombre complexe $\gamma(tQ)$, de module un tel que, pour f et $\hat{f}$ intégrables on ait

$$\int_E f(X)\tau(tQ(X))dX=\gamma(tQ)|t|^{-n/2}\int_E \hat{f}(X)\tau(-Q(X)/t)dX. \tag{1.1}$$

Ce nombre dépend de τ. En particulier soit $\alpha(t)=\gamma(tq_1)$ où q_1 est la forme quadratique x^2 sur k. Dans un système de coordonnées convenable on a

$$Q(X)=a_1x_1{}^2+\cdots+a_nx_n{}^2$$

et (1.1) implique

$$\gamma(Q)=\alpha(a_1)\cdots\alpha(a_n). \tag{1.2}$$

Notons que

$$\gamma(-Q)=\overline{\gamma(Q)}. \tag{1.3}$$

D'autre part, un résultat fondamental de [8] donne

$$\alpha(a)\alpha(b)=\alpha(ab)\alpha(1)\langle a|b\rangle_k. \tag{1.4}$$

Soient $D=a_1\cdots a_nk^2$ le discriminant de Q et $\varDelta=(-1)^rD$ où r est la partie entière de $n/2$. On a

$$\begin{aligned}&\alpha(a)^2=\langle a|-1\rangle_k\alpha(1)^2\\&\alpha(a)^4=\langle -1|-1\rangle_k\\&\gamma(Q)^2=\langle D|-1\rangle_k\alpha(1)^{2n}\end{aligned} \tag{1.5}$$

Posons

$$\gamma(tQ)=\sum_{k^*/k^{*2}}\beta_a(Q)\langle t|a\rangle_k.$$

On a ([5])

$$\begin{aligned}&\text{si } n \text{ est pair}\quad \beta_a(Q)=\begin{cases}0 & \text{si } a\neq\varDelta\\ \gamma(Q) & \text{si } a=\varDelta\end{cases}\\&\text{si } n \text{ est impair}\quad \beta_a(Q)=c\gamma(Q)\bar{\alpha}(a\varDelta)\end{aligned} \tag{1.6}$$

où c est une constante de module (Card. $(k^*/k^{*2}))^{-1/2}$.

Théorème 1.1. *Il existe une et une seule représentation unitaire π_Q de G dans $L^2(E)$ telle que*

$$\pi_Q\left[\begin{pmatrix}1 & u\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \varepsilon\right]f(X)=\varepsilon^n\tau(uQ(X))f(X)$$

$$\pi_Q\left[\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1}\end{pmatrix}, \varepsilon\right] f(X) = \varepsilon^n \gamma(Q)\gamma(tQ)^{-1}|t|^{n/2} f(tX)$$

$$\pi_Q\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}, \varepsilon\right] f(X) = \varepsilon^n \gamma(Q)\hat{f}(X).$$

Ce résultat s'obtient de manière purement formelle à partir de [8]. Dans des cas plus ou moins généraux, il apparait d'ailleurs en de nombreux endroits. Soient $O(Q)$ le groupe orthogonal de Q et ν la représentation de $O(Q)$ dans $L^2(E)$ définie par

$$\nu(x)f(X) = f(x^{-1}X).$$

Remarquons que ν et π_Q commutent donc qu'on a en fait une représentation du groupe produit $G \times O(Q)$.

On suppose désormais Q anisotrope; le groupe $O(Q)$ est donc compact et ν se décompose discrètement. Un élément f de $L^2(E)$ est dit π_Q-différentiable si l'application $g \longmapsto \pi_Q(g)f$ de G dans $L^2(E)$ est localement constante. Soit $\mathcal{S}(E)$ l'espace des applications de E dans $\boldsymbol{C}$, localement constantes et à support compact.

Proposition 1.2. *(Q anisotrope) Le sous-espace des vecteurs π_Q-différentiables est $\mathcal{S}(E)$. De plus la restriction de π_Q à $\mathcal{S}(E)$ est admissible.*

Soit f un vecteur différentiable. Il existe un voisinage V de l'élément neutre dans G tel que $\pi_Q(g)f = f$ pour $g \in V$. En particulier, il existe un entier r tel que, pour $u \in \mathcal{P}^r$, on ait

$$\pi_Q\left[\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1\end{pmatrix}, 1\right] f = f.$$

Choisissons un représentant de la classe f et notons le encore f. Si $u \in \mathcal{P}^r$, il existe donc un ensemble de mesure nulle D_u tel que

$$(\tau(uQ(X)) - 1)f(X) = 0 \qquad \text{pour } X \notin D_u.$$

Comme $\mathcal{P}^r$ possède une partie dénombrable partout dense, on peut supposer que $D_u = D$ ne dépend pas de u. Par suite si $o(\tau)$ est l'ordre de τ et si $X \notin D$, alors $f(X)$ non nul implique que

$$X \in \{Y \in E \mid Q(Y) \in \mathcal{P}^{-r-o(\tau)}\}.$$

Comme Q est anisotrope cela signifie que X appartient à un certain réseau L de E. Par suite f est à support essentiellement compact. Mais $\hat{f}$ est encore différentiable donc est aussi à support essentiellement compact. Un argument classique montre alors que $f \in \mathcal{S}(E)$. Inversement, on vérifie aisément que $\mathcal{S}(E)$ est contenu dans le sous-espace des vecteurs différentiables.

Il nous reste à vérifier que, pour tout sous-groupe ouvert compact M de G, le sous-espace des vecteurs M-invariants est de dimension finie. Il suffit de le faire lorsque M est invariant par $\mathrm{Int}(\overline{w})$ où

$$\bar{w}=\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, 1\right].$$

Il existe r tel que $u \in \mathcal{P}^r$ implique que

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1\right] \in M.$$

Si f est M-invariante, avec les notations précédentes, on aura donc $\mathrm{supp}(f) \subset L$. Comme $\hat{f}$ est aussi M-invariante, on a aussi $\mathrm{supp}(\hat{f}) \subset L$ et par suite l'espace des f M-invariantes est de dimension finie.

Corollaire 1.3. *La représentation $\pi_Q \times \nu$ se décompose avec multiplicité* 1.

On va prouver que son commutant est commutatif. Soit T un opérateur d'entrelacement de $\pi_Q \times \nu$ avec elle-même. Il stabilise le sous-espace des vecteurs différentiables $\mathcal{S}(E)$ et on obtient donc, pour tout $a \in E$, une distribution T_a en posant

$$T_a(f) = T(f)(a) \qquad f \in \mathcal{S}(E).$$

Supposons que a soit non nul et soit S la sphère $Q(X) = Q(a)$. On a

$$[\tau(uQ(X)) - \tau(uQ(a))]\, T_a = 0$$

et ce quel que soit u. Le support de T_a est donc contenu dans S. Comme k est p-adique cela signifie que $T(f)(a)$ ne dépend que de la restriction de f à S.

Soit $\mathcal{D}(S)$ l'espace des applications localement constantes de S dans $\boldsymbol{C}$. L'application de restriction

$$\mathcal{S}(E) \longrightarrow \mathcal{D}(S)$$

est linéaire surjective. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(S)$; posons $T_S(\varphi) = T(f) | S$ où f est un prolongement de φ; les remarques précédentes montrent que ceci ne dépend pas du choix de f. De plus $T_S(\varphi)$ appartient à $\mathcal{D}(S)$. En exprimant que T_S commute à ν on voit que T_S commute à l'action de $O(Q)$ dans $\mathcal{D}(S)$. Enfin si T' est un autre opérateur d'entrelacement de $\pi_Q \times \nu$ avec elle-même, on a $(TT')_S = T_S T'_S$. Pour démontrer que T et T' commutent il suffit de démontrer que pour tout S, le commutant de la représentation de $O(Q)$ dans $\mathcal{D}(S)$ est commutatif. Mais le groupe compact $O(Q)$ opère en fait dans $L^2(S)$ et $\mathcal{D}(S)$ n'est autre que le sous-espace des vecteurs $O(Q)$-finis. Il suffit donc d'établir le lemme suivant.

Lemme 1.4. *La représentation de $O(Q)$ dans $L^2(S)$ se décompose avec multiplicité* 1.

Comme k est p-adique, on a $n \leq 4$. Les cas $n=1$ ou 2 sont triviaux. Pour $n=3$ ou 4, le groupe $O(Q)$ se construit à l'aide de l'algèbre de quaternions anisotrope sur k. On démontrera le lemme plus loin lorsqu'on explicitera ces deux cas.

Remarques. 1) Si k est archimédien et Q anisotrope, les résultats qui précèdent restent valables. Il suffit de noter que sur $\mathcal{S}(E)$, la topologie de Schwartz coïncide avec celle des vecteurs différentiables.

2) Si Q n'est plus anisotrope, la situation est beaucoup plus délicate. En effet le sous-espace des vecteurs différentiables est plus gros que $\mathcal{S}(E)$: il y a des singularités sur le cone isotrope. Il est toutefois très probable que le corollaire 1.3 reste valable. Si $k=R$, une version affaiblie est démontrée dans [10] et l'analogue du lemme 1.4 résulte des travaux de Strichartz [11].

Définition 1.5. *Une représentation ϑ de $O(Q)$ est dite sphérique si elle est irréductible et contenue dans ν.*

On désire améliorer le résultat du corollaire 1.3 en montrant que si ϑ est sphérique et si π_1 et π_2 sont deux représentations unitaires irréductibles de G telles que $\vartheta\otimes\pi_1$ et $\vartheta\otimes\pi_2$ soient contenues dans $\nu\times\pi_Q$ alors π_1 et π_2 sont équivalentes. On aura donc une injection de l'ensemble des classes d'équivalence de représentations sphériques dans le dual de G.

Soient ϑ une représentation sphérique d'espace F_ϑ et $L^2(E, F_\vartheta)$ l'espace des applications de carré intégrable de E dans F_ϑ. Soit $L_\vartheta{}^2(E, F_\vartheta)$ le sous-espace des applications f telles que pour $x\in O(Q)$ on ait

$$f(xX)=\vartheta(x)f(X). \tag{1.7}$$

La représentation π_Q s'étend en une représentation de G dans $L^2(E, F_\vartheta)$; soit $\pi_{Q,\vartheta}$ sa restriction au sous-espace invariant $L_\vartheta{}^2(E, F_\vartheta)$.

Théorème 1.5. 1) *La représentation $\pi_{Q,\vartheta}$ est irréductible.*

2) *Les représentations $\pi_{Q,\vartheta}$ et $\pi_{Q,\vartheta'}$ sont équivalentes si et seulement si ϑ et ϑ' le sont.*

3) *Si ϑ est non triviale, la représentation $\pi_{Q,\vartheta}$ est supercuspidale et si ϑ est triviale, elle est de carré intégrable pour $n=3$ ou 4.*

Précisons tout d'abord le rapport entre π_Q et $\pi_{Q,\vartheta}$. Soit $L_\vartheta{}^2(E)$ le sous-espace de $L^2(E)$ formé des fonctions qui, sous l'action de $O(Q)$, sont de type ϑ. Pour $e\in F_\vartheta-\{0\}$, on pose

$$T_e(f)(X)=(f(X)|e) \qquad f\in L_\vartheta{}^2(E, F_\vartheta). \tag{1.8}$$

T_e est une application linéaire de $L_\vartheta{}^2(E, F_\vartheta)$ dans $L_\vartheta{}^2(E)$.

Lemme 1.6. 1) *T_e est une application linéaire injective de $L_\vartheta{}^2(E, F_\vartheta)$ dans $L_\vartheta{}^2(E)$.*

2) *L'image $L_e{}^2(E)$ de T_e est un sous-espace fermé de $L_\vartheta{}^2(E)$ invariant par π_Q et la restriction de π_Q à ce sous-espace est équivalente à $\pi_{Q,\vartheta}$.*

3) *Si $e_1, \cdots, e_n$ est une base orthonormale de F_ϑ, alors $L_\vartheta{}^2(E)$, est somme directe hilbertienne des sous-espaces $L^2_{e_i}(E)$.*

La démonstration du lemme est standart. Le théorème 1.5 admet donc le corollaire suivant.

Corollaire 1.7. *La restriction de* $\nu\times\pi_Q$ *à* $L_\vartheta^2(E)$ *est irréductible et équivalente à* $\vartheta\otimes\pi_Q$.

Pour démontrer le théorème, nous aurons besoin de quelques préliminaires. Soit $E^*=E-\{0\}$; l'image de E^* par Q est réunion de classes de k^* modulo k^{*2}. Soit α une telle classe contenus dans $Q(E^*)$. On pose

$$E_\alpha=\{X\in E\,|\,Q(X)\in\alpha\}.$$

C' est une partie ouverte et fermée de E^* et

$$L^2(E)=\bigoplus_\alpha L^2(E_\alpha) \qquad \text{pour } \alpha\subset Q(E^*).$$

Cette somme directe est orthogonale et chacun des E_α est invariant par ν. Soit $(k^*/k^{*2})_{Q,\vartheta}$ l'ensemble des classes α contenues dans $Q(E^*)$ et telles que ϑ soit contenue dans la restriction de ν à $L^2(E_\alpha)$. Soient $X\in E^*$ et $O(Q)_X$ son stabilisateur dans $O(Q)$. Pour que $Q(X)k^{*2}\in(k^*/k^{*2})_{Q,\vartheta}$ il faut et il suffit qu'il existe dans F_ϑ un vecteur non nul e_X invariant par $O(Q)_X$. D'après le lemme 1.4 un tel vecteur s'il existe est unique à la multiplication par un scalaire près. Choisissons ces vecteurs e_X tels que

(1.9) $\qquad \|e_X\|=1 \qquad e_{xX}=\vartheta(x)e_X$ pour $x\in O(Q)$.

Dans E, la symétrie s par rapport à l'origine appartient au centre de $O(Q)$. On a donc $\vartheta(s)=\varepsilon Id$ avec $\varepsilon=\pm1$; par suite $e_{-X}=\varepsilon e_X$. Soit χ un caractère unitaire de k^* tel que $\chi(-1)=\varepsilon$. On peut supposer que

(1.10) $\qquad e_{tX}=\chi(t)e_X$ pour $t\in k^*$.

Si ϑ est triviale, on prendra $e_X=1$ et on posera $e_0=1$. Si ϑ est non triviale on posera $e_0=0$ et $e_X=0$ si $Q(X)k^{*2}\notin(k^*/k^{*2})_{Q,\vartheta}$.

