J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)
20-1 (1980) 155-167

Sur la théorie des anneaux excellents en caractéristique p, II

Par

Hamet SEYDI

(Communicated by Prof. M. Nagata, Apr. 1, 1978; Revised, Nov. 15, 1978)

Section 0. Introduction.

Dans cet article nous donnons d'abord les démonstrations de résultats énoncés aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris [14], en y ajoutant certains développements de travaux de Kunz (cf. [6], [7]), puis nous appliquons les résultats obtenus aux morphismes réguliers des anneaux excellents.

Dans cet article, p désignera un nombre premier. On dira qu'un anneau A est de caractéristique p, si A contient un corps de caractéristique p; si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A, $k(\mathfrak{p})$ désignera le corps résiduel de $A_{\mathfrak{p}}$ (i.e. $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$).

Section 1.

Théorème (1.1). *Soit A un anneau noethérien de caractéristique $p>0$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

i) *L'anneau A est une A^p-algèbre finie.*
ii) *Le module Ω_A^1 des différentielles absolues de A est un A-module de type fini et pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, l'anneau local $A_{\mathfrak{m}}$ est universellement japonais.*

De plus, si ces conditions sont satisfaites, A est excellent.

Remarque (1.1.1). Soit A un anneau noethérien de caractéristique p tel que $A^p \to A$ soit un homomorphisme fini, alors tout anneau de séries formelles à un nombre fini de variables sur A satisfait également à ces conditions et par conséquent un tel anneau est excellent.

Corollaire (1.1.2). *Soient k un corps de caractéristique $p>0$, A une k-algèbre noethérienne et I un idéal de A. On suppose vérifiées les conditions suivantes:*

i) *A est séparé et complet pour la topologie I-adique et A/I est universellement japonais.*
ii) *Pour tout point fermé x de $X=\mathrm{Spec}(A)$, on a $[k(x):k(x)^p]<\infty$.*

Alors, A est un anneau excellent.

Preuve. On peut supposer que A est intègre. D'après le théorème de Marot [8], l'anneau A est universellement japonais. D'autre part, si K désigne le corps des fractions de A, la condition ii) implique que $[K:K^p]<\infty$ (cf. [13], [3] 20.5.12). Par conséquent A est une A^p-algèbre finie.

Lemme (1.2). *Soient A un anneau local noethérien de caractéristique $p>0$, K son corps résiduel, et $\hat{A}$ son séparé complété.*

1) *Si $[K:K^p]<\infty$, alors:*

i) $\Omega^1_{\hat{A}/A}=0$,

ii) *de plus, si A est excellent, on a $\Omega^1_{\hat{A}/k}\cong\Omega^1_{A/k}\otimes_A\hat{A}$.*

2) *Si Ω^1_A est un A-module de type fini, alors $[K:K^p]<\infty$.*

En particulier, si A est de plus universellement japonais, ses fibres formelles sont géométriquement régulières.

Preuve. 1) i) La relation $\Omega^1_{\hat{A}/A}=0$ découlera de la relation $\hat{A}=\hat{A}^p[A]$ (cf. [3] 21.1.5), puisque l'homomorphisme canonique $\hat{A}^p\to\hat{A}$ est fini (cf. [10] 30.6).

ii) Supposons que A soit excellent. Dans ce cas $A^p\to A$ est un homomorphisme fini d'après ([13] Corollaire 1.3), donc Ω^1_A est un A-module de type fini. Comme on a un homomorphisme surjectif $\Omega^1_A\to\Omega^1_{A/k}$, on en conclut que $\Omega^1_{A/k}$ est un A-module de type fini. Ce qui implique que $\Omega^1_{A/k}\hat{\otimes}_A\hat{A}\cong\Omega^1_{A/k}\otimes_A\hat{A}$.

D'autre part, comme $\Omega^1_{\hat{A}/k}$ est un $\hat{A}$-module de type fini, on en déduit qu'il est séparé et complet pour la topologie préadique; donc $\hat{\Omega}^1_{\hat{A}/k}\cong\Omega^1_{\hat{A}/k}$.

La suite exacte

$$0\longrightarrow\Omega^1_{A/k}\hat{\otimes}_A\hat{A}\longrightarrow\hat{\Omega}^1_{\hat{A}/k}\longrightarrow\hat{\Omega}^1_{\hat{A}/A}=0\qquad\text{(cf. [3] 20.7.20)}$$

montre alors que $\Omega^1_{\hat{A}/k}\cong\Omega^1_{A/k}\otimes_A\hat{A}$.

2) Supposons que Ω^1_A soit un A-module de type fini. Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A. Alors, on a une suite exacte

$$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2\longrightarrow\Omega^1_A\otimes_A K\longrightarrow\Omega^1_K\longrightarrow 0\qquad\text{([3] 20.7.8)}.$$

Ω^1_K est donc un K-espace vectoriel de dimension finie. Par conséquent, on a $[K:K^p]<\infty$. En particulier, si A est de plus universellement japonais, il est excellent (cf. [6], [7], [13]).

Lemme (1.3). *Soit A un anneau local noethérien de caractéristique $p>0$. On suppose que l'homomorphisme $A^p\to A$ est fini. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

i) *A possède une p-base sur A^p.*

ii) *Ω^1_A est un A-module libre.*

En particulier, si ces conditions sont satisfaites et si A est réduit, alors A est régulier.

Preuve. L'implication i) $\Rightarrow$ ii) découle de ([3] 21.2.5). Montrons maintenant que ii) implique i). Comme Ω^1_A est un A-module de type fini engendré par les dx, où $x\in A$, on en conclut, puisque A est local, qu'il existe $x_1,\cdots,x_n\in A$ tels que $dx_1, \cdots, dx_n$ forment une base de Ω^1_A. D'après ([3] 21.1.7), $A=A^p[x_1, \cdots, x_n]$; on voit facilement que les $x_1, \cdots, x_n$ forment une p-base de A sur A^p; sous ces conditions, A est donc plat sur A^p, et par conséquent, d'après le théorème de Kunz [6], si A est réduit, A est régulier.

