J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)
17-3 (1977) 539-566

Les opérateurs faiblement hyperboliques matriciels à caractéristiqes de multiplicités constantes, bien décomposables et le problème de Cauchy non caractéristique associé

Par

Daniel GOURDIN

Introduction

J. Chazarain [4] a résolu le problème de Cauchy C^∞ pour les opérateurs faiblement hyperboliques scalaires à caractéristiques de multiplicités constantes en étudiant le noyau à l'aide d'opérateurs intégraux de Fourier, sous des conditions dites de Levi ,équivalentes à la condition de bonne décomposition introduite par J. C. De Paris dans son étude du problème de Cauchy asymptotique [14].

K. Yoshida [19] a résolu le même problème scalaire en untilisant des décompositions en opérateurs pseudo-différentiels portés par les bicaractéristiques qui permettent de trouver des inégalités d'énergie propres à la résolution de ce problème; mais la condition imposée est plus forte que celle de J. Chazarain et J. C. De Paris: elle n'est donc pas nécessaire.

Quant aux systèmes faiblement hyperboliques, les résultats sont plus partiels: cf. R. Berzin [1] et [2], I. Demay [5], D. Gourdin [6], V. M. Petkov [15], H. Yamahara [33].

La classification des systèmes différentiels à l'aide des facteurs invariants introduite par J. Vaillant [16] a permis de donner une définition algébrique simple des systèmes fortement hyperboliques [17].

Elle conduit aussi à la définition des systèmes faiblement hyperboliques à caractéristiques de multiplicités constantes que nous allons donner au paragraphe I.

Pour ces systèmes nous donnerons au paragraphe II une condition C de bonne décomposition; elle se réduit à celle de J. C. De Paris pour les opérateurs scalaires et est moins forte que celle de K. Yoshida dans le cas scalaire.

Aux paragraphe III et IV nous résoudrons alors le problème de Cauchy non caractéristique associé, dans des espaces de Sobolev appropriés, par la méthode de K. Yoshida [19], S. Mizohata et Y. Ohya [28], [29], [30], [31], [32]. Nous serons amenés à utiliser des indices supérieurs (par exemple s dans q^s) qu'il faudra distinguer des puissances algébriques notées dans ce travail avec des parenthèses (par exemple ν_s dans $(H_s)^{\nu_s}$, β_j dans $(h_0)^{\beta_j}$, β'_j dans $(k'_0)^{\beta'_j}$ pour les algèbres respectives $R[l_0, l]$, $O_m(\Omega)$, $O'_m(\Omega)$ introduites dans les §I et §II 1,2,3 etc..).

Introduisons les notations suivantes:
X^0 est un nombre fixé strictement positif,
$\Omega=[O, X^0]\times \boldsymbol{R}^n=\{(x^0, x)\in \boldsymbol{R}^{n+1};\ x^0\in[0, X^0],\ x\in R^n\}$,
$T^*(\Omega)$ est le fibré cotangent sur Ω et $T^*_{(x^0, x)}(\Omega)=\boldsymbol{R}^{n+1}=\{(l_0, l);\ l_0\in \boldsymbol{R}, l\in \boldsymbol{R}^n\}$ est l'espace cotangent à Ω au point (x^0, x) de Ω,
$(1, 0)$ est le champ de covecteurs de composantes $(1, 0, \cdots, 0)$ en chaque point (x^0, x) de Ω,
$B_m^\infty(\Omega)=\{u=(u_j^i)$ matrice $m\times m$: $u_j^i\in C^\infty(\Omega)$ et $D^\alpha u_j^i$ borné dans Ω pour tout α, $(n+1)$-uple d'entiers, tout i et j entiers de $[1, m]\}$,
$B^\infty(\Omega)=B_1^\infty(\Omega)$,
$O_m^\theta(\Omega)=\{$opérateurs différentiels sur Ω, d'ordre inférieur ou égal à θ, à coefficients appartenant à $B_m^\infty(\Omega)\}$,
$O^\theta(\Omega)=O_1^\theta(\Omega)$,
$O_m(\Omega)=\bigcup_{\theta\in \boldsymbol{N}} O_m^\theta(\Omega)$ et $O(\Omega)=O_1(\Omega)$.

Soient p et q deux opérateurs de $O_m(\Omega)$, nous dirons que p est congru à q modulo $\theta\in \boldsymbol{N}^*$, et on notera $p\underset{\theta}{\sim}q$, si $p-q\in O_m^{\theta-1}(\Omega)$.

Pour des commodités d'écriture, on notera parfois $p\underset{0}{\sim}q$ lorsque $p=q$.

I. Les opérateurs de $O_m^t(\Omega)$ faiblement hyperboliques par rapport au champ de covecteurs (1, 0), à caractéristiques de multiplicités constantes.

Soit $h=h(x^0, x;\ D_{x^0}, D_x)=(h_j^i(x^0, x;\ D_{x^0}, D_x)$ un opérateur de $O_m^t(\Omega)$ et $H=H(x^0, x;\ l_0, l)=(H_j^i(x^0, x;\ l_0, l))$ sa matrice caractéristique au sens de Cauchy-Kowalewski.

1) On suppose que le déterminant caractéristique $\det H=\det H(x^0, x;\ l_0, l)$ est différent du polynôme nul pour tout (x^0, x) fixé dans Ω et possède une décomposition en facteurs irréductibles H_s dans $\boldsymbol{R}[l_0, l]$ de multiplicités constantes dans Ω, à coefficients appartenant à $B^\infty(\Omega)$:

$$\det H=(H_1)^{\nu_1}\cdots(H_s)^{\nu_s}\cdots(H)^{\nu_\sigma}$$

(*) En chaque point (x^0, x), on considère l'anneau localisé Φ_s de l'anneau des polynômes $\boldsymbol{R}[l_0, l]$ par rapport à l'idéal premier défini par H_s; Φ_s est un anneau principal sur lequel on diagonalise la matrice H en chaque point (x^0, x) et pour chaque s $(=1, \cdots, \sigma)$ [26], [24], [17]; on a

$$H \text{ équivalent à } \begin{pmatrix} (H_s)^{q_1(s)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (H_s)^{q_m(s)} \end{pmatrix}$$

(*) Les éléments de ϕ_s sont les fractions du corps des fractions de $\boldsymbol{R}[l_0, l]$ qui sont telles que leur dénominateur n'appartienne pas à l'idéal défini par H_s.

dans Φ_s avec $q_1(s) \geqslant \cdots \geqslant q_m(s)$ et $\nu_s = q_1(s) + \cdots + q_m(s)$.

2) On suppose que les multiplicités $q_i(s)$ sont constantes dans Ω, quel que soit $s=1, \cdots, \sigma$ et $i=1, \cdots, m$.

Remarque. Dans ce travail, seule la constance de $q_1(s)=q^s$ dans $\Omega (s=1, \cdots, \sigma)$ sera utilisée.

3) On fait la troisième hypothèse suivante: le radical caractéristique $R = \prod_{s=1}^{\sigma} H_s$ est strictement hyperbolique par rapport au covecteur $(1, 0) \in T^*_{(x^0 x)}(\Omega)$ en tout point (x^0, x) à distance finie ou infinie dans Ω [11] c'est-à-dire que: dans $R[l_0]$, $\prod_{s=1}^{\sigma} H_s$ a toutes ses racines $p_0{}^i$ réelles et distinctes et en posant

$$\begin{aligned}
&H_1(x^0, x: l_0, l) = H_1(x^0, x; 1, 0) \prod_{i=1}^{\tau_1} (l_0 - p_0{}^i(x^0, x; l)) \\
&\vdots \\
&H_s(x^0, x; l_0, l) = H_s(x^0, x; 1, 0) \prod_{i=\tau_{s-1}+1}^{\tau_s} (l_0 - p_0{}^i(x^0, x; l)) \\
&\vdots \\
&H_\sigma(x^0, x; l_0, l) = H_\sigma(x^0, x; 1, 0) \prod_{i=\tau_{\sigma-1}+1}^{\tau_\sigma} (l_0 - p_0{}^i(x^0, x; l))
\end{aligned}$$

on a

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_s < \cdots < \tau_\sigma, \quad d^0 H_s = \tau_s - \tau_{s-1}$$

et les inégalités

$$\text{(1.0)} \qquad \begin{cases} 0 < \inf \{ |p_0{}^i(x^0, x; l) - p_0{}^j(x^0, x; l)| \,;\, i \neq j,\ (x^0, x) \in \Omega,\ |l| = 1 \} \\ 0 < \inf \{ |H_s(x^0, x; 1, 0)| \,;\, (x^0, x) \in \Omega,\ 1 \leqslant s \leqslant \sigma \} \end{cases}$$

D'après les propriétés 1), 2), 3) il s'ensuit que: les facteurs H_s sont uniques à un facteur multiplicatif près appartenant à $B^\infty(\Omega)$ et borné inférieurement en valeur absolue.

Les multiplicités ν_s sont indépendantes des H_s choisis vérifiant 1), 2) et 3) [23] et il en est de même des multiplicités $q_1(s), \cdots, q_m(s)$ (pour tout $s=1, \cdots \sigma$) car la propriété 1) signifie que: dans la matrice caractéristique H, quel que soit $r=1, \cdots m-1$, les mineurs d'ordre r sont tous divisibles par $(H_s)^{q_{r+1}(s)+\cdots+q_m(s)}$ et un au moins de ces mineurs n'est pas divisible par $(H_s)^{q_{r+1}(s)+\cdots+q_m(s)+1}$ pour tout $s=1, \cdots, \sigma$.

Définition 1. Dans ces conditions, l'opérateur h est dit faiblement hyperbolique par rapport au champ de covecteurs $(1, 0)$, et à caractéristiques de multiplicités constantes dans Ω.

Pour ces opérateurs, le problème de Cauchy non caractéristique est en général mal posé dans les espaces de Sobolev.

Nous allons mettre en évidence une condition sur l'opérateur h, suffisante pour permettre la résolution du problème de Cauchy non caractéristique associé à h dans des espaces de Sobolev appropriés.

II. La condition C sur l'opérateur h.

Appelons A' la matrice des cofacteurs des éléments de H dans le développement de det H.

A' a tous ses éléments divisibles dans $R[l_0, l]$ par

$$\prod_{s=1}^{\sigma}(H_s)^{q_2(s)+\cdots+q_m(s)}$$

En posant

$$A'=\prod_{s=1}^{\sigma}(H_s)^{q_2(s)+\cdots+q_m(s)}A$$

on a

$$HA=AH=\prod_{s=1}^{\sigma}(H_s)^{q^s}I_m$$

où I_m est la matrice unité $m\times m$.

On peut toujours supposer que la suite $(q^s)_{1\leqslant s\leqslant\sigma}$ est décroissante au sens large: $q^1\geqslant q^2\geqslant\cdots\geqslant q^s\geqslant q^\sigma$.

Appelons τ le degré du polynôme $(H_1)^{q^1}\cdots(H_\sigma)^{q^\sigma}$; alors les éléments de A sont des polynômes de degré $\tau-t$ à coefficients appartenant à $B^\infty(\Omega)$, et quel que soit $a\in O_m^{\tau-t}(\Omega)$ de symbole principal A, les opérateurs $h\ a$ et $a\ h$ ont même symbole principal diagonal $K(x^0, x; l_0, l)=(H_1)^{q^1}\cdots(H_\sigma)^{q^\sigma}(x^0, x; l_0, l)I_m$.

Définition 2. Nous dirons que l'opérateur h vérifie la condition C si: il existe des opérateurs $a_1\in O_m^{\tau-t}(\Omega)$ et $a_2\in O_m^{\tau-t}(\Omega)$ de même symbole principal A tels que les opérateurs $k_1=ha_1$ et $k_2=a_2h$ appartenant à $O_m^\tau(\Omega)$ et de symbole principal $K(x^0, x; l_0, l)$ aient la forme suivante

$$(2.0)\qquad \left\{\text{avec}\quad\begin{aligned}&k=\sum_{i=0}^{\tau}e_i(h_1)^{[q^1-i]_+}\cdots(h_\sigma)^{[q^\sigma-i]_+}\\&k_{\tau-i}\simeq\sum_{j=0}^{i}e_j(h_1)^{[q^1-j]_+}\cdots(h_\sigma)^{[q^\sigma-j]_+}\quad(\text{tout } i=0,\cdots,\tau)\end{aligned}\right.$$

où $h_s\in O(\Omega)$ a pour symbole principal H_s $(s=1,\cdots,\sigma)$

$e_i\in O_m(\Omega)$ $(i=0,\cdots,\tau)$

$[r]_+=r$ si $r\geqslant0$ et $[r]_+=0$ si $r\leqslant0$.

Nous allons analyser la condition C et par conséquent l'expression (2.0) dans les sous paragraphes suivants.

1. La condition de bonne décomposition dans $O_m(\Omega)$ pour les opérateurs $k(x^0, x; D_{x^0}, D_x)$ de symbole principal $K(x^0, x; l_0, l)=(H_1)^{q^1}\cdots(H)^{q^\sigma}I_m$.

Fixons H_0 un des facteurs $H_s(1\leqslant s\leqslant\sigma)$; on a

$$(H_1)^{q^1}\cdots(H_\sigma)^{q^\sigma}\cdot I_m=E_0\times(H_0)^{q^0}$$

Soient $e_0\in O_m(\Omega)$ et $h_0\in O(\Omega)$ de symboles principaux respectivement E_0 et H_0, alors

$$k \underset{\tau}{\sim} e_0(h_0)^{\beta_0 = q^0}$$

Soit $\gamma_1 = k - e_0(h_0)^{\beta_0}$, on a $\gamma_1 \in O_m^{\tau-1}(\Omega)$.

Si γ_1 n'est pas d'ordre $\tau-2$, en appelant Γ_1 son symbole principal et β_1 la multiplicité de H_0 dans Γ_1 (minimum des multiplicités de H_0 dans chacun des m^2 éléments de la matrice Γ_1 dans $R[l_0, l]$ et lorsque (x^0, x) varie dans Ω) on a:

$$\Gamma_1 = E_1 \times (H_0)^{\beta_1}$$

avec E_1 matrice $m \times m$ dont les éléments sont des polynômes de $R[l_0, l]$ à coefficients dans $B^\infty(\Omega)$ d'après la seconde des relations (1.0) ($\beta_1 = 0$ si et seulement si un des éléments de Γ_1 n'admet pas H_0 comme facteur de décomposition en un point (x^0, x) de Ω); soit $e_1 \in O_m(\Omega)$ un opérateur de symbole principal E_1 on a:

$$k \underset{\tau-1}{\simeq} e_0(h_0)^{\beta_0} + e_1(h_0)^{\beta_1}$$

si γ_1 est d'ordre inférieur ou égal à $\tau-2$, on prend $e_1 = 0$ et $\beta_1 = \tau$ et la formule précédente est encore vraie.

Après un nombre fini de telles opérations on a

$$(2.1) \qquad \left\{ \text{avec} \quad \begin{aligned} & k = \sum_{i=0}^{\tau} e_i(h_0)^{\beta_i} \\ & k \underset{\tau-i}{\simeq} \sum_{j=0}^{i} e_j(h_0)^{\beta_j} \text{ pour tout } i = 0, \cdots, \tau \text{ et } e_j \in O_m(\Omega). \end{aligned} \right.$$

Définition 3. Une telle expression (2.1) est appelée une décomposition de k par rapport au facteur H_0 dans $O_m(\Omega)$.

