J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)
20-4 (1980) 651-659

Faserdimensionen von Aufblasungen lokaler Ringe und Äquimultiplizität

Von

M. Herrmann und U. Orbanz

(Communicated by Prof. M. Nagata, July 9, 1979)

Cowsik und Nori haben in [C-N] gezeigt, daß ein Radikalideal $\mathfrak{a}$ eines regulären lokalen Ringes $(R, \mathfrak{m})$ mit unendlichem Restklassenkörper genau dann ein vollständiger Durchschnitt ist, wenn für die Faser Y im Punkt $\operatorname{Spec}(R/\mathfrak{m})$ der Aufblasung von $\mathfrak{a}$ die Relation $\dim Y = \operatorname{ht}(\mathfrak{a})-1$ gilt. Bezeichnet $l(\mathfrak{a})$ die minimale Erzeugendenzahl einer minimalen Reduktion von $\mathfrak{a}$ ([N-R]), so ist $\dim Y = \operatorname{ht}(\mathfrak{a})-1$ gleichbedeutend mit $l(\mathfrak{a}) = \operatorname{ht}(\mathfrak{a})$. Diese Bedingung ist insbesondere dann erfüllt, wenn $R/\mathfrak{a}^n$ für jedes $n \geqq 1$ ein Cohen-Macauly-Ring ist ([Bu]), so daß in diesem Fall ein vollständiges Schnittideal vorliegt (Cor. in [C-N]; eine Abschwächung wurde in [W] bewiesen).

Die Charakterisierung von Reduktionen durch Äquimultiplizitätsaussagen ([N-R], [Re], [Bö]) legen es nahe, die schwer nachprüfbare Bedingung $l(\mathfrak{a}) = \operatorname{ht}(\mathfrak{a})$ durch eine "Äquimultiplizitätsbedingung von R längs $\mathfrak{a}$" zu charakterisieren. Demgemäß wird in dieser Note zunächst vollständiges Schnittverhalten in Cohen-Macaulay-Ringen durch eine Äquimultiplizitätsbedingung beschrieben (Satz 1), und es wird in einem Beispiel gezeigt, wie sich im Hyperflächenfall die Bedingung $l(\mathfrak{a}) = \operatorname{ht}(\mathfrak{a})$ durch einen Multiplizitätenvergleich leicht überprüfen läßt. Der Beweis des Satzes 1 benutzt vor allem Ideen von R. Schmidt [R. S.], wonach mit Hilfe des Wright'schen Multiplizitätssymbols $e(x, \operatorname{gr}_{\mathfrak{a}}^n(R))$ eines Multiplizitätssystems $x_1, \cdots, x_r$ (abgekürzt x) wesentliche Einblicke in das "Verhalten von R längs $\mathfrak{a}$" gewonnen werden können. Die entsprechenden Resultate werden im ersten Abschnitt zusammengestellt. Das erwähnte Korollar in [C-N] und der Satz aus [W] ergeben sich dann direkt oder mittelbar aus den Eigenschaften derjenigen charakteristischen Funktionen, die durch $e(x, \operatorname{gr}_{\mathfrak{a}}^n(R))$ definiert werden (vgl. § 1).

Ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}$ ein Primideal, so folgt aus der Bedingung $l(\mathfrak{p}) = \operatorname{ht}(\mathfrak{p})$, daß die Fasern der Aufblasung $\operatorname{Bl}_{\mathfrak{a}}(R)$ von R in $\mathfrak{p}$ in den Punkten $\mathfrak{q} \in V(\mathfrak{p})$ die konstante Dimension $\operatorname{ht}(\mathfrak{p})-1$ besitzen. Ist nämlich $\mathfrak{p} \subseteqq \mathfrak{q} \subseteqq \mathfrak{m}$ und $\mathfrak{q}$ prim, so hat die Faser in $\mathfrak{q}$ die Dimension $l(\mathfrak{p} \cdot R_{\mathfrak{q}})-1$, und allgemein gilt

$$l(\mathfrak{p}) \geqq l(\mathfrak{p} \cdot R_{\mathfrak{q}}) \geqq l(\mathfrak{p} \cdot R_{\mathfrak{p}}) = \operatorname{ht}(\mathfrak{p})$$