Corollaire (1.3.1). *Soient k un corps parfait de caractéristique $p>0$, A une k-algèbre noethérienne telle que $A^p \to A$ soit un homomorphisme fini, $X=\mathrm{Spec}(A)$ et $x \in X$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

i) *$\mathcal{O}_{X,x}$ est régulier.*

ii) *$(\Omega^1_{X/k})_x$ est un $\mathcal{O}_{X,x}$-module plat at $\mathcal{O}_{X,x}$ est réduit.*

Preuve. L'implication ii) $\Rightarrow$ i) découle de (1.3). Montrons que i) implique ii). Posons $B=\mathcal{O}_{X,x}$. Alors B est une k-algèbre formellement lisse pour la topologie préadique. Comme $\Omega^1_{B/k}$ est un B-module de type fini, c'est un B-module libre d'après ([3] 20.4.1).

Corollaire (1.3.2). *Soient k un corps parfait de caractéristique $p>0$, A une k-algèbre locale noethérienne et K son corps résiduel. On suppose que $[K:K^p]<\infty$. Alors A est un anneau local régulier si et seulement si $\Omega^1_{A/k}$ est un A-module formellement projectif (pour la topologie préadique) et que le séparé complété $\hat{A}$ de A soit réduit.*

Preuve. Comme on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \hat{\Omega}^1_{A/k}\hat{\otimes}_A\hat{A} \longrightarrow \hat{\Omega}^1_{\hat{A}/k} \longrightarrow \hat{\Omega}^1_{\hat{A}/A} \longrightarrow 0 \qquad \text{(cf. [3] 20.7.18)}$$

donc $\hat{\Omega}^1_{A/k}\hat{\otimes}_A\hat{A} \cong \hat{\Omega}^1_{\hat{A}/k}$ (cf. (1.2)). Par conséquent, pour que $\Omega^1_{A/k}$ soit un A-module formellement projectif pour la topologie préadique, il faut et il suffit que $\hat{\Omega}^1_{\hat{A}/k}=\Omega^1_{\hat{A}/k}$ soit un $\hat{A}$-module libre de type fini.

Remarque (1.3.3). (1.3.1) et (1.3.2) ont été énoncés dans [14] sans l'hypothèse que le séparé complété $\hat{A}$ de A soit réduit. Cette hypothèse est cependant nécessaire toutefois on peut la remplacer par une autre qui lui est équivalente, de la façon suivante:

Proposition (1.3.3.1). *Soient k un corps parfait de caractéristique $p>0$, A une k-algèbre noethérienne telle que $A^p \to A$ soit un homomorphisme fini, $X=\mathrm{Spec}(A)$ et $x \in X$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

i) *$\mathcal{O}_{X,x}$ est régulier.*

ii) $\mathrm{rang}((\Omega^1_{X/k})_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} k(x)) = \dim(\mathcal{O}_{X,x}) + \mathrm{rang}(\Omega^1_{k(x)})$.

Preuve. i) $\Rightarrow$ ii) est une conséquence de (3.1) et de (1.3.1) ii).
ii) $\Rightarrow$ i): On a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \longrightarrow \Omega^1_B \otimes_B K \longrightarrow \Omega^1_{K/k} \longrightarrow 0 \qquad \text{(cf. [3] 20.4.11)},$$

$\mathfrak{m}$ désignant l'idéal maximal de $B=\mathcal{O}_{X,x}$ et K son corps résiduel. Par conséquent, $\mathrm{rang}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)=\dim(\mathcal{O}_{X,x})$.

Démonstration du Théorème (1.1): L'implication i)$\Rightarrow$ii) est triviale (cf. [6]). Montrons que ii) implique i). Pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, $\Omega^1_{A_\mathfrak{p}}\cong\Omega^1_A\otimes_A A_\mathfrak{p}$ est un $A_\mathfrak{p}$-module de type fini. Par conséquent, les fibres formelles de $A_\mathfrak{p}$ sont géométriquement régulières d'après (1.2).

Soit B une A-algèbre finie et intègre. Alors le B-module Ω^1_B est de type fini ([3] 21.1.7), donc l'ensemble V des points y de $Y=\mathrm{Spec}(B)$ où $\Omega^1_{Y,y}\cong(\widetilde{\Omega^1_B})_y$ est un $\mathcal{O}_{Y,y}$-module libre est ouvert dans Y.

Mais en tout point $y\in V$, l'anneau local $\mathcal{O}_{Y,y}$ est régulier d'après (1.3), comme le point générique de Y appartient à V, V n'est pas vide. Par conséquent, A satisfait aux conditions ii) et iii) de la définition des anneaux excellents ([4] 7.8.2); A est donc un anneau universellement japonais (cf. [4] 7.7.2).

Soient $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_n$ les idéaux premiers minimaux de A, $B_i=A/\mathfrak{p}_i$ $(1\leq i\leq n)$ et L_i le corps des fractions de B_i $(1\leq i\leq n)$. Comme $\Omega^1_{L_i}=\Omega^1_{B_i}\otimes_{B_i}L_i$ est un espace vectoriel de dimension finie sur L_i, on a $[L_i : L_i^p]<\infty$ ([3] 21.2.5). Par conséquent, l'homomorphisme $(A_{\mathrm{réd}})^p\rightarrow A_{\mathrm{réd}}$ est fini, d'où l'on déduit que $A^p\rightarrow A$ est aussi fini.

Comme nous savons déjà que A vérifie les conditions ii) et i) de la définition des anneaux excellents ([4] 7.8.2), il ne nous reste plus qu' à établir que A est universellemnt caténaire; pour cela, nous renvoyons au Théorème (2.1).

Section 2.