Remarque. Bien que la notion de décomposition soit intrinsèque, il n'y a pas de manière canonique de l'effectuer et les nombres $\beta_0, \cdots, \beta_\tau$ peuvent varier suivant la décomposition. Il *y* a cependant un type de décomposition qui est canonique, c'est la suivante:

Définition 4. Une décomposition de k par rapport à H_0 dans $O_m(\Omega)$ est une bonne décomposition si $\beta_i \geqslant \beta_0 - i$ pour tout $i = 0, \cdots, \tau$. On dit alors que k est bien décomposable par rapport à H_0 dans $O_m(\Omega)$.

On a les propositions suivantes:

Proposition 1. *Si k possède une bonne décomposition par rapport à H_0 dans $O_m(\Omega)$, toute autre décomposition par rapport à H_0 dans $O_m(\Omega)$ est une bonne décomposition.*

Proposition 2. *k est bien décomposable dans $O_m(\Omega)$ par rapport à chaque H_s $(1 \leqslant s \leqslant \sigma)$ si et seulement si il existe des opérateurs $h_1, \cdots, h_\sigma$ appartenant à $O(\Omega)$, de symboles principaux $H_1, \cdots, H_\sigma$ respectivement et des opérateurs $e_0, \cdots, e_\tau \in O_m(\Omega)$ tels que*

$$(2.2)\quad \left\{\begin{array}{l} k=\sum_{i=0}^{\tau} e_i(h_1)^{[q^1-i]_+}\cdots(h_\sigma)^{[q^\sigma-i]_+} \\ \text{avec} \\ k_{\tau-i}\simeq \sum_{j=0}^{i} e_j(h_1)^{[q^1-j]_+}\cdots(h_\sigma)^{[q^\sigma-j]_+} \ \text{tout } i=0,\cdots,\tau. \end{array}\right.$$

Remarque. Dans l'expression (2.2) les opérateurs $h_s\in O(\Omega)$ de symboles principaux H_s ($s=1,\cdots,\sigma$) peuvent être choisis à priori. Les définitions 3 et 4 et les proposition 1 et 2 ont été introduites par J. C. De Paris [14] dans le cas scalaire ($m=1$); les démonstrations s'adaptent facilement au cas m entier quelconque et se prolongent aux propositions 3 et 4 suivantes:

Proposition 3. *Si k possede une décomposition de la forme*:

$$(2.3)\quad \left\{\begin{array}{l} k=\sum_{i=0}^{\tau} e_i h_{\alpha_1^i} h_{\alpha_2^i}\cdots h_{\alpha_{u_i}^i} \\ \textit{avec} \\ k_{\tau-i}\simeq \sum_{j=0}^{i} e_j h_{\alpha_1^j} h_{\alpha_2^j}\cdots h_{\alpha_{u_j}^j} \quad (\textit{tout } i=0,\cdots,\tau) \end{array}\right.$$

où $u_i=\sum_{s=1}^{\sigma}[q^s-i]_+$,

α^i *est une bijection entre les ensembles* $[1,\cdots,u_i]\to[\underbrace{1,\cdots,1}_{[q^1-i]_+\ \textit{fois}};\cdots;\underbrace{\sigma,\cdots,\sigma}_{[q^\sigma-i]_+\ \textit{fois}}]$

$\alpha^i(j)=\alpha_j^i$

$h_s\in O(\Omega)$ *a pour symbole principal* H_s $(1\leqslant s\leqslant\sigma)$,

$e_i\in O_m(\Omega)$,

alors k est bien décomposable par rapport à chaque H_s $(1\leqslant s\leqslant\sigma)$ *dans* $O_m(\Omega)$.

Proposition 4. *Si k possède une décomposition de la forme*

$$(2.4)\quad \left\{\begin{array}{l} k=\sum_{i=0}^{\tau} e_1^i\cdot h_{\alpha_1^i}\cdot e_2^i\cdot h_{\alpha_2^i}\cdots e_{u_i}^i\cdot h_{\alpha_{u_i}^i}\cdot e_{u_i+1}^i \\ \textit{avec} \\ k_{\tau-i}\simeq \sum_{j=0}^{i} e_1^j\cdot h_{\alpha_1^j}\cdot e_2^j\cdot h_{\alpha_2^j}\cdots e_{u_j}^j\cdot h_{\alpha_{u_j}^j}\cdot e_{u_j+1}^j \quad (i=0,\ldots,\tau) \end{array}\right.$$

où $h_s\in O(\Omega)$ *a pour symbole principal* H_s $(1\leqslant s\leqslant\sigma)$

$e_r{}^i$ *appartient à* $O_m(\Omega)$ $(0\leqslant i\leqslant\tau,\ 1\leqslant r\leqslant u_i+1)$

alors k est bien décomposable par rapport à chaque H_s $(1\leqslant s\leqslant\sigma)$ *dans* $O_m(\Omega)$.

Nous reviendrons sur la démonstration de ces propositions au paragraphe II 3 où nous poursuivrons l'analyse de la condition C sur h en étudiant la bonne décomposition dans un espace d'opérateurs $O'_m(\Omega)$ plus grand que $O_m(\Omega)$; introduisons à présent ce nouvel espace.

2. L'espace d'opérateurs $O'_m(\Omega)$.

Etant donné un nombre réel r, on désigne par

$$\boxed{C^\infty([0, X^0],\ S^r)}$$

l'espace des fonctions $\varepsilon\in C^\infty(\Omega\times R^n)$ telles que, quels que soient l'entier ρ, les

n-uples d'entiers α et β, il existe une constante positive $C_{p,\alpha,\beta}$ telle que:

$$\forall x^0 \in [O, X^0],\ \forall x \in R^n,\ \forall l \in R^n \text{ on ait}$$
$$|D_{x^0}^p D_x^\alpha D_l^\beta \varepsilon \in (x^0, x;\ l)| \leqslant C_{p,\alpha,\beta}(1+|l|^2)^{(r-|\beta|)/2}$$

[C'est aussi l'espace des fonctions ε définies sur $\Omega \times R^n$ telles que l'application $x^0 \to \varepsilon(x^0,.)$ soit indéfiniment dérivable de $[0, X^0]$ dans l'espace de Fréchet S^r([3], [9]), sous espace de $C^\infty(\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n)$, muni des semi normes

$$|\Psi|_{i,j} = \operatorname*{Max}_{\substack{|\alpha|\leq i \\ |\beta|\leq j}} \sup_{\substack{x\in R^n \\ l\in R^n}} \frac{|D_x^\alpha D_l^\beta \Psi(x,\ l)|}{(1+|l|^2)^{(r-|\beta|)/2}}$$

Par la suite on sera amené à utiliser la propriété suivante:

Propriété 1. *Soit* $\varepsilon_j(x^0, x;\ l)$, $j=0, 1, \cdots$ *une suite de fonctions de* $C^\infty([0, X^0], S^r)$. *Alors il existe* $\varepsilon(x^0, x;\ l) \in C^\infty([0, X^0], S^r)$ *telle que*

$$(2.5) \qquad \begin{cases} \varepsilon(x^0, x;\ l) - \sum_{j=0}^{N-1} \varepsilon_j(x^0, x;\ l) \in C^\infty([0, X^0], S^{r-N}) \\ \textit{quel que soit l'entier } N. \end{cases}$$

dont la démonstration résulte de [9] p. 433 et [3] p. 10.

On désigne les espaces de Sobolev par

$$H^r = \{u \in S'(R^n)/(1+|l|^2)^{r/2}\hat{u} \in L^2(R^n)\}$$

avec leurs normes $\|u\|_r = \|(1+|l|^2)^{r/2}\hat{u}\|_{L^2(R^n)}$.

$H^\infty = \bigcap_{r\in R} H^r$ est un espace de Fréchet pour les seminormes $\|u\|_r$.

$H^{-\infty} = \underset{\substack{\longrightarrow \\ r\in R}}{\bigcap} H^r$, muni de la topologie limite inductive, est un espace de Silva [12].

$L^r(H^{-\infty}, H^{-\infty})$ est l'e.v.t.l.c. des applications linéaires continues L de $H^{-\infty}$ dans $H^{-\infty}$ d'ordre r, c'est-à-dire que L est la limite du système inductif d'applications formées par les restrictions L_s^{s-r} continues de L à H^s dans H^{s-r}:

$$\begin{tikzcd}
H^\infty \arrow[r, hook, "j^{s'}"] \arrow[d, "L_{|H^\infty}=L_\infty^\infty"'] \arrow[dr, phantom, "\subset"] & H^{s'} \arrow[r, hook, "i_{s'}^s"] \arrow[d, "L_{s'}^{s'-r}"'] \arrow[dr, phantom, "\subset"] & H^s \arrow[r, hook, "i_s"] \arrow[d, "L_s^{s-r}"] \arrow[dr, phantom, "\subset"] & H^{-\infty} \arrow[d, "L"] \\
H^{+\infty} \arrow[r, hook, "j^{s'-r}"'] & H^{s'-r} \arrow[r, hook, "i_{s'-r}^{s-r}"'] & H^{s-r} \arrow[r, hook, "i_{s-r}"'] & H^{-\infty}
\end{tikzcd}$$

On le munit des semi-normes $\|L\|_s^{s-r} = \sup_{\|u\|_s \leqslant 1} \|Lu\|_{s-r}$

$$\boxed{C^\infty([0, X^0], \underline{S}^r)}$$

est l'espace des opérateurs scalaires pseudo différentiels en x d'ordre r, dépendant du paramètre $x^0 \in [0, X^0]$, dont le symbole $\varepsilon(x^0, x;\ l)$ appartient à $C^\infty([0, X^0], S^r)$.

On a:

$$\varepsilon(x^0, x; D_x)y(x^0, x)=\int e^{i\langle x, l\rangle}\varepsilon(x^0, x; l)\hat{y}(x^0, l)\frac{dl}{(2\pi)^n}$$

où $y\in C^{\infty}_{(0)}(\Omega)$.

$\hat{y}(x^0, l)=\int e^{-i\langle x, l\rangle}y(x^0, x)dx$ est la transformée de Fourier de y par rapport à la seconde variable x.

Propriété 2. *i)* $C^{\infty}([0, X^0], \underset{=}{S}^r)\subset C^{\infty}[[0, X^0], L^r(H^{-\infty}, H^{-\infty})]$ *où* $C^{\infty}[[0, X^0], L^r(H^{-\infty}, H^{-\infty})]$ *est l'espace des applications indefiniment différentiables de* $[0, X^0]$ *dans* $L^r(H^{-\infty}, H^{-\infty})$.

ii) *Si* $\varepsilon^{(i)}_{x^0}(x^0, x; D_x)$ *est la dérivée* $i^{\text{ème}}$ *par rapport à* x^0 *de* $\varepsilon(x^0, x; D_x)\in C^{\infty}([0, X^0], S^r)$, *alors* $\varepsilon^{(i)}_{x^0}(x^0, x; D_x)\in C^{\infty}(0, X^0], \underset{=}{S}^r)$ *et a pour symbole* $\varepsilon^{(i)}_{x^0}(x^0, x; l)$.

Démonstration: Quel que soit s réel, $C_0^{\infty}(R^n)$ est dense dans H^s et d'après [9], il existe une constante c_s positive et indépendante de $x^0\in[0, X^0]$ telle que

$$\|\varepsilon(x^0, x; D_x)u\|_{s-r}\leqslant C_s\|u\|_s \text{ pour tout } u\in C_0^{\infty}(R^n). \tag{2.6}$$

Enfin si on désigne par $\varepsilon^{(i)}_{x^0}(x^0, x; D_x)$ l'opérateur de $C^{\infty}([0, X^0], S^r)$ de symbole $\varepsilon^{(i)}_{x^0}(x^0, x; l)\in C^{\infty}([0, X^0], S^r)$ on a:

$$\begin{aligned}&\|\varepsilon(x^0+\Delta x^0, \cdot, D_x)u-\varepsilon(x^0, \cdot, D_x)u-\Delta x^0\varepsilon^{(1)}_{x^0}(x^0, \cdot, D_x)u\|_s\\ &\quad\leqslant|\Delta x^0|\times|0(\Delta x^0)|\times\|u\|_{s+r}\end{aligned}$$

Cette dernière inégalité se démontre facilement dans le cas où s est un entier positif ou nul car on a alors ([9])

$$\|\varepsilon(x^0, \cdots, D_x)u\|_s\leqslant C_{r,s}\max_{i+j=n+2}\{|\varepsilon(x^0)|_{i+s,j}\}\times\|u\|_{s+r}$$

pour tout $\varepsilon\in C^{\infty}([0, X^0], \underset{=}{S}^r)$, et par conséquent

$$\begin{aligned}&\|\varepsilon(x^0+\Delta x^0, \cdot, D_x)u-\varepsilon(x^0, \cdot, D_x)u-(\Delta x^0)\varepsilon^{(1)}_{x^0}(x^0, x; D_x)u\|_s\\ &\quad\leqslant C_{r,s}\max_{i+j=n+2}\{|\varepsilon(x^0+\Delta x)-\varepsilon(x^0)-(\Delta x^0)\varepsilon^{(1)}_{x^0}(x^0)|_{i+s,j}\}\times\|u\|_{s+r}\end{aligned}$$

d'où le résultat d'après la définition de $C^{\infty}([0, X^0], S^r)$.

Si $s\notin N$, la démonstration est plus compliquée et fait appel à d'autres propriétés (cf. Théorèmes (2.2) et (2.3) de [9]).

Etant donné un entier θ positif ou nul, soit

$$\begin{aligned}C^{\theta}([0, X^0], H^{+\infty})=\{y:\Omega\longrightarrow \boldsymbol{C}/&\text{l'application } x^0\longmapsto y(x^0, \cdot)\\ &\text{soit } \theta \text{ fois continument dérivable de } [0, X^0] \text{ dans } H^{\infty}\}\\ C^{\theta}([0, X^0], H^{-\infty})=\{y:\Omega\longrightarrow \boldsymbol{C}/&\text{l'application } x^0\longmapsto y(x^0, \cdot)\\ &\text{soit } \theta \text{ fois continument dérivable de } [0, X^0] \text{ dans } H^{-\infty}\}\end{aligned}$$

Alors $C^{\theta}([0, X^0], H^{+\infty})=\bigcap_{r\in \boldsymbol{R}} C^{\theta}([0, X^0], H^r)$ avec la topologie définie par les semi normes $\|y\|_r{}^\theta = \sup\limits_{0\leqslant j\leqslant\theta}\ \sup\limits_{[0,X^0]} \|D^j_{x^0}y(x^0,\cdot)\|_r$ on a aussi $C^\theta([0, X^0], H^{-\infty}) = \underset{\overrightarrow{r\in \boldsymbol{R}}}{\bigcup} C^\theta([0, X^0], H^r)$ muni de la topologie limite inductive qui en fait un espace de Silva [12].

Propiété 3. *Tout $\varepsilon(x^0, x;\ D_x)\in C^\infty([0, X^0], \underline{S}^r)$ opère continument sur $C^\theta([0, X^0], H^{-\infty})$ comme un opérateur d'ordre r, c'est-à-dire que l'on a:*

$$\begin{tikzcd}
C^\theta([0, X^0], H^{+\infty}) \arrow[r, hook, "\theta_j s'"] \arrow[d, "\varepsilon"'] \arrow[dr, phantom, "\subset"] & C^\theta([0, X^0], H^{s'}) \arrow[r, hook, "\theta_{i_s}, s"] \arrow[d, "\varepsilon"'] \arrow[dr, phantom, "\subset"] & C^\theta([0, X^0], H^{s}) \arrow[r, hook, "\theta_{i_s}"] \arrow[d, "\varepsilon"'] \arrow[dr, phantom, "\subset"] & C^\theta([0, X^0], H^{-\infty}) \arrow[d, "\varepsilon"'] \\
C^\theta([0, X^0], H^{+\infty}) \arrow[r, hook] & C^\theta([0, X^0], H^{s'-r}) \arrow[r, hook] & C^\theta([0, X^0], H^{s-r}) \arrow[r, hook] & C^\theta([0, X^0], H^{-\infty})
\end{tikzcd}$$

On note $\varepsilon(x^0, x;\ D_x)\in L^r(C^\theta([0, X^0], H^{-\infty}),\ C^\theta([0, X^0], H^{-\infty}))$.