(vgl. [N-R]). In Satz 2 wird gezeigt, daß die erwähnte Äquidimensionalität der

Fasern in $V(\mathfrak{p})$ gleichbedeutend mit der Äquimultiplizität $e_0(R)=e_0(R_\mathfrak{p})$[1] ist, wenn $R/\mathfrak{p}$ regulär vorausgesetzt wird[2]. Für den speziellen Fall $\mathrm{ht}(\mathfrak{p})=1$ folgt daher aus $e_0(R)=e_0(R_\mathfrak{p})$, daß der Morphismus $\psi:\mathrm{Bl}_\mathfrak{p}(R)\to\mathrm{Spec}(R)$ endliche Fasern hat, so daß er nach einem Satz von Chevalley endlich sein muß. Im letzten Abschnitt werden die Methoden von Satz 1 benutzt, um auch auf elementarem Wege nachzuweisen, daß ψ unter den genannten Bedingungen ein endlicher Morphismus ist (Satz 3).

Zusatz: In der Zwischenzeit erfuhren wir von der Arbeit "Über vollständige Durchschnitte in lokalen Ringen" von R. Achilles und W. Vogel (eingereicht bei den Math. Nachr.). Das Hauptresultat dieser Arbeit enthält das Ergebnis unseres 1. Satzes. Die Beweismethode ist von unserer verschieden und liefert nicht unser Korollar zu Satz 1, auf dem die folgenden Abschnitte wesentlich beruhen.

1. Im Folgenden bezeichne $(R, \mathfrak{m})$ einen noetherschen lokalen Ring, $\mathfrak{a}$ ein (echtes) Ideal in R und $x=\{x_1, \cdots, x_t\}$ ein Multiplizitätssystem für $R/\mathfrak{a}$. Mit dem Wright'schen Multiplizitätssystembol $e(x, -)$ wird dann eine numerische Funktion

$$H^{(0)}_{x,\mathfrak{a},R}(n)=e(x, \mathrm{gr}^n_\mathfrak{a}(R))$$

definiert. Setzt man wie üblich $H^{(i)}(n)=\sum_{k=0}^{n} H^{(i-1)}(k)$ für $i>0$, so ergibt eine einfache Rechnung (vgl. [H-S-V], S 113):

$$(*)\qquad H^{(1)}_{x,\mathfrak{a},R}(n)=\sum_{\mathfrak{p}} e(x, R/\mathfrak{p})l(R_\mathfrak{p}/\mathfrak{a}^{n+1}R_\mathfrak{p}),$$

wobei über die minimalen Primoberideale $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{a}$ summiert wird. (Bezeichnet man mit $\mathrm{Assh}(R/\mathfrak{a})$ diejenigen $\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}(R/\mathfrak{a})$ mit $\dim R/\mathfrak{p}=\dim R/\mathfrak{a}$, so ist $e(x, R/\mathfrak{p})\neq 0$ nur dann, wenn $\mathfrak{p}\in\mathrm{Assh}(R/\mathfrak{a})$.) Nach $(*)$ ist $H^{(1)}_{x,\mathfrak{a},R}$ eine polynomiale Funktion. Ist d der Grad und a der höchste Koeffizient des entsprechenden Polynoms, so wird $d!a$ mit $e(x, \mathfrak{a}, R)$ bezeichnet. Ist $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{m}$-primär, so ist die leere Menge ein Multiplizitätssystem für $R/\mathfrak{a}$, und für dieses erhält man die gewöhnliche Hilbert-Samuel-Funktion $H^{(1)}_{x,\mathfrak{a},R}(n)$ und die übliche Samuel-Multiplizität $e_0(\mathfrak{a})$ des Primärideals. Generell gilt

$$(**)\qquad e(x, \mathfrak{a}, R)=\sum_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Assh}(R/\mathfrak{a})} e(x, R/\mathfrak{p})e_0(\mathfrak{a}R_\mathfrak{p}).$$

Ein wesentliches Hilfsmittel für den Beweis von Satz 1 ist das folgende Lemma, das auf einen Hinweis von R. Schmidt zurückgeht.