Théorème (2.1) (Kunz [7]). *Moyennant les hypothèses et notations de* (1.1), *les conditions équivalentes* i) *et* ii) *de* (1.1) *impliquent que l'anneau A est universellement caténaire.*

Preure. Nous pouvons supposer que A est un anneau local intègre. (2.1) est alors une conséquence du lemme suivant.

Lemme (2.1.1). *Soient A un anneau local noethérien intègre de caractéristique $p>0$ tel que $A^p\rightarrow A$ soit un homomorphisme fini, K son corps des fractions, $\hat{A}$ son séparé complété et K^* l'anneau des fractions totales de $\hat{A}$. Alors*

$\mathrm{rang}(\Omega^1_K)=\mathrm{rang}(\Omega^1_{K_i})=\dim(A)+\mathrm{rang}(\Omega^1_k)$ $(1\leq i\leq s)$ (*où k désigne le corps résiduel de A et $K^*\cong K_1\oplus\cdots\oplus K_s$*).

En particulier, A est formellement équidimensionnel.

Preuve. On a la suite exacte

$$0\longrightarrow \Upsilon_{K^*/K}\longrightarrow \Omega^1_K\otimes_K K^*\longrightarrow \Omega^1_{K^*}\longrightarrow \Omega^1_{K^*/K}\longrightarrow 0 \qquad ([3]\ 20.6.1.1).$$

Comme $\Upsilon_{K^*/K}=\Omega^1_{K^*/K}=0$ et $\Omega^1_{K^*}\cong\Omega^1_{K_1}\oplus\cdots\oplus\Omega^1_{K_s}$ (cf. (1.2) et [3] 20.3.6), $\mathrm{rang}(\Omega^1_K)=\mathrm{rang}(\Omega^1_{K_i})$ $(1\leq i\leq s)$, on peut donc supposer que A est complet, par conséquent, il existe un anneau local régulier complet R avec un idéal premier $\mathfrak{p}$ tels que $A=R/\mathfrak{p}$, on a alors la suite exacte

$$0\longrightarrow \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2\otimes_R K\longrightarrow \Omega^1_R\otimes_R K\longrightarrow \Omega^1_K\longrightarrow 0 \qquad ([3]\ 20.5.14),$$

d'où l'on déduit que

$$\operatorname{rang}(\Omega^1_K)=\operatorname{rang}(\Omega^1_R\otimes_R K)-\operatorname{ht}(\mathfrak{p})=\operatorname{rang}(\Omega^1_R)-\operatorname{ht}(\mathfrak{p})$$
$$=\dim(R)+\operatorname{rang}(\Omega^1_k)-\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) \quad (\text{cf. [3] } 21.1.9)$$
$$=\dim(A)+\operatorname{rang}(\Omega^1_k).$$

Ce qui termine la démonstration de (1.1).

Remarque (2.1.2). E. Kunz a prouvé, de plus de la conclusion de (2.1), que A est de dimension finie ([7] Proposition 1.1). Pour voir cela, nous pouvons supposer que A est intègre. Soit alors n le nombre d'éléments d'une partie génératrice finie de Ω^1_A, $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de A et $K=A/\mathfrak{m}$. La suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \longrightarrow \Omega^1_A\otimes_A K \longrightarrow \Omega^1_K \longrightarrow 0 \qquad ([3]\ 20.5.14)$$

montre que $\operatorname{rang}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)\leqq n$. Par conséquent $\dim(A_\mathfrak{m})\leqq n$. Donc, A est de dimension finie ($\leqq n$).

Corollaire (2.1.3). *Soit A un anneau noethérien de caractéristique $p>0$ tel que $A^p\to A$ soit un homomorphisme fini. Alors, pour tout couple d'idéaux premiers* $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ *tels que* $\mathfrak{p}\subset\mathfrak{q}$, $\operatorname{rang}(\Omega^1_{k(\mathfrak{p})})=\dim((A/\mathfrak{p})_\mathfrak{q})+\operatorname{rang}(\Omega^1_{k(\mathfrak{q})})$.

Lemme (2.1.4). *Soient A un anneau local noethérien, hensélien, intègre, tel que sa clôture intégrale $\bar{A}$ dans son corps des fractions K soit un A-module fini; t étant un élément A, si A/tA est formellement équidimensionnel, A est aussi formellement équidimensionnel.*

Preuve. Comme A/tA est formellement équidimensionnel si et seulement si $\bar{A}/t\bar{A}$ est formellement équidimensionnel, $\bar{A}$ est formellement équidimensionnel (cf. [4] 5.12.2). Par conséquent A est aussi formellement équidimensional.

Corollaire (2.1.5). *Soit A un anneau local noethérien uuiversellement japonais, dont le corps résiduel k est de caractéristique $p>0$ et tel que $[k:k^p]<\infty$. Alors, si A/pA et ${}^hA$ le hensélisé de A, sont équidimensionnels, A est formellement équidimensionnel; en particulier A est universellement caténaire.*

Preuve. Comme A/pA est formellement équidimensionnel (cf. (2.1.1)), ${}^hA/p^hA$ est aussi formellement équidimensionnel; on peut donc supposer que A est hensélien, intègre et que A/pA est (formellement) équidimensionnel. Alors d'après (2.1.4), A est aussi formellement équidimensionnel.

Remarque (2.1.6). On peut donner des conditions suffisantes pour (2.1.5): Soit A un anneau local noethérien intègre et universellement japonais, dont le corps résiduel k est de caractéristique $p>0$ et tel que $[k:k^p]<\infty$. Si l'une des conditions suivantes est satisfaite, A est formellement équidimensionel et par conséquent universellement caténaire:

(2.1.6.1) A est normal et caténaire.

(2.1.6.2) A est unibranche et caténaire.