Démonstration: Pour tout $y\in C_0{}^\infty(\Omega)$ on a:

$$\varepsilon(x^0, x;\ D_x)y(x^0, x) = \int_{R^n} e^{i\langle x, l\rangle}\varepsilon(x^0, x;\ l)\hat{y}(x^0, l)\frac{dl}{(2\pi)^n} \in C^\infty([0, X^0], S)$$

$$D_{x^0}(\varepsilon y) = (D_{x^0}\varepsilon)y + \varepsilon(D_{x^0}y). \tag{2.7}$$

et d'après les relations (2.6) et (2.7) on peut trouver une constante positive $C_{s,\theta}$ telle que:

$$\|\varepsilon y\|^\theta_{s-r} \leqslant C_{s,\theta}\|y\|_s{}^\theta \text{ pour tout } y\in C_0{}^\infty(\Omega).$$

D'où le résultat, $C_0{}^\infty$ (Ω) étant dense dans $C^\theta([0, X^0), H^s)$

$$\boxed{C^\infty([0, X^0], L^{-\infty}) = C^\infty([0, X^0], L(H^{-\infty}, H^{+\infty}))}$$

est l'espace des applications indéfiniment dérivables de $[0, X^0]$ dans l'e.v.t.l.c. $L(H^{-\infty}, H^{+\infty})$ des applications linéaires continues de L de $H^{-\infty}$ dans $H^{+\infty}$ avec la topologie engendrée par les semi normes $\|L\|^{s_2}_{s_1} = \sup\limits_{\|u\|_{s_1}\leqslant 1} \|Lu\|_{s_2}$ (s_1 et $s_2\in R$)

Propiété 4. *Soit $g\in C^\infty([0, X^0], L^{-\infty})$.*

Quel que soit $i\in \boldsymbol{N}$, la dérivée $i^{\grave{e}me}$ de g par rapport à x^0, $g^{(i)}_{x^0}$ admet un noyau $G_i(x^0, x; x')$, fonction de $[0, X^0]$ à valeurs dans $B^\infty(R^n\times R^n)$ [9].

Quel que soit $\theta\in \boldsymbol{N}$, g opère continument de $C^\theta([0, X^0], H^{-\infty})$ dans $C^\theta([0, X^0], H^{-\infty})$ comme un opérateur d'ordre $-\infty$ ($\langle=\rangle$ de tout ordre $r\in\boldsymbol{R}$) c'est-à-dire que l'on a le diagramme:

$$\begin{tikzcd}
C^\theta([0,X^0], H^{+\infty}) \arrow[r, hook] \arrow[d, "g"] \arrow[dr, phantom, "\subset"] & C^\theta([0,X^0], H^{s'}) \arrow[r, hook] \arrow[d, "g"] \arrow[dr, phantom, "\subset"] & C^\theta([0,X^0], H^{s}) \arrow[r, hook] \arrow[d, "g"] \arrow[dr, phantom, "\subset"] & C^\theta([0,X^0], H^{-\infty}) \arrow[d, "g"] & \\
C^\theta([0,X^0], H^{+\infty}) \arrow[r, hook, "="'] & C^\theta([0,X^0], H^{+\infty}) \arrow[r, hook, "="'] & C^\theta([0,X^0], H^{+\infty}) \arrow[r, hook, "="'] & C^\theta([0,X^0], H^{+\infty}) \arrow[r, hook] & C^\theta([0,X^0], H^{-\infty})
\end{tikzcd}$$

Démonstration:

$$\|(gy)(x^0+\Delta x^0,.)-(gy)(x^0,.)-(\Delta x^0)[(g^{(1)}_{x^0}y)(x^0,.)+(gy^{(1)}_{x^0})(x^0,.)]\|_{s_2}$$
$$\leqslant \|g(x^0+\Delta x^0)\|^{s_2}_{s_1}\times\|y(x^0+\Delta x^0,.)-y(x^0,.)-(\Delta x^0)\times y^{(1)}_{x^0}(x^0,.)\|_{s_1}$$
$$+|\Delta x^0|\times\|g(x^0+\Delta x^0)-g(x^0)\|^{s_2}_{s_1}\times\|y^{(1)}_{x^0}(x^0,.)\|_{s_1}$$
$$+\|g(x^0+\Delta x^0)-g(x^0)-(\Delta x^0)g^{(1)}_{x^0}(x^0)\|^{s_2}_{s_1}\times\|y(x^0,.)\|_{s_1}.$$

Donc g est continue de $C^1([0, X^0], H^{-\infty})$ dans $C^1[(0, X^0], H^{+\infty})$. Par récurrence sur θ, on obtient le résultat général et de plus: on a la formule usuelle

$$\partial^{\theta}_{x^0}(gy)=\sum_{\alpha=0}^{\theta} C_{\theta}{}^{\alpha} g^{(\alpha)}_{x^0} y^{(\theta-\alpha)}_{x^0}$$

Propriété 5. [9]. *Soit* $C^{\infty}([0, X^0], \underset{\sim}{S}^{-\infty})=\bigcap_{r\in \boldsymbol{R}} C^{\infty}([0, X^0], \underset{\sim}{S}^r)$

On a

$$C^{\infty}([0, X^0], \underset{\sim}{S}^{-\infty})\underset{\neq}{\subset} C^{\infty}([0, X^0], L^{-\infty})$$
$$C^{\infty}([0, X^0], \underset{\sim}{S}^{-\infty})=C^{\infty}([0, X^0], L^{-\infty})\cap C^{\infty}([0, X^0], \underset{\sim}{S}^r)$$

(*tout* $r\in \boldsymbol{R}$).

$$\boxed{C^{\infty}([0,X^0], L^r)=C^{\infty}([0,X^0], \underset{\sim}{S}^r)+C^{\infty}([0,X^0], L^{-\infty})\subset C^{\infty}([0,X^0], L^r(H^{-\infty},H^{-\infty}))}$$

est l'espace des opérateurs de la forme: $\lambda(x^0, x; D_x)=\varepsilon(x^0, x; D_x)+g(x^0)$ avec $\varepsilon(x^0, x; D_x)\in C^{\infty}([0, X^0], \underset{\sim}{S}^r)$ et $g(x^0)\in C^{\infty}([0, X^0], L^{-\infty})$.

Le symbole $\varepsilon(x^0, x; l)\in C^{\infty}([0, X^0], S^r)$ de $\varepsilon(x^0, x; D_x)$ est appelé aussi symbole de $\lambda(x^0, x; D_x)$.

Propriété 6. *Soit* $\lambda=\varepsilon+g\in C^{\infty}([0, X^0], L^r)$

(*i*) *Son symbole* $\varepsilon(x^0, x; l)$ *est unique modulo* $C^{\infty}([0, X^0], S^{-\infty})$ *et pour tout entier* θ, λ *opêre continument de* $C^{\theta}([0, X^0], H^{-\infty})$ *dans lui-même comme un opèrateur d'ordre* r.

(*ii*) λ *admet un adjoint* $\lambda^*\in C^{\infty}([0, X^0], L^r)$ *au sens suivant* $(\lambda u, v)_{L^2}=(u, \lambda^* v)_{L^2}$ *pour tout* $u\in C_0^{\infty}(R^n)$ *et* $v\in C_0^{\infty}(R^n)$; λ^* *a un symbole* $\varepsilon^*(x^0, x; l)\in C^{\infty}([0, X^0], S^r)$ *tel que*:

$$\text{(2.8)}\qquad \forall N \text{ entier, } \varepsilon^*(x^0, x; l)-\sum_{j=0}^{N-1}\varepsilon^*_j(x^0, x; l)\in C^{\infty}([0, X^0], S^{r-N})$$

$$\text{(2.9)}\qquad \text{avec } \varepsilon^*_j(x^0, x; l)=\sum_{|\alpha|=j}\frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{\alpha}}\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial l}\right)^{\alpha}\overline{\varepsilon(x^0, x; l)}\in C^{\infty}([0, X^0], S^{r-j})$$

on a aussi $(\lambda^*)^{(i)}_{x^0}=(\lambda^{(i)}_{x^0})^*$ *pour tout* $i\in N$.

Soient $\lambda_1\in C^{\infty}([0, X^0], L^{r_1})$ *et* $\lambda_2\in C^{\infty}([0, X^0], L^{r_2})$ *de symboles respectifs* $\varepsilon_1(x^0, x; l)$ *et* $\varepsilon_2(x^0, x; l)$.

(*iii*) *Alors* $\lambda_1\cdot\lambda_2\in C^{\infty}([0, X^0], L^{r_1+r_2})$ *et a un symbole* $\mu(x^0, x; l)$

$$\text{(2.10)}\qquad \text{tel que } \forall N \text{ entier, } \mu(x^0, x; l)-\sum_{j=0}^{N-1}\mu_j(x^0, x; l)\in C^{\infty}([0, X^0], S^{r_1+r_2-N})$$

$$(2.11)\qquad \text{avec } \mu_j(x^0, x;\, l)=\sum_{|\alpha|=j}\frac{1}{\alpha!}\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial l}\right)^{\alpha}\varepsilon_1(x^0, x;\, l)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha}\varepsilon_2(x^0, x;\, l)$$

appartenant à $C^\infty([0, X^0], S^{r_1+r_2-j})$.

On a de plus: $(\lambda_1\cdot\lambda_2)^{(1)}_{x^0}=(\lambda_1)^{(1)}_{x^0}\cdot\lambda_2+\lambda_1\cdot(\lambda_2)^{(1)}_{x^0}$.

La démonstration de cette propriété résulte de celle de [9] (théorème 1.2 p. 417). En particulier: l'inégalité

$$|(\lambda u, v)_{L^2}|\leqslant\|\lambda u\|_s\times\|v\|_{-s}\leqslant\|\lambda\|^s_{s+r}\times\|u\|_{s+r}\times\|v\|_{-s}$$

pour tout $u\in H^{s+r}$ et $v\in H^{-s}$ entraine

$$\|\lambda^*(x^0)\|^{-s-r}_{-s}=\|\lambda(x^0)\|^s_{s+r}$$

(tout $s\in\boldsymbol{R}$) et par la suite $(\lambda^*)^{(i)}_{x^0}=(\lambda^{(i)}_{x^0})^*$ pour tout $i\in\boldsymbol{N}$.

On a aussi:

$$\begin{aligned}&\|\lambda_1\cdot\lambda_2(x^0+\Delta x^0)-\lambda_1\cdot\lambda_2(x^0)-(\Delta x^0)[\lambda_1{}^{(1)}\cdot\lambda_2(x^0)+\lambda_1\cdot\lambda_2{}^{(1)}(x^0)\|^s_{s+r_1+r_2}\\ &\quad\leqslant\|\lambda_1(x^0+\Delta x^0)\|^s_{s+r_1}\times\|\lambda_2(x^0+\Delta x^0)-\lambda_2(x^0)-(\Delta x^0)\lambda_2{}^{(1)}(x^0)\|^{s+r_1}_{s+r_1+r_2}\\ &\quad+\|\lambda_1(x^0+\Delta x^0)-\lambda_1(x^0)-(\Delta x^0)\lambda_1{}^{(1)}(x^0)\|^s_{s+r_1}\times\|\lambda_2(x^0)\|^{s+r_1}_{s+r_1+r_2}\end{aligned}$$

qui entraine l'égalité: $(\lambda_1\cdot\lambda_2)^{(1)}_{x^0}=(\lambda_1)^{(1)}_{x^0}\cdot\lambda_2+\lambda_1\cdot(\lambda_2)^{(1)}_{x^0}$.

Toutes ces définitions et ces propriétés se généralisent aux opérateurs matriciels m×m. On note alors les espaces d'opérateurs matriciels correspondants respectivement: $C^\infty([0,X^0], S_m{}^r)$, $C^\infty([0,X^0], \underline{S}_m{}^r)$, $C^\infty([0,X^0], L_m{}^{-\infty})$, $C^\infty[(0, X^0], L_m{}^r)$ et les propriétés résultantes se résument par la:

Propriété 7.

(*i*) $\lambda=\varepsilon+g\in C^\infty([0, X^0], L_m{}^r)$ $(\varepsilon\in C^\infty([0, X^0], \underline{S}_m{}^r)$ *et* $g\in C^\infty([0, X^0], L_m{}^{-\infty}))$ *est une matrice* $m\times m$ *d'éléments* $\lambda_j{}^i=\varepsilon_j{}^i+g_j{}^i\in C^\infty([0,X^0],L^r)$ $(\varepsilon_j{}^i\in C^\infty([0, X^0], S^r)$ *et* $g_j{}^i\in C^\infty([0, X^0], L^{-\infty}))$; *son symbole* $\varepsilon(x^0, x;\, l)\in C^\infty([0, X_0], \underline{S}_m{}^r)$, *matrice d'éléments* $\varepsilon_j{}^i(x^0, x;\, l)\in C^\infty([0, X^0], S^r)$ *est unique modulo* $C^\infty([0, X^0], S_m{}^{-\infty})$; λ *opère continument de* $C^\theta[(0, X^0], (H^{-\infty})^m)$ *dans lui-même comme un opêrateur d'ordre* r (*quel que soit* $\theta\in\boldsymbol{N}$).

(*ii*) λ *admet un adjoint* $\lambda^*\in C^\infty([0,X^0], L_m{}^r)$ *au sens suivant* $(\lambda u, v)_{[L^2(R^n)]^m}=(u, \lambda^* v)_{[L^2(R^n)]^m}$ *pour tout* u *et* $v\in[C_0{}^\infty(R^n)]^m$.

λ^* *admet un symbole* $\varepsilon^*(x^0, x;\, l)\in C^\infty([0, X^0], S_m{}^r)$ *tel que*:

$$(2.12)\qquad {}^\forall N \text{ entier},\ \varepsilon^*(x^0, x;\, l)-\sum_{j=0}^{N-1}\varepsilon^*_j(x^0, x;\, l)\in C^\infty([0, X^0], S_m{}^{r-N}) \text{ avec}$$

$$(2.13)\qquad \varepsilon^*_j(x^0, x;\, l)=\sum_{|\alpha|=j}\frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial l}\right)^{\alpha}\overline{\varepsilon^T(x^0, x;\, l)}\in C^\infty([0, X_0], S_m{}^{r-j})$$

où $\varepsilon^T(x^0, x;\, l)$ *designe la transposée de la matrice* $\varepsilon(x^0, x;\, l)$.

De plus $(\lambda^*)^{(i)}_{x^0}=(\lambda^{(i)}_{x^0})^*$ *pour tout* $i\in\boldsymbol{N}$.

Soient $\lambda_1\in C^\infty([0, X^0], L_m{}^{r_1})$ *et* $\lambda_2\in C^\infty([0, X^0], L_m{}^{r_2})$ *de symboles* ε_1 *et* ε_2.

(*iii*) *Alors* $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \in C^\infty([0, X^0], L_m{}^{r_1+r_2})$ *a un symbole* $\mu(x^0, x; l)$

(2.14) *tel que* $^\forall N$ *entier,* $\mu(x^0,x;l)-\sum_{j=0}^{N-1}\mu_j(x^0,x;l)\in C^\infty([0,X^0],S_m{}^{r_1+r_2-N})$ *avec*

(2.15) $$\mu_j(x^0,x;l)=\sum_{|\alpha|=j}\frac{1}{\alpha!}\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial l}\right)^\alpha \varepsilon_1(x^0,x;l)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \varepsilon_2(x^0,x;l)\in C^\infty([0,X^0],S_m^{r_1+r_2-j})$$

De plus $(\lambda_1 \cdot \lambda_2)^{(1)}_{x^0}=(\lambda_1)^{(1)}_{x^0}\cdot\lambda_2+\lambda_1\cdot(\lambda_2)^{(1)}_{x^0}$.