Lemma 1. $(R, \mathfrak{m})$ *sei ein lokaler Ring mit unendlichem Restklassenkörper uud* $\mathfrak{a}\subset R$ *ein Ideal mit* $\dim R/\mathfrak{a}=r>0$. *Dann gibt es zu jedem Parametersystem* $y=\{y_1, \cdots, y_r\}$ *von* $R/\mathfrak{a}$ *eine Oberflächensequenz* $x_1, \cdots, x_r$ *für* $\mathfrak{w}:\mathfrak{a}+yR$ *mit folgenden Eigenschaften*:

1) $e_0(R)=e_0(\mathfrak{m})$, $e_0(R_\mathfrak{p})=e_0(\mathfrak{p}R_\mathfrak{p})$.

2) Dieses Ergebnis wurde den Verfassern mündlich von Herrn Nesselmann (Rostock) mitgeteilt, allerdings ohne Beweis.

1) $\mathfrak{w}=\mathfrak{a}+xR \quad (x=\{x_1, \cdots, x_r\})$,
2) $e(x, \mathfrak{a}, R)=e(y, \mathfrak{a}, R)$,
3) $e_0(\mathfrak{w})=e_0(xR)$ *für* $\mathrm{ht}(\mathfrak{a})=0$ *bzw.* $e_0(\mathfrak{w})=e_0(\mathfrak{w}/xR)$ *für* $\mathrm{ht}(\mathfrak{a})>0$,
4) $x_1, \cdots, x_r$ *ist Teil eines Parametersystems für* R.

Beweis. Seien $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_t$ die minimalen Primoberideale von $\mathfrak{a}$ falls $\mathrm{ht}(\mathfrak{a})>0$ bzw. die minimalen Primideale von R falls $\mathrm{ht}(\mathfrak{a})=0$. Dann ist für jedes $j\in\{1, \cdots, t\}$ $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}_j)<\mathrm{ht}(\mathfrak{w})$, also $\mathfrak{w}\not\subset\mathfrak{p}_j$. Nach [Na], S. 73 gibt es ein Oberflächenelement x_1 für $\mathfrak{w}$ mit

$$x_1\notin\mathfrak{a}+\mathfrak{m}\mathfrak{w}, \qquad x_1\notin\mathfrak{p}_1\cup\cdots\cup\mathfrak{p}_t.$$

Durch Übergang zu R/x_1R und Induktion erhält man $x_1, \cdots, x_r\in\mathfrak{w}$ derart, daß das Bild von x_i in $R/x_1R+\cdots+x_{i-1}R$ ein Oberflächenelement für $\mathfrak{a}+x_1R+\cdots+x_{i-1}R/x_1R+\cdots+x_{i-1}R$ ist und zusätzlich gilt:

$$x_i\notin\mathfrak{a}+\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{w}+x_1R+\cdots+x_{i-1}R,$$

x_i liegt in keinem minimalen Primoberideal von

$$\begin{cases} x_1R+\cdots+x_{i-1}R & \text{falls } \mathrm{ht}(\mathfrak{a})=0, \\ \mathfrak{a}+x_1R+\cdots+x_{i-1}R & \text{falls } \mathrm{ht}(\mathfrak{a})>0. \end{cases}$$

1) und 3) folgen aus dieser Konstruktion wie in [Z-S], ch. VIII, § 10 und 4) gilt, weil $\dim R/x_1R+\cdots+x_iR=\dim R-i$ ([Z-S], Cor. 1 auf S. 291). Für 2) sei $\mathfrak{p}\in\mathrm{Assh}(R/\mathfrak{a})$ und x_i^* bzw. y_i^* das Bild von x_i bzw. y_i in $R/\mathfrak{p}$. Dann ist $(x_1^*, \cdots, x_r^*)R/\mathfrak{p}=(y_1^*, \cdots, y_r^*)R/\mathfrak{p}$ und daher

$$e_R(x, R/\mathfrak{p})=e_{R/\mathfrak{p}}(x^*, R/\mathfrak{p})=e_{R/\mathfrak{p}}(y^*, R/\mathfrak{p})=e_R(y, R/\mathfrak{p})$$