(2.1.6.3) A est caténaire et pour tout idéal maximal $\bar{\mathfrak{m}}$ de $\bar{A}$ (=la clôture intégrale de A dans son corps des fractions), $\dim(\bar{A}_{\bar{\mathfrak{m}}})=\dim(A)$.

Section 3.

Proposition (3.1). *Soit A un anneau local noethérien régulier de caractéristique $p>0$, de corps résiduel K. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

i) *A est une A^p-algèbre finie.*

ii) *A est excellent, et $[K:K^p]<\infty$.*

iii) *Ω_A^1 est un A-module de type fini.*

iv) $\operatorname{rang}(\Omega_L^1)=\dim(A)+\operatorname{rang}(\Omega_K^1)<\infty$, *$L$ désignant le corps des fractions de A.*

De plus, si k est un corps et A est une k-algèbre formellement lisse, alors les conditions précédentes sont équivalentes à

v) *$\Omega_{A/k}^1$ est un A-module de type fini, et $[K:K^p]<\infty$.*

Preuve. Les implications i) $\Leftrightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii) $\Rightarrow$ v) sont triviales ou bien connues (cf. Remarque (3.1.1.2)).

iii) $\Rightarrow$ iv): Comme $\Omega_A^1\otimes_A\hat{A}\cong\hat{\Omega}_A^1\cong\hat{\Omega}_{\hat{A}}^1\cong\Omega_{\hat{A}}^1$, donc $\operatorname{rang}(\Omega_L^1)=\operatorname{rang}(\Omega_{L^*}^1)=\dim(A)+\operatorname{rang}(\Omega_K^1)$, L^* désignant le corps des fractions de $\hat{A}$ (cf. [3] 21.1.9).

iv) $\Rightarrow$ i): Comme on a la suite exacte

$$0\longrightarrow \Upsilon_{L^*/L}\longrightarrow \Omega_L^1\otimes_L L^*\longrightarrow \Omega_{L^*}^1\longrightarrow 0 \qquad \text{(cf. (1.2), [3] 20.6.1.1)},$$

on en déduit que $\Upsilon_{L^*/L}=0$, L^* est donc une extension séparable de L ([3] 20.6.3). Par conséquent, A est un anneau japonais et $[L:L^p]<\infty$; A est donc un A^p-module fini.

v) $\Rightarrow$ iii): Comme on a la suite exacte

$$0\longrightarrow \Omega_k^1\otimes_k A\longrightarrow \Omega_A^1\longrightarrow \Omega_{A/k}^1\longrightarrow 0 \qquad \text{(cf. [3] 20.6.1.1, 20.6.3)},$$

Ω_A^1 est un A-module projectif (cf. [3] 20.4.11). D'autre part, on a la suite exacte

$$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2\longrightarrow \Omega_A^1\otimes_A K\longrightarrow \Omega_K^1\longrightarrow 0.$$

Par conséquent, Ω_A^1 est un A-module fini.

Remarque (3.1.1.1). Un résultat plus général que l'implication iii) $\Rightarrow$ ii) est donné par André ([1] p. 10, Théorème).

Remarque (3.1.1.2). Sans hypothèse de régularité, on a les implications suivantes: i) $\Leftrightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii) $\Rightarrow$ v) et i) $\Rightarrow$ iv) (cf. (2.1.3)).

Corollaire (3.1.2). *Soit k un corps parfait de caractéristique $p>0$ et A une k-algèbre locale régulière dont le corps résiduel est parfait. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

i) *A est un anneau excellent.*

ii) *$\Omega_{A/k}^1$ est un A-module de type fihi.*

iii) $\operatorname{rang}(\Omega_{L/k}^1)=\dim(A)$, *$L$ désignant le corps des fractions de A.*

Corollaire (3.1.3). *Soient k un corps de caractéristique $p>0$ tel que $[k:k^p]<\infty$ et A une k-algèbre locale formellement lisse (pour la topologie préadique), dont le* *corps résiduel K est une extension de type fini de k. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

i) *A est un anneau excellent.*

ii) *$\Omega^1_{A/k}$ est un A-module de type fini.*

iii) $\operatorname{rang}(\Omega^1_L)=\dim(A)+\operatorname{deg.tr}_k K+\operatorname{rang}(\Omega^1_k)$, *$L$ désignant le corps des fractions de A.*

(*cf. l'égalité de Cartier* [3] 21.7.1)

Corollaire (3.1.4). *Soit A un anneau régulier de caractéristique $p>0$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

i) *A est une A^p-algèbre finie.*

ii) *Ω^1_A est un A-module de type fini.*

Proposition (3.2). *Soient A un anneau noethérien régulier et intègre, et L son corps des fractions. On suppose vérifiées les conditions suivantes:*

i) *A est de caractéristique $p>0$.*

ii) $\operatorname{rang}(\Omega^1_L)=n<\infty$ (*i.e.* $[L:L^p]=p^n$).

iii) *Il existe n éléments $x_1, \cdots, x_n$ de A et des dérivations $D_1, \cdots, D_n$ de A dans lui-même tels que $D_i x_j=\delta_{ij}$, où δ_{ij} est le symbole de Kronecker.*

Alors, A est un anneau excellent. Plus précisément, $A=A^p[x_1, \cdots, x_n]$.

Preuve. Soit $B=A^p[x_1, \cdots, x_n]$, son corps des fractions est L (cf. (1.3)). Donc, pour tout élément x de A, on peut écrir $x=\sum\alpha_I x^I$ où $\alpha_I\in L^p$ et $I=(i_1, \cdots, i_n)$, $0\leqq i_j<p$. En utilisant $D^I=D^{i_1}\cdots D^{i_n}$, on voit que $\alpha_I\in A\cap L^p=A^p$ (*cf.* [6]).

Proposition (3.3). *Soient A un anneau local régulier de caractéristique $p>0$, et K son corps résiduel. On suppose que $[K:K^p]<\infty$.*

Alors, A est un anneau excellent si et seulement si son séparé complété $\hat{A}$ est une A-algèbre formellement étale pour les topologies discrètes.