(*iv*) *Si* $\lambda_1 \in C^\infty([0, X^0], L^{r_1})$ *et* $\lambda_2 \in C^\infty([0, X^0], L_m{}^{r_2})$ *alors le commutateur* $[\lambda_1, \lambda_2]=\lambda_1\cdot\lambda_2-\lambda_2\cdot\lambda_1\in C^\infty([0, X^0], L_m{}^{r_1+r_2-1})$.

$$\boxed{C^\infty([0, X^0], L'^r_m)}$$

est le sous-espace des opérateurs $\lambda_r(x^0, x; D_x)$ de $C^\infty([0, X^0], L_m{}^r)$ ayant un symbole $\varepsilon_r(x^0,x;l)\in C^\infty([0,X^0],S_m{}^r)$ développable en sous-symboles $\varepsilon_{r,j}(x^0,x;l)\in C^\infty([0, X^0], S_m{}^{r-j})$ homogènes de degré $r-j$ par rapport à l pour $|l|\geqslant 1$ au sens suivant

(2.16) $$^\forall N \text{ entier, } \varepsilon_r(x^0, x; l)-\sum_{j=0}^{N-1}\varepsilon_{r,j}(x^0, x; l)\in C^\infty([0, X^0], S_m{}^{r-N}).$$

On note $C^\infty([0, X^0], S'^r_m)$l'espace de symboles correspondants; de même $C^\infty([0, X^0], \underline{S}'^r_m)$ est le sous-espace de $C^\infty([0, X^0], \underline{S}_m{}^r)$ tels que les symboles appartiennent à $C^\infty([0, X^0], S'^r_m)$.

On démontre aisément la propriété suivante, résultant de la propriété 7:

Propriété 8.

(*i*) *Les sous-symboles* $\varepsilon_{r,j}(x^0, x; l)$ *sont uniques pour* $|l|\geqslant 1$.

(*ii*) $C^\infty([0,X^0], L'^r_m)$ *est fermé pour la dérivation par rapport à* $x^0\in[0,X^0]$ *et le passage à l'adjoint.*

(*iii*) *Si* $\lambda_1\in C^\infty([0, X^0], L'^{r_1}_m)$ *et* $\lambda_2\in C^\infty([0, X^0], L'^{r_2}_m)$ *alors* $\lambda_1\cdot\lambda_2\in C^\infty([0, X^0], L'^{r_1+r_2}_m)$.

Soit $\theta\in \boldsymbol{N}$ on appelle

$$\boxed{O'^\theta_m(\Omega)}$$

l'espace des opérateurs $p(x^0, x; D_{x^0}, D_x)$ de la forme

$$p(x^0, x; D_{x^0}, D_x)=\sum_{i=0}^{\theta}\lambda_{\theta-i}(x^0, x; D_x)D^i_{x^0} \text{ où } \lambda_{\theta-i}(x^0, x; D_x)$$

appartient à $C^\infty([0, X^0], L'^{\theta-i}_m)$.

Propriété 9. *Soit* $p(x^0, x; D_{x^0}, D_x)=\sum_{i=0}^{\theta}\lambda_{\theta-i}(x_0, x; D_x)D^i_{x^0}\in O'^\theta_m(\Omega)$.

(*i*) *Pour tout* $\theta'\in \boldsymbol{N}$, p *agit continument de* $C^{\theta+\theta'}([0, X^0], (H^{-\infty})^m)$ *dans* $C^{\theta'}([0, X^0], (H^{-\infty})^m)$ *et on a:*

$$\begin{tikzcd}
C^{\theta+\theta'}([0,X^0],(H^{+\infty})^m) \arrow[r, hook] \arrow[d, "p"] \arrow[dr, phantom, "\subset"] & C^{\theta+\theta'}([0,X^0],(H^{s'})^m) \arrow[r, hook] \arrow[d, "p"] \arrow[dr, phantom, "\subset"] & C^{\theta+\theta'}([0,X^0],(H^{s})^m) \arrow[r, hook] \arrow[d, "p"] \arrow[dr, phantom, "\subset"] & C^{\theta+\theta'}([0,X^0],(H^{-\infty})^m) \arrow[d, "p"] \\
C^{\theta'}([0,X^0],(H^{+\infty})^m) \arrow[r] & C^{\theta'}([0,X^0],(H^{s'-\theta})^m) \arrow[r] & C^{\theta}([0,X^0],(H^{s-\theta})^m) \arrow[r] & C^{\theta'}([0,X^0],(H^{-\infty})^m)
\end{tikzcd}$$

(*ii*) *p admet un adjoint $p^*(x^0, x; D_{x^0}, D_x)=\sum_{i=0}^{\theta} D_{x^0}^i\cdot\lambda_{\theta-i}^*(x^0, x; D_x)$ au sens suivant*: $(py, z)_{[L^2(R^{n+1})]^m}=(y, p^*z)_{[L^2(R^{n+1})]^m}$ *pour tout y et z appartenant à* $[C_0^\infty(\mathring{\Omega})]^m$, *les opérateurs $\lambda_{\theta-i}^*(x^0, x; D_x)$ étant définis par la propriété 7*

$$p^*(x^0, x; D_{x^0}, D_x)\in O_m'^{\theta}(\Omega).$$

(*iii*) *Si $p_1\in O_m'^{\theta_1}(\Omega)$ et $p_2\in O_m'^{\theta_2}(\Omega)$ alors $p_1\cdot p_2\in O_m'^{\theta_1+\theta_2}(\Omega)$.*

La démonstration de cette propriété résulte de façon évidente des propriétés 7 et 8 et de la relation de commutation:

$$[D_{x^0}, \lambda(x^0, x; D_x)]=\frac{1}{i}\lambda_{x^0}^{(1)}(x^0, x; D_x) \text{ pour tout } \lambda\in C^\infty([0, X^0], L_m{}^r).$$

On a $O_m{}^\theta(\Omega)\subset O_m'^{\theta}(\Omega)$. On pose $O_1{}'^{\theta}(\Omega)=O'^{\theta}(\Omega)$.
De même si on pose $O_m'(\Omega)=\bigcup_{\theta\in N} O_m'^{\theta}(\Omega)$, alors $O_m(\Omega)\subset O_m'(\Omega)$.

On dira que $p=\sum_{i=0}^{\theta}\lambda_{\theta-i}(x^0, x; D_x)D_{x^0}^i\in O_m'^{\theta}(\Omega)$ est unitaire si $\lambda_0(x^0, x; D_x)=I_m$. Soient p et q appartenant à $O_m'(\Omega)$; p est dit congru à q modulo θ dans $O_m'(\Omega)$ et on écrit $p\underset{\theta}{\sim}q$ si $p-q\in O_m'^{\theta-1}(\Omega)(\theta\in N^*)$. Pour des commodités de rédaction, on écrira aussi $p\underset{0}{\sim}q$ lorsque $p=q$. Appelons symbole principal homogène (pour $|l|\geqslant 1$) de l'opérateur $p(x^0, x; D_{x^0}, D_x)=\sum_{i=0}^{\theta}\lambda_{\theta-i}(x^0, x; D_x)D_{x^0}^i\in O_m'^{\theta}(\Omega)$ l'expression $\sigma(p)=P(x^0, x; l^0, l)=\sum_{i=0}^{\theta}\varepsilon_{\theta-i,0}(x^0, x; l)l_0{}^i$, polynôme de $R[l_0]$ de degré θ pour $(x_0, x; l)$ fixé dans $\Omega\times R^n$, à coefficients appartenant à $C^\infty([0, X^0], S_m{}^\theta)$.

On déduit alors aisément des propriétés précédentes la

Propriété 10.

(*i*) *Pour p fixé dans $O_m'^{\theta}(\Omega)$, $\sigma(p)$ est homogene de degre θ par rapport à (l_0, l) pour $|l|\geqslant 1$ et unique pour $|l|\geqslant 1$.*

(*ii*) *Soient $p_1\in O_m'^{\theta_1}(\Omega)$ et $p_2\in O_m'^{\theta_2}(\Omega)$, on a*:

$$\sigma(p_1\cdot p_2)=\sigma(p_1)\times\sigma(p_2) \textit{ pour } |l|\geqslant 1.$$

(*iii*) *Soit $p=\sum_{i=0}^{\theta}\lambda_{\theta-i}D_{x^0}^i$ et $q=\sum_{i=1}^{\theta}\mu_{\theta-i}D_{x^0}^i$ appartenant à $O_m'^{\theta}(\Omega)$ alors $p\underset{\theta}{\sim}q\langle=\rangle\sigma(p)=\sigma(q)$ pour $|l|\geqslant 1$ et $\lambda_0=\mu_0$.*

(*iv*) *Si $p\in O_m'^{\theta}(\Omega)$ et $q\in O'^{\theta'}(\Omega)$, leur commutateur $[p, q]=pq-qp\in O_m'^{\theta+\theta'-1}(\Omega)$ si et seulement si $[\lambda_0, \mu_0]=0$ (par exemple si p ou q est unitaire).*

3. La condition de bonne décomposition dans $O'_m(\Omega)$ pour les opérateurs $k'(x^0,x;D_{x^0},D_x)$ de $O_m(\Omega)$ de symbole principal $K'(x^0,x;l_0,l)=(H'_1)^{q^1}\cdots(H'_\sigma)^{q^\sigma}(x^0,x;l_0,l)I_m(*)$.

(*) On pose $H'_s(x^0, x; l_0, l)=\dfrac{H_s(x^0, x; l_0, l)}{H_s(x^0, x; 1, 0)}$ $(s=1, \cdots, \sigma)$.

Considéré comme opérateur de $O'_m(\Omega)$, supposons que $k'(x^0, x; D_{x^0}, D_x)$ ait un symbole principal $\sigma(k')$ de la forme:

$$\sigma(k')=(K'_1)^{r^1}\cdots(K'_\mu)^{r^\mu}I_m$$

avec $K'_i(x^0, x; l_0, l)$ polynôme unitaire de degré θ_i dans $R[l_0]$, homogène par rapport à (l_0, l) pour $|l|\geqslant 1$, à coefficients appartenant à $C^\infty([0, X^0], S^{\theta_i})$ et homogènes par rapport à l pour $|l|\geqslant 1$, pour tout $i=1, \cdots, \mu$., tel que K'_i et K'_j soient premiers entre eux dans $R[l_0]$ pour $|l|\geqslant 1$ si $i\neq j$.

Remarquons que k' est unitaire et que $\sigma(k')=K'$ pour $|l|\geqslant 1$.

Fixons K'_0 un des facteurs $K'_i(1\leqslant i\leqslant\mu)$; on a

$$(K'_1)^{r^1}\times\cdots\times(K'_\mu)^{r^\mu}=E'_0\times(K'_0)^{r^0}$$

Soient $e'_0\in O'_m(\Omega)$ et $k'_0\in O'_1(\Omega)$ de symboles principaux respectivement $E'_0\times I_m$ et K'_0 et unitaires, alors

$$k'\underset{\tau}{\sim}e'_0(k'_0)^{\beta'_0=r^0}\quad\text{(propriété 10. iii)}$$

Et $\gamma'_1=k'-e'_0(k'_0)^{\beta'_0}\in O'^{\tau-1}_m(\Omega)$.

Si $\gamma'_1\notin O'^{\tau-2}_m(\Omega)$ on a: $\gamma'_1=\lambda_0{}^1(x^0, x; D_x)D_{x^0}^{\tau-1}+\sum_{i=1}^{\tau-1}\lambda_i{}^1D_{x^0}^{\tau-1-i}$ et γ'_1 admet un symbole principal $\Gamma'_1=\sum_{i=0}^{\tau-1}\varepsilon^1_{i,0}(x^0, x; l)l_0{}^{\tau-1-i}$ homogène de degré $\tau-1$ par rapport à (l_0, l) pour $|l|\geqslant 1$.

Appelons β'_1 le minimum des multiplicités de K'_0 dans chacun des m^2 éléments de la matrice Γ'_1 dans $R[l_0]$ et lorsque $(x^0, x; l)$ varie dans $\Omega\times$sphère unité de $R^n(\beta'_1=0$ si et seulement si il existe $(x^0_0, x_0)\in\Omega$ et $l^0(|l^0|=1)$ et un élément $\Gamma'^{i_0}_{1j_0}$ tel que $\Gamma'^{i_0}_{1j_0}(x^0_0, x_0; l_0, l^0)$ ne soit pas divisible par $K'_0(x^0_0, x_0; l_0, l^0))$.

En faisant la division suivant les puissances décroissantes dans $R[l_0]$ de Γ'_1 par K'_0 pour chaque $(x^0, x; l)\in\Omega\times R^n$, on met Γ'_1 sous la forme:

$$\Gamma'_1=E'_1\times(K'_0)^{\beta'_1}+\sum_{i=1}^{\beta'_1}E_1{}^i\times(K'_0)^{\beta'_1-i}$$

et on a $\Gamma'_1=E'_1\times(K'_0)^{\beta'_1}$ si $|l|\geqslant 1$.

De plus E'_1 est un polynôme en l_0, homogène de degré $\tau-1-\beta'_1\theta_0$ par rapport à (l_0, l) pour $|l|\geqslant 1$, à coefficients appartenant à $C^\infty([0, X^0], S_m^{\tau-1-\beta'_1\theta_0})$ homogène par rapport à l pour $|l|\geqslant 1$., et il existe par conséquent $e'_1\in O'_m(\Omega)$ de symbole principal $E'_1(x^0, x; l_0, l)$ (pour $|l|\geqslant 1$) de la forme:

$$e'_1=\lambda_0{}^1(x^0, x; D_x)D_{x^0}^{\tau-1-\beta'_1\theta_0}+\sum_{i=1}^{\tau-1-\beta'_1\theta_0}\mu_i{}^1(x^0, x; D_x)D_{x^0}^{\tau-1-\beta'_1\theta_0-i}$$

D'ou $k'\underset{\tau-1}{\sim}e'_0(k'_0)^{\beta'_0}+e'_1(k'_0)^{\beta'_i}$.

Si $\gamma'_1\in O'^{\tau-2}_m$, on prend $e'_1=0$ et β'_1 aussi grand que l'on veut et l'équivalence précédente est encore valable.

Après un nombre fini de telles opérations on a dans $O'_m(\Omega)$:

$$(2.17)\qquad \left\{\begin{array}{ll} & k'=\sum_{i=0}^{\tau} e'_i(k'_0)^{\beta'_i} \\ \text{avec} & \\ & k\underset{\tau-i}{\sim}\sum_{j=0}^{i} e'_j(k'_0)^{\beta'_j} \quad \text{pour tout } i=0, \cdots, \tau. \end{array}\right.$$

Définition 5. Une telle expression (2.17) est appelée une décomposition de k' par rapport au facteur K'_0 dans $O'_m(\Omega)$.

Remarque. Comme dans $O_m(\Omega)$, il n'y a pas de manière canonique pour effectuer la décomposition de k' par rapport à K'_0 dans $O'_m(\Omega)$ et les nombres $\beta'_0, \cdots, \beta'_\tau$ peuvent varier suivant le choix de $e'_0, \cdots, e'_\tau$.