(vgl. [No], S. 331 und [H-S-V], S. 106). Mit (**) folgt daher

$$e(x, \mathfrak{a}, R)=e(y, \mathfrak{a}, R).$$

Das Ideal $\mathfrak{a}$ heiße vollständiges Schnittideal (abgekürzt c. i.), wenn $\mu(\mathfrak{a})=\mathrm{ht}(\mathfrak{a})$ (wobei μ die minimale Erzeugendenzahl bezeichnet). Ist R ein Cohen-Macaulay-Ring, so ist $\mathfrak{a}$ genau dann c. i., wenn $\mathfrak{a}$ durch eine R-Folge erzeugt werden kann.

2. Es folgt die angekündigte Charakterisierung vollständiger Schnittideale in Cohen-Macaulay-Ringen.

Satz 1. *Seien* $(R, \mathfrak{m})$ *ein lokaler Cohen-Macaulay-Ring mit unendlichem Restklassenkörper,* $\mathfrak{a}$ *ein echtes Ideal in* R *und* $r=\dim R/\mathfrak{a}$, $s=\mathrm{ht}(\mathfrak{a})$. *Für alle* $\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}(R/\mathfrak{a})$ *sei* $\mathfrak{a}R_\mathfrak{p}$ *ein* c. i. *Dann sind folgende Aussagen äquivalent*:
(i) $\mathfrak{a}$ *ist* c. i.
(ii) *Es existiert ein Parametersystem* $x_1, \cdots, x_r$ *von* $R/\mathfrak{a}$ *mit*

$$e(x, \mathfrak{a}, R)=e_0(\mathfrak{a}+xR).$$

Beweis. (i)$\Rightarrow$(ii). Es gibt eine R- Sequenz $(z_1, \cdots, z_s)=z$ mit $\mathfrak{a}=zR$. Ergänzt man z durch geeignete Elemente $x_1, \cdots, x_r$ zu einer maximalen R- Sequenz, so ist x trivialerweise ein Parametersystem für $R/\mathfrak{a}$ und nach (**) und dem Assoziativgesetz für Multiplizitäten gilt

$$e_0(\mathfrak{a}+xR)=e(x,\ \mathfrak{a},\ R).$$

(ii)$\Rightarrow$(i). Für $r=0$ ist nichts zu zeigen, also sei $r>0$. Wir können ohne Einschränkung annehmen, daß für x die in Lemma 1 angegebenen Eigenschaften gelten. Nun müssen die Fälle $s=0$ und $s>0$ unterschieden werden. Zuerst sei $s>0$. Dann kann man ein Parametersystem $z_1, \cdots, z_s$ von R/xR derart wählen, daß

$$e_0(\mathfrak{w}/xR)=e_0(zR+xR/xR) \tag{1}$$

gilt, wobei $\mathfrak{w}=\mathfrak{a}+xR$ gensetzt wurde. Man kann zusätzlich $z_1, \cdots, z_s\in\mathfrak{a}$ annehmen. Setzt man $\mathfrak{q}=zR+xR$ ($\mathfrak{q}$ ist dann $\mathfrak{m}$-primär), so folgt aus dem Assoziativgesetz für Multiplizitäten und aus (**):

$$e_0(\mathfrak{q})=\sum_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Assh}(R/zR)} e(x,\ R/\mathfrak{p})e_0(zR_\mathfrak{p})=e(x,\ zR,\ R). \tag{2}$$