Preuve. Supposons d'abord que l'anneau A soit excellent. Dans ce cas Ω^1_A est un A-module de type fini, donc $\hat{\Omega}^1_A\cong\Omega^1_A\hat{\otimes}_A\hat{A}\cong\Omega^1_A\otimes_A\hat{A}$ ([3] 21.1.7). D'autre part comme $\hat{A}$ est une A-algèbre formellement lisse pour les topologies préadiques, on a la suite exacte

$$0\longrightarrow\Omega^1_A\hat{\otimes}_A\hat{A}\cong\Omega^1_A\otimes_A\hat{A}\longrightarrow\Omega^1_{\hat{A}}\longrightarrow\Omega^1_{\hat{A}/A}(=0)\longrightarrow 0 \qquad \text{(cf. (1.2))},$$

donc $\hat{A}$ est une A-algèbre formellement lisse pour les topologies discrètes, comme de plus $\Omega^1_{\hat{A}/A}=0$, $\hat{A}$ est aussi une A-algèbre formellement non ramifiée pour les topologies discrètes. Donc, $\hat{A}$ est une A-algèbre formellement étale pour les topologies discrètes.

Supposons maintenant que $\hat{A}$ soit une A-algèbre formellement étale pour les topologies discrètes. Dans ce cas $\hat{\Omega}^1_A\cong\Omega^1_A\otimes_A\hat{A}$ (cf. [3] 20.7.6), et comme $\hat{\Omega}^1_A$ est un $\hat{A}$-module de type fini, Ω^1_A est un A-module de type fini.

Section 4.

Théorème (4.1). *Soient k un corps, p son exposant caractéristique et A une k-algèbre noethérienne. On suppose vérifiées les conditions suivantes:*

i) *$\Omega^1_{A/k}$ est un A-module projectif.*

ii) *Pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, l'anneau local $A_{\mathfrak{m}}$ est une k-algèbre formellement lisse pour la topologie préadique.*

Soit $B=A[T_1, \cdots, T_r]$ un anneau de polynômes à un nombre fini de variables sur A, $\mathfrak{q}$ un idéal de B, $C=B/\mathfrak{q}$, $\mathfrak{p}$ un idéal premier de B contenant $\mathfrak{q}$.

1) *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

a) *$C_{\mathfrak{p}}$ est une k-algèbre formellement lisse (pour la topologie $\mathfrak{p}$-adique).*

b) *Il existe des k-dérivations D_i de B dans lui-même ($1 \leqq i \leqq m$) et des éléments f_i de $\mathfrak{q}$ ($1 \leqq i \leqq m$), tels que les images des f_i dans $B_{\mathfrak{p}}$ engendrent $\mathfrak{q}B_{\mathfrak{p}}$ et que l'on ait* $\text{dét}(D_i f_j) \notin \mathfrak{p}$.

2) *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

a_0) *$C_{\mathfrak{p}}$ est un anneau local régulier.*

b_0) *Il existe une sous-extension k_0 de k content k^p telle que $[k : k_0] < \infty$, des k_0-dérivations D_i de B dans lui-même ($1 \leqq i \leqq m$) et des éléments f_i de $\mathfrak{q}$ ($1 \leqq i \leqq m$), tels que les images des f_i dans $B_{\mathfrak{p}}$ engendrent $\mathfrak{q}B_{\mathfrak{p}}$ et que l'on ait* $\text{dét}(D_i f_j) \notin \mathfrak{p}$.

Preuve. 1) a) $\Leftrightarrow$ l'homomorphisme canonique $\mathfrak{q}/\mathfrak{q}^2 \otimes_B K \to \Omega^1_{B/k} \otimes_B K$ (où $K = B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}$, [3] 22.6.2) est injectif, puisque $B_{\mathfrak{p}}$ est une k-algèbre formellement lisse.

$0 \to \mathfrak{q}/\mathfrak{q}^2 \otimes_B K \to \Omega^1_{B/k} \otimes_B K$ (exacte) $\Leftrightarrow$ b) ([3] 19.1.12), car $\Omega^1_{B/k}$ est un B-module projectif (cf. [3] 20.6.2, 19.3.3).

2) Soient $R = B_{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}$ et $K = R/\mathfrak{m}$ $(= B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}})$. Comme R est une k-algèbre formellement lisse pour la topologie préadique ([3] 22.5.9), $\Upsilon_{K/k}$ est un K-espace vectoriel de demension finie ([3] 22.2.6). Donc il existe un sons-corps k_0 de k contenant k^p tel que $[k : k_0] < \infty$ et que $0 \to \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to \Omega^1_{R/k_0} \otimes_R K = \Omega^1_{B/k_0} \otimes_B K$ soit exacte (cf. [3] 22.2.11, 22.2.9). Comme on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \Omega^1_{k/k_0} \otimes_k B \longrightarrow \Omega^1_{B/k_0} \longrightarrow \Omega^1_{B/k} \longrightarrow 0 \quad \text{(cf. [3] 20.6.2, 22.5.9, 20.6.3)},$$

Ω^1_{B/k_0} est un B-module projectif.

a_0) $\Rightarrow$ $0 \to \mathfrak{q}/\mathfrak{q}^2 \otimes_B K \to \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ (exacte) $\Rightarrow$ b_0) ([3] 19.1.12).

b_0) $\Rightarrow$ $0 \to \mathfrak{q}/\mathfrak{q}^2 \otimes_B K \to \Omega^1_B \otimes_B K$ (exacte), et comme $B_{\mathfrak{p}}$ est une $\boldsymbol{F}_p$-algèbre formellement lisse, on a bien a_0) ([3] 22.6.2).

Remarque (4.1.1.1). Les hypothèses de (4.1) sont vérifiées lorsque A est un anneau de polynômes à un nombre fini de variables sur k, ou plus généralement une algèbre de type fini formellement lisse pour la topologie discrète sur une xtension séparable de k.