Définition 6. Une décomposition de k' par rapport à K'_0 dans $O'_m(\Omega)$ est une bonne décomposition si $\beta'_r\geqslant\beta'_0-$r pour tout $r=0, \cdots, \tau$. On dit alors que k' est bien décomposable par rapport à K'_0 dans $O'_m(\Omega)$.

Proposition 5. *Si k' possède une bonne décomposition par rapport à K'_0 dans $O'_m(\Omega)$, toute autre décomposition de k' par rapport à K'_0 dans $O'_m(\Omega)$ est une bonne décomposition.*

Démonstration: En modifiant éventuellement les opérateurs e'_j on peut écrire la bonne décomposition sous la forme:

$$k'=e'_0(k'_0)^{\beta'_0}+e'_1(k'_0)^{\beta'_0-1}+\cdots+e'_j(k'_0)^{\beta'_0-j}+\cdots+e'_{\beta'_0}$$

Considérons une seconde décomposition de k' par rapport à K'_0:

$$k'=\sum_{j=0}^{\tau}\tilde{e}'_j(\tilde{k}'_0)^{\tilde{\beta}'_j}$$

on a $e'_0(k'_0)^{\beta'_0}\underset{\tau}{\sim}\tilde{e}'_0(\tilde{k}'_0)^{\tilde{\beta}'_0}$ et d'après la propriété 10 il y a égalité des symboles principaux pour $|l|\geqslant 1$ d'où:

$$\tilde{E}'_0\times(K'_0)^{\tilde{\beta}'_0}=E'_0\times(K'_0)^{\beta'_0} \text{ pour } |l|\geqslant 1.$$

D'où $\tilde{\beta}'_0=\beta'_0=r^0=$multiplicité de K'_0 dans $\sigma(k')$.

Montrons que pour tout j, $\tilde{\beta}'_j\geqslant\beta'_0-j$.

Pour $j=0$, l'inégalité est démontrée; supposons la prouvée pour $0, \cdots, j-1$ et démontrons la pour j: si $j\geqslant\beta_0$, elle est évidente; sinon, en modifiant éventu ellement les $\tilde{e}'_\rho$ pour $\rho\leqslant j-1$ on peut écrire

$$k' \underset{\tau-j}{\sim} \tilde{e}'_0(\tilde{k}'_0)^{\beta'_0} + \cdots + \tilde{e}'_{j-1}(k'_0)^{\beta'_0-j+1} + \tilde{e}'_j(\tilde{k}'_0)^{\tilde{\beta}'_j}$$

on a donc: $$\tilde{e}'_j(\tilde{k}'_0)^{\tilde{\beta}'_j} \underset{\tau-j}{\sim} \sum_{\rho=0}^{j} e'_\rho(k'_0)^{\beta'_0-\rho} - \sum_{\rho=0}^{j-1} \tilde{e}'_\rho(\tilde{k}'_0)^{\beta'_0-\rho} = q'_j$$

Grâce au

Lemme 1. [14] *θ_0 étant l'ordre de k'_0 et $n^\alpha_\beta = \alpha\theta_0 + (\beta-\alpha)$; si $\beta \leqslant \alpha$ il existe un opérateur $\lambda^\alpha_\beta \in O'_1(\Omega)$ tel que: $(\tilde{k}'_0)^\alpha \underset{n^\alpha_\beta}{\sim} \lambda^\alpha_\beta(\tilde{k}'_0)^\beta$.*

On montre qu'il existe un opérateur $\psi'_j \in O'_m(\Omega)$ tel que $q'_j \underset{\tau-j}{\sim} \psi'_j(\tilde{k}'_0)^{\beta'_0-j}$; on a bien alors le résultat $\tilde{\beta}_j \geqslant \beta'_0 - j$ puisque $\tilde{E}'_j \times (K'_0)^{\tilde{\beta}'_j} = \Phi'_j(K'_0)^{\beta'_0-j}$ et que K'_0 n'est plus en facteur dans $\tilde{E}'_j$ dans $R[l_0]$ en un point au moins de $\Omega \times$ sphère unité de R^n.

En utilisant la technique de démonstration de [14] (p. 250) on obtient les proposition suivantes:

Proposition 6. *k' est bien décomposable par rapport à chaque $K'_s (1 \leqslant s \leqslant \mu)$ dans $O'_m(\Omega)$ si et seulement si il existe des opérateurs $k'_1, \cdots, k'_\mu \in O'_1(\Omega)$ unitaires de symbole principal homogène pour $|l| \geqslant 1$ respectivement $K'_1, \cdots, K'_\mu$ et des opérateurs $e'_0, \cdots, e'_\tau \in O'_m(\Omega)$ tels que*

$$(2.18) \qquad \begin{cases} k' = \sum_{i=0}^{\tau} e'_i(k'_1)^{[r^1-i]_+} \cdots (k'_\mu)^{[r^\mu-i]_+} \\ \textit{avec} \\ k' \underset{\tau-i}{\sim} \sum_{j=0}^{i} e'_j(k'_1)^{[r^1-j]_+} \cdots (k'_\mu)^{[r^\mu-j]_+} \quad \textit{tout } i=0, \cdots, \tau. \end{cases}$$

Remarque. On peut choisir arbitrairement dans $O'_1(\Omega)$ les k'_s unitaires avec $\sigma(k'_s) = K'_s(|l| \geqslant 1)$.

Proposition 7. *Si k' possède une décomposition de la forme:*

$$(2.19) \qquad \begin{cases} k' = \sum_{i=0}^{\tau} e'_i k'_{\alpha^i_1} k'_{\alpha^i_2} \cdots k'_{\alpha^i_{u'_i}} \\ \textit{avec} \\ k' \underset{\tau-i}{\sim} \sum_{j=0}^{i} e'_j k'_{\alpha^j_1} k'_{\alpha^j_2} \cdots k'_{\alpha^j_{u'_j}} \quad \textit{tout } i=0, \cdots, \tau \end{cases}$$

ou $u'_j = \sum_{s=1}^{\mu} [r^s - j]_+ \ (0 \leqslant j \leqslant \tau)$.

α^j est une bijection:

$$[1, \cdots, u'_j] \longrightarrow [\underbrace{1, \cdots, 1}_{[r^1-j]_+ \text{ fois}}; \cdots; \underbrace{\mu, \cdots, \mu}_{[r^\mu-j]_+ \text{ fois}}]$$

$$\alpha^j(i) = \alpha^j_i$$

$k'_i \in O'_1(\Omega)$ est unitaire et a pour symbole principal $K'_i(|l| \geqslant 1)$ pour tout $i = 1, \cdots, \mu$.

$$e'_j \in O'_m(\Omega) \quad (0 \leqslant j \leqslant \tau)$$

alors k' est bien décomposable par rapport à chaque K'_i $(1 \leqslant i \leqslant \mu)$ dans $O'_m(\Omega)$.

Proposition 8. *Si k' possède une décomposition de la forme*

$$(2.20)\qquad \begin{cases} k'=\sum_{i=0}^{\tau} a_1^i k'_{\alpha_1^i} a_2^i k'_{\alpha_2^i} \cdots a_{u'_i}^i k'_{\alpha_{u'_i}^i} a_{u'_i+1}^i \\ \textit{avec} \\ k' \underset{\tau-i}{\sim} \sum_{j=0}^{i} a_1^j k'_{\alpha_1^j} a_2^j k'_{\alpha_2^j} \cdots a_{u'_j}^j k'_{\alpha_{u'_j}^j} a_{u'_j+1}^j \quad (\textit{tout } i=0, \cdots, \tau) \end{cases}$$

avec les mêmes hypothèses sur k'_i $(i=1, \cdots, \mu)$ et α^j $(j=0, \cdots, \tau)$ que dans la proposition 7 et les opérateurs a_s^j appartenant à $O'_m(\Omega)$ alors k' est bien décomposable par rapport à chaque K'_i $(1\leqslant i\leqslant\mu)$ dans $O'_m(\Omega)$.

Nous allons à présent formuler une décomposition particulière du type (2.19) des opérateurs k'.

4. Les opérateurs $k'(x^0, x; D_{x^0}, D_x)$ de $O_m(\Omega)$ de symbole principal $K'(x^0, x; l_0, l)=(H'_1)^{q'}\cdots(H'_\sigma)^{q^\sigma}(x^0, x; l_0, l)I_m$ et la condition C'.

$$H'_s(x^0, x; l)=\prod_{i=\tau_{s-1}+1}^{\tau_s}(l_0-p_0^i(x_0, x; l)) \quad (1\leqslant s\leqslant\sigma).$$

On pose

$$(H'_1)^{q^1}\cdots(H'_\sigma)^{q^\sigma}(x^0, x; l_0, l)=\pi_\tau(x^0, x; l_0, l)=\prod_{i=1}^{\tau_\sigma}(l_0-p_0{}^i(x^0, x; l))^{\lambda_i}.$$

On considère la suite finie $(s_i)_{1\leqslant i\leqslant\chi}$ strictement croissante à valeurs dans $[1, \cdots, \sigma]$ définie par: τ_{s_1} est le plus petit τ_s tel que $q^{s+1}<q^1, \cdots, \tau_{s_i}$ est le plus petit τ_s tel que $q^{s+1}<q^{s_{i-1}+1}$ $(2\leqslant i\leqslant\chi-2), \cdots, \tau_{s_{\chi-1}}$ est le plus petit τ_s tel que $q^{s+1}=q^\sigma$, $s_\chi=\sigma$.

On a: $\tau_{s_1}<\tau_{s_2}<\cdots<\tau_{s_{\chi-1}}<\tau_{s_\chi}=\tau_\sigma$, $q^{s_i}=\lambda_{\tau_{s_i}}$ $(1\leqslant i\leqslant\chi)$ et $\lambda=q^1=\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{\tau_{s_1}}=q^{s_1}>\lambda_{\tau_{s_1}+1}=\cdots=\lambda_{\tau_{s_2}}=q^{s_2}>\cdots>\lambda_{\tau_{s_{\chi-2}}+1}=\cdots=\lambda_{\tau_{s_{\chi-1}}}=q^{s_{\chi-1}}>\lambda_{\tau_{s_{\chi-1}}+1}=\cdots=\lambda_{\tau_{s_\chi}}$ on pose $\rho_i=\lambda_{\tau_{s_i}}-\lambda_{\tau_{s_i}+1}=q^{s_i}-q^{s_i+1}$ $(1\leqslant i\leqslant\chi-1)$, $\rho_\chi=q^\sigma$. On a $\tau=\sum_{i=1}^{\chi}\rho_i\tau_{s_i}$ et $\lambda=q^1=\sum_{i=1}^{\chi}\rho_i$.

Pour des commodités d'écriture on convient de poser aussi:

$$\tau_{s_{\chi+1}}=\tau_\sigma+1 \text{ et } \rho_{\chi+1}=0.$$

Soit $\psi\in C^\infty(R^n)$ qui vaut 0 pour $|l|\leqslant 1/2$ et 1 pour $|l|\geqslant 1$.
On considère les opérateurs de $O'_1(\Omega)$ suivants:

$$p_0{}^i(x^0, x; D_x)\in C^\infty([0, X^0], \underline{S}^1) \text{ de symbole}$$
$$p_0{}^i(x^0, x; l)\psi(l)\in C^\infty([0, X^0], S^1)$$
$$\partial_i=D_{x^0}-p_0{}^i(x^0, x; D_x) \quad (1\leqslant i\leqslant\tau_\sigma)$$
$$\delta_0=1,\ \delta_1=\partial_1,\ \delta_2=\partial_2\partial_1, \cdots, \delta_{\tau_{s_1}}=\partial_{\tau_{s_1}}\partial_{\tau_{s_1}-1}\cdots\partial_2\partial_1,\ \delta_{\tau_{s_1}+1}=\partial_1\delta_{\tau_{s_1}}, \cdots,$$
$$\delta_{\rho_1\tau_{s_1}}=(\delta_{\tau_{s_1}})^{\rho_1},\ \delta_{\rho_1\tau_{s_1}+1}=\partial_1\delta_{\rho_1\tau_{s_1}}, \cdots, \delta_{\rho_1\tau_{s_1}+\tau_{s_2}}=\partial_{\tau_{s_2}}\cdots\partial_1\delta_{\rho_1\tau_{s_1}}, \cdots,$$
$$\delta_{\rho_1\tau_{s_1}+\rho_2\tau_{s_2}}=\delta_{\rho_2\tau_{s_2}}\cdot\delta_{\rho_1\tau_{s_1}}, \cdots, \delta_{\rho_1\tau_{s_1}+\cdots+\rho_i\tau_{s_i}}=\delta_{\rho_i\tau_{s_i}}\cdots\delta_{\rho_1\tau_{s_1}}, \cdots,$$
$$\delta_\tau=\delta_{\rho_\chi\tau_{s_\chi}}\cdots\delta_{\rho_1\tau_{s_1}}=\bar{\omega}_\tau.$$

On a $k' \underset{\tau}{\sim} I_m \bar{\omega}_\tau$ dans $O'_m(\Omega)$ d'après la propriété 10.

En développant les δ_i $(1 \leqslant i \leqslant \tau-1)$, on calcule, par récurrence sur i,

$$D_{x^0}^i = \delta_i + \sum_{j=1}^{i} \varepsilon_j^i(x^0, x; D_x)\delta_{i-j} \text{ avec } \varepsilon_j^i(x^0, x; D_x) \in C^\infty([0, X^0], L'^j)$$

$$\text{et } k' = I_m \bar{\omega}_\tau + \sum_{i=0}^{\tau-1} b_i(x^0, x; D_x)\delta_{\tau-1-i} \text{ avec } b_i(x^0, x; D_x) \in C^\infty([0, X^0], L'^i_m)$$

$b_i(x^0, x; D_x)$ a donc un symbole $\beta_i(x^0, x; l) \in C^\infty([0, X^0], S'^i_m)$ développable en sous symboles $\beta_{i,j}(x^0, x; l) \in C^\infty([0, X^0], S^{i-j}_m)$ homogènes de degré $i-j$ par rapport à l pour $|l| \geqslant 1$ (si $\beta_i(x^0, x; l) \in C^\infty([0, X^0], S^{i-n_i}_m)$ alors $\beta_{i,j}(x^0, x; l)=0$ pour $|l| \geqslant 1$ et $0 \leqslant j \leqslant n_i-1$; on convient de choisir $\beta_{i,j}(x^0, x; l) \equiv 0$ pour $0 \leqslant j \leqslant n_i-1$). On peut écrire

$$b_i(x^0, x; D_x) = \sum_{j=0}^{i-1} \beta_{i,j}(x^0, x; D_x) + b'_i(x^0, x; D_x)$$

avec

$$b'_i(x^0, x; D_x) \in C^\infty([0, X^0], L'^0_m)$$

On pose

$$b_{i,j}(x^0, x; D_x) = \beta_{i,j}(x^0, x; D_x) \in C^\infty([0, X^0], \underline{S}_m{}^{i-j}) \text{ de symbole}$$
$$\beta_{i,j}(x^0, x; l) = b_{i,j}(x^0, x; l) \text{ pour } j=0, \cdots, i-1.$$
$$b_{i,i}(x^0, x; D_x) = b'_i(x^0, x; D_x) \in C^\infty([0, X^0], L'^0_m)$$

d'où l'expression de k'

$$k' = I_m \bar{\omega}_\tau + \sum_{i=0}^{\tau-1} \sum_{j=0}^{i} b_{i,j}(x^0, x; D_x)\delta_{\tau-1-i} = I_m \bar{\omega}_\tau + \sum_{j=0}^{\tau-1} \sum_{i=j}^{\tau-1} b_{i,j}(x^0, x; D_w)\delta_{\tau-1-i}.$$

Définition 7. k' vérifie la condition C' si:

$$b_{\rho_{\chi+1}\tau_{s_{\chi+1}}+\cdots+\rho_a\tau_{s_a}+\beta\tau_{s_{a-1}}+\gamma,\, \rho_{\chi+1}+\cdots+\rho_a+\beta-1}(x^0, x; l) \equiv 0$$

pour tout $1 < a \leqslant \chi+1$, $0 \leqslant \beta < \rho_{a-1}$, $0 \leqslant \gamma \leqslant \tau-1-\rho_{\chi+1}\tau_{s_{\chi+1}}-\cdots-\rho_a\tau_{s_a}-\beta\tau_{s_{a-1}}$ (avec la convention d'écriture $b_{\gamma,-1}(x^0, x; l)=0$ pour $\gamma=0, \cdots, \tau-1$).