Wegen $r+s=\dim R$ ist $\dim R/zR=r=\dim R/\mathfrak{a}$, also $\mathrm{Assh}\,(R/\mathfrak{a})\subseteqq\mathrm{Assh}\,(R/zR)$, und daraus folgt

$$e(x,\ \mathfrak{a},\ R)\leqq e(x,\ zR,\ R). \tag{3}$$

Da allgemein $e_0(\mathfrak{q})\leqq e_0(\mathfrak{q}/xR)$ gilt, erhält man für $s>0$ insgesamt

$$e(x,\ \mathfrak{a},\ R)\leqq e(x,\ zR,\ R)=e_0(\mathfrak{q})\leqq e_0(\mathfrak{q}/xR)=e_0(\mathfrak{w}/xR)=e_0(\mathfrak{w}), \tag{4}$$

und aus der Voraussetzung (ii) folgt

$$e(x,\ \mathfrak{a},\ R)=e(x,\ zR,\ R). \tag{5}$$

Für $s=0$ setzt man $zR=0$, also $\mathfrak{q}=xR$. Dann folgt aus (**), Lemma 1 und Voraussetzung (ii) unmittelbar

$$e(x,\ zR,\ R)=e_0(xR)=e_0(\mathfrak{w})=e(x,\ \mathfrak{a},\ R),$$

so daß (5) für $s\geqq 0$ richtig ist. Andererseits folgt aus $zR\subseteqq\mathfrak{a}$ die Beziehung

$$\begin{aligned}
e(x,\ \mathfrak{a},\ R)&=\sum_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Assh}(R/\mathfrak{a})} e(x,\ R/\mathfrak{p})e_0(\mathfrak{a}R_\mathfrak{p})\\
&\leqq\sum_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Assh}(R/\mathfrak{a})} e(x,\ R/\mathfrak{p})e_0(zR_\mathfrak{p})\\
&=e(x,\ zR,\ R)-\sum_{\substack{\mathfrak{p}\in\mathrm{Assh}(F/zR)\\ \setminus\mathrm{Assh}(R,\mathfrak{a})}} e(x,\ R/\mathfrak{p})e_0(zR_\mathfrak{p})\\
&\leqq e(x,\ zR,\ R).
\end{aligned}$$

Nun folgt aus (5) für beide Ungleichungen die Gleichheit, so daß $\mathrm{Assh}\,(R/zR)=\mathrm{Assh}\,(R/\mathfrak{a})$ sein muß und

$$e_0(\mathfrak{a}R_\mathfrak{p})=e_0(zR_\mathfrak{p})\quad\text{für alle}\quad \mathfrak{p}\in\mathrm{Assh}\,(R/\mathfrak{a}). \tag{6}$$

Für alle Primideale $\mathfrak{p}$ von R ist $\mathrm{ht}(\mathfrak{p})+\dim R/\mathfrak{p}=\dim R$, daher ist $\mathrm{Assh}(R/zR)$ gerade die Menge der minimalen Primoberideale von zR. Dann ist aber auch $\mathrm{Assh}(R/\mathfrak{a})$ die Menge der minimalen Primoberideale von $\mathfrak{a}$ und man erhält

$$\sqrt{\mathfrak{a}}=\sqrt{zR} \tag{7}$$

R ist als Cohen-Macaulay-Ring quasi-ungemischt, und nach [Bö] folgt daher aus (6) und (7), daß das vollständige Schnittideal zR eine (notwendigerweise minimale) Reduktion von $\mathfrak{a}$ ist. Insbesondere ist also $l(\mathfrak{a})=s=\mathrm{ht}(\mathfrak{a})$.

Nun wird benutzt, daß $\mathfrak{a}R_{\mathfrak{p}}$ als c.i. vorausgesetzt wurde (für $\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}(R/\mathfrak{a})$). Mit $R/\mathfrak{m}$ ist auch $R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ unendlich für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von R, so daß stets

$$\mathrm{ht}(\mathfrak{a}\cdot R_{\mathfrak{p}})\leqq l(\mathfrak{a}\cdot R_{\mathfrak{p}})\leqq \mu(\mathfrak{a}\cdot R_{\mathfrak{p}})$$

gilt. Ist $\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}(R/\mathfrak{a})$, so folgt nach Voraussetzung überall die Gleichheit und $\mathfrak{a}R_{\mathfrak{p}}$ kann keine echten Reduktionen besitzen ([$N-R$], § 4, Thm. 4). Es folgt daher

$$zR_{\mathfrak{p}}=\mathfrak{a}\cdot R_{\mathfrak{p}} \quad \text{für alle} \quad \mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}(R/\mathfrak{a})\,. \tag{8}$$