Remarque (4.1.1.2). Si k est de caractéristique zéro, l'hypothèse i) de (4.1) implique l'hypothèse ii) (cf. [11] Théorème).

Remarque (4.1.1.3). Si k est parfait, $\Omega^1_{A/k}$ est un A-module de type fini, et pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, le séparé complété $A^{\wedge}_{\mathfrak{m}}$ de $A_{\mathfrak{m}}$ est réduit; l'hypothèse i) de (4.1) implique alors l'hypothèse ii) (cf. (1.3.2), (3.1.4), et [12]).

Corollaire (4.1.2). *Avec les notations et les hypothèses de* (4.1), *l'anneau A est excellent et l'ensemble des idéaux premiers $\mathfrak{n}$ de C tels que l'anneau local $C_{\mathfrak{n}}$ soit une k-algèbre formellement lisse pour la topologie préadique est ouvert dans* Spec(C).

Corollaire (4.1.3) *Soit A un anneau régulier contenant un corps tel que le A-module Ω^1_A des différentielles absolues de A soit de type fini, $B=A[T_1, \cdots, T_r]$ un anneau de polynômes à un nombre fini de variables sur A, $\mathfrak{q}$ un idéal de B, $C=B/\mathfrak{q}$, $\mathfrak{p}$ un idéal premier de B contenant $\mathfrak{q}$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

a) *$C_{\mathfrak{p}}$ est un anneau régulier.*

b) *Il existe des dérivations D_i de B dans lui-même $(1\leqq i\leqq m)$ et des éléments f_i de $\mathfrak{q}$ $(1\leqq i\leqq m)$, tels que les images des f_i dans $B_{\mathfrak{p}}$ engendrent $\mathfrak{q}B_{\mathfrak{p}}$ et que l'on ait* $\text{dét}(D_i f_j)\notin\mathfrak{p}$.

Par conséquent l'anneau A est excellent.

Section 5.

Théorème (5.1). *Soient A un anneau local noethérien quasi-excellent (i.e. excellent sans la condition universelle de chaînes), B un anneau local noethérien et $\phi: A\to B$ un homomorphisme local faisant de B une A-algèbre formellement lisse pour les topologies préadiques. Alors ${}^a\phi$*: Spec$(B)\to$Spec(A) *est un morphisme régulier (i.e. plat et à fibres géométriquement régulières).*

Preuve. Comme A est quasi-excellent, on peut supposer que A et B sont complets (cf. [3] 7.3.4) et il suffit alors de montrer que si A est en plus intègre, la fibre de ${}^a\phi$ au point générique est régulière.

D'abord, il existe un anneau de séries formelles sur un anneau de Cohen $R=W[[T_1, \cdots, T_n]]$ et un idéal premier $\mathfrak{p}$ de R tels que $A=R/\mathfrak{p}$ ([3] 19.8.8). D'après ([3] 19.7.2), il exists un anneau local noethérien complet S et un homorphisme local $\Psi: R\to S$ faisant de S une R-algèbre formellement lisse (pour les topologies préadiques) tels que $B=S\otimes_R A$ et $\phi=\overline{\Psi}: R/\mathfrak{p}\to S/\mathfrak{p}S$ (l'homomorphisme induit par Ψ).

Maintenant nous traiterons deux cas séparément.

1) A contient corps (dans ce cas on peut supposer $W=K$ un corps): D'après le critère jacobien de Nagata ([3] 22.7.3), il existe un souscorps K_0 de K contenant K^p (où p est l'exposant caractéristique de K) tel que $[K:K_0]<\infty$, des K_0-dérivations D_i de R dans lui-même $(1\leqq i\leqq m)$ et des éléments f_i de $\mathfrak{p}$ $(1\leqq i\leqq m)$, tels que les images des f_i dans $R_{\mathfrak{p}}$ engendrent $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ et que l'on ait $\text{dét}(D_i f_j)\notin\mathfrak{p}$. Mais comme Ψ fait de S une R-algèbre formellement lisse, on a la suite exacte scindée

$$0 \longrightarrow \hat{\Omega}^1_{R/K_0}\hat{\otimes}_R S \longrightarrow \hat{\Omega}^1_{S/K_0} \longrightarrow \Omega^1_{S/R} \longrightarrow 0 \qquad ([3]\ 20.7.18)$$

qui donne la suite exacte

$$0 \longrightarrow \text{Dér}_R(S, S) \longrightarrow \text{Dér}_{K_0}(S, S) \longrightarrow \text{Hom}_S(\hat{\Omega}^1_{R/K_0}\hat{\otimes}_R S, S) \longrightarrow 0,$$

et comme $\hat{\Omega}^1_{R/K_0}$ est un R-module libre de type fini ([3] 21.9.2), $\hat{\Omega}^1_{R/K_0}\hat{\otimes}_R S \cong \hat{\Omega}^1_{R/K_0}\otimes_R S$, d'où l'on déduit que $\text{Hom}_S(\hat{\Omega}^1_{R/K_0}\hat{\otimes}_R S, S) \cong \text{Hom}_R(\hat{\Omega}^1_{R/K_0}, R)\otimes_R S \cong \text{Dér}_{K_0}(R, R)\otimes_R S$. Par conséquent, toute K_0-dérivation de R dans lui-même se prolonge en une K_0-dérivation de S dans lui-même.

Soit donc $D'_i \in \text{Dér}_{K_0}(S, S)$ des prolongements de D_i ($1 \leqq i \leqq m$), alors, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}'$ de S au-dessus de $\mathfrak{p}$, on a $\text{dét}(D'_i f_j) \notin \mathfrak{p}'$. Par conséquent, $(S/\mathfrak{p}S)_{\mathfrak{p}'}$ est régulier (cf. [3] 22.7.3).