Remarque. Cette condition C' se décompose en q^1-1 sous conditions matricielles:

C'_1: les symboles $b_{\tau_\sigma,0} \equiv b_{\tau_\sigma+1,0} \equiv \cdots \equiv b_{\tau-1,0} \equiv 0$

$\vdots$

C'_{ρ_χ}: les symboles $b_{\rho_\chi\tau_\sigma,\rho_\chi-1} \equiv b_{\rho_\chi\tau_\sigma+1,\rho_\chi-1} \equiv \cdots \equiv b_{\tau-1,\rho_\chi-1} \equiv 0$

$\vdots$

$C'_{\rho_{\chi+1}}$: les symboles $b_{\rho_\chi\tau_a+\tau_{s_{\chi-1}},\rho_\chi} \equiv b_{\rho_\chi\tau_\sigma+\tau_{s_{\chi-1}}+1,1\rho_\chi} \equiv \cdots \equiv b_{\tau-1,\rho_\chi} \equiv 0$

$\vdots$

$C'_{\rho_\chi+\cdots+\rho_a+\beta}$: les symboles $b_{\rho_\chi\tau_{s_\chi}+\cdots+\rho_a\tau_{s_a}+\beta\tau_{s_{a-1}},\rho_\chi+\cdots+\rho_a+\beta-1} \equiv \cdots \equiv$

$$b_{\tau-1,\rho_\chi+\cdots+\rho_a+\beta-1} \equiv 0 \quad (1 < a \leqslant \chi;\, 0 \leqslant \beta < \rho_{a-1})$$

$\vdots$

C'_{q^1-1}: les symboles $b_{\rho_\chi\tau_{s_\chi}+\cdots+\rho_2\tau_{s_2}+(\rho_1-1)\tau_{s_1},q^1-2} \equiv \cdots \equiv b_{\tau-1,q^1-2} \equiv 0.$

5. Il résulte de la proposition 2 que l'analyse de la condition C portant sur l'opérateur $h\in O_m{}^t(\Omega)$ faiblement hyperbolique, à caractéristiques de multiplicités constantes, se formule par les théorèmes suivants:

Theorème 1. *Soit $k\in O_m{}^\tau(\Omega)$ de symbole principal $(H_1)^{q^1}\cdots(H_\sigma)^{q^\sigma}(x^0,x;l_0,l)I_m$ et $k'=\dfrac{k}{(H_1)^{q^1}\cdots(H_\sigma)^{q^\sigma}(x^0,x;1,0)}\in O_m{}^\tau(\Omega)$ de symbole principal $(H_1')^{q^1}\cdots(H_\sigma')^{q^\sigma}(x^0,x;l_0,l)I_m$.*

Il y équivalence entre les assertions suivantes:

(i) k' vérifie la condition C',

(ii) k' est bien décomposable par rapport à chaque $\Delta_i=l_0-p_0{}^i(x^0,x;l)\psi(l)$ $(1\leqslant i\leqslant\tau_\sigma)$ dans $O_m'(\Omega)$,

(iii) k' est bien décomposable par rapport à chaque $H_s'(1\leqslant s\leqslant\sigma)$ dans $O_m'(\Omega)$,

(iv) k' est bien décomposable par rapport à chaque $H_s'(1\leqslant s\leqslant\sigma)$ dans $O_m(\Omega)$,

(v) k est bien décomposable par rapport à chaque H_s $(1\leqslant s\leqslant\sigma)$ dans $O_m(\Omega)$,

(vi) k est bien décomposable par rapport à toute décomposition du radical caractéristique R en produit de polynômes K_j premiers deux a deux dans $R[l_0,l]$, à coefficients dans $B^\infty(\Omega)$, tels que $\inf\limits_{(x^0,x)\in\Omega}|K_j(x^0,x;1,0)|>0$.

Démonstration:

(i)$\Rightarrow$(ii) En effet si k' vérifie la condition C', la décomposition

$$k'=I_m\bar{\omega}_\tau+\sum_{j=0}^{\tau-1}\sum_{i=j}^{\tau-1}b_{i,j}(x^0,x;D_x)\delta_{\tau-1-i}$$

est du type (2.19) avec $K_i'=\Delta_i$.

(ii)$\Rightarrow$(i) On a

$$k'\underset{\tau-r}{\simeq}I_m\bar{\omega}_\tau+\sum_{j=0}^{r-1}\sum_{i=j}^{\tau-1}b_{i,j}\cdot\delta_{\tau-1-i}\quad(0\leqslant r\leqslant\tau)$$

et k' étant bien décomposable par rapport à chaque $\Delta_i(1\leqslant i\leqslant\tau)$ dans $O_m'(\Omega)$, il existe des opérateurs $e_\rho'\in O_m'(\Omega)$ $(0\leqslant\rho\leqslant\tau)$ tels que

$$k'\underset{\tau-r}{\simeq}\sum_{\rho=0}^{r}e_\rho'(\partial_1)^{(\lambda_1-\rho)_+}\cdots(\partial_{\tau_\sigma})^{(\lambda\tau_\sigma-\rho)_+}$$

D'après la dernière remarque, la condition C' se décompose en $\lambda-1=q^1-1$ sous conditions C_r' avec $r=\rho_{x+1}+\cdots+\rho_\alpha+\beta$ variant de 1 a $\lambda-1$.

Démontrons par récurrence sur r que toutes ces sous conditions C_r' sont satisfaites: on a d'abord

$$I_m\bar{\omega}_\tau\underset{\tau}{\simeq}e_0'(\partial_1)^{\lambda_1}\cdots(\partial_{\tau_\sigma})^{\lambda\tau_\sigma}\Longleftrightarrow e_0'=I_m$$

Pour $r=1$, on a:

$$I_m\bar{\omega}_\tau+\sum_{i=0}^{\tau-1}b_{i,0}\delta_{\tau-1-i}\underset{\tau-1}{\simeq}e_0'(\partial_1)^{\lambda_1}\cdots(\partial_{\tau_\sigma})^{\lambda\tau_\sigma}+e_1'(\partial_1)^{(\lambda_1-1)_+}\cdots(\partial_{\tau_\sigma})^{(\lambda\tau_\sigma-1)_+}$$

Ces deux opérateurs de $O_m'^{\tau-1}(\Omega)$ ont donc même symbole principal pour $|l|\geqslant 1$ à savoir $E_1'\times(\Delta_1)^{(\lambda_1-1)_+}\cdots(\Delta_{\tau_\sigma})^{(\lambda_{\tau_\sigma}-1)_+}$. On montre qu'il existe $\nu_s\in O_m'(\Omega)$ et $\nu_s'\in O_m'(\Omega)$ tels que

$$\left.\begin{array}{l} I_m\bar{\omega}_\tau \underset{\tau-1}{\simeq} \nu_s(\partial_s)^{(\lambda_s-1)_+} \\ e_0'(\partial_1)^{\lambda_1}\cdots(\partial_{\tau_\sigma})^{\lambda_{\tau_\sigma}} \underset{\tau-1}{\simeq} \nu_s'(\partial_s)^{(\lambda_s-1)_+} \end{array}\right\} \text{ pour tout } s=1,\cdots,\tau_\sigma.$$

Donc $I_m\bar{\omega}_\tau-e_0'(\partial_1)^{\lambda_1}\cdots(\partial_{\tau_\sigma})^{\lambda_{\tau_\sigma}}\in O_m'^{\tau-1}(\Omega)$ a un symbole principal divisible par $(\Delta_s)^{(\lambda_s-1)_+}$ pour tout $s=1,\cdots,\tau_\sigma$ et $|l|\geqslant 1$.

D'autre part $\sum_{i=0}^{\tau_\sigma-1} b_{i,0}\delta_{\tau-1-i}$ a aussi un symbole principal divisible par $(\Delta_s)^{(\lambda_s-1)_+}$ pour $|l|\geqslant 1$ dans $R[l_0]$; il en est donc de même pour le symbole principal de $\sum_{i=\tau_\sigma}^{\tau-1} b_{i,0}\delta_{\tau-1-i}$, quel que soit $s=1,\cdots,\tau_\sigma$; ce qui n'est possible qu'à la condition:

$$b_{i,0}(x^0, x; l)=0 \text{ pour tout } i=\tau_\sigma,\cdots,\tau-1, \text{ tout } (x^0, x)\in\Omega \text{ et tout } |l|\geqslant 1.$$

Avec la convention faite sur les symboles $b_{i,j}(x^0, x; l)$, cela revient à dire que $b_{i,0}(x^0, x; l)\equiv 0$ dans $\Omega\times R^n$ pour tout $i=\tau_\sigma,\cdots,\tau-1$.

La sous condition C_1' est donc vérifiée; on démontre de même par récurrence que toutes les autres le sont aussi.

(i)$\Rightarrow$(iii) Il suffit d'appliquer la proposition 7 en prenant $K_s'=H_s'$, $\mu=\sigma$, $r^s=q^s$ et en remarquant que $k'=I_m\bar{\omega}_\tau+\sum_{j=0}^{\tau-1}\sum_{i=j}^{\tau-1} b_{i,j}\delta_{\tau-1-i}$ est une décomposition dans $O_m'(\Omega)$ du type (2.19) pourvu que l'on choisisse

$$h_s'=\partial_{\tau_s}\partial_{\tau_s-1}\cdots\partial_{\tau_{s-1}+1}$$

(iii)$\Rightarrow$(ii) On utilise la proposition 6 avec $K_s'=H_s'$ en choisissant $h_s'=\partial_{\tau_s}\cdots\partial_{\tau_{s-1}+1}$ et on applique la proposition 7.

(iii)$\Rightarrow$(iv) Considérons une décomposition du type (2.1) en remplaçant H_0 et h_0 par H_0' et h_0', k par k' et appelons la (2.1)'.

D'après la proposition 5 en prenant $K_0'=H_0'$ cette décomposition (2.1)' dans $O_m(\Omega)$ est une bonne décomposition dans $O_m'(\Omega)$ par rapport à

$$H_0'\left(=\frac{H_0(x^0, x; l_0, l)}{H_0(x^0, x; 1, 0)}\right), \text{ d'où } \beta_r\geqslant\beta_0-r=q^0-r.$$

k' est donc bien décomposable par rapport à chaque H_s' ($1\leqslant s\leqslant\sigma$) dans $O_m(\Omega)$.

(iv)$\Rightarrow$(iii) Toute bonne décomposition dans $O_m(\Omega)$ est une bonne décomposition dans $O_m'(\Omega)$.

(iv)$\Rightarrow$(v) On applique la proposition 2 à (k', H_s', h_s') dans $O_m(\Omega)$.

On obtient une décomposition du type (2.2) que nous notons (2.2)'.

En remplaçant h_s' par $h_s(x^0, x; D_{x^0}, D_x)/H_s(x^0, x; 1, 0)$ dans (2.2)' et en écrivant $k=(H_1)^{q^1}\cdots(H_\sigma)^{q^\sigma}(x^0, x; 1, 0)k'$, on obtient une décomposition du type (2.4).

(v)$\Rightarrow$(iv) C'est la même démonstration que précédemment; il suffit d'intervertir les rôles de k et k', H_s et H_s', h_s et h_s'.

(i) $\Rightarrow$ (vi) L'étude de la bonne décomposition des opérateurs k dans $O_m(\Omega)$ faite au paragraphe II 1 peut se faire de la même façon par rapport à l'ensemble des facteurs de toute décomposition du radical R en produit de polynômes K_j premiers entre eux deux à deux dans $R[l_0, l]$, à coefficients dans $B^\infty(\Omega)$, tels que $\inf\limits_{(x^0,x)\in\Omega} |K_j(x^0, x; 1, 0)| > 0$; on obtient de la même façon qu'avec les facteurs premiers H_s, l'équivalence de la bonne décomposition par rapport aux K_j dans $O_m(\Omega)$ avec la condition C' sur k'.

Définition 8. Si k ou $k' = k/(H_1)^{q^1}\cdots(H_\sigma)^{q^\sigma}(x^0, x; 1, 0)$ vérifie l'une des assertions du théorème 1, on dira que k et k' sont des opérateurs bien décomposables.

On peut alors conclure par l'énoncé suivant:

Théorème 2. *L'opérateur h faiblement hyperbolique par rapport au champ de covecteurs* (1, 0), *à caractéristiques de multiplicités constantes dans Ω vérifie la condition C si et seulement si il existe des opérateurs $a_1 \in O_m^{\tau-t}(\Omega)$ et $a_2 \in O_m^{\tau-t}(\Omega)$ de même symbole principal A tels que $k_1 = ha_1$ et $k_2 = a_2 h$ soient bien décomposables.*

III. Résolution du problème de Cauchy pour les opératurs $k' \in O_m^\tau(\Omega)$ de symbole principal $(H_1')^{q^1}\cdots(H_\sigma')^{q^\sigma} I_m$, bien décomposables.

Pour cela nous avons besoin d'une autre caractérisation de ces opérateurs.

1. *Décomposition de k' en opérateurs portés par les bicaractéristiques.*

Définition 9. On désigne par $\mathcal{M}_m$ l'ensemble des sommes finies de monômes du type $\omega_{j^i}\cdot\partial_{j_1}\cdot\partial_{j_2}\cdots\partial_{j_i}$ $(0 \leqslant i \leqslant \tau - 1;\ \partial_{j_0} = 1)$ à coefficients à gauche les opérateurs ω_{j^i} de $C^\infty([0, X^0], L_m'^0)$, $j^i = (j_1, \cdots, j_i)$ étant une injection à valeur dans l'ensemble: $\{\underbrace{1, \cdots, 1}_{\lambda_1 \text{ fois}};\ \underbrace{2, \cdots, 2}_{\lambda_2 \text{ fois}};\ \underbrace{\tau_\sigma, \cdots, \tau_\sigma}_{\lambda\tau_\sigma \text{ fois}}\}$ dont les éléments sont considérés distincts deux à deux. On note $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}$.