Cela étant soit $\mathcal{S}_\vartheta(E, F_\vartheta)$ l'espace des applications localement constantes et à support compact de E dans F_ϑ, vérifiant (1.7). C' est le sous-espace des vecteurs différentiables de $\pi_{Q,\vartheta}$. Pour une telle fonction f, on a

$$f(X)=(f(X)\,|\,e_X)e_X.$$

Le produit scalaire $(f(X)|e_X)$ est invariant par $O(Q)$; on peut donc poser

(1.11) $\qquad \varphi_f(Q(X))=|Q(X)|^{n/4}\ (f(X)\,|\,e_X).$

La fonction φ_f est définie sur $Q(E)$. Soit

$$k^*_{Q,\vartheta}=\{t\in k^*\,|\,tk^{*2}\in(k^*/k^{*2})_{Q,\vartheta}\}.$$

Pour toute partie A de k, on note $\mathcal{S}(A)$ l'espace des applications de A dans $\boldsymbol{C}$ qui, pour la topologie induite, sont localement constantes et à support compact. Soit $K_{Q,\vartheta}$ l'image de $\mathcal{S}_\vartheta(E, F_\vartheta)$ par l'application $f\longmapsto\varphi_f$. Si ϑ est non triviale alors $K_{Q,\vartheta}=\mathcal{S}(k^*_{Q,\vartheta})$; si ϑ est triviale $K_{Q,\vartheta}$ est l'espace des fonctions de la forme $|t|^{n/4}\varphi(t)$ où φ appartient à $\mathcal{S}(Q(E))$. D'autre part, notons $\sum_t$ la sphère $Q(X)=t$. On peut normaliser les mesures $O(Q)$-invariantes μ_t sur les sphères Σ_t de telle sorte que

$$\int_E \psi(X)dX=\int_k dt\int_{\Sigma_t}\psi(X)d\mu_t(X), \quad \|\mu_0\|=1 \text{ et } \|\mu_{t^2t'}\|=|t|^{n-2}\|\mu_{t'}\|. \tag{1.12}$$

On a alors

$$(f|f')=\int_E (f(X)|f'(X))dX=\int_k \varphi_f(t)\overline{\varphi_{f'}(t)}\,\|\mu_t\|\,|t|^{-n/2}dt. \tag{1.13}$$

Si on note $H_{Q,\vartheta}$ l'espace des applications de $k^*_{Q,\vartheta}$ dans $\boldsymbol{C}$, de carré intégrable pour la mesure $\|\mu_t\|\,|t|^{-n/2}dt$, alors l'application $f\longmapsto\varphi_f$ se prolonge en une isométrie de $L_\vartheta{}^2(E, F_\vartheta)$ sur $H_{Q,\vartheta}$. La représentation $\pi_{Q,\vartheta}$ admet donc un modèle $\bar{\pi}_{Q,\vartheta}$ dans $H_{Q,\vartheta}$. En particulier, on a

$$\begin{aligned}
&\bar{\pi}_{Q,\vartheta}\left[\begin{pmatrix}1 & u\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \varepsilon\right]\varphi(t)=\varepsilon^n\tau(ut)\varphi(t)\\
&\bar{\pi}_{Q,\vartheta}\left[\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}, \varepsilon\right]\varphi(t)=\varepsilon^n\chi(a)\gamma(Q)\gamma(aQ)^{-1}\varphi(a^2t).
\end{aligned} \tag{1.14}$$

On peut maintenant aborder la démonstration du théorème. Soit T un opérateur d'entrelacement de $\bar{\pi}_{Q,\vartheta}$ avec $\bar{\pi}_{Q,\vartheta'}$. Par restriction aux vecteurs différentielles, on obtient une application de $K_{Q,\vartheta}$ dans $K_{Q,\vartheta'}$. Si $a\in Q(E^*)$, posons

$$S_a(\varphi)=T(\varphi)(a) \qquad \varphi\in K_{Q,\vartheta}.$$

On a

$$S_a[(\tau(ut)-\tau(ua))\varphi(t)]=0 \qquad u\in k.$$

Si ϑ est non triviale alors $K_{Q,\vartheta}=\varphi(k^*_{Q,\vartheta})$ et la théorie élémentaire des distributions montre que S_a est un multiple de la mesure de Dirac au point a. En fait, on vérifie aisément que ceci reste valable pour ϑ triviale (on peut par exemple se ramener au modèle $\pi_{Q,\vartheta}$ ce qui évite toute difficulté). Posons donc $S_a=c(a)\delta_a$; on a $c(a)=0$ si a n'appartient pas à $k^*_{Q,\vartheta}\cap k^*_{Q,\vartheta'}$. En exprimant que T commute au deuxième opérateur (1.14), on obtient

$$c(tx^2)=\chi(x)\chi'^{-1}(x)c(t).$$

Si T est non nul, il existe t tel que $c(t)$ soit différent de 0. En prenant $x=-1$ dans l'égalité précédente, on obtient $\chi(-1)=\chi'(-1)$. On peut donc, sans restreindre la généralité supposer que $\chi=\chi'$. La fonction c est alors constante sur toute classe $\alpha\in k^*/k^{*2}$; notons c_α sa valeur. Si I_α est la fonction caractéristique de α alors T est donné par

$$T(\varphi)=(\sum_\alpha c_\alpha I_\alpha)\varphi. \tag{1.15}$$

Si ϑ ou ϑ' est la représentation triviale ϑ_0 de $O(Q)$ alors, en notant que 0 est adhérent à chaque α et en comparant les comportements à l'origine de φ et de $T(\varphi)$, on voit que π_{Q,ϑ_0} est irréductible et que π_{Q,ϑ_0} n'est équivalente à

$\pi_{Q,\vartheta'}$ que si ϑ' est équivalente à ϑ_0. Dans le cas général, il faut exprimer que T commute à l'action de $\bar{w}$.
Posons

$$J_{Q,\vartheta}(X,\ Y)=\int_{O(Q)}\vartheta(x)\tau(B(xX,\ Y))dx \qquad \|dx\|=1.$$

Si x et y appartiennent à $O(Q)$ alors

$$J_{Q,\vartheta}(xX, yY)=\vartheta(y)J_{Q,\vartheta}(X,\ Y)\vartheta(x^{-1}).$$

La fonction

$$(X,\ Y)\longmapsto (J_{Q,\vartheta}(X,\ Y)e_X|e_Y)$$

est donc invariante par $O(Q)\times O(Q)$. Il existe donc une fonction $j_{Q,\vartheta}$ définie sur $Q(E)\times Q(E)$ telle que

$$j_{Q,\vartheta}(Q(X),\ Q(Y))=(J_{Q,\vartheta}(X,\ Y)e_X|e_Y).$$

Ces noyaux sont mesurables et bornés. En fait $J_{Q,\vartheta}$ est localement constant sur $E\times E$ et, compte tenu de la normalisation des e_X on vérifie que $j_{Q,\vartheta}$ est localement constant sur $Q(E)\times Q(E)$; si ϑ est non triviale, ces noyaux sont nuls au voisinage des axes. Le résultat fondamental est le suivant.

Proposition 1.7. a) *Soient ϑ une représentation sphérique de $O(Q)$ et α et β deux éléments de $(k^*/k^{*2})_{Q,\vartheta}$. Il existe $t\in\alpha$ et $u\in\beta$ tels que $j_{Q,\vartheta}(t,u)\neq 0$.*

b) *Soient ϑ et ϑ' deux représentations sphériques de $O(Q)$ et soient α et β deux éléments de $(k^*/k^{*2})_{Q,\vartheta}\cap(k^*/k^{*2})_{Q,\vartheta'}$. Si les restrictions à $\alpha\times\beta$ de $j_{Q,\vartheta}$ et de $j_{Q,\vartheta'}$ sont proportionelles alors ϑ et ϑ' sont équivalentes.*

Prouvons a). Par l'absurde supposons que, quels que soient $t\in\alpha$ et $u\in\beta$ on ait $j_{Q,\vartheta}(t,\ u)=0$. On aurait donc

$$\int_{O(Q)}(\vartheta(x)e_a|e_b)\tau(B(xa,\ b))dx=0 \qquad \text{pour } a\in E_\alpha \text{ et } b\in E_\beta.$$

Remplaçons a par $-\lambda\ a$ où $\lambda\in k^*$. Comme $\chi(-\lambda)\neq 0$, il vient

$$\int_{O(Q)}(\vartheta(x)e_a|e_b)\tau(-\lambda B(xa,\ b))dx=0.$$

Pour toute fonction $\psi\in\mathcal{S}(k)$ on a donc

$$\int_k\hat{\psi}(\lambda)d\lambda\int_{O(Q)}(\vartheta(x)e_a|e_b)\tau(-\lambda B(xa,\ b))dx=0$$

ou encore

$$\int_{O(Q)}(\vartheta(x)e_a|e_b)\psi(B(xa,\ b)dx=0.$$

La fonction h: $x\longmapsto B(xa,\ b)$ peut être considérée comme une application continue de $H=O(Q)_b\backslash O(Q)/O(Q)_a$ dans k.

Lemme 1.8. *L'application h est un homéomorphisme de H sur son image.*

Comme H est compact, il suffit de vérifier que h est injective. Soit $\sum$ la sphère $Q(X)=Q(a)$. On doit prouver que si X_1 et X_2 sont deux points de $\sum$ tels que $B(X_1, b)=B(X_2, b)$ alors ils sont conjugués par $O(Q)_b$. Ce dernier s'identifie au groupe orthogonal de la restriction de Q à l'hyperplan F orthogonal à a et il suffit d'appliquer le théorème de Witt aux projections de X_1 et X_2 sur F.

Les restrictions à $h(H)$ des fonctions de $\mathcal{S}(k)$ sont denses dans l'espace des fonctions continues sur $h(H)$ (Stone-Weierstrass). La condition (1.16) est donc satisfaite pour toute fonction ψ définie et continue sur $h(H)$. Soit alors f une application continue de $O(Q)$ dans $\boldsymbol{C}$. D'après le lemme, il existe une application continue ψ de $h(H)$ dans $\boldsymbol{C}$ telle que

$$\psi(B(xa, b))=\iint_{O(Q)_a\times O(Q)_b} f(uxv)dudv$$

et on a

$$(\vartheta(f)e_a|e_b)=\int_{O(Q)}(\vartheta(x)e_a|e_b)\psi(B(xa, b))dx=0.$$

Par suite le coefficient matriciel $(\vartheta(x)e_a|e_b)$ est identiquement nul ce qui est impossible puisque e_b est non nul et e_a cyclique. L'assertion b) se prouve de manière analogue (rappelons que $\chi=\chi'$). On constate cette fois que ϑ et ϑ' ont deux coefficients matriciels proportionels et donc qu'elles sont équivalentes.

Reprenons maintenant la démonstration du théorème. Un calcul facile donne:

$$\bar{\pi}_{Q,\vartheta}(\bar{w})\varphi(t)=\varepsilon^n\gamma(Q)\int_{Q(E)}\varphi(u)|tu^{-1}|^{n/4}\|\mu_u\|j_{Q,\vartheta}(u, t)du.$$

Cet opérateur est bijectif de $K_{Q,\vartheta}$ sur lui même et se prolonge en une isométrie de $H_{Q,\vartheta}$. En exprimant que T commute à l'action de $\bar{w}$, on obtient

$$\int_{Q(E)}\varphi(t)\{\sum_\alpha c_\alpha I_\alpha(t)j_{Q,\vartheta'}(t, u)-\sum_\beta c_\beta I_\beta(u)j_{Q,\vartheta}(t, u)\}\|\mu_t\||tu^{-1}|^{n/4}dt=0.$$

Si $\vartheta=\vartheta'$, soit $\alpha\in(k^*/k^{*2})_{Q,\vartheta}$ et choisissons $u\in\beta$. Comme φ est arbitraire, on a

$$(c_\alpha-c_\beta)j_{Q,\vartheta}(t, u)=0 \qquad \text{pour } t\in\alpha.$$

On peut supposer t et u tels que $j_{Q,\vartheta}(t, u)\neq 0$ donc $c_\alpha=c_\beta$. L'opérateur T est donc scalaire et par suite $\pi_{Q,\vartheta}$ est irréductible. Pour la deuxième assertion du théorème, supposons qu'il existe un entrelacement T non trivial; il est donc bijectif. En particulier on doit avoir $(k^*/k^{*2})_{Q,\vartheta}=(k^*/k^{*2})_{Q,\vartheta'}$. Si α et β sont deux éléments de $(k^*/k^{*2})_{Q,\vartheta}$ et si $\varphi\in\mathcal{S}(\alpha)$, alors, pour $u\in\beta$, on a

$$\int_\alpha\varphi(t)(c_\alpha j_{Q,\vartheta'}(t, u)-c_\beta j_{Q,\vartheta}(t, u))\|\mu_t\||tu^{-1}|^{n/4}dt=0$$

ce qui donne

$$c_\alpha j_{Q,\vartheta'}(t, u)=c_\beta j_{Q,\vartheta}(t, u).$$

Comme T est bijectif, on a $c_\alpha c_\beta \neq 0$ et par suite, d'après la proposition 1.7, les représentations ϑ et ϑ' sont équivalentes.

Il nous reste la troisième assertion. Soient $K=SL_2(\mathcal{O})$ et $\bar{K}$ son image réciproque dans G. Si π est un générateur de $\mathcal{P}$ et $\nu \in Z$, on pose

$$a_\nu=\begin{pmatrix}\pi^\nu & 0\\ 0 & \pi^{-\nu}\end{pmatrix} \text{ et } \bar{a}_\nu=(a_\nu, 1).$$

La décomposition de Cartan s'écrit

$$G=\bigcup_{\nu\geqslant 0} \bar{K}\bar{a}_\nu\bar{K} \qquad \text{(réunion disjointe)} \tag{1.17}$$

et, en normalisant convenablement les mesures de Haar, on a

$$\int_G f(g)dg=\int_{\bar{K}\times\bar{K}} f(k\bar{a}\, k')+\sum_{\nu\geqslant 1}(1+1/q)q^{2\nu}f(k\bar{a}_\nu\, k')dkdk'. \tag{1.18}$$

Soient φ et φ' deux éléments de $K_{Q,\vartheta}$ et $c_{\varphi,\varphi'}(g)=(\bar{\pi}_{Q,\vartheta}(g)\varphi|\varphi')$. Comme φ et φ' sont K-finies le coefficient $c_{\varphi,\varphi'}$ est K-fini à droite et à gauche. Pour prouver qu'il est à support compact ou de carré intégrable, il suffit donc de prouver que, pour tout choix de φ et de φ', la restriction de $c_{\varphi,\varphi'}$ à l'ensemble des $\bar{a}_\nu$ possède la propriété correspondante. On a

$$\begin{aligned}|c_{\varphi,\varphi'}(\bar{a}_\nu)|&=q^{n\nu/2}\left|\int_{Q(E)}\varphi(\pi^{2\nu}t)\overline{\varphi'(t)}\,\|\mu_t\|\,|t|^{1-n/2}d^*t\right|\\&=q^{-n\nu/2}\left|\int_{Q(E)}\varphi(t)\overline{\varphi'(\pi^{-2\nu}t)}\,\|\mu_t\|\,|t|^{1-n/2}d^*t\right|.\end{aligned}$$

On peut se limiter aux $\nu\geqslant 0$. Si ϑ est non triviale alors φ et φ' sont dans $\mathcal{S}(k^*)$ et les intégrales ci-dessus sont nulles pour ν assez grand. Si ϑ est triviale, on a la majoration

$$|c_{\varphi,\varphi'}(a_\nu)|< q^{-n\nu/2}\int_{Q(E)}|\varphi'(t)|\,\|\mu_t\|\,|t|^{1-n/2}d^*t.$$

Remarquons qu'au voisinage de 0 on a $\varphi'(t)=C_{te}|t|^{n/4}$ de sorte que la dernière intégrale a bien un sens. Il faut donc considérer la série

$$\sum_{\nu\geqslant 1}(q^{-n\nu/2})^2q^{2\nu}=\sum_{\nu\geqslant 1}q^{\nu(2-n)}.$$

Cette série converge pour $n>2$ c'est-à-dire, dans notre situation, pour $n=3$ ou 4.