2) A ne contient pas de corps: Comme A ne contient pas de corps, on a $\mathfrak{p}\cap W = (0)$, donc, d'après ([15] 1.2.4), il existe des W-dérivations D_i de R dans lui-même ($1 \leqq i \leqq m$), des éléments f_i de $\mathfrak{p}$ ($1 \leqq i \leqq m$) tels que les images des f_i dans $R_{\mathfrak{p}}$ engendrent $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ et que l'on ait $\text{dét}(D_i f_j) \notin \mathfrak{p}$. Comme S est une R-algèbre formellement lisse, on a la suite exacte scindée

$$0 \longrightarrow \hat{\Omega}^1_{R/W}\hat{\otimes}_R S \longrightarrow \hat{\Omega}^1_{S/W} \longrightarrow \hat{\Omega}^1_{S/R} \longrightarrow 0 \qquad ([3]\ 20.7.18).$$

Soit ωW l'idéal maximal de W et k son corps résiduel. Comme $\hat{\Omega}^1_{\bar{R}/k}$ est un $\bar{R}$ ($=R/\omega R$)-module de type fini ([3] 20.7.15), $\hat{\Omega}^1_{R/W}$ est un R-module libre de type fini (cf. [3] 20.4.11). Par conséquent $\hat{\Omega}^1_{R/W}\hat{\otimes}_R S \cong \hat{\Omega}^1_{R/W}\otimes_R S$.

Donc la suite exacte

$$0 \longrightarrow \text{Dér}_R(S, S) \longrightarrow \text{Dér}_W(S, S) \longrightarrow \text{Hom}_S(\hat{\Omega}^1_{R/W}\otimes_R S, S)$$
$$\cong \text{Dér}_W(R, R)\otimes_R S \longrightarrow 0$$

montre que toute W-dérivation de R dans lui-même se prolonge en une W-dérivation de S dans lui-même.

Soit donc $D'_i \in \text{Dér}_W(S, S)$ des prolongements de D_i ($1 \leqq i \leqq m$), alors, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}'$ de S au-dessus de $\mathfrak{p}$, on a $\text{dét}(D'_i f_j) \notin \mathfrak{p}'$. Par conséquent $(S/\mathfrak{p}S)_{\mathfrak{p}'}$ est régulier.

Remarque (5.1.1). Ce résultat a été énoncé sans démonstration dans [14] sous l'hypothèse: A est un anneau excellent contenant un corps.

Il a été établi sons la forme précédente par André [1] qui utilise ses résultats sur l'homologie des algèbres commutatives (aussi voir [2]).

Corollaire (5.1.2). *Soient A et B deux anneaux locaux noethériens et $\phi: A \to B$ un homomorphisme local faisant de B une A-algèbre formellement lisse pour les topologies préadiques. Supposons que A soit un $\boldsymbol{P}$-anneau (où $\boldsymbol{P}$ est une des propriétés considérées dans* [3] 7.4.1). *Alors ${}^a\phi: \text{Spec}(B) \to \text{Spec}(A)$ est un $\boldsymbol{P}$-morphisme.*

Corollaire (5.1.3). *Soit A un anneau semi-local noethérien et ${}^{hs}A$ son hensélisé strict. Alors A est (quasi-)excellent si et seulement si ${}^{hs}A$ est (quasi-)excellent.*

Preuve. A est universellement caténaire si et seulement si ${}^{hs}A$ est universellement caténaire (cf. [5] 18.8.17), il reste donc à montrer que A est quasi-excellent si et seulement si ${}^{hs}A$ est quasi-excellent.

Comme $({}^{hs}A)^{\wedge}$ est une $\hat{A}$-algèbre formellement lisse et $\hat{A}$ est excellent, on en conclut d'après (5.1) que le morphisme $\mathrm{Spec}({}^{hs}A)^{\wedge}\to\mathrm{Spec}(\hat{A})$ est régulier. Donc le morphisme $\mathrm{Spec}(\hat{A})\to\mathrm{Spec}(A)$ est régulier si et seulement si le morphisme $\mathrm{Spec}({}^{hs}A)^{\wedge}\to\mathrm{Spec}({}^{hs}A)$ est régulier, puisque pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, ${}^{hs}A\otimes_A k(\mathfrak{p})$ est une somme finie de corps, extension algébriques séparables de $k(\mathfrak{p})$.

Corollaire (5.1.4). *Soient A un anneau semi-local noethérien et ${}^{hs}A$ son hesélisé strict. pour que A soit un $\boldsymbol{P}$-anneau (où $\boldsymbol{P}$ est la propriété considérée dans* ([5] 18.7.1)$+\boldsymbol{P}_1'$ ([4] 7.3.5)), *il faut et il suffit que ${}^{hs}A$ en soit un aussi.*

Section 6.

La plupart des résultats de cette partie ont été obtenus indépendamment par Matsumura [9], dont les résultats ont paru tandis que nous rédigions la version préliminaire de ce travail ; pour ne pas allonger inutilement cet article, nous énoncerons sans démonstration les résultats de cette partie qui sont communs avec ceux de Matsumura.

Définition (6.1). Soit k un anneau et A une k-algèbre. On dit que A satisfait à (J_k) au point $\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(A)$ s'il existe des k-dérivations D_i de A dans lui-même $(1\leqq i\leqq s)$ et des éléments f_i de $\mathfrak{p}$ $(1\leqq i\leqq s)$ tels que les images des f_i dans $A_{\mathfrak{p}}$ engendrent $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ et que l'on ait $\mathrm{dét}(D_i f_j)\notin\mathfrak{p}$; si $k=\boldsymbol{Z}$, on écrit (J) au lieu de $(J_{\boldsymbol{Z}})$.