Théorème 3. *k' est bien décomposable si et seulement si $\omega = k' - I_m\bar{\omega}_\tau \in \mathcal{M}_m$.*

Démonstration: On démontre le théorème direct à l'aide des lemmes suivants:

Lemme 2. *Si $i \neq j$, il existe $K_{i,j}(x^0, x; D_x) = K_{i,j} \in C^\infty([0, X^0], S'^{-1})$ et $Q_{i,j}(x^0) = Q_{i,j} \in C^\infty([0, X^0], L^{-\infty})$ tels que $K_{i,j}\cdot(\partial_i - \partial_j) = I - Q_{i,j}$ (I est l'opérateur identité)*

qui résulte de l'éllipticité de $\partial_i - \partial_j$; $K_{i,j}$ est une paramétrix à gauche de $\partial_i - \partial_j$ ([3] et [19])

A l'aide de ce lemme, on démontre par récurrence sur les nombres $r_1, r_2, \cdots, r_x$ le

Lemme 3. *On considère les ensembles d'opérateurs suivants*

$$N^{\tau s_1}=\{\partial_{\tau_{s_1}}, \partial_{\tau_{s_1}-1}, \cdots, \partial_1\},\ N^{\tau s_2}=\{\partial_{\tau_{s_2}}, \partial_{\tau_{s_2}-1}, \cdots, \partial_1\}, \cdots, N^{\tau_\sigma}=\{\partial_{\tau_\sigma}, \cdots, \partial_1\}$$

$$N=N^{\tau s_1, \cdots, \tau s_\chi}_{r_1, \cdots, r_\chi}$$

$$=\{\underbrace{N^{\tau s_1}\dot{\cup}\cdots\dot{\cup}N^{\tau s_1}}_{r_1 \text{ fois}}\dot{\cup}\underbrace{N^{\tau s_2}\dot{\cup}\cdots\dot{\cup}N^{\tau s_2}}_{r_2 \text{ fois}}\dot{\cup}\cdots\dot{\cup}\underbrace{N^{\tau s_\chi}\dot{\cup}\cdots\dot{\cup}N^{\tau s_\chi}}_{r_\chi \text{ fois}}\}$$

ou $\dot{\cup}$ *désigne la reunion disjointe* [27].

Soit $\theta=\theta_N=r_\chi(\tau s_\chi-1)+r_{\chi-1}(\tau s_{\chi-1}-1)+\cdots+r_1(\tau s_1-1)$.

Alors l'opérateur identité I peut s'écrire sous la forme:

$$I=\sum_{\sigma\theta=(\sigma_1,\cdots,\sigma_\theta)\in\mathfrak{S}_\theta} K_{\sigma\theta}\partial_{\sigma_1}\cdots\partial_{\sigma_\theta}+\sum_{\rho=0}^{\theta-1}\sum_{\sigma^\rho=(\sigma_1,\cdots,\sigma_\rho)\in\mathfrak{S}_\rho} Q_{\sigma^\rho}\cdot\partial_{\sigma_1}\cdots\partial_{\sigma_\rho} \tag{3.1}$$

ou σ^ρ $(0\leqslant\rho\leqslant\theta)$ *parcourt l'ensemble* $\mathfrak{S}_\rho$ *des permutations de* ρ *indices pris dans l'ensemble* $I^{\tau s_1, \cdots, \tau s_\chi}_{r_1, \cdots, r_\chi}=\dot{\bigcup}_{i=1}^{\chi}([1, \tau_{s_i}]\cup\cdots\cup[1, \tau_{s_i}])$ *des indices j des* ∂_j *de* $N^{\tau s_1, \cdots, \tau s_\chi}_{r_1, \cdots, r_\chi}$, $K_{\sigma\theta}\in C^\infty([0, X^0], L'^{-\theta})$ *et* $Q_{\sigma^\rho}\in C^\infty([0, X^0], L^{-\infty})$,

et son corollaire le

Lemme 4. *Soient* $2\leqslant d\leqslant\chi$, $0\leqslant e\leqslant\rho_{d-1}$, $1\leqslant f\leqslant\tau s_{d-1}$; *on considère l'ensemble*

$$N=N^{\tau s_1, \cdots, \tau s_{d-2}, \tau s_{d-1}, \tau s_d, \cdots, \tau s_\chi}_{0, \cdots\cdots, 0\ \ \ , e\ \ \ , \rho_d, \cdots\cdots, \rho_\chi}\dot{\cup}\{\partial_f, \cdots, \partial_{\tau_{s_{d-1}}}\}=N_1\dot{\cup}N_2.$$

et les nombres $\theta_1=\rho_\chi(\tau s_\chi-1)+\cdots+\rho_d(\tau s_d-1)+e(\tau s_{d-1}-1)$

$$\theta_2=\tau s_{d-1}-f$$

$$\theta=\theta_1+\theta_2$$

Alors l'opérateur identité I peut s'écrire sous la forme:

$$I=\sum_{\sigma\theta\in\mathfrak{S}_\theta} K_{\sigma\theta}\cdot\partial_{\sigma_1}\cdots\partial_{\sigma_\theta}+\sum_{\rho=0}^{\theta-1}\sum_{\sigma^\rho\in\mathfrak{S}_\rho} Q_{\sigma^\rho}\cdot\partial_{\sigma_1}\cdots\partial_{\sigma_\rho} \tag{3.2}$$

ou $\sigma^\rho=(\sigma_1, \cdots, \sigma_\rho)$ $(0\leqslant\rho\leqslant\theta)$ *parcourt l'ensemble des permutation de* ρ *indices pris dans l'ensemble* $I^{\tau s_1, \cdots, \tau_{d-2}, \tau s_{d-1}, \tau s_d, \cdots, \tau s_\chi}_{0, \cdots\cdots, 0\ \ \ , e\ \ \ , \rho_d\ , \cdots, \rho_\chi}\dot{\cup}[f, \tau s_{d-1}]=I$ *des indices des* ∂_j *de* N, $K_{\sigma\theta}\in C^\infty([0, X^0], L'^{-\theta})$ *et* $Q_{\sigma^\rho}\in C^\infty([0, X^0], L^{-\infty})$.

A l'aide de ces lemmes montrons le théorème 3:

On a $k'=I_m\bar{\omega}_\tau+\sum_{r=1}^{\tau}\sum_{a=r-1}^{\tau-1}b_{a,r-1}(x^0, x; D_x)\delta_{\tau-1-a}$. Puisque k' vérifie la condition $C'=\bigcup_{r=1}^{q^1-1}C'_r$, chaque r tel que $1\leqslant r\leqslant q^1-1$ étant de la forme $r=\rho_{\chi+1}+\cdots+\rho_i+j$ avec $2\leqslant i\leqslant\chi+1$ et $0\leqslant j\leqslant\rho_{i-1}-1$ uniques, chaque expression $\sum_{a=r-1}^{\tau-1}b_{a,r-1}\delta_{\tau-1-a}$ vèrifie la condition C'_r et se met donc sous la forme:

$$k'_r=\sum_{a=a_0}^{a_1}b_{a,r-1}\delta_{\tau-1-a}\quad(1\leqslant r\leqslant q^1-1)$$

avec

$$a_0=\rho_{\chi+1}+\cdots+\rho_i+j-1 \text{ et } a_1=\rho_{\chi+1}\tau s_{\chi+1}+\cdots+\rho_i\tau s_i+j\tau s_{i-1}-1$$

Tous les $\delta_{\tau-1-a}$, intervenant dans k'_r, contiennent en facteur le produit des éléments de $N^{\tau_{s_1},\cdots,\tau_{s_{i-2}},\tau_{s_{i-1}},\tau_{s_i},\cdots,\tau_{s_\chi}}_{\rho_1,\cdots,\rho_{i-2},\rho_{i-1}-j,0,\cdots,0}$.

Considérons un nombre α avec $\rho_{\chi+1}+\rho_\chi+\cdots+\rho_i+j-1\leqslant\alpha\leqslant\rho_{\chi+1}\tau_{s_{\chi+1}}+\cdots+\rho_i\tau_{s_i}+j\tau_{s_{i-1}}-1$ alors α peut se mettre de manière unique sous la forme:

$$\alpha=\rho_{\chi+1}\tau_{s_{\chi+1}}+\cdots+\rho_d\tau_{s_d}+e\tau_{s_{d-1}}+\tau_{s_{d-1}}-f$$

avec soit $d>i$, $e<\rho_{d-1}$, $1\leqslant f\leqslant\tau_{s_{d-1}}$ soit $d=i$, $e<j$ et $1\leqslant f\leqslant\tau_{s_{i-1}}$.

Le complémentaire dans $N^{\tau_{s_1},\cdots,\tau_{s_\chi}}_{\rho_1,\cdots,\rho_\chi}$ de l'ensemble des facteurs qui composent $\delta_{\tau-1-\alpha}$ est l'ensemble

$$N=N^{\tau_{s_1},\cdots,\tau_{s_{d-2}},\tau_{s_{d-1}},\tau_{s_d},\cdots,\tau_{s_\chi}}_{0,\cdots\cdots,0,e,\rho_d,\cdots,\rho_\chi}\ \dot{\cup}\ \{\partial_{\tau_{s_{d-1}}},\cdots,\partial_f\}$$

Soit $\theta=\rho_\chi(\tau_{s_\chi}-1)+\cdots+\rho_d(\tau_{s_d}-1)+e(\tau_{s_{d-1}}-1)+(\tau_{s_{d-1}}-f)$.

D'après le lemme 4, en écrivant l'opérateur I sous la forme (3.2) on a:

$$\begin{aligned}b_{\alpha,r-1}\delta_{\tau-1-\alpha}&=b_{\alpha,r-1}I\delta_{\tau-1-\alpha}\\&=\sum_{\sigma\theta\in\mathfrak{S}_\theta}b_{\alpha,r-1}K_{\sigma\theta}\partial_{\sigma_1}\cdots\partial_{\sigma\theta}\delta_{\tau-1-\alpha}+\sum_{\rho=0}^{\theta-1}\sum_{\sigma\rho\in\mathfrak{S}_\rho}b_{\alpha,r-1}Q_{\sigma\rho}\partial_{\sigma_1}\cdots\partial_{\sigma_\rho}\delta_{\tau-1-\alpha}.\end{aligned}$$

On a $\alpha-r+1\leqslant\theta$, d'où $b_{\alpha,r-1}K_{\sigma\theta}\in C^\infty([0,X^0],L'^0_m)$ et $b_{\alpha,r-1}Q_{\sigma\rho}\in C^\infty([0,X^0],L^{-\infty})$.

D'autre part $\theta\leqslant\alpha\Rightarrow\theta+(\tau-1-\alpha)\leqslant\tau-1$ d'où $k'_r\in\mathcal{M}_m(1\leqslant r\leqslant q^1-1)$. Lorsque $q^1\leqslant r\leqslant\tau$, il n'y a plus de condition C'_r portant sur k'_r, cependant on démontre de la même manière que $k'_r\in\mathcal{M}_m$.

Démontrons la réciproque du théorème 3.

Par hypothèse $k'=\bar{\omega}_\tau I_m.+\omega$ avec $\omega\in\mathcal{M}_m$.

D'où $\omega=\sum_{i=1}^{\tau}\sum_{\sigma^{\tau-i}\in\mathfrak{S}_{\tau-i}}\omega_{\sigma^{\tau-i}}\cdot\partial_{\sigma_1}\cdots\partial_{\sigma_{\tau-i}}$ avec $\omega_{\sigma^{\tau-i}}\in C^\infty([0,X^0],L'^0_m)$.

Appelons $\mathfrak{S}'$ l'ensemble des permutations d'au plus $\tau-1$ indices pris dans l'ensemble des indices $[\underbrace{1,\cdots,1}_{\lambda_1\text{ fois}};\cdots;\underbrace{\tau_\sigma,\cdots,\tau_\sigma}_{\lambda_{\tau_\sigma}\text{ fois}}]$. Pour tout $\sigma\in\mathfrak{S}'$ il existe i unique $(=1,\cdots,\tau)$ tel que $\sigma=\sigma^{\tau-i}=(\sigma_1,\cdots,\sigma_{\tau-i})$; en notant $\partial_\sigma=\partial_{\sigma_1}\cdots\partial_{\sigma_{\tau-i}}$, on peut écrire ω sous la forme $\omega=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}'}\omega_\sigma\partial_\sigma$ avec $\omega_\sigma\in C^\infty([0,X^0],L'^0_m)$ et k' sous la forme $k'=1/\mathcal{K}[\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}'}(I_m\bar{\omega}_\tau+\mathcal{K}\omega_\sigma\partial_\sigma)]$ $(\mathcal{K}=\text{card }\mathfrak{S}')$.

Or chaque $\sigma=\sigma^{\tau-i}$ $(i=1,\cdots,\tau)$ a son image dans $[\underbrace{1,\cdots,1}_{\lambda_1\text{ fois}};\cdots;\underbrace{\tau_\sigma,\cdots,\tau_\sigma}_{\lambda_{\tau_\sigma}\text{ fois}}]$ contenant au moins $(\lambda_1-i)_+$ fois $1,\cdots,(\lambda_{\tau_\sigma}-i)_+$ fois τ_σ. Il en résulte que chaque $\omega_\sigma\partial_\sigma$ peut se mettre sous la forme:

$$a_1^\sigma\partial_{a_1^\sigma}a_2^\sigma\partial_{a_2^\sigma}\cdots a^\sigma_{u_i}\partial_{a^\sigma_{u_i}}a^\sigma_{u_i+1}\quad\text{avec } a_j^\sigma\in O'_m(\Omega),$$

a^σ injection:

$$[1,\cdots,u_i]\longrightarrow[\underbrace{1,\cdots,1}_{(\lambda_1-i)_+\text{ fois}};\cdots,\underbrace{\tau_\sigma,\cdots,\tau_\sigma}_{(\lambda_{\tau_\sigma}-i)_+\text{ fois}}],\ \omega_\sigma\partial_\sigma\in O'^{\tau-i}_m(\Omega).$$

D'après la proposition 8, il en résulte que: $I_m\bar{\omega}_\tau+\mathcal{K}\omega_\sigma\partial_\sigma\in O'^\tau_m(\Omega)$ est bien décomposable par rapport à chaque Δ_s $(1\leqslant s\leqslant\tau_\sigma)$ dans $O'_m(\Omega)$ et d'après la proposition 6 et sa remarque, il existe des opérateurs $e_j^\sigma\in O'_m(\Omega)$ $(0\leqslant j\leqslant\tau)$ tels que

$$I_m\bar{\omega}_\tau+\mathcal{K}\omega_\sigma\partial_\sigma \underset{\tau-j}{\sim} \sum_{\rho=0}^{j} e_\rho^\sigma(\partial_1)^{[\lambda_1-\rho]_+}\cdots(\partial_{\tau_\sigma})^{[\lambda_{\tau_\sigma}-\rho]_+}$$

(tout $0\leqslant j\leqslant\tau$).

D'où

$$k' \underset{\tau-j}{\sim} \sum_{\rho=0}^{j} 1/\mathcal{K}(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}'} e_\rho^\sigma)(\partial_1)^{[\lambda_1-\rho]_+}\cdots(\partial_{\tau_\sigma})^{[\lambda_{\tau_\sigma}-\rho]_+} \quad \text{(tout } 0\leqslant j\leqslant\tau).$$

D'après la proposition 6, k' est donc bien décomposable.

2.

Théorème 4. *Si k' est bien décomposable, alors le problème de Cauchy posé par le système*

(3.3) $$k'z=f' \quad avec \ f'\in C^0([0, X^0], (H^\infty)^m)$$

et les données de Cauchy sur l'hyperplan $x^0=0$ notées

($\boldsymbol{D}_3$) $$z_i=(D_{x^0}^i z)(0,.)\in(H^\infty)^m \quad (i=0, \cdots, \tau-1)$$

admet une solution et une seule $z\in C^\tau([0, X^0], (H^\infty)^m)$.

Démonstration: On utilise le lemme suivant:

Lemme 5. [19] *On désigne par s les monômes de $\mathcal{M}$ de la forme $s=\partial_{\sigma^i}=$ $=\partial_{\sigma_1}\cdots\partial_{\sigma_i}$ $(0\leqslant i\leqslant\tau-1)$, $(\partial_{\sigma^0}=1)$. Alors pour tout $r\in R$, il existe une constante $C>0$ telle que*

(3.4) $$\sum_{s\in\mathcal{M}}\|su(x^0,.)\|_r{}^2\leqslant C\{\sum_{s\in\mathcal{M}}\|su(0,.)\|_r{}^2+\int_0^{x^0}\|\bar{\omega}_\tau u(x'^0,.)\|_r{}^2dx'^0\}$$

pour tout $u\in C^\tau([0, X^0], H^{r+\tau})$ et tout $x^0\in[0, X^0]$.