On va maintenant aborder le problème de la comparaison des représentations associées à deux formes quadratiques différentes. Tout d'abord on a la remarque suivante.

Lemme 1.9. *Pour que $\pi_{Q,\vartheta}$ soit équivalente à $\pi_{Q,\vartheta'}$ il faut que $K_{Q,\vartheta}=K_{Q',\vartheta'}$.*

Il suffit de regarder la forme possible d'un opérateur d'entrelacement à l'aide des formules (1.14). En particulier, il faut que $(k^*/k^{*2})_{Q,\vartheta}$ et $(k^*/k^{*2})_{Q',\vartheta'}$ coïncident. Si $\vartheta=\vartheta_0$ est la représentation triviale, alors, en comparant les comportements à l'origine, on voit qu'on doit prendre ϑ' triviale. Mais il faut aussi que $Q(E)=Q'(E')$ et, Q et Q' étant anisotropes, ceci n'est possible que si elles sont équivalentes. En résumé:

Proposition 1.10. *Si ϑ_0 est la représentation triviale de $O(Q)$ alors π_{Q,ϑ_0} n'est équivalente à $\pi_{Q',\vartheta'}$ que si Q' est équivalente à Q et ϑ' à la représentation triviale de $O(Q')$.*

Pour aller plus loin, il faut expliciter les différents cas.

§2. Les différents cas

Commençons par les énumérer. Comme Q est anisotrope, on a $n\leqslant 4$.

Cas $n=1$. On prend $E=k$ et on note q_1 la forme quadratique x^2. Pour tout élément a de k^*, la forme aq_1 est anisotrope et aq_1 et bq_1 sont équivalentes si et seulement si a est congru à b modulo k^{*2}. La représentation π_{aq_1} est somme directe de deux représentation unitaires irréductibles $\pi^{\pm}_{aq_1}$ correspondant respectivement aux fonctions paires et impaires. Les représentations $\pi^{+}_{aq_1}$ ne sont pas de carré intégrables et les représentations $\pi^{-}_{aq_1}$ sont supercuspidales. De plus on a dans ce cas $(k^*/k^{*2})_{aq_1,\pm}=ak^{*2}$ ce qui montre que ces représentations sont deux à deux non équivalentes.

Cas $n=2$. Soient K une extension quadratique de k et a tel que $K=k(\sqrt{a})$. On note q_K la forme quadratique norme de K relativement à k. Si $b\in k^*$ et n'est pas une norme de K, alors bq_K est une forme quadratique anisotrope non équivalente à q_K. En faisant varier K on obtient ainsi, à équivalence près toutes les formes quadratiques anisotropes binaires.

Fixons K et considérons l'une des formes quadratiques bq_K, $b\in k^*$. Soient K_1 le sous-groupe des éléments de norme 1 et σ l'élément non trivial du groupe de Galois de K relativement à k. Pour tout $u\in K_1$, l'application $x\longmapsto ux$ de K dans K appartient au groupe orthogonal et ce dernier s'identifie au produit semi-direct de K_1 par Gal (K/k). Si χ est un caractère de K_1, on pose $\chi^\sigma(u)=\chi(\bar{u})$; le caractère est dit régulier si $\chi\neq\chi^\sigma$, singulier dans le cas contraire. Si χ est régulier, on lui associe la représentation ϑ_χ de $O(Q)$ définie par

$$\vartheta_\chi(u)=\begin{pmatrix}\chi(u) & 0\\ 0 & \chi^\sigma(u)\end{pmatrix} \text{ et } \vartheta_\chi(\sigma)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Si χ est singulier, on lui associe deux caractères du groupe $O(Q)$:

$$\vartheta_\chi^{\pm}(u)=\chi(u) \text{ et } \vartheta_\chi^{\pm}(\sigma)=\pm 1.$$

On a $\vartheta_\chi\sim\vartheta_{\chi^\sigma}$ et on a ainsi classé les représentations unitaires irréductibles de $O(Q)$. Dans la suite il sera commode de prolonger un caractère unitaire χ de K_1 en un caractère unitaire, à nouveau noté χ, de K^*. Si χ est régulier, alors ϑ_χ est toujours sphérique et on vérifie de suite que

$$(2.1) \qquad (k^*/k^{*2})_{bq_K,\vartheta_\chi} = b\ \mathrm{Norm.}(K/k).$$

Supposons maintenant χ singulier et considérons la représentation $\vartheta_\chi^\varepsilon$. Pour qu'il existe un vecteur invariant par le centralisateur dans $O(Q)$ d'un point x de k^*, il faut et il suffit que $\chi(x/\bar{x})=\varepsilon$. Notons que $\chi^2=1$. Si χ est trivial, alors ϑ_χ^- n'est pas sphérique et ϑ_χ^+ est la représentation triviale. Si χ est singulier non trivial, alors ϑ_χ^+ et ϑ_χ^- sont toutes deux sphériques. Pour $x\in K^*$, on pose $\eta_\chi(x)=\chi(x/\bar{x})$. C'est un caractère de K^*, trivial sur k^*, de carré l'identité, constant sur chacun des ouverts K_a, $a\in k^*/k^{*2}$. On a

$$(2.2) \qquad (k^*/k^{*2})_{bq_K,\vartheta_\chi^\varepsilon} = \{a \mid a\in b\ \mathrm{Norm.}(K^*/k^*) \text{ et } \eta_{\chi|K_{ab}}=\varepsilon\}$$

où, pour $\beta\in k^*/k^{*2}$, on note K_β l'ensemble des $x\in K^*$ tels que $q_K(x)=x\bar{x}\in\beta$. En appliquant le lemme 1.9, on voit de suite que lorsque K varie ainsi que b (modulo le groupe Norm. (K^*/k^*), les différentes représentations π_{Q,ϑ_χ} sont en général deux à deux inéquivalentes. Le cas exceptionnel est celui des représentations associées aux caractères singuliers non triviaux. Il a été étudié par Shalika ([6]) et Casselmann ([1]). Il y a effectivement des équivalences. Nous y reviendrons plus loin.

Cas $n=4$. Soient H l'algèbre des quaternions sur k et q_4 la forme quadratique norme; elle est anisotrope et, à équivalence près, c'est la seule forme anisotrope à 4 variables. Construisons son groupe orthogonal. Soit

$$\widetilde{O^+(Q)} = \{(x,y)\in H^*\times H^* \mid q_4(x)=q_4(y)\}$$

Si

$$r((x,y))\colon h \longmapsto x^{-1}hy$$

alors r est un homomorphisme de $\widetilde{O^+(q_4)}$ dans $O^+(q_4)$.

Lemme 2.1. *L'homomorphisme r est surjectif.*

Notons que son noyau est l'ensemble des couples (t,t) avec $t\in k^*$; notons Z ce sous-groupe. Soit $g\in O^+(q_4)$. Si $h=g(1)$ alors $h\bar{h}=1$ donc $(h,1)\in\widetilde{O^+(q_4)}$. Comme 1 est invariant par $(h,1)g$, on peut supposer que $g(1)=1$. Par suite g laisse invariant l'orthogonal de 1 c'est-à-dire le sous-espace des quaternions de trace nulle. Soit h un tel quaternion, $h\neq 0$. Si $h'=g(h)$ alors $Tr(h)=Tr(h')=0$ et $h\bar{h}=h'\bar{h}'$ donc h et h' sont conjugués par automorphismes intérieurs. Ceci permet de se ramener au cas où $h=h'$. Si $K=k(h)$ alors g est l'identité sur K. Soit $t\in k^*$ n'appartenant pas au groupe des normes de K relativement à k On peut réaliser H comme l'algèbre des matrices

$$\begin{pmatrix} x & t\bar{y} \\ y & \bar{x} \end{pmatrix} \qquad x,y\in K.$$

L'orthogonal de K est le sous-espace $x=0$ et g est de la forme

$$\begin{pmatrix} x & t\bar{y} \\ y & \bar{x} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x & t\bar{u}\bar{y} \\ uy & \bar{x} \end{pmatrix}$$

où $u \in K_1$. Soit $a \in K^*$ tel que $u = a/\bar{a}$; on a

$$\begin{pmatrix} x & t\bar{u}\bar{y} \\ uy & \bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & t\bar{y} \\ y & \bar{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}^{-1} & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$$

ce qui prouve que $g \in r(\widetilde{O^+(q_4)})$.

Pour $x \in H$, posons $\sigma(x) = \bar{x}$. On a $\mathrm{Det}(\sigma) = -1$ et $\sigma \in O(q_4)$. Le groupe $O(q_4)$ est donc produit semi-direct de $O^+(q_4)$ et de $Z_2 \approx \{1, \sigma\}$.

On définit de manière évidente les représentations sphériques de $\widetilde{O^+(q_4)}$ et de $O^+(q_4)$. Soient ϑ_1 et ϑ_2 deux représentations irréductibles de H^*, d'espaces respectifs F_1 et F_2. Soit $V = \mathrm{Hom}_c(F_1, F_2)$. Posons

$$U_{\vartheta_1,\vartheta_2}(x, y)A = \vartheta_1(x^{-1})A\vartheta_2(y), \qquad x, y \in H \text{ et } A \in V.$$

On obtient ainsi une représentation irréductible de $H^* \times H^*$ et toute représentation irréductible de $H^* \times H^*$ est de cette forme. La restriction de $U_{\vartheta_1,\vartheta_2}$ à $O^+(q_4)$ est triviale sur Z si et seulement si ϑ_1 et ϑ_2 ont même restriction à k^*. On obtient alors une représentation de $O^+(q_4)$. Si $h \in H^*$, on a

$$\widetilde{O^+(q_4)}_h = \{(x, y) \in H^* \times H^* \mid y = h^{-1}xh\}.$$

Si $A \in V - \{0\}$ est invariant par ce sous-groupe alors, quel que soit $x \in H^*$, on a

$$\vartheta_1(x^{-1})A\vartheta_2(h^{-1}xh) = A$$

et par suite $A\vartheta_2(h^{-1})$ entrelace ϑ_1 et ϑ_2 qui sont donc équivalentes. Comme on cherche les représentations sphériques, on peut supposer que $\vartheta_1 = \vartheta_2$; soit ϑ cette représentation, F_ϑ son espace et $U_\vartheta = U_{\vartheta,\vartheta}$. A la multiplication par un scalaire près, l'élément e_h invariant par $\widetilde{O^+(q_4)}_h$ est unique; on prend $e_h = \vartheta(h)$. Si η est un caractère de k^*, on pose $\eta_H(h) = \eta(h\bar{h})$. Les représentations U_ϑ et $U_{\vartheta \otimes \eta_H}$ ont même restriction à $O^+(q_4)$. Ceci permet de se limiter au cas où ϑ est unitaire. Dans ce cas U_ϑ est unitaire pour la structure hilbertienne définie par

$$(A \mid B) = \dim(\vartheta)^{-1} \operatorname{Tr} AB^*$$

et on a $\|e_h\| = 1$. Soit N_ϑ l'ensemble des éléments a de k^*/k^{*2} possédant la propriété suivante: il existe $h \in H^*$ tel que $h\bar{h}\, k^{*2} = a$ et $\chi_\vartheta(h) \neq 0$ où χ_ϑ est le caractère de ϑ. Pour $b \in k^*/k^{*2}$ notons χ_b le caractère de k qui lui est associé à l'aide du symbole de Hilbert et $\chi_{b;H}$ son extension en un caractère de H. Soit N'_ϑ le sous-groupe des éléments b de k^*/k^{*2} tels que les représentations ϑ et $\vartheta \otimes \chi_{b,H}$ soient équivalentes.

Proposition 2.2. a) *N_ϑ est le sous-groupe de k^*/k^{*2} orthogonal de N'_ϑ pour le symbole de Hilbert. Pour tout $\alpha \in (k^*/k^{*2})/N_\vartheta$ soit V_α le sous-espace de V engendré par les vecteurs $\vartheta(h)$ pour $h\bar{h}k^{*2} \in \alpha$. Le sous-espace V_α est* *invariant par* $O^+(q_4)$ *et on a* $V=\bigoplus_a V_a$. *Considérée comme représentation de* $O^+(q_4)$ *la restriction* $\rho_{\vartheta,a}$ *de* U_ϑ *à* V_a *est irréductible sphérique.*

b) *Les représentations* $\rho_{\vartheta,a}$ *et* $\rho_{\vartheta',a'}$ *sont équivalentes si et seulement si il existe un caractère* η *de* k^* *tel que* ϑ *et* $\vartheta\otimes\eta_H$ *soient équivalentes et si de plus* $a=a'$.

c) *Toute représentation sphérique de* $O^+(q_4)$ *est équivalente à l'une des représentations* $\rho_{\vartheta,a}$.

d) *Si* ρ *est une representation sphérique de* $O^+(q_4)$ *alors les représentations* ρ *et* $\rho^\sigma: g\longmapsto\rho(\sigma g\sigma^{-1})$ *sont équivalentes.*

e) *Si* ρ *est une représentation sphérique de* $O(q_4)$ *alors sa restriction* ρ^+ *à* $O^+(q_4)$ *est sphérique. Si* ρ^+ *est une représentation sphérique de* $O^+(q_4)$ *elle se prolonge de manière unique en une représentation sphérique de* $O(q_4)$.

f) *Si* ρ *est une représentation irréductible de* $O(q_4)$ *sa restriction au sous-groupe* $O(q_4)_h$ *contient au plus une fois la représentation triviale.*

Rappelons que sphérique implique irréductible (par définition). La démonstration de la proposition est facile; nous ne la détaillerons pas.

Remarques. 1) La proposition précédente reste valable pour $k=R$.

2) Il existe effectivement des représentations ϑ pour lesquelles $N_\vartheta\neq k^*/k^{*2}$; c'est même la situation générale.

3) A ϑ est associée une représentation admissible irréductible π_ϑ de $GL_2(k)$ ([4]). Il n'est pas difficile de voir que

$$\pi_{\vartheta|SL_2(k)}=\bigoplus_{a\in N'_\vartheta}\pi_{q_4,\rho_{\vartheta,a}}.$$

Cas $n=3$. Soient H° le sous-espace des quaternions purs et q_3 la restriction de q_4 à H°. Une forme quadratique anisotrope à 3 variables est équivalente à l'une des formes aq_3 où $a\in k^*$. Si $h\in H^*$, alors $x\longmapsto h^{-1}xh$ appartient à $O^+(q_3)$ et il est bien connu qu'on peut identifier $O^+(q_3)$ à H^*/k^*. Dans H°, la symétrie par rapport à l'origine est de déterminant -1. On a donc $O(q_3)=O^+(q_3)\times Z_2$ et on en déduit aisément qu'une représentation sphérique de $O^+(q_3)$ se prolonge de manière unique une en représentation sphérique de $O(q_3)$; on peut donc sans inconvénients remplacer $O(q_3)$ par $O^+(q_3)$ et considérer ϑ comme une représentation de $O^+(q_3)$ c'est-à-dire de H^*/k^*; c'est ce que nous ferons.