Da $zR_{\mathfrak{p}}$ als Hauptklassenideal ungemischt ist, kann $\mathfrak{a}$ keine eingebetteten Primideal besitzen (denn wäre $\mathfrak{p}$ eingebettet für $\mathfrak{a}$, so wräe $\mathfrak{p}\cdot R_{\mathfrak{p}}$ eingebettet für $zR_{\mathfrak{p}}$). Nach (8) muß daher $\mathfrak{a}=(z_1, \cdots, z_s)$ gelten, also $\mu(\mathfrak{a})=s=\mathrm{ht}(\mathfrak{a})$.

Bemerkungen. 1) Die im Satz gemachten Voraussetzungen an $\mathfrak{a}$ sind insbesondere erfüllt, wenn $\mathfrak{a}$ ein Radikalideal ist und $R_{\mathfrak{p}}$ regulär für jedes minimale Primoberideal $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{a}$; vgl. dazu den Beweis von Theorem 1 in [C-N] sowie die verallgemeinerte Fassung in [E-H-V].

2) Ist $R/\mathfrak{a}^n$ ein Cohen-Macaulay-Ring für genügend viele n, so zeigt man, daß für jedes Parametersystem x von $R/\mathfrak{a}$ die Polynome zu den Hilbertfunktionen $H^{(r)}_{x,\mathfrak{a},R}$ und $H^{(0)}_{xR+\mathfrak{a},R}$ übereinstimmen, so daß insbesondere $e(x, \mathfrak{a}, R)=e_0(\mathfrak{a}+xR)$ gilt (vgl. [H-S-V], II, Lemma 3.9 und Satz 3.13). Unter den übrigen Voraussetzungen des Satzes folgt dann also, daß $\mathfrak{a}$ ein c.i. ist, ein Ergebnis, das auf völlig anderem Wege auch von Waldi [W] bewiesen wurde.

3) Bei (ii)$\Rightarrow$(i) wurden die Voraussetzungen "$\mathfrak{a}R_{\mathfrak{p}}$ ist c.i." und "R ist Cohen-Macaulay-Ring" erst am Schluß benutzt. Vorher wurde (außer (ii)) nur benötigt, daß R quasi-ungemischt ist (woraus für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ die Gleichung $\mathrm{ht}(\mathfrak{p})+\dim R/\mathfrak{p}=\dim R$ folgt). Man erhält also folgendes

Korollar. *Seien* $(R, \mathfrak{m})$ *ein quasi-ungemischter lokaler Ring,*[3] $\mathfrak{a}$ *ein Ideal von* R *und* $x_1, \cdots, x_r$ *ein Parametersystem von* $R/\mathfrak{a}$ *mit*

$$e(x, \mathfrak{a}, R)=e_0(\mathfrak{a}+xR)\,.$$

Dann ist $\mathrm{ht}(\mathfrak{a})=l(\mathfrak{a})$. *Ist zusätzlich* x *eine Oberflächensequenz wie in Lemma* 1, $\mathrm{ht}(\mathfrak{a})>0$ *und* $z_1, \cdots, z_s\in\mathfrak{a}$ *ein Parametersystem von* R/xR *mit*

$$e_0(\mathfrak{a}+xR/xR)=e_0(zR+xR/xR)\,,$$

3) $R/\mathfrak{m}$ sei wieder unendlich.

so erzeugen $z_1, \cdots, z_s$ *eine minimale Reduktion von* $\mathfrak{a}$.