Proposition (6.2) (*cf.* [9] Theorem 14). *Soit A un anneau noethérian régulier. On suppose que pour tout anneau de polynômes B à un nombre fini de variables sur A et tout ideal premier $\mathfrak{p}$ de B tel que l'homomorphisme $A\to B/\mathfrak{p}$ soit fini, B satisfait à (J) au point $\mathfrak{p}$. Alors A est excellent.*

Proposition (6.3) (*cf.* [9] Theorems 6, 9 and 10). *Soient k un corps de caractéristique zéro et A une k-algèbre noethérienne régulière et intègre.*
On suppose vérifiées les conditions suivantes:

i) *Pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, $A/\mathfrak{m}$ est une extension algébrique de k.*
ii) $\dim(A)<\infty$.

Alors les conditions suivantes sont equivalentes:

a) *A satisfait à (J_k) pour tout ideal maximal $\mathfrak{m}$ de A.*
b) $\mathrm{rang}(\mathrm{Dér}_k(A, A))=\dim(A)$.

De plus, si A satisfait aux conditions i), ii) *et* a) (*ou* b)), *alors $A[T]$, $A[[T]]$ satisfont aussi aux mêmes conditions. A est par conséquent excellent.*

Proposition (6.4) (*cf.* [9] Theorems 8 and 9). *Soient V un anneau de valuation discrète dont le corps des fractions K est de caractéristique zéro et A une V-algèbre* *noethérienne régulière et intègre.*

On suppose que pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ *de* A *tel que* $\mathfrak{p}\cap V=(0)$, A *satisfait à* (J_K) *au point* $\mathfrak{p}$.

Alors, pour $B=A[T]$ *ou* $A[[T]]$, *et pour tout idéal premier* $\mathfrak{q}$ *de* B *tel que* $\mathfrak{q}\cap V=(0)$, B *satisfait à* (J_K) *au point* $\mathfrak{q}$.

Proposition (6.5) (*cf.* [9] Theorem 15, Remark p. 292). *Soient* k *un corps de caractéristique* $p>0$, A *une* k*-algèbre noethérienne intègre.*
On suppose vérifiées les conditions suivantes:

i) *Pour tout idéal maximal* $\mathfrak{m}$ *de* A, $A/\mathfrak{m}$ *est une extension finie de* k *ou une extension algébrique de* k *si* k *est parfait.*

ii) *Pour tout ideal maximal* $\mathfrak{m}$ *de* A, $A_{\mathfrak{m}}$ *est une* k*-algèbre formellement lisse pour la topologie préadique et un anneau universellement japonais.*

iii) $\dim(A)<\infty$.

iv) *Il existe une famille* $(k_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ *de sous-corps de* k *telle que* $k^p\subset k_\alpha$, $[k:k_\alpha]<\infty$ *et que* $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} k_\alpha=k^p$, *satisfaisant*

$$\mathrm{rang}(\mathrm{Dér}_{k_\alpha}(A, A))=\dim(A)+\mathrm{rang}(\Omega^1_{k/k_\alpha}) \text{ quel que soit } \alpha.$$

Alors pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ *de* A *et tout* $\alpha\in\Lambda$, A *satisfait à* (J_{k_α}) *au point* $\mathfrak{m}$.

Comme A *satisfait la condition de* (6.2), A *est excellent; par conséquent,* $A[[T]]$ *satisfait aussi aux mêmes conditions.*

Corollaire (6.6) (*cf.* [9] Theorem 9 *and* 15, Remark p. 292). *Si* A *est un anneau qui satisfait ou bien aux conditions de* (6.3) *ou bien à celles de* (6.5), *alors* $A[X_1, \cdots, X_m]$ *et* $A[[Y_1, \cdots, Y_n]]$ *satisfont aussi aux mêmes conditions.*

En particulier, soit A *un anneau satisfaisant aux conditions de* (6.3) *ou de* (6.5), I *un ideal de* A; *alors le séparé complété* A^* *de* A *pour la topologie* I*-adique est un anneau excellent.*

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ DE DAKAR

Bibliographie

[1] M. André: Localisation de la lissité formelle, manuscripta math. **13** (1974), 297-307.
[2] A. Brezuleanu et N. Radu: Sur la localisation de la lissité formelle, C.R. Acad. Sci. Paris **276** (193), 439-441.
[3] A. Grothendieck et J. Dieudonné: Eléments de Géométrie algébrique, Publ. Math. I.H.E.S. **20** (1964).
[4] A. Grothendieck et J. Dieudonné: Eléments de Géométrie algébrique, Publ. Math. I.H.E.S. **24** (1964).
[5] A. Grothendieck et J. Dieudonné: Eléments de Géométrie algébrique, Publ. Math. I.H.E.S. **32** (1967).
[6] E. Kunz: Characterisations of regular local rings of characteristic p, Amer. J. Math. **91** (1969), 772-784.
[7] E. Kunz: On noetherian rings of characteristic p, Amer. J. Math. **98** (1976), 999-1013.

[8] J. Marot: Sur les anneaux universellement japonais, C. R. Acad. Sci. Paris. **277** (1973), 1029-1031.

[9] H. Matsumura: Noetherian rings with many derivations, Contributions to Algebra, A collection of Papers Dedicated to Ellis Kolchin, Academic Press, New York, 1977, 279-294.

[10] M. Nagata: Local rings, Interscience, New York, 1962.

[11] N. Radu: Une caractérisation des algèbre noethériennes régulières sur un corps de caractéristique zéro, C. R. Acad. Sci. Paris **270** (1970), 851-853.

[12] N. Radu: Un critère différentiel de lissité formelle, C. R. Acad. Sci. Paris **271** (1970), 485-487.

[13] H. Seydi: Sur la théorie des anneaux excellents en caractéristique p, I, Bull. Sci. Math. **96** (1972), 193-198.

[14] H. Seydi: Un critère jacobien des points simples, C. R. Acad. Sci. Paris **276** (1973), 475-478.

[15] H. Seydi: Sur la théorie des anneaux excellents en caractéristique zéro, II (à paraître).