Soit $X\in H^\circ$, non nul. Son stabilisateur dans H est l'ensemble des éléments qui commutent à X c'est-à-dire le groupe multiplicatif $k(X)^*\subset H^*$. Soit T_X l'image de $k(X)^*$ dans H^*/k^*; c'est un tore de H^*/k^*. Si Y est un autre élément non nul de H° alors T_X et T_Y sont conjugués si et seulement si $q_3(X)\in q_3(Y)k^{*2}$. Notons que $k(X)\approx k(\sqrt{-X\bar{X}})$ et rappelons que q_3 représente toutes les classes de k^*/k^{*2} sauf celle de -1. Une représentation irréductible de H^*/k^* est donc sphérique si elle possède un vecteur invariant par un tore.

Proposition 2.3. *Si ϑ est une représentation irréductible de H^*/k^* et T un tore de H^*/k^*, alors le sous-espace des vecteurs invariants par T est de dimension au plus* 1.

Soit K une extension quadratique de k, contenue dans H et telle que $T=K^*/k^*$. Réalisons à nouveau H comme une sous-algèbre de $M_2(K)$. Soit $u\in K$ tel que $\bar{u}=-u$. On a

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & \bar{u} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & t\bar{y} \\ y & \bar{x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u^{-1} & 0 \\ 0 & \bar{u}^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & -t\bar{y} \\ -y & \bar{x} \end{pmatrix}.$$

On obtient ainsi un automorphisme involutif θ de H^* dont les points fixes sont exactement ceux de K^*. En particulier θ induit un automorphisme involutif θ' de H^*/k^* dont le sous-groupe des points fixes est T.

Lemme 2.4. *Quel que soit $\xi\in H^*/k^*$, on a $\theta'(\xi)\in T\xi^{-1}T$.*

Si

$$h=\begin{pmatrix} x & t\bar{y} \\ y & \bar{x} \end{pmatrix}$$

est un représentant de ξ dans H^*, il faut montrer qu'il existe a et b appartenant à K^* tels que

$$\begin{pmatrix} x & -t\bar{y} \\ -y & \bar{x} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{x} & -t\bar{y} \\ -y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & \bar{b} \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire tels que $ab\bar{x}=x$ et $\bar{a}by=y$. Si x est non nul, on prend $a=x$ et $b=1/\bar{x}$; si $x=0$, on prend $a=b=1$.

Si f est une application continue de H^*/k^* dans $\boldsymbol{C}$, on pose $\check{f}(\xi)=f(\xi^{-1})$ et $f_\theta(\xi)=f(\theta'(\xi))$. Si f est biinvariante par T alors $\check{f}=f_\theta$ et on en déduit que l'algèbre de convolution des fonctions biinvariantes par T est commutative ce qui implique la proposition.

Il reste à déterminer les représentations sphériques. Commençons par le cas des caractères. Soient η un caractère de k^* et $\eta_H=\eta o q_4$ le caractère correspondant de H^*. Pour que η_H soit trivial sur k^*, il faut et il suffit que η soit trivial sur k^{*2} c'est-à-dire soit l'un des caractères χ_b associés au symbole de Hilbert. Considérons alors le caractère $\chi_{b,H}$ comme un caractère de H^*/k^*. Prenons $b\neq k^{*2}$. Pour que $\chi_{b,H}$ soit trivial sur le tore centralisant un élément X non nul de H° il faut et il suffit que χ_b soit trivial sur le groupe des normes de $k(\sqrt{-X\bar{X}})$ c'est-à-dire que $-X\bar{X}k^{*2}=b$. Il en résulte que $\chi_{b,H}$ est sphérique et que

$$(k^*/k^{*2})_{aq_3,\chi_{b,H}}=\begin{cases} k^*/k^{*2}-\{-a\} & \text{si } b=k^{*2} \\ -ab & \text{si } b\neq k^2\ . \end{cases} \tag{2.3}$$

Supposons maintenant que ϑ est une représentation irréductible de H^*/k^*, de dimension au moins 2. Si la caractéristique résiduelle p de k est différente de 2, alors on sait construire ces représentations. A chaque représentation est associée une classe d'extensions quadratiques de k; soit $\alpha(\vartheta)$ l'élément correspondant de k^*/k^{*2}. On a donc 3 séries de représentations. De même si T est un tore de H^*/k^*, son image réciproque K^* dans H est le groupe multiplicatif d'une extension quadratique $K=K^*\cup\{0\}$ de k; soit $\alpha(T)$ l'élément correspondant de k^*/k^{*2}.

Théorème 2.5. ($p\neq 2$) *Soit ϑ une représentation irréductible de H^*/k^*. Si T est un tore de H^*/k^* alors $\vartheta|T$ contient la représentation triviale de T si et seulement si $\langle\alpha(\vartheta)|\alpha(T)\rangle_k=-1$.*

Nous n'avons pu démontrer ce théorème que par une vérification cas par cas reposant sur la construction explicite des représentations. Bien qu'élémentaire, la démonstration est trop longue pour pouvoir être donnée ici.

Corollaire 2.6. ($p\neq 2$) *Toute représentation irréductible de H^*/k^* est sphérique.*

En fait, si $\dim.(\vartheta)>1$, il y a exactement deux classes de tores pour lesquels ϑ possède des vecteurs invariants.

Remarques. 1) Après en avoir discuté avec l'un d'entre nous, Shimizu nous a signalé qu'il avait vérifié le théorème à l'aide de la table des caractères des représentations de H^*/k^*.

2) Pour $p=2$, il est probable que $\alpha(\vartheta)$ peut encore être définie pour presque toutes les représentations de H^*/k^*, le théorème restant valable. La situation est moins claire pour le nombre fini de représentations "extraordinaires" auxquelles on peut s'attendre. Notons que le problème est plus ou moins équivalent au problème analogue pour les représentations de $SL_2(\mathcal{O})$.
On veut maintenant étudier les équivalences possibles entre les représentations $\pi_{Q,\vartheta}$ associées à des formes quadratiques non équivalentes. Nous partirons des remarques suivantes. Soient (E_1, Q_1) et (E_2, Q_2) deux formes quadratiques anisotropes. Un opérateur d'entrelacement entre π_{Q_1} et π_{Q_2} correspond de façon naturelle à une distribution sur $E=E_1\oplus E_2$ invariante par π_R ou $R=Q_1\oplus(-Q_2)$. Pour étudier ces distributions, on peut par exemple choisir une autre décomposition de R et se ramener ainsi à un cas plus simple. Par exemple ceci permet de ramener le cas des formes à un nombre impair de variables à celui des formes à un nombre pair de variables. De manière plus précise soit Q une forme quadratique non dégénérée, anisotrope ou non, sur un espace vectoriel E. Considérons la représentation π_Q de G dans $\mathcal{S}(E)$. On la prolonge à $\mathcal{S}'(E)$ en posant

$$\langle\pi_Q(g)T, f\rangle=\langle T, \overline{\pi_Q(g^{-1})\bar{f}}\rangle.$$

Cela revient en fait à prendre la contragrédiente de π_{-Q}. Avec cette convention $\mathcal{S}(E)$ devient un sous-G-module de $\mathcal{S}'(E)$ (rappelons que dX étant canoniquement choisie, $\mathcal{S}(E)$ est plongé dans $\mathcal{S}'(E)$). Soient alors Q_1 et Q_2 deux formes quadratiques non dégénérées sur des espaces vectoriels E_1

et E_2 respectivement. Soient $E=E_1 \oplus E_2$ et $Q=Q_1 \oplus (-Q_2)$. Si une application linéaire L de $\mathcal{S}(E_1)$ dans $\mathcal{S}'(E_2)$ commute à l'action de G alors

$$(f_1, f_2) \longmapsto \langle L(f_1), f_2 \rangle$$

est une forme bilinéaire sur $\mathcal{S}(E_1) \times \mathcal{S}(E_2)$ donc définit une distribution S sur E. La propriété d'entrelacement de L signifie que S est π_Q-invariante. Inversement une telle distribution S détermine un opérateur d'entrelacement. Remarquons que, comme $\mathcal{S}(E_1)$ est contenu dans le sous-espace des vecteurs différentiables, il en est de même de l'image de L; autrement dit si T appar tient à cette image, alors l'application $g \longmapsto \pi_{Q_2}(g)T$ est localement constante. Si maintenant Q_2 est anisotrope alors une variante de la démonstration de la proposition 1.2 montre que $T \in \mathcal{S}(E_2)$. Enfin si Q_1 et Q_2 sont anisotropes alors π_{Q_1, ϑ_1} est équivalente à π_{Q_2, ϑ_2} si et seulement s'il existe une distribution S sur E qui soit π_Q-invariante et qui, sous l'action du sous-groupe $O(Q_1) \times O(Q_2)$ de $O(Q)$ se transforme suivant la représentation $\vartheta_1 \otimes \vartheta_2$. Notons x et y les coordonnées canoniques de k et considérons la forme quadratique $r(x, y)=xy$.

Proposition 2.6. *Si E est un espace vectoriel de dimension* 2, *muni d'une forme quadratique anisotrope Q, alors* $\dim.\mathrm{Hom}_G(\mathcal{S}(E), \mathcal{S}'(k^2))=1$.

Pour étudier r, on fait une transformation de Fourier partielle. Si on pose

$$f(x, y)=\int_k \varphi(x, \eta)\tau(\eta, y)d\eta \qquad \varphi \in \mathcal{S}(k^2)$$

alors on obtient un nouveau modèle $\bar{\pi}_r$ de π_r. Comme 2 est pair, on peut considérer ces représentations comme des représentations de $SL_2(k)$ et un calcul bien connu donne

$$\pi_r\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] f(x, y)=f(ax+cy,\ bx+dy).$$

Soit L une application linéaire de $\mathcal{S}(E)$ dans $\mathcal{S}'(k^2)$ qui entrelace π_Q et $\bar{\pi}_r$. Si $\varphi \in \mathcal{S}(E)$ alors l'application $g \longmapsto \bar{\pi}_r(g)L(\varphi)$ est localement constante. Par suite, la restriction à $k^2-\{0\}$ de $L(\varphi)$ est une fonction F_φ. Posons

$$U(\varphi)=F_\varphi(0, 1).$$

La forme linéaire U vérifie $U(\tau(uQ)\varphi)=U(\varphi)$ donc est de la forme $C\delta$ où δ est la measure de Dirac à l'origine de E. On a alors

$$F_\varphi((0, 1)g)=C(\pi_Q(g)\varphi)(0)$$

d'où, explicitement et en notant $-\Delta$ le discriminant de Q,

$$\begin{aligned} F_\varphi(x, y) &= C\gamma(Q)^3 \chi_\Delta(x)|x|^{-1}\int_E \varphi(x)\tau(yx^{-1}Q(X))dX \\ &= C\gamma(Q)^4 \chi_\Delta(y)|y|^{-1}\int_E \hat{\varphi}(X)\tau(-xy^{-1}Q(X))dX. \end{aligned}$$

En particulier, on a une majoration de la forme

$$|F_\varphi(x, y)| < \inf(|x|^{-1}, |y|^{-1})$$

ce qui montre que F_φ est localement intégrable dans k^2. Par suite si $L'(\varphi)=F_\varphi dxdy$ alors L' entrelace π_Q et le prolongement de $\bar{\pi}_r$ à $\mathcal{S}'(k^2)$. Soit $L''=L-L'$; pour tout φ, $L''(\varphi)$ est un multiple de la mesure de Dirac δ' à l'origine de k^2. Il existe donc une forme linéaire U' sur $\mathcal{S}(E)$ telle que $L''(\varphi)=U'(\varphi)\delta'$. Comme δ' est invariante par $\bar{\pi}_r$, la distribution U' doit être invariante par π_Q et comme Q est anisotrope, on doit avoir $U'=0$ donc $L=L'$ ce qui implique la proposition.

On va en tirer deux applications.

Corollaire 2.7. *Soient a, b, c, trois éléments de k^*/k^{*2} tels que $c \notin k^{*2}$ et que $a=-bc$. Les représentations $\pi_{aq_1}^-$ et $\pi_{bq_3,\chi_{c,H}}$ sont équivalentes.*

En effet, considérons la forme quadratique $R=aq_1\oplus(-bq_3)$. C'est une forme non dégénérée à quatre variables. Comme $c \notin k^2$, la forme bq_3 représente a et R admet une décomposition de la forme $R\sim r\oplus(-Q)$ où Q est anisotrope binaire. En appliquant les remarques qui précèdent la proposition 2.6, on voit que l'espace des opérateurs d'entrelacement de π_{aq_1} et de π_{bq_3} est de dimension 1. D'après la proposition 1.10, la représentation $\pi_{aq_1}^+$ n'est pas équivalente à une sous-représentation de π_{bq_3} donc $\pi_{aq_1}^-$ est équivalente à une sous-représentation de π_{bq_3} c'est-à-dire à l'une des représentations $\pi_{bq_3,\vartheta}$. De plus on doit avoir $\dim(\vartheta)=1$. Le lemme 1.9 et la formule 2.3 montrent alors que $\vartheta=\chi_{c,H}$.

Considérons maintenant le cas envisagé par Shalika et Casselmann. Soient K une extension quadratique de k et $b\in k^*$; soient χ un caractère singulier non trivial de K_1 et $\varepsilon=\pm 1$. On a posé $\eta(x)=\chi(x/\bar{x})$; c'est un caractère de K^* trivial sur $K_1 k^* K^{*2}$. Si N_K est le groupe des normes de K^*, modulo k^{*2}, alors il existe un caractère ν de N_K tel que $\eta(x)=\nu(x\bar{x}k^{*2})$. De plus ν est non trivial et la correspondance entre ν et χ est bijective. On a

$$M=(k^*/k^{*2})_{bq_K,\vartheta_\chi^\varepsilon}=\{a\in k^*/k^{*2} \mid ab\in N_K \text{ et } \nu(ab)=\varepsilon\}.$$

Soient K' et K'' deux extensions quadratiques de k, non isomorphes, b' et b'' deux éléments de k^*, χ' et χ'' deux caractères singuliers non triviaux de K_1' et K_2'' respectivement etc.... Pour que $\pi_{b'q_{K'},\vartheta_{\chi'}^{\varepsilon'}}$ soit équivalente à $\pi_{b''q_{K''},\vartheta_{\chi''}^{\varepsilon''}}$ il faut que $M'=M''$. Notons que si r est le nombre d'éléments de k^*/k^{*2}, alors M' et M'' ont $r/4$ éléments. L'égalité $M'=M''$ implique donc que

$$M'=M''=b'N_{K'}\cap b''N_{K''}.$$

Mais ceci détermine complètement χ', χ'', ε' et ε''. En effet ν' et ε' doivent vérifier

$$\nu'(bM')=\nu'(N_{K'}\cap b'b''N_{K''})=\varepsilon'.$$

Or $N_{K'}\cap N_{K''}$ est un sous-groupe d'indice 2 de $N_{K'}$ donc il faut prendre pour ν' l'unique caractère trivial sur ce sous-groupe et $\varepsilon'=1$ (resp. $\varepsilon'=-1$) si $b'b''\in N_{K''}$ (resp. si $b'b''\notin N_{K''}$). Dans le corollaire ci-dessous χ', χ'', ν', ν'' sont supposés ainsi choisis.