Effectuons alors le changement de fonctions inconnues:

$$z=z'+\sum_{i=0}^{\tau-1}\frac{(x^0)^i}{i!}z_i$$

on est ramené à résoudre le problème de Cauchy

(3.5) $$k'z'=f''$$

à données nulles sur l'hyperplan $x^0=0$:

($\mathbf{D}_3'$) $$z_0'=\cdots=z_{\tau-1}'=0$$

et avec le second membre $f''=f'-\sum_{i=0}^{\tau-1}k'[\frac{(x^0)^i}{i!}z_i]\in C^0([0, X^0], (H^\infty)^m)$ on résout d'abord le problème

(3.6) $$\begin{cases}\bar{\omega}_\tau u=f'' \\ u_0=\cdots=u_{\tau-1}=0: \text{ données de Cauchy nulles sur l'hyperplan}\end{cases}$$

que l'on peut remplacer par le système d'équations équivalent:

(3.7) $$\begin{cases} D_{x^0}u-p_0{}^1(x^0, x; D_x)u=v^1 \\ D_{x^0}v^1-p_0{}^2(x^0, x; D_x)v^1=v^2 \\ \vdots \\ D_{x^0}v^{\tau-1}-p_0{}^{\tau_\sigma}(x^0, x; D_x)v^{\tau-1}=f'' \end{cases}$$

avec les données nulles: $u_0=v_0{}^1=\cdots=v_0{}^{\tau-1}=0$ sur l'hyperplan $x^0=0$. On résout le système (3.7) en commençant par la dernière équation. S. Mizohata [13] montre que cette équation admet une solution

$$v^{\tau-1}\in C^0([0, X^0], (H^r)^m)\cap C^1([0, X^0], (H^{r-1})^m) \quad (\text{tout } r\in R)$$

Donc $v^{\tau-1}\in C^1([0, X^0], (H^{+\infty})^m)$.

On résout successivement les autres équations de la même manière et on obtient ainsi $v^{\tau-2}\in C^2([0, X^0], H^\infty)^m), \cdots, u\in C^\tau([0, X^0], (H^\infty)^m)$. La résolution de (3.5) se fait par approximations successives avec la relation de récurrence:

$$(3.8) \qquad \begin{cases} \bar{\omega}_\tau z'^{a+1}=f''-\omega z'^a \quad a=0, 1, \cdots (z'^0=0) \\ \text{Données nulles sur l'hyperplan } x^0=0: z_0'^a=\cdots=z_{\tau-1}'^a=0. \end{cases}$$

on a alors

$$(3.9) \qquad \begin{cases} \bar{\omega}_\tau(z'^{a+1}-z'^a)=\omega(z'^{a-1}-z'^a) \\ z_0'^{a+1}-z_0'^a=\cdots=z_{\tau-1}'^{a+1}-z_{\tau-1}'^a=0 \text{ sur l'hyperplan } x^0=0. \end{cases}$$

$$(3.10) \qquad \sum_{s\in\mathcal{M}} \|su(x^0,.)\|_r^2 \leqslant C\int_0^{x^0} \|\bar{\omega}_\tau u(x'^0,.)\|_r^2 dx_0' \quad (\text{lemme } 5)$$

lorsque $u_i=0$ $(i=0, \cdots, \tau-1)$., $u\in C^\tau([0, X^0], (H^{r+\tau})^m)$, ω appartenant à $\mathcal{M}_m$, on a:

$$(3.11) \qquad \|\omega u(x^0,.)\|_r^2 \leqslant C'\int_0^{x^0} \|\bar{\omega}_\tau u(x'^0,.)\|_r^2 dx'^0$$

En appliquant (3.10) et (3.11) au système (3.9) et en posant $M=\|\bar{\omega}_\tau(z'^1-z'^0)\|_r$, on obtient

$$(3.12) \qquad \sum_{s\in\mathcal{M}} \|s(z'^{a+1}-z'^a)\|_r^2(x^0) \leqslant (C'X^0)M^2\frac{(C'X^0)^a}{a!}$$

On déduit de (3.12) que $D_{x^0}^i z'^a$ est une suite de Cauchy dans $C^0([0, X^0], (H^r)^m)$ pour tout r et tout $i=0, \cdots, \tau$.

D'ou z'^a converge vers z' solution de (3.5), $(\mathbf{D}_3')$ dans

$$C^\tau([0, X^0], (H^\infty)^m) \text{ et } z=z'+\sum_{i=0}^{\tau-1}\frac{(x^0)^i}{i!}z^i \text{ est solution de (3.3) } \mathbf{D}_3.$$

Le lemme 5 montre aussi l'unicité de la solution z.

Proposition 9. [19] *Quel que soit $r\in\mathbf{R}$, les opérateurs k' bien décomposables vérifient l'inégalité d'énergie suivante: il existe une constante C positive telle que*

$$\sum_{j=0}^{\tau-\lambda} \|D_{x^0}^j z(x^0,.)\|_{r+\tau-\lambda-j}^2 \leqslant C\left\{\sum_{j=0}^{\tau-1} \|D_{x^0}^j z(0,.)\|_{r+\tau-1-j}^2+\int_0^{x^0}\|k'z(x'^0,.)\|_r^2 dx'^0\right\}$$

pour tout $z\in C^\tau([0, X^0], (H^\infty)^m)$ et tout $x^0\in[0, X^0]$.

IV. Le problème de Cauchy pour l'opérateur h faiblement hyperbolique par rapport au champ de covecteurs (1, 0), à caractéristiques de multiplicités constantes dans Ω.

Théorème 5. *Le problème de Cauchy posé par le système*

(4.1) $$h(x^0, x; D_{x^0}, D_x)y(x^0, x)=f(x^0, x)$$

et les données de Cauchy sur l'hyperplan $x^0=0$ notées

$$D\begin{cases}(y, D_{x^0}y, \cdots, D_{x^0}^{t-1}y)(0, x)=(y_0(x), \cdots, y_{t-1}(x))\\ y_i\in(H^\infty)^m\end{cases}$$

avec le second membre $f\in C^0([0, X^0], (H^\infty)^m)$ admet une solution $y\in C^t([0, X^0], (H^\infty)^m)$ s'il existe un opérateur $a_1\in O_m^{\tau-t}(\Omega)$ de symbole principal A tel que $k_1=ha_1$ soit bien décomposable; cette solution est unique s'il existe un opérateur $a_2\in O_m^{\tau-t}(\Omega)$ de symbole principal A tel que $k_2=a_2h$ soit bien décomposable.

Autrement dit le problème de Cauchy (4.1), $\boldsymbol{D}$ *est bien posé dans $C^t([0, X^0], (H^\infty)^m)$ si h vérifie la condition C.*

Démonstration: 1. *Existence de la solution.*

Supposons qu'il existe $a_1\in O_m^{\tau-t}(\Omega)$ de symbole principal A tel que $k_1=ha_1$ soit bien décomposable.

On se ramène à un problème à données nulles par un premier changement de fonctions inconnues: $y=y'+\sum_{i=0}^{t-1}\frac{(x^0)^i}{i!}y_i$

(4.2) $$\begin{cases}hy'=f'=f-\sum_{i=0}^{t-1}h\left[\frac{(x^0)^i}{i!}y_i\right]\in C^0([0, X^0], (H^\infty)^m)\\ y_0'=\cdots=y_{t-1}'=0.\end{cases}$$

Par le changement de fonctions: $y'=a_1z$ on obtient le système:

(4.3) $$\begin{cases}k_1z=f'\\ z_0=\cdots=z_{\tau-1}=0\end{cases}$$

équivalent à

(4.4) $$\begin{cases}k_1'z=f''=\dfrac{f'}{(H_1)^{q_1}\cdots(H_\sigma)^{q_\sigma}(x^0, x; 1, 0)}\in C^0([0, X^0], (H^\infty)^m)\\ z_0=\cdots=z_{\tau-1}=0\end{cases}$$

Le théorème 4 assure une solution $z\in C^\tau([0, X^0], (H^\infty)^m)$ à ce système et par suite une solution

$$y=a_1z+\sum_{i=0}^{t-1}\frac{(x^0)^i}{i!}y_i\in C^t([0, X^0], (H^\infty)^m)$$

au système (4.1).

2. *Unicité de la solution.*

Supposons qu'il existe $a_2\in O_m^{\tau-t}(\Omega)$ de symbole principal A tel que $k_2=a_2h$ soit bien décomposable.

On montre alors que l'adjoint $k_2^*=h^*a_2^*$ est bien décomposable et par un raisonnement du type de Holmgren on prouve l'unicite de la solution y de (4.1), $\boldsymbol{D}$ dans $C^t([0, X^0], (H^\infty)^m)$.

Remarque. Rappelons que det $H=(H_1)^{\nu_1}\cdots(H_\sigma)^{\nu_\sigma}$ et que $AH=HA=(H_1)^{q^1}\cdots(H_\sigma)^{q^\sigma}.I_m$. Dans [6] nous avons étudié ce problème de Cauchy dans le cas particulier où $\nu_1=2$, $q^1=2$ et $q^2=\cdots=q^\sigma=1$, les multiplicités $\nu_2, \cdots, \nu_\sigma$ étant quelconques, sous une condition équivalente à la bonne décomposition, mais dans des espaces de Sobolev plus larges, en remplaçant (4.1) par un système d'équations du premier ordre mais pseudo-différentiel. Sous la même condition, R. Berzin [20] détermine des solutions oscillatoires du problème de Cauchy; I. Demay [5] résout alors le problème de Cauchy C^∞ pour les systèmes d'ordre 1 en construisant une paramétrix au moyen de Fourier intégraux et R. Berzin [1] en utilisant ses calculs précédents résout les systèmes d'ordre quelconque; dans [2], il étudie un autre cas: $\nu_1=3$, $q^1=3$, $\nu_2=3$, $q^2=2$ et pour $s=3, \cdots, \sigma$, ν_s est quelconque et $q^s=1$.

V. M. Petkov [15] a étudié les cas où l'on a soit $\nu_s\leqslant 3$, soit $\nu_s>3$ et $q^s=1$.

Les résultats démontrés ici ont été annoncés en partie dans une note au C.R.A.S [7] et exposés au Séminaire Goulaouic-Schwartz [8].

Ce travail a été entrepris suite à une question posée par M. J. Vaillant.

Je remercie vivement M. Vaillant pour ses conseils et ses encouragements qui m'ont été très précieux.

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE
U.E.R. DE MATHEMATIQUES PURES ET APPLIQUEES
B.P. 36 59650–VILLENEUVE D'ASCQ
FRANCE

Bibliographie

R. Berzin

[1] C. R. A. S t. 280 Série A p. 443 à 445 (1975).

[2] C. R. A. S t. 281 série A p. 637 à 640 (1975) .

L. Boutet de Monvel

[3] Opérateurs pseudo-différentiels et formule de l'indice Cours de D.E.A 1970–71 Université de Nice.

J. Chazarain

[4] Annales de l'Institut Fourier 24, 1 (1974, p. 173–202 Opérateurs hyperboliques à caractéristiques de multiplicité constante.

I. Demay

[5] C. R. A. S t. 278 Série A, p. 771 (1974).

D. Gourdin

[6] C. R. A. S t. 278, Série A, p. 269–272 (1974).

[7] C. R. A. S t. 282, Série A, p. 1105–1107 (1976).

[8] Systèmes faiblement hyperboliques. Séminaire Goulaouic-Schwartz exposé n°22 (1975–76).

H. Kumano-go

[9] Remarks on pseudo differential operators. J. Math. Soc. Japan, 21, 413–439 (1969).

A. Lax

[10] Comm. on pure and applied Maths. Vol. 9, p. 135–169 (1956).

J. Leray

[10] Hyperbolic differential equations, cours de Princeton, (1954)

R. Matagne

[12] Les espaces de Silva, Bull. Soc. Royale Sciences Liège 33ème année, 12, p. 754–768 (1964)

S. Mizohata

[13] Systèmes hyperboliques. Journal of the Math. Soc. of Japan, Vol. 11, n°3 July 1959.

J. C. De Paris

[14] Problème de Cauchy oscillatoire pour un opérateur différentiel à caractéristiques multiples; lien avec l'hyperbolicité. J. Math. Pures et Appl. 51, p. 231–256 (1972).

V. M. Petkov

[15] Le problème de Cauchy et la propagation des singularités pour une classe de systèmes hyperboliques non symétrisables. Séminaire Goulaouic-Lions-Schwartz exposé 5 (1974–75).

J. Vaillant

[16] Annales Institut Fourier t. 15, fasc. 2, p. 225–311 (1965).

[17] J. Maths. Pures et Appliquées 51, p. 25–51 (1971).

M. Yamaguti

[18] Le problème de Cauchy et les op. d'intégrale singulière. Memoirs of the College of Sciences University of Kyoto-Série A, Vol. 32, (1959).

K. Yoshida

[19] Energy inequalities and finite propagation speed of the Cauchy problem for hyperbolic equations with constantly multiple characteristics. Proc. Japan Acad. 50 p. 561–565 (1974).

R. Berzin

[20] C. R. A. S t. 275 série A et B, n°2, p. 1091–1094.

Mme. Choquet-Bruhat

[21] J. Maths Pures et Appl. 48, p. 117–158 (1969).

J. Leray et Y. Ohya

[22] Systèmes hyperboliques linéaires non stricts. Colloque de Liège 1964. C. N. R. B.

Matsuura

[23] On non strict hyperbolicity. Proc. conf. Funct. Analysis and related topics, Tokyo, (1969).

N. Bourbaki

[24] Groupes et corps ordonnés-Modules sur les anneaux principaux. 1952. Hermann, 94–95.

[25] Algèbre multilinéaire, 1958, Hermann, Paris. p. 115.

J. Vaillant

[26] J. Maths. Pures et Appl. 47, 1968, pp. 1 à 40.

S. Maclane et G. Birkhoff

[27] Algèbre Tome 1 (Structures fondamentales)-Gauthier Villars, Paris, p. 34 et 35.

S. Mizohata et Y. Ohya

[28] Sur la condition de E. E. Levi concernant des équations hyperboliques. Publ. R. I. M. S, Kyoto Univ. Ser. A, 4, 511–526 (1968).

[29] Sur la condition d'hyperbolicité pour les équations à caractéristiques multiples. II. Japanese J. Maths. 40, 63–104 (1971).

Y. Ohya

[30] J. Math. Soc. Japan. 16, p. 268–286 (1964).

[31] E. E. Levi's functions for hyperbolic equations with triple characteristics. Comm. Pure Appl. Math. 25, 257–263 (1972).

[32] C. R. Acad. Sc. Paris t. 282, série p. 1433–1436.

H. Yamahara

[33] On the Cauchy Problem for weakly hyperbolic systems. Proc. Japan Acad, 52, p. 167–170 (1976).

Ajouté dans les epreuves: Note de L'auteur—Dans le cas particulier d'un opérateur différentiel matriciel faiblement hyperbolique du premier ordre tel que l'on ait soit $q^s=1$, soit $q^s=2$, soit encore $q^s=\nu_s$ $(s=1, \cdots, \sigma)$ V. M. Petkov (C. R. Acad. Bulgare des Sciences, T 29, N°8, p. 1095–1097 (1976)) énonce une condition suffisante pour la propagation du front d'onde et la résolution du problème de Cauchy C^∞. Pour ce même problème, plus récemment, avec les hypothéses du § I et la condition C du § II, R. Berzin et J. Vaillant (C.R.A.S. Paris t 283 Série A p. 485–487 (1976)) construisent une paramétrix.