Corollaire 2.8. *(Shalika-Casselmann) L'espace* $\mathrm{Hom}_G(\pi_{b'q_{K'}}, \pi_{b''q_{K''}})$ *est de dimension* 1. *Les représentations* $\pi_{b'q_{K'},\vartheta^{\varepsilon'}_{\chi'}}$ *et* $\pi_{b''q_{K''},\vartheta^{\varepsilon''}_{\chi''}}$ *sont équivalentes.*

Compte-tenu du lemme 1.9 et des remarques qui précèdent, la seconde assertion résulte immédiatement de la première. Considérons la forme quadratique

$$R=b'q_{K'}\oplus(-b''q_{K''}).$$

Si $K'=k(\sqrt{a'})$ et $K''=k(\sqrt{a''})$, posons $a=a'a''$, $K=k(\sqrt{a})$ et choisissons $b\in k^*$ tel que $\langle a|b\rangle_k=\langle -1|-1\rangle_k h(R)$ où $h(R)$ est l'invariant de Hasse de R. La forme

$$R'=r\oplus(-bq_K)$$

a même invariant de Hasse et même discriminant que R; elle lui est donc équivalente. Il suffit alors d'appliquer la proposition 2.6.

Il y a un deuxième cas à examiner. Soient a et b deux éléments de k^* tels que $ak^{*2}\neq bk^{*2}$. On cherche les opérateurs d'entrelacement de π_{aq_3} et de π_{bq_3}. Bien que, au moins pour $p\neq 2$, le résultat soit probablement très simple, nous n'avons pas réussi à expliciter les équivalences possibles. Notons toutefois que la forme quadratique $R=aq_3\oplus(-bq_3)$ est équivalente à la forme $q_4\oplus(-cq_K)$ où $K=k(\sqrt{-ab})$ et où c est tel que q_K ne représente pas ac. Ceci permet de se ramener à comparer les représentations construites à partir des cas $n=2$ et 4. En utilisant les résultats de [4], on en déduit en particulier que l'espace des opérateurs d'entrelacement de π_{aq_3} et de π_{bq_3} est de dimension infinie. Notre dernier objectif est d'établir le théorème suivant.

Théorème 2.9. *Supposons la caractéristique résiduelle p de k différente de* 2. *Si π est une représentation de carré intégrable de G, non triviale sur le noyau de l'homomorphisme canonique de G sur $SL_2(k)$, alors il existe une représentation irréductible ϑ de H^*/k^* et $a\in k^*$ tels que π soit équivalente à* $\pi_{aq_3,\vartheta}$.

Pour le démontrer nous allons calculer la mesure de Plancherel de G.

§3. La formule de Plancherel.

Notons e l'élément neutre de $SL_2(k)$. Une fonction f, définie sur G est dite paire (resp. impaire) si $f(g[e,-1])=f(g[e,1])$ (resp. $f(g[e,-1])=-f(g[e,1])$). On désire établir la formule de Plancherel pour les fonctions impaires. Bien qu'élémentaire, la démonstration est assez longue; nous la diviserons en plusieurs étapes.

1. Moyenne sur les orbites hyperboliques.

Si $g=(\sigma,\varepsilon)$ appartient à G, on dit que g est hyperbolique si σ est semisimple et a ses valeurs propres dans k. On note G^h l'ensemble des éléments hyperboliques. Si $t\in k^*$, on pose

$$a_t=\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}$$

et on note A l'ensemble des (a_t, ε). C'est un sous-groupe fermé de G. On prendra garde que $(a_t, \varepsilon)^{-1}=(a_{t^{-1}}, \varepsilon\langle t|-1\rangle)$.

Lemme 3.1. a) *Si $g=(\sigma, \varepsilon_g)$ est hyperbolique, et si t est valeur propre de σ, alors g est conjugué de $(a_t, +1)$ ou de $(a_t, -1)$; si $t\in k^{*2}$, alors g est conjugue de (a_t, ε_g).*

b) *(a_t, ε) et $(a_{t'}, \varepsilon')$ sont conjugués si et seulement si $\varepsilon=\varepsilon'$ et $t=t'$ ou t^{-1}.*

c) *Si $t\neq\pm 1$, le centralisateur de (a_t, ε) dans G est A.*

C'est immédiat.

Un élément de G^h est dit régulier si ses valeurs propres sont distinctes c'est-à-dire différentes de ± 1. Les orbites hyperboliques régulières sont donc paramétrées par (t, ε) avec $t\neq 1$ et $(t, \varepsilon)\sim(t^{-1}, \varepsilon)$.

Soit K le sous-groupe compact maximal de G image réciproque de $SL_2(\mathcal{O})$. Soit

$$N=\left\{\left[\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1\right]\middle| n\in k\right\}.$$

C'est un sous-groupe fermé de G et on a la décomposition d'Iwasawa $G=NAK$, avec les relation usuelles de commutation. On choisit arbitrairement une mesure de Haar de K. Si dt est la mesure de Haar de k, autoduale relativement à τ, on pose $d^*t=dt/|t|$ et on normalise comme suit les mesures de Haar de A et de N.

$$\int_A f(a)da=\int_{k^*}(f((a_t, 1))+f((a_t, -1)))d^*t$$

$$\int_N f(n)dn=\int_k f\left(\left[\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1\right]\right)du.$$

On sait que $dg=dadndk$ est une mesure de Haar de G. Comme K est un sous-groupe ouvert compact on a deux mesures sur K, à savoir dk et $dg|_K$. Elles sont liées par la relation

(3.1) $$dg|_K=2\,\mathrm{vol}(\mathcal{O}^*)\,\mathrm{vol}(\mathcal{O})dk.$$

Pour éviter des confusions, si U est une partie mesurable de K, on pose

$$\mathrm{vol}_G(U)=\int_U dg \quad\text{et}\quad \mathrm{vol}_K(U)=\int_U dk.$$

Les mesures dg et da étant ainsi choisies, on munit $A\backslash G$ de la mesure quotient $d\dot{g}$.

Lemme 3.2. a) *Soient* $t\neq\pm 1$ *et* $\varepsilon=\pm 1$; *posons* $a=(a_t,\varepsilon)$. *Si* $f\in\mathcal{D}(G)$ *alors la fonction* $g\longmapsto f(g^{-1}ag)$ *est localement constante, invariante à gauche par* A *et à support compact modulo* A. *De plus l'application*

$$f\longmapsto\int_{A\backslash G}f(g^{-1}ag)d\dot{g}$$

est une mesure sur G, *invariante par automorphismes intérieurs et dont le support est l'orbite* a^G *de* a.

b) *Si* $f\in\mathcal{D}(G)$, *alors*

$$\int_{G^h}f(g)dg=1/2\int_A|t-t^{-1}|^2da\int_{A\backslash G}f(g^{-1}ag)d\dot{g}.$$

Notons tout d'abord que l'orbite a^G est fermée. En effet comme $G=ANK$, on a

$$a^G=k^{-1}n^{-1}ank\quad k\in K,\ n\in N$$

et, K étant compact, il suffit de prouver que $\{n^{-1}an|n\in N\}$ est fermé. Ce dernier ensemble n'est autre que aN qui est bien fermé. De manière précise, on a

$$\left[\begin{pmatrix}1&-u\\0&1\end{pmatrix},1\right]\left[\begin{pmatrix}t&0\\0&t^{-1}\end{pmatrix},\varepsilon\right]\left[\begin{pmatrix}1&u\\0&1\end{pmatrix},1\right]\\=\left[\begin{pmatrix}t&0\\0&t^{-1}\end{pmatrix},\varepsilon\right]\left[\begin{pmatrix}1&u(1-t^{-2})\\0&1\end{pmatrix},1\right]\tag{3.2}$$

L'orbite a^G est donc localement compacte et par suite l'application canonique de $A\backslash G$ sur a^G est un homéomorphisme. Le premier point du lemme en résulte. Pour le deuxième, notons que si f est impaire, les deux membres de la formule à démontrer sont nuls et si f est paire on se réduit à l'assertion analogue pour $SL_2(k)$.

Puisque $dg=dadndk$, on a

$$\int_{A\backslash G}f(g^{-1}ag)d\dot{g}=\int_{K\times N}f(k^{-1}n^{-1}ank)dkdn$$

et, en utilisant la formule (3.2), ceci peut s'écrire

$$\int_{A\backslash G}f(g^{-1}ag)d\dot{g}=|t^2-1|^{-1}\int_{K\times N}f(k^{-1}nak)dkdn.$$

On pose

$$F_f(a)=|t|^{-1}\int_{K\times N}f(k^{-1}nak)dkdn\qquad a=(a_t,\varepsilon)\tag{3.3}$$

et on a

$$\int_{G^h}f(g)dg=1/2\int_A F_t(a)|t-t^{-1}|da.\tag{3.4}$$

Lemme 3.3. *Si* $f\in\mathcal{D}(G)$, *alors* $F_f\in\mathcal{D}(A)$ *et* $F_f(a_t,\varepsilon)=F_f(a_{t^{-1}},\varepsilon)$. *Si* f *est impaire, alors* $F_f(a_t,-1)=-F_f(a_t,1)$.

C'est évident. Dans la suite, on considère à peu près exclusivement des fonctions impaires; pour une telle fonction, on pose

$$F_f(t)=F_f(a_t, 1).$$

2. La série principale.

Son étude a été amorcée par Gelbart et Sally [3]. On considère le groupe abélien A. Il a deux séries de caractères. La première série est formée des caractères valant $+1$ au point $(e, -1)$; les représentations associées correspondent à la série principale de $SL_2(k)$; elles n'interviendront pas ici. La deuxième série est formé des caractères

$$(a_t, \varepsilon) \longmapsto \varepsilon\alpha(t)/\alpha(1)\, \chi(t)|t|^s$$

où χ est un caractère unitaire de k^* et s un nombre complexe. Soit $\mathcal{D}_{\chi,s}$ l'espace des applications f de G dans $\boldsymbol{C}$, localement constantes et telles que

$$f(n(a_t, \varepsilon)g)=\varepsilon\alpha(t)/\alpha(1)\, \chi(t)|t|^{s+1}f(g).$$

Par translations à droite, on obtient une représentation admissible $\pi_{\chi,s}$ de G. Dans le cas unitaire, $\mathrm{Re}(s)=0$, ces représentations sont presque toutes irréductibles. D'une manière générale, on note Θ_π le caractère distribution d'une représentation admissible π de G. En procédant comme d'habitude, on obtient le résultat suivant.

Lemme 3.4. *Si $f\in\mathcal{D}(G)$, alors*

$$\Theta_{\chi,s}(f)=\int_A F_f(a_t, \varepsilon)\varepsilon\alpha(t)/\alpha(1)\, \chi(t)|t|^s da.$$

Si f est paire, on obtient 0 et si f est impaire, on a

$$\Theta_{\chi,s}(f)=2\int_{k^*}F_f(t)\alpha(t)/\alpha(1)\, \chi(t)|t|^s d^*t. \tag{3.5}$$

Si on pose

$$\hat{F}_f(\chi, s)=\int_{k^*}F_f(t)\chi(t)|t|^s d^*t \tag{3.6}$$

alors

$$\sum_{a\in k^*/k^{*2}}\Theta_{\pi_{\chi\chi_a,s}}(f)=2\sum_{a\in k^*/k^{*2}}\hat{F}_f(\chi\chi_a, s). \tag{3.7}$$

Nous aurons besoin d'étudier en détail le cas où $\chi=\chi_a$ est l'un des caractères associés au symbole de Hilbert et où $s=1/2$ ou $-1/2$. Reprenons les notations du §2. Soit $u\in k^*$; posons, pour $\varphi\in\mathcal{S}(k)$,

$$f(g)=\pi_{-uq_1}(g)\varphi(0).$$

Comme φ est un vecteur différentiable de π_{-uq_1}, la fonction f est localement constante et, à l'aide de la formule (1.4), on vérifie qu'elle appartient à $\mathcal{D}_{\chi_u,-1/2}$. L'application $\varphi\longmapsto f$ commute à l'action de G et son noyau est un sous-espace invariant qui contient les fonctions impaires sur k. Comme cette application n'est pas nulle son noyau est exactement le sous-espace des fonctions impaires. La représentation $\pi^{+}_{-uq_1}$ est donc équivalente à une sous-représentation de $\pi_{\chi_u,-1/2}$; soit $V_1\subset\mathcal{D}_{\chi_u,-1/2}$ le sous-espace invariant correspondant. Soit $\pi^{+}_{uq_3}=\pi_{uq_3,\vartheta_0}$ où ϑ_0 est la représentation triviale de $O(uq_3)$. On montre de la même manière qu'elle est équivalente à une sous-représentation de la représentation $\pi_{\chi_u,1/2}$; soit $V_3\subset\mathcal{D}_{\chi_u,1/2}$ le sous-espace invariant correspondant. Exactement comme pour SL_2, les représentations $\pi_{\chi,s}$ et $\pi_{\chi,-\bar{s}}$ sont contragrédientes. La dualité peut-être obtenue par intégration sur K mais il nous sera plus commode de la prendre sous le forme

$$\langle f|f'\rangle=\int_N f(wn)\overline{f'(wn)}dn,\quad f\in\mathcal{D}_{\chi,s},\ f'\in\mathcal{D}_{\chi,-\bar{s}} \text{ et } w=\left[\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},1\right].$$

Proposition 3.5. *L'orthogonal de V_1 est V_3.*

On va passer par l'intermédiaire du modèle de Kirillov. Un élément f de $\mathcal{D}_{\chi_u,1/2}$ est déterminé par sa restriction à wN; posons

$$\psi(x)=f\left(w\left[\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix},1\right]\right).$$

Soit $\mathcal{A}$ l'espace vectoriel des fonctions ψ. A l'aide de la relation

$$\left[\begin{pmatrix}1&0\\x^{-1}&1\end{pmatrix},1\right]=\left[\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix},1\right]\left[\begin{pmatrix}-x&0\\0&-x^{-1}\end{pmatrix},\langle -x-1\rangle\right]w\left[\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix},1\right]$$

on montre que $\mathcal{A}$ est l'espace vectoriel des applications ψ de k dans $\boldsymbol{C}$, localement constantes et ayant la propriété suivante: il existe une constante C telle que, pour $|x|$ assez grand, on ait

$$\psi(x)=C\overline{a(x)}\chi_u(x)|x|^{-3/2}.$$

En modifiant C, ceci peut s'écrire

$$\psi(x)=C\gamma(uxq_3)|x|^{-3/2}\qquad |x| \text{ grand}.$$

Sur H° considérons la forme quadratique $Q=uq_3$; les mesures invariantes μ_y étant choisies comme au §1, posons

$$M_\varphi(y)=\int_{Q(h)=y}\varphi(y)d\mu_y(h)\qquad \varphi\in\mathcal{S}(H^\circ).$$

Si

$$n=\left[\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix},1\right]$$

on a

$$\begin{aligned}\hat{M}_\varphi(x)&=\int_{H^\circ}\varphi(h)\tau(xQ(h))dh\\&=\gamma(Q)^{-1}\pi_Q(wn)\varphi(0).\end{aligned}$$

Soit $\mathcal{S}_Q(k)$ l'image de $\mathcal{S}(H^\circ)$ par l'application $\varphi\longmapsto M_\varphi$. L'identité précédente montre que $\widehat{\mathcal{S}_Q(k)}\subset\mathcal{A}$. Notons $\theta\longmapsto\check{\theta}$ la transformation de Fourier inverse.

Lemme 3.6. *Si $\psi\in\mathcal{A}$ alors $\psi\in\widehat{\mathcal{S}_Q(k)}$ si et seulement si $\check{\psi}|_{-uk^{*2}}=0$.*

Rappelons que Q représente $t\in k^*$ si et seulement si $t\notin -uk^{*2}$. Soit $L\subset H^\circ$ un réseau; si f est la fonction caractéristique de L, on pose $M_L=M_f$. On a

$$\hat{M}_L(x)=\int_L\tau(xQ(h))dh=\gamma(xQ)|x|^{-3/2}\int_{\hat{L}}\tau(-Q(h)/x)dh$$

donc, pour x assez grand

$$\hat{M}_L(x)=C\gamma(xQ)|x|^{-3/2}\qquad\text{avec } C\neq 0.$$

Par suite

$$\mathcal{A}=\boldsymbol{C}\hat{M}_L\oplus\mathcal{S}(k)\quad\text{et}\quad\check{\mathcal{A}}=\boldsymbol{C}M_L\oplus\mathcal{S}(k).$$

Si $\psi\in\widehat{\mathcal{S}_Q(k)}$ alors $\check{\psi}\in\mathcal{S}_Q(k)$ et comme Q ne représente pas $-uk^{*2}$, on a $\check{\psi}|_{-uk^{*2}}=0$. Réciproquement supposons que $\check{\psi}|_{-uk^{*2}}=0$. Comme $\psi\in\mathcal{A}$, on a une décomposition de la forme

$$\psi=C\hat{M}_L+\psi'\ \text{ où }\ \psi'\in\mathcal{S}(k).$$

La fonction M_L est nulle sur $-uk^{*2}$; il en est donc de même de la fonction $\check{\psi}'$. Comme $\check{\psi}'$ est constante au voisinage de 0 elle appartient à $\mathcal{D}(\complement_{k^*}(-uk^{*2}))$. Or ce dernier est contenu dans $\mathcal{S}_Q(k)$ ([5] th. 2.4) et $M_L\in\mathcal{S}_Q(k)$ donc ψ appartient à $\mathcal{S}_Q(k)$.

Si on identifie $\mathcal{D}_{\chi_u,1/2}$ et $\mathcal{A}$, le lemme précédent signifie que V_3 est le sous-espace des fonctions dont la transformée de Fourier inverse est nulle sur $-uk^{*2}$. Déterminons maintenant l'orthogonal de V_1. La fonction ψ est orthogonale à V_1 si, pour toute fonction $\varphi\in\mathcal{S}(k)$, on a

$$\int_k\psi(x)\overline{\pi_{-uq_1}\left(w\left[\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix},1\right]\right)\varphi(0)}dx=0$$

Ceci peut s' écrire

$$\int_k\psi(x)dx\int_k\overline{\varphi(y)}\tau(-uxy^2)dy=0.$$

Les deux fonctions étant intégrables, on peut appliquer le théorème de Fubini:

$$\int_k\overline{\varphi(y)}\check{\psi}(-uy^2)dy=0.$$

La fonction φ étant quelconque ceci équivaut à $\check{\psi}|_{-uk^{*2}}=0$.

Corollaire 3.7. *La représentation quotient de G dans $\mathcal{D}_{\chi_u,-1/2}/V_1$ est équivalente a $\pi^+_{uq_3}$.*

Il suffit de noter que $\pi^+_{uq_3}$ étant unitaire, elle est équivalente à sa contragrédiente. On a donc la relation

$$\Theta_{\pi_{\chi_u,-1/2}}=\Theta_{\pi_{\chi_u,1/2}}=\Theta_{\pi^+_{-uq_1}}+\Theta_{\pi^+_{uq_3}}.$$

3. Les distributions T_x.

Soit G_+, l'ensemble des éléments $g=(\sigma, \varepsilon_g)$ de G tels que $Tr(\sigma-Id)$ soit un carré dans k^*. Soient $G_+{}^h=G_+\cap G^h$ et $G_+{}^e=G_+\cap G^e$ où G^e est l'ensemble des éléments g elliptiques c'est-à-dire tels que σ n'ait pas ses valeurs propres dans k.

Lemme 3.8. a) *Pour qu'un élément hyperbolique appartienne à G_+, il faut et il suffit que ses valeurs propres soient des carrés.*

b) *Si $g\in G_+{}^e$ alors* $\mathrm{Tr}(\sigma-Id)$ *appartient à $\mathcal{O}$ et n'appartient pas à $16\mathcal{P}$.*

c) *Si $g=(\sigma, \varepsilon)\in G_+$, alors pour tout $g'=(\sigma', \epsilon')$, on a $g'gg'^{-1}=(\sigma'\sigma\sigma'^{-1}, \varepsilon)$.*

Soit $g=(\sigma, \varepsilon)$; si g est hyperbolique et si t est une valeur propre de σ, alors $\mathrm{Tr}(\sigma-Id)=t+t^{-1}-2=(t-1)^2/t$ donc $g\in G_+$ si et seulement si $t\in k^{*2}$. Supposons maintenant g elliptique et soit K une extension quadratique de k telle que les valeurs propres de σ appartiennent à K. Ces valeurs propres sont conjuguées et de module 1; il existe donc $x\in K^*$ tel que les valeurs propres de σ soient $x/\bar{x}$ et $\bar{x}/x$. Soit $u\in k^*$ tel que $K=k(\sqrt{u})$ et posons $x=a+b\sqrt{u}$. On a

$$\mathrm{Tr}(\sigma-Id)=(x-\bar{x})^2/x\bar{x}.$$

Si $g\in G_+$, on a donc

$$4b^2u=\lambda^2(a^2-ub^2) \text{ où } \lambda\in k^* \text{ est tel que } \lambda^2=\mathrm{Tr}(\sigma-Id).$$

Ceci peut s'écrire

$$4b^2u(1+(\lambda/2)^2)=\lambda^2a^2 \text{ où } b^2u(1+(2/\lambda)^2)=a^2.$$

Comme u n'est pas un carré, on doit avoir

$$1+(\lambda/2)^2\notin k^{*2} \text{ et } 1+(2/\lambda)^2\notin k^{*2}.$$

Mais $1+4\mathcal{P}\subset k^{*2}$ donc

$$(\lambda/2)^2\notin 4\mathcal{P} \text{ et } (2/\lambda)^2\notin 4\mathcal{P}$$

c'est-à-dire

$$\lambda^2\notin 16\mathcal{P} \text{ et } \lambda^2\in\mathcal{O}.$$

En particulier si $p\neq 2$, alors on aura $\mathrm{Tr}(\sigma-Id)\in\mathcal{O}^*$.

La troisième assertion du lemme signifie que, considérée comme fonction de g, ε est centrale sur G_+. Pour le vérifier il suffit de le faire pour un représentant de chaque orbite contenue dans G_+. Posons $\sigma=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et soit Ω l'ensemble des g tels que $c\neq 0$. La réunion Ω^G des classes de conjugaison qui rencontrent Ω a pour complémentaire le centre de G. Il nous suffit de considérer les orbites qui rencontrent Ω. Elles admettent un représentant de la forme $xw^{-1}an$, c'est-à-dire de la forme

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & t^{-1} \\ t & u \end{pmatrix}, \varepsilon\right]$$

et les orbites contenues dans G_+ sont celles pour lesquelles $u-2 \in k^{*2}$. On effectue alors un calcul direct à l'aide de la définition du 2-cocycle; nous omettrons les détails.

Si x est un nombre complexe de partie réelle positive, on pose

$$T_x(f)=\int_{G_+} f(g)\varepsilon_g |\mathrm{Tr}(\sigma_g - Id)|^x dg \qquad g=(\sigma_g, \varepsilon_g),\ f\in \mathcal{D}(G).$$

D'après le lemme précédent, la distribution T_u est centrale.

Proposition 3.9. *Si $f\in\mathcal{D}(G)$, alors $T_x(f)$ se prolonge en une fonction méromorphe dans* $\mathbf{C}$ *avec au plus des poles simples pour $q^{x+1}=\pm 1$.*

En séparant les points hyperboliques et elliptiques, on a une décomposition $T_x = T_x{}^e + T_x{}^h$. Si $g\in G_+{}^e$ alors $|\mathrm{Tr}(\sigma - Id)| > |16| q$. Ceci reste valable sur $\overline{G_+^e}$. Comme la frontière de $G_+{}^e$ est de mesure nulle, on a

$$T_x{}^e(f)=\int_{\overline{G_+^e}\cap \mathrm{supp}(f)} f(g)\varepsilon_g |\mathrm{Tr}(\sigma_g - Id)|^x dg$$

et par suite, $T_x{}^e(f)$ est une fonction entière de x. Notons que, si $p\neq 2$, alors $T_x{}^e$ est indépendante de x.

Si f est paire, alors $T_x(f)=0$. Supposons donc f impaire. Soit r le cardinal de k^*/k^{*2}. En appliquant la formule (3.4), il vient

$$\begin{aligned} T_x{}^h(f) &= \int_{k^{*2}} F_f(t)|t+t^{-1}-2|^x |t-t^{-1}| d^*t \\ &= r^{-1}\sum_a \int_{k^*} F_f(t)\chi_a(t)|t+t^{-1}-2|^x|t-t^{-1}|d^*t. \end{aligned}$$

Pour N entier positif, soit

$$\psi_N(t)=\begin{cases} 0 & \text{si } |\mathrm{ord}(t)| \geqslant N \\ |t+t^{-1}-2|^x |t-t^{-1}| & \text{si } |\mathrm{ord}(t)|\leq N-1. \end{cases}$$

Les fonctions ψ_N et $F_f\chi_a$ appartiennent à $\mathcal{S}(k^*)$; on va appliquer la formule de Plancherel; posons $z=q^s$ et notons (χ, z) au lieu de (χ, s). Pour N assez grand, on a

$$\begin{aligned} T_x{}^h(f) &= (1/r)\sum_a \int_{k^*} F_f(t)\chi_a(t)\psi_N(t) d^*t \\ &= (\mathrm{rvol}(\mathcal{O}^*))^{-1} \sum_{\chi, a} (1/2i\pi)\int_{|z|=1} \hat{F}_f(\chi^{-1}\chi_a, z^{-1})\hat{\psi}_N(\chi, z)dz/z. \end{aligned}$$

Dans cette somme, χ parcourt un système complet de représentants de $\hat{k}^*$ modulo le sous-groupe des caractères non ramifiés. Notons que $F_f(t)=F_f(t^{-1})$ et donc que $\hat{F}_f(\chi^{-1}\chi_a, z^{-1})=\hat{F}_f(\chi\chi_a, z)$. Calculons $\hat{\psi}_N$. On a

$$\hat{\psi}_N(\chi, z)=\int_{|\mathrm{ord}(t)|\leq N-1}|t+t^{-1}-2|^x|t-t^{-1}||t|^s\chi(t)d^*t$$
$$=\sum_{|v|\leq N-1}\int_{\mathrm{ord}(t)=v}\cdots$$

Commençons par le terme $v=0$.

Lemme 3.10. *Si*

$$c(\chi, x)=\int_{\mathcal{O}^*}|t-1|^{2x+1}|t+1|\chi(t)d^*t \qquad \mathrm{Re}(x)>0$$

alors $c(\chi, x)$ *se prolonge en une fonction méromorphe dans* $\mathbf{C}$. *Elle admet un pole au point* x *si et seulement si* $q^{x+1}=\pm 1$; *ces poles sont simples.*

En effet, au voisinage de 1, la fonction $|t+1|\chi(t)$ est constante et égale à $|2|$. La fonction $c(\chi, x)$ est donc la somme d'une fonction entière et de

$$|2|\int_{\mathcal{O}^*}|t|^{2x+2}d^*t=2\,\mathrm{vol}\,(\mathcal{O}^*)1/(1-q^{-2(x+1)}).$$

Avec un peu de patience, on peut achever le calcul de $c(\chi, x)$; donnons le résultat pour $p\neq 2$ et $x=-1/2$ ou $-3/2$. Ce sont les seuls cas dont nous aurons besoin.

Si χ est ramifié soit $1+\mathcal{P}^{o(\chi)}$ son conducteur; si χ est non ramifié, on pose $o(\chi)=0$.

Lemme 3.11. *On a*

$$c(\chi, -1/2)=\frac{\mathrm{vol}(\mathcal{O}^*)}{q-1}\times\begin{cases}(q^2-q-1)/(q+1) & \text{si } o(\chi)=0\\ -q^{3-2o(\chi)}\chi(-1)/(q+1) & \text{si } o(\chi)\geqslant 1\end{cases}$$

et

$$c(\chi, -3/2)=\frac{\mathrm{vol}(\mathcal{O}^*)}{q-1}\times\begin{cases}-(3q+2)/(q+1) & \text{si } o(\chi)=0\\ -\chi(-1)q^{3-2o(\chi)}/(q+1)-q^{o(\chi)-1}(q+1) & \text{si } o(\chi)\geqslant 1\end{cases}$$

Il nous reste à étudier les termes $v\neq 0$. On a

$$\int_{\mathrm{ord}(t)=v}|t+t^{-1}-2|^x|t-t^{-1}||t|^s\chi(t)d^*t=q^{|v|(x+1)-vs}\int_{\mathrm{ord}(t)=v}\chi(t)d^*t.$$

Si χ est ramifié, on obtient donc 0. Si χ est trivial, il vient

$$\mathrm{vol}\,(\mathcal{O}^*)q^{x+1}\left[q^{-s}\frac{1-q^{N(x+1-s)}}{1-q^{x+1-s}}+q^s\frac{1-q^{N(x+1+s)}}{1-q^{x+1+s}}\right]$$

En appliquant la formule de Plancherel, on a donc obtenu

$$T_x^h(f)=\frac{1}{r\,\mathrm{vol}\,(\mathcal{O}^*)}\sum_{\chi, a}\frac{c(\chi, x)}{2i\pi}\int_{|z|=1}\hat{F}_f(\chi\chi_a, z)dz/z$$
$$+(1/r)\sum_a\frac{q^{x+1}}{2i\pi}\int_{|z|=1}\hat{F}_f(\chi_a, z)\left[\frac{1-(q^{x+1}/z)^N}{z(1-q^{x+1}/z)}+z\frac{1-(q^{x+1}z)^N}{1-zq^{x+1}}\right]dz/z$$

Comme $F_f\in\mathcal{S}(k^*)$, on a $\hat{F}_f(\chi,.)=0$ pour presque tout χ. De plus $\hat{F}_f(\chi, z)$ est un polynôme en z et $1/z$. La formule précédente montre donc que $T_x^h(f)$

se prolonge méromorphiquement, les seules singularités étant des poles simples pour $q^{x+1}=\pm 1$. On va poursuivre les calculs dans les deux cas $x=-1/2$ et $x=-3/2$. Si f est fixée, l'expression obtenue est valable pour N assez grand et est alors indépendante de N. On va faire tendre N vers l'infini. Si $x=-3/2$, les deux progressions géométriques ont pour raison respectives $q^{-1/2}/z$ et $q^{-1/2}z$. Pour $|z|=1$, elles convergent uniformément. A la limite, on obtient

$$T^{h}_{-3/2}(f)=\frac{1}{r\operatorname{vol}(\mathcal{O}^*)}\sum_{\chi,a}\frac{c(\chi,-3/2)}{2i\pi}\int_{|z|=1}\hat{F}_f(\chi\chi_a,z)dz/z$$
$$+(1/r)\sum_a \frac{q^{-1/2}}{2i\pi}\int_{|z|=1}\hat{F}_f(\chi_a,z)\left[\frac{1}{z(1-q^{-1/2}/z)}+\frac{z}{1-zq^{-1/2}}\right]dz/z$$

Si $x=-1/2$, ces progressions divergent. On a alors

$$\sum_a q^{1/2}\int_{|z|=1}\hat{F}_f(\chi_a,z)\left[\frac{1-(q^{1/2}/z)^N}{z(1-q^{1/2}/z)}+z\frac{1-(q^{1/2}z)^N}{1-zq^{1/2}}\right]dz/z$$
$$=\sum_a q^{1/2}\int_{|z|=q}\hat{F}_f(\chi_a,z)\frac{1-(q^{1/2}/z)^N}{z(1-q^{1/2}/z)}dz/z+\sum_a q^{1/2}\int_{|z|=1/q}\hat{F}_f(\chi_a,z)\frac{1-(q^{1/2}z)^N}{1-zq^{1/2}}dz.$$

En passant à la limite, on obtient

$$\sum_a q^{1/2}\int_{|z|=q}\hat{F}_f(\chi_a,z)\frac{1}{z(1-q^{1/2}/z)}dz/z+\sum_a q^{1/2}\int_{|z|=1/q}\hat{F}_f(\chi_a,z)\frac{1}{1-zq^{1/2}}dz.$$

En appliquant le théorème des résidus, on obtient finalement

$$T^{h}_{-1/2}(f)=\frac{1}{r\operatorname{vol}(\mathcal{O}^*)}\sum_{\chi,a}\frac{c(\chi,-1/2)}{2i\pi}\int_{|z|=1}\hat{F}_f(\chi\chi_a,z)dz/z$$
$$+(1/r)\sum_a\frac{q^{1/2}}{2i\pi}\int_{|z|=1}\hat{F}_f(\chi_a,z)\left[\frac{1}{z-q^{1/2}}+\frac{1}{z^{-1}-q^{1/2}}\right]dz/z$$
$$+(2/r)\sum_a\hat{F}_f(\chi_a,q^{1/2}).$$

En introduisant les caractères de la série principale et en untilisant le Corollaire 3.7, on obtient le résultat suivant.

Proposition 3.12. *On a*

$$T^{h}_{-3/2}(f)=\frac{1}{2r\operatorname{vol}(\mathcal{O}^*)}\sum_{\chi}\Big(\sum_a c(\chi\chi_a,-3/2)\Big)\frac{1}{2i\pi}\int_{|z|=1}\Theta_{\pi_{\chi,s}}(f)dz/z$$
$$+(1/2r)\sum_a\frac{q^{-1/2}}{2i\pi}\int_{|z|=1}\Theta_{\pi_{\chi_a,s}}(f)\left[\frac{1}{z-q^{-1/2}}+\frac{1}{z^{-1}-q^{-1/2}}\right]dz/z$$

et

$$T^{h}_{-1/2}(f)=\frac{1}{2r\operatorname{vol}(\mathcal{O}^*)}\sum_{\chi}\Big(\sum_a c(\chi\chi_a,-1/2)\Big)\frac{1}{2i\pi}\int_{|z|=1}\Theta_{\pi_{\chi,s}}(f)dz/z$$
$$+(1/2r)\sum_a\frac{q^{1/2}}{2i\pi}\int_{|z|=1}\Theta_{\pi_{\chi_a,s}}(f)\left[\frac{1}{z-q^{-1/2}}+\frac{1}{z^{-1}-q^{1/2}}\right]dz/z$$
$$+(1/r)\sum_a\big(\Theta_{\pi^+_{a q_1}}+\Theta_{\pi^+_{a q_2}}\big).$$

4. Calcul de la trace de π_Q.

Pour toute forme anisotrope Q, la représentation π_Q est admissible donc possède un caractère au sens distribution. On pose

$$S_1=\sum_u \Theta_{\pi_{uq_1}} \quad \text{et} \quad S_3=\sum_u \Theta_{\pi_{uq_3}}$$

et on se propose de calculer S_1 et S_3. Rappelons que Ω est l'ensemble des

$$g=\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \varepsilon\right]$$

tels que c soit non nul et que $\Omega^G=G-\{(e, 1), (e, -1), (-e, 1), (-e, -1)\}$.

Proposition 3.13. *On a* $S_1-rT_{-1/2}|_{\Omega^G}=0$ *et* $(S_3-rT_{-3/2})|_{\Omega^G}=0$.

Comme ces distributions sont invariantes, il suffit d'établir la proposition pour les restrictions à Ω. Soit donc $f\in\mathcal{D}(\Omega)$. Sur le support de f, la fonction $g\longmapsto|c|$ est bornée inférieurement par un nombre strictement positif. Si Q est l'une des formes uq_1 ou uq_3, on a, pour $g\in\Omega$

$$\pi_Q(g)\varphi(Y)$$
$$=\varepsilon\langle -c|-1\rangle\gamma(Q)^2\gamma(cQ)|c|^{-n/2}\int_E \varphi(X)\tau\left(\frac{aQ(Y)+dQ(X)-B(X, Y)}{c}\right)dX$$

et

$$\pi_Q(f)\varphi(Y)$$
$$=\int_G \varepsilon f(g)\langle -c|-1\rangle\gamma(Q)^2\gamma(cQ)|c|^{-n/2}dg\int_E \varphi(X)\tau\left(\frac{aQ(Y)+dQ(X)-B(X,Y)}{c}\right)dX.$$

Comme $\sup(f)\subset\Omega$, on peut appliquer le théorème de Fubini et par suite $\pi_Q(f)$ est défini par le noyau

$$K_f(X, Y)$$
$$=\int_G f(g)\varepsilon\langle -c|-1\rangle\gamma(Q)^2\gamma(cQ)|c|^{-n/2}\tau\left(\frac{aQ(Y)+dQ(X)-B(X, Y)}{c}\right)dg$$

Lemme 3.14. *On a* $K_f\in\mathcal{S}(E\times E)$.

Soit M un sous-groupe ouvert compact de G tel que f soit biinvariante par M. Il existe une base orthonormale $(\varphi_m)_{m\in N}$ de $L^2(E)$ telle que chaque φ_m appartienne à une composante isotypique relativement à M et on peut supposer que le sous-espace V des vecteurs M-invariants est engendré par $\varphi_1, \cdots, \varphi_a$. Si P est le projecteur sur V alors $\pi_Q(f)=P\pi_Q(f)P$. Enfin notons que $\varphi_m\in\mathcal{S}(E)$. Comme $\pi_Q(f)$ est une application linéaire continue de $L^2(E)$ dans le sous-espace de dimension finie V, l'application linéaire de $L^2(E)$ dans $\boldsymbol{C}$ définie par $\varphi\longmapsto\pi_Q(f)\varphi(Y)$ est continue. Il existe donc $\theta_Y\in L^2(E)$ telle que, pour $\varphi\in\mathcal{S}(E)$, on ait

$$\int_E (K_f(X, Y)-\theta_Y(X))\varphi(X)dX=0.$$

Mais K_f est continue, bornée donc localement L^2 donc l'égalité ci-dessus montre que, pour tout Y on a $K_f(X, Y)=\theta_Y(X)$ localement presque partout donc presque partout. Pour Y fixé, K_f est donc de carré intégrable. Au sens L^2 on a donc

$$\bar{K}_f(X, Y)\sim\sum_m a_m(Y)\varphi_m(X)$$

avec

$$\bar{a}_m(Y)=\pi_Q(f)\varphi_m(Y).$$

Pour $m>\alpha$, on a $a_m=0$ d'où, pour Y donné et pour presque tout X

$$K_f(X, Y)=\sum_1^\alpha \pi_Q(f)\varphi_m(Y)\bar{\varphi}_m(X).$$

Comme les deux membres sont continus, l'égalité est vraie partout et le lemme est démontré.

On en déduit que l'opérateur $\pi_Q(f)$ est à trace, ce que l'on savait déja, et que sa trace est l'intégrale du noyau sur la diagonale.

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}\pi_Q(f)&=\int_E dX\int_G f(g)\varepsilon\langle -c|-1\rangle\gamma(Q)^2\gamma(cQ)|c|^{-n/2}\tau\left(\frac{a+d-2}{c}Q(X)\right)dg\\&=\int_k \|\mu_t\|dt\int_G f(g)\varepsilon\langle -c|-1\rangle\gamma(Q)^2\gamma(cQ)|c|^{-n/2}\tau\left(\frac{a+d-2}{c}t\right)dg\end{aligned}$$

Supposons d'abord $n=3$ et $Q=uq_3$. Avec les notations de la formule (1.6) on a, d'après la proposition 3.5 de [5], l'égalité

$$\|\mu_t\|=\sum_v\frac{\bar{\beta}_v(uq_3)}{\rho(\chi_v, 3/2)}\chi_v(t)|t|^{1/2}.$$

On en déduit que

$$S_3(f)=\int_{k^*}|t|^{3/2}d^*t\int_G f(g)\varepsilon\tau\left(\frac{a+d-2}{c}t\right)|c|^{-3/2}\sum_{v,u}\frac{\bar{\beta}_v(uq_3)\alpha(cu)}{\rho(\chi_v, 3/2)}\chi_v(t)dg.$$

Un calcul élementaire donne

$$-\sum_u\bar{\beta}_v(uq_3)\alpha(cu)=\chi_v(-c)$$

d'où

$$S_3(f)=\int_{k^*}d^*t\int_G f(g)\tau\left(\frac{a+d-2}{c}t\right)\left|\frac{t}{c}\right|^{3/2}\sum_v\rho(\chi_v, -1/2)\chi_v(t/c)dg.$$

Dans ces formules $\rho(\chi_v,\cdot)$ est le facteur gamma de Tate. Après avoir intégré par rapport à g, on obtient une fonction intégrable de t. De plus, sur le support de f, la fonction $|c|$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs. On peut donc faire les transformations suivantes:

$$S_3(f)=\sum_{\alpha,\beta}\int_{\operatorname{ord}(t)=\alpha}d^*t\int_{\operatorname{ord}(c)=\beta}\cdots dg=\sum_{\alpha,\beta}\int_{\operatorname{ord}(c)=\beta}dg\int_{\operatorname{ord}(t)=\alpha}\cdots d^*t.$$

Si on change t en tc, il vient

$$S_3(f)=\sum_{\alpha,\beta}\int_{\mathrm{ord}(c)=\beta}dg\int_{\mathrm{ord}(t)=\alpha-\beta}d^*t=\sum_{\alpha,\beta}\int_{\mathrm{ord}(t)=\alpha-\beta}d^*t\int_{\mathrm{ord}(c)=\beta}\cdots dg.$$

Pour aller plus loin, il faut vérifier que la fonction

$$\int_{\mathrm{ord}(c)=\beta}\cdots dg$$

est intégrable sur k^*. Explicitement, il s'agit de la fonction

$$\sum_v \rho(\chi_v,\ -\tfrac{1}{2})\chi_v(t)|t|^{3/2}\int_{\mathrm{ord}(c)=\beta}f(g)\varepsilon\tau((a+d-2)t)dg.$$

On va avoir besoin de deux lemmes.

Lemme 3.15. *L'application* $(\sigma,\varepsilon)\longmapsto \mathrm{Tr}(\sigma-Id)$ *de* G *dans* k *est submersive sur* Ω^G.

En effet, si l'on considère $SL_2(k)$ comme une sous-variété fermée de $M_2(k)$, alors l'espace tangent au point σ est contenu dans l'hyperplan "$a+d=0$" si et seulement si $\sigma=\pm Id$. D'après un théorème général d'Harish-Chandra il existe donc une application $f\longmapsto M_f$ de $\mathcal{D}(\Omega^G)$ sur $\mathcal{S}(k)$ telle que, pour toute fonction θ localement intégrable sur k, on ait

$$\int_G f(g)\theta(\mathrm{Tr}(-Id)dg=\int_k M_f(t)\theta(t)dt.$$

Lemme 3.16. *L'application* $(\sigma,\varepsilon)\longmapsto\varepsilon$ *est continue sur* Ω.

Pour $\nu\in N^*$, on pose

$$K_\nu=\{(\sigma,1)|\sigma\in SL_2(\mathcal{O})\ \text{ et }\ \sigma\equiv Id(\mathcal{P}^\nu)\}.$$

Pour ν assez grand, c'est un sous-groupe de G, ouvert et compact. On doit vérifier qu'il existe ν tel que, si $g\in\Omega$ et $g'\in K_\nu$, on ait $\varepsilon(g,g')=+1$. Cette vérification est facile et est laissée au lecteur.

Revenons à notre calcul. Si on note Ω_β l'ensemble des g tels que $\mathrm{ord}(c)=\beta$ alors Ω_β est une partie ouverte et fermée; soit ψ_β sa fonction caractéristique. Elle est localement constante. Par suite $f\varepsilon\psi_\beta\in\mathcal{D}(\Omega)$. On a donc

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{ord}(c)=\beta}f(g)\varepsilon\tau((a+d-2)t)dg&=\int_k M_{f\varepsilon\psi_\beta}(s)\tau(st)ds\\&=\hat{M}_{f\varepsilon\psi_\beta}(t).\end{aligned}$$

Ceci nous permet d'écrire que

$$\begin{aligned}S_3(f)&=\sum_v\rho(\chi_v,\ -\tfrac{1}{2})\int_{k^*}\chi_v(t)|t|^{3/2}d^*t\int_G f(g)\varepsilon\tau((a+d-2)t)dg\\&=\sum_v\rho(\chi_v,\ -\tfrac{1}{2})\int_{k^*}\hat{M}_{f\varepsilon}(t)\chi_v(t)|t|^{3/2}d^*t.\end{aligned}$$

D'autre part, pour $\mathrm{Re}(x)>0$, on a

$$T_x(f)=\int_{G_+}f(g)\varepsilon|a+d-2|^x dg=(1/r)\int_{k^*}\hat{M}_{f\varepsilon}(t)\sum_v\chi_v(t)|t|^x d^*t.$$

Cette intégrale est en fait convergente pour $\mathrm{Re}(x)>-1$ et on peut la prolonger analytiquement par la méthode de Tate. On en déduit immédiatement que, sur Ω, on a $S_3=rT_{-3/2}$. Pour $n=1$, la démonstration est analogue. Les distributions considérées étant impaires, il existe quatre constantes telles que

$$S_3=rT_{-3/2}+(1/2)c_3^+(\delta_{(e,1)}-\delta_{(e,-1)})+(1/2)c_3^-(\delta_{(-e,1)}-\delta_{(-e,-1)})$$
$$S_1=rT_{-1/2}+(1/2)c_1^+(\delta_{(e,1)}-\delta_{(e,-1)})-(1/2)c_1^-(\delta_{(-e,1)}-\delta_{(-e,-1)})$$

On va les calculer. Soit toujours H l'algèbre de quaternions anisotrope sur k. Si K est l'extension quadratique non ramifiée de k, on peut réaliser H comme l'algèbre des matrices

$$h=\begin{pmatrix} x & \pi_k\bar{y} \\ y & \bar{x} \end{pmatrix} \qquad x, y\in K.$$

Le corps K est identifié aux h tels que $y=0$. On a

$$\bar{h}=\begin{pmatrix} \bar{x} & -\pi_k\bar{y} \\ -y & x \end{pmatrix} \qquad h\bar{h}=x\bar{x}-\pi_k y\bar{y} \text{ et } \mathrm{Tr}(h)=x+\bar{x}.$$

Si

$$\pi_H=\begin{pmatrix} 0 & \pi_k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

alors π_H est un générateur de l'idéal maximal $\mathcal{P}_H$ de l'anneau des entiers $\mathcal{O}_H$ de H. Notons que h appartient au sous-espace H° des quaternions purs si et seulement si $x+\bar{x}=0$. Si $K=k(\sqrt{u})$ on peut alors poser $x=z\sqrt{u}$ et, comme K est non ramifiée on a $x\in\mathcal{P}_K{}^a$ si et seulement si $z\in\mathcal{P}_K{}^a$. Deplus, $h\in\mathcal{O}_H$ si $x\bar{x}-\pi_k y\bar{y}\in\mathcal{O}_k$; or $x\bar{x}$ et $y\bar{y}$ sont d'ordre pair donc $h\in\mathcal{O}_H$ si et seulement si x et y appartiennent à $\mathcal{O}_K$. Enfin, puisque K est non ramifiée, on a $\mathrm{Tr}(y\mathcal{O}_K)\subset\mathcal{O}_K$ si et seulement si $y\in\mathcal{O}_K$. Soit $e=\mathrm{ord}_k(2)$. A l'aide des remarques précédentes on prouve aisément le lemme suivant.

Lemme 3.17. *Soit*

$$h=\begin{pmatrix} z\sqrt{u} & \pi_k\bar{y} \\ y & -z\sqrt{u} \end{pmatrix}$$

un quaternion pur.

1) *Si ν est pair, $h\in\mathcal{P}_H{}^\nu\cap H^\circ$ si et seulement si $z\in\mathcal{P}_k{}^{\nu/2}$ et $y\in\mathcal{P}_K{}^{\nu/2}$.*

2) *Si ν est impair, $h\in\mathcal{P}_H{}^\nu\cap H^\circ$ si et seulement si $z\in\mathcal{P}_k{}^{(\nu+1)/2}$ et $y\in\mathcal{P}_K{}^{(\nu-1)/2}$.*

Cela étant, considérons à nouveau, pour ν "grand", le sous-groupe K_ν de G_ν. Posons

$$2\,\mathrm{vol}_G(K_\nu)f^+(g)=\begin{cases} +1 & \text{si } g\in K_\nu \\ 0 & \text{si } g\notin K_\nu\cup(e,-1)K_\nu \\ -1 & \text{si } g\in(e,-1)K_\nu \end{cases} \quad \text{et } f^-(g)=f((-e,1)^{-1}g).$$

Ces deux fonctions appartiennent à $\mathcal{D}(G)$ et sont impaires. Soit Q une forme quadratique anisotrope sur un k-espace vectoriel E. Soit $V_\nu \subset L^2(E)$ le sous-espace des vecteurs K_ν-invariants et P_ν le projecteur sur V_ν. Si s est la symétrie par rapport à l'origine dans E, on a, pour $n=\dim(E)$ impaire,

$$\pi_Q(f^+)=P_\nu \quad \text{et} \quad \pi_Q(f^-)=\gamma(Q)^2 s \circ P_\nu .$$

Déterminons V_ν. On a, si a est non nul

$$\sigma=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c/a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b/a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si $g=(\sigma, 1)\in K_\nu$, ceci fournit une décomposition de g en un produit de trois éléments de K_ν. Pour que $f\in L^2(E)$ soit K_ν-invariante, il faut et il suffit qu'elle soit invariante par

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}, 1\right], \quad \left[\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1\right] \quad \text{et} \quad \left[\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}, 1\right] \qquad \text{pour } t\equiv 1(\mathcal{P}^\nu) \text{ et } b\equiv c\equiv 0(\mathcal{P}^\nu)$$

Puisque Q est anisotrope,

$$L_s=\{X\in E \mid Q(X)\in \mathcal{P}_k{}^s\}$$

est un réseau. Si β est l'ordre du caractère τ, le réseau dual $\hat{L}_s$ est défini par

$$\hat{L}_s=\{X\in E \mid B(X, L_s)\in \mathcal{P}_k{}^{-\beta}\}.$$

Les deux premières conditions sur f signifient que f et $\hat{f}$ ont leurs supports contenus dans $L_{-\nu-\beta}$ ou encore que f est à support compact contenu dans $L_{-\nu-\beta}$ et est constante sur les classes modulo $\hat{L}_{-\nu-\beta}$. Comme $\pi^\nu L_{-\nu-\beta}\subset \hat{L}_{-\nu-\beta}$ la troisième condition est automatiquement vérifiée. On en déduit que

$$\operatorname{Tr}\pi_Q(f^+)=\operatorname{Card}(L_{-\nu-\beta}/_{-}\hat{L}_{\nu-\beta}) \text{ et que } \operatorname{Tr}\pi_Q(f^-)=\gamma(Q)^2\operatorname{Card}(L_{-\nu-\beta}/\tfrac{1}{2}L_{-\nu-\beta}).$$

Le cas f^- est alors immédiat. Si D est le discriminant de Q, on a

$$\operatorname{Tr}\pi_Q(f^-)=\alpha(1)^{2n}\langle -1 \mid D\rangle q^{ne}$$

et par suite, pour $n=1$ ou 3

$$S_n(f^-)=\begin{cases} 0 & \text{si } -1\notin k^2 \\ rq^{ne} & \text{si } -1\in k^2 \end{cases}.$$

Traitons maintenant le cas de f^+. En utilisant les notations du lemme 3.17, on vérifie que si $Q=aq_3$ alors $h\in \hat{L}_{-\nu-\beta}$ si et seulemement si

$$\begin{aligned} &\operatorname{ord}_k(z)\geqslant -e+\tfrac{1}{2}(\nu-\beta-\operatorname{ord}(a)) \\ \text{et } &\operatorname{ord}_K(y)\geqslant -1+\tfrac{1}{2}(\nu-\beta-\operatorname{ord}(a)) \text{ si } \nu\equiv\beta+\operatorname{ord}(a)\ (2) \\ &\operatorname{ord}_k(z)\geqslant -e+\tfrac{1}{2}(\nu-\beta-\operatorname{ord}(a)-1) \\ \text{et } &\operatorname{ord}_K(y)\geqslant \tfrac{1}{2}(\nu-\beta-\operatorname{ord}(a)-1) \text{ si } \nu+1=\beta+\operatorname{ord}(a)\ (2) \end{aligned}$$

et que $h\in L_{-\nu-\beta}$ si et seulement si

$$\mathrm{ord}_k(z)\geqslant -\tfrac{1}{2}(\nu+\beta+\mathrm{ord}(a))$$
$$\text{et } \mathrm{ord}_K(y)\geqslant -\tfrac{1}{2}(\nu+\beta+\mathrm{ord}(a)) \text{ si } \nu\equiv\beta+\mathrm{ord}(a)\ (2)$$
$$\mathrm{ord}_k(z)\geqslant -\tfrac{1}{2}(\nu+\beta+\mathrm{ord}(a)-1)$$
$$\text{et } \mathrm{ord}_K(y)\geqslant -\tfrac{1}{2}(\nu+\beta+\mathrm{ord}(a)+1) \text{ si } \nu+1\equiv\beta+\mathrm{ord}(a)\ (2).$$

Par suite, on a

$$\mathrm{Card}(L_{-\nu-\beta}/\hat{L}_{-\nu-\beta})=\begin{cases} q^{3\nu-e-2} & \text{si } \nu\equiv\beta+\mathrm{ord}(a)\ (2) \\ q^{3\nu-e-1} & \text{si } \nu+1=\beta+\mathrm{ord}(a)\ (2). \end{cases}$$

Comme, modulo k^{*2}, il y a autant de a d'ordre pair que de a d'ordre impair, on obtient

$$S_3(f^+)=(r/2)q^{3\nu-e-1}(1+1/q).$$

Procédant de même pour $n=1$, on obtient

$$S_1(f^+)=(r/2)q^{\nu-e}(1+1/q).$$

Il nous reste à calculer $T_x(f^\pm)$. Commençons par f^-. Le support de f^- a pour image dans SL_2 un voisinage de $-Id$. Si ν est grand et si $g=(\sigma, \varepsilon)$ appartient à ce support, il en résulte que $\mathrm{Tr}(\sigma)-2$ est un carré si et seulement si $-4\in k^2$. Si $-1\notin k^2$, on a donc, pour ν assez grand $\mathrm{supp}(f^-)\cap G_+=\emptyset$ et par suite $T_x(f^-)=0$. Si $-1\in k^2$ alors, toujours pour ν assez grand, on a $\mathrm{supp}(f^-)\subset G_+$. De plus, sur ce support, $|\mathrm{Tr}(\sigma)-2|=|4|$. Par suite

$$T_x(f^-)=|4|^x\int_G f^-(g)\varepsilon_g dg=|4|^x/\mathrm{vol}_G(K_\nu)\int_{K_\nu}\langle c, -1\rangle dg.$$

Comme -1 est un carré, on a $T_x(f^-)=|4|^x$; en particulier

$$T_{-3/2}(f^-)=q^{3e} \text{ et } T_{-1/2}(f^-)=q^e.$$

Dans tous les cas, on en déduit que $c_1^-=c_3^-=0$. Pour f^+ si $g=(\sigma, \varepsilon)$ appartient à son support, on a $\mathrm{Tr}(\sigma)-2\equiv 0(\mathcal{P}^\nu)$ donc, pour ν assez grand, d'après le lemme 3.8, on a $\mathrm{supp}(f^+)\cap G_+\subset G_+{}^h$. On a donc

$$T_x(f^+)=\int_{k^{*2}}F_{f^+}(t)|t+t^{-1}-2|^x|t-t^{-1}|d^*t.$$

Le sous-groupe K_ν est invariant dans K donc f^+ est K-centrale et

$$F_{f^+}(t)=\mathrm{vol}_K(K)\,\mathrm{vol}(\mathcal{P}^\nu)/2\,\mathrm{vol}_G(K_\nu)\times\begin{cases}0 & \text{si } t\notin 1+\mathcal{P}^\nu \\ 1 & \text{si } t\in 1+\mathcal{P}^\nu\end{cases}.$$

On en tire

$$T_x(f^+)=\frac{1}{4q^\nu}[K: K_\nu]\frac{q^{-2\nu(x+1)}}{1-q^{-2(x+1)}}q^{-e}.$$

De plus

$$[K: K_\nu]=2q^{3(\nu-1)}q(q^2-1).$$

On a donc

$$T_{-1/2}(f^+)=q^{\nu-e}(1+1/q)/2 \text{ et } T_{-3/2}(f^+)=-q^{3\nu-e-1}(1+1/q)/2.$$

On obtient alors

$$c_1{}^+=0 \text{ et } c_3{}^+=4\,\mathrm{vol}_G(K)/q-1.$$

En résumé

Proposition 3.18. *On a*

$$S_1=rT_{-1/2} \text{ et } S_3=rT_{-3/2}+2\,\mathrm{vol}_G(K)(\delta_{(e,1)}-\delta_{(e,-1)})/q-1.$$

En rassemblant tous les calculs, on va en déduire, pour $p\neq 2$ la partie impaire de la mesure de Plancherel. Rappelons que $r=4q^e$. Si p est différent de 2, alors $T_x{}^e$ est indépendant de x. Pour $f\in\mathcal{D}(G)$, on a donc

$$\begin{aligned}(1/2)c_3{}^+(f((e,1))-f((e,-1)))&=S_3(f)-rT_{-3/2}(f)\\&=S_3(f)-S_1(f)+r(T^h_{-1/2}-T^h_{-3/2})(f).\end{aligned}$$

En utilisant le lemme 3.11 et la proposition 3.12, on obtient le résultat final suivant.

Théorème 3.19. *Supposons $p\neq 2$. Si $f\in\mathcal{D}(G)$, alors*

$$\begin{aligned}4\,\mathrm{vol}_G(K)f((e,1))=&(q-1)\sum_{\dim(\vartheta)>1}\sum_a \dim(\vartheta)\Theta_{\pi_{aq_3,\vartheta}}(f)\\&+2(q-1)\sum_a\Theta_{\pi^+_{aq_3}}(f)\\&+3(q-1)\sum_{a\neq k^2}\Theta_{\pi_{q_3,\chi_a,H}}(f)\\&+2(1+1/q)\sum_{\chi^2\text{ ramifié}}q^{0(\chi)}\frac{1}{2i\pi}\int_{|z|=1}\Theta_{\pi_{\chi,s}}(f)dz/z\\+2q(q+1)\frac{1}{2i\pi}\int_{|z|=1}&[\Theta_{\pi_{\chi_1,s}}(f)+\Theta_{\pi_{\chi_u,s}}(f)]\frac{-(z-z^{-1})^2}{(z^2-q)(z^{-2}-q)}dz/z\end{aligned}$$

Dans cette formule on a $z=q^s$. Le caractère χ parcourt un système complet de représentants de $\hat{k}^*$ modulo le sous-groupe des caractères non ramifiés. Le caractère χ_1 est le caractère trivial et le caractère χ_u l'un des deux caractères ramifiés associés au symbole de Hilbert. Enfin ϑ parcourt l'ensemble des classes de représentations irréductibles de H^*/k^*.

S. Rallis
Department of Mathematics
Princeton University
Princeton N.J. 08540
U.S.A.

G. Schiffmann
I.R.M.A.
Universite L. Pasteur
Strasbourg 67084 (CEDEX)
France

Bibliographie

[1] Casselman, W., On the representations of $SL_2(k)$ related to binary quadratic forms, Amer. Jour. of Math. 1972.

[2] Gelbart, S., Weil's representation and the spectrum of the metaplectic group, Springer Lecture Notes vol. 530 (1976).

[3] Gelbart, S., and Sally P. J., Intertwinning operators and automorphic forms for the metaplectic group. PNAS (U. S. A.) vol. 72 (1975).

[4] Jacquet, H., and Langlands, R. P., Automorphic forms on GL(2), Springer Lecture Notes vol. 114 (1970).
[5] Rallis, S., and Schiffmann G., Distributions invariantes par le groupe orthogonal, Springer Lecture Notes vol. 497 (1975).
[6] Shalika, J., Representations of the two by two unimodular group over local fields, Thesis, John Hopkins University, (1966).
[7] Tanaka, S., On irreducible unitary representations of some special linear groups of the second order. Osaka J. of Math. vol. 3.
[8] Weil, A., Sur certains groupes d'opérateurs unitaires, Acta Mth. vol. 111 (1964).
[9] Kubota, T., Topological coverings of SL_2 over a local field, Jour. Math. Soc. Japan vol. 19 (1967)
[10] Rallis, S., and Schiffmann, G. Weil, representation I, Intertwinning distributions preprint (1974).
[11] Strichartz, R., Harmonic analysis on hyperboloids, Jour. of funct. Analysis vol. 12 (1973).