Bemerkung. 4) Unter den Voraussetzungen des Korollars erhält man $\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{zR}$ wie in (7) und damit nach Definition $\operatorname{ara}(\mathfrak{a}) = \operatorname{ht}(\mathfrak{a})$ (vgl. [Ru]). Ist $\operatorname{ht}(\mathfrak{a}) > 0$, so gilt stets $\operatorname{ht}(\mathfrak{a}) \leqq \operatorname{cora}(\mathfrak{a}) \leqq \operatorname{ara}(\mathfrak{a})$, so daß unter unseren Voraussetzungen alle drei Größen übereinstimmen. Satz 1 gibt lokale Voraussetzungen, um zusätzlich die Gleichheit mit $\mu(\mathfrak{a})$ zu folgern, das im allgemeinen größer ist.

3. $(R, \mathfrak{m})$ sei wieder ein lokaler Ring mit unendlichem Restklassenkörper. Ist $\mathfrak{p} \subset R$ prim und $R/\mathfrak{p}$ regulär, so gibt es ein Parametersystem x von $R/\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{p} + xR = \mathfrak{m}$ und $e(x, R/\mathfrak{p}) = e_0(\mathfrak{m}/\mathfrak{p}) = 1$. In diesem speziellen Fall folgt daher aus (ii) von Satz 1 die übliche Äquimultiplizität $e_0(R) = e_0(R_\mathfrak{p})$. Mit den Ergebnissen aus § 2 erhält man genauer folgendes Resultat:

Satz 2. *Ist* $(R, \mathfrak{m})$ *ein quasi-ungemischter lokaler Ring mit unendlichem Restklassenkörper und* $\mathfrak{p} \subset R$ *ein Primideal, für das* $R/\mathfrak{p}$ *regulär ist, so sind folgende Aussagen äquivalent*:

(i) $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) = l(\mathfrak{p})$,

(ii) $e_0(R) = e_0(R_\mathfrak{p})$.

Beweis. (i)$\Rightarrow$(ii). Sei zunächst $s = \operatorname{ht}(\mathfrak{p}) > 0$. Nach Voraussetzung gibt es eine minimale Reduktion $(z_1, \cdots, z_s) \cdot R$ von $\mathfrak{p}$, und für diese gilt $e_0(zR_\mathfrak{p}) = e_0(R_\mathfrak{p})$. Wählt man ein reguläres Parametersystem $x_1, \cdots, x_r$ von $R/\mathfrak{p}$, so ist $\mathfrak{p} + xR = \mathfrak{m}$ und $e(x, R/\mathfrak{p}) = 1$. Aus (**) folgt daher

$$e(x, \mathfrak{p}, R) = e_0(x, zR, R). \tag{9}$$

Das Ideal $\mathfrak{q} = zR + xR$ ist $\mathfrak{m}$-primär, so daß man aus [H-S-V], S. 121 die Beziehung

$$H^{(r+1)}_{x,\mathfrak{p},R} \leqq H^{(1)}_{\mathfrak{m},R} \leqq H^{(1)}_{\mathfrak{q},R}$$

erhält. Da die entsprechenden Polynome alle den Grad $\dim R = r + s$ haben, folgt

$$e(x, \mathfrak{p}, R) \leqq e_0(R) \leqq e_0(\mathfrak{q}) = e(x, zR, R).$$

Nach (9) ist daher

$$e_0(R) = e(x, z, R) = e_0(zR_\mathfrak{p}) = e_0(R_\mathfrak{p}).$$

Für $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) = 0$ wählt man x wie in Lemma 1 (dann bleibt x ein reguläres Parametersystem für $R/\mathfrak{p}$). Dann schließt man wie oben mit $zR = 0$.

(ii)$\Rightarrow$(i). Ist $x_1, \cdots, x_r$ ein reguläres Parametersystem von $R/\mathfrak{p}$, so gilt wieder $e(x, \mathfrak{p}, R) = e_0(R_\mathfrak{p})$. Da aber $e_0(R_\mathfrak{p}) = e_0(R) = e_0(\mathfrak{p} + xR)$ vorausgesetzt wurde, folgt (1) aus dem Korollar zu Satz 1.

Beispiel. Sei k ein (unendlicher) Körper, $B = k[X, Y, Z]$, $F = (XY - Z^2)Y^2$, $\mathfrak{P} = (Y, Z) \cdot B$, $\mathfrak{M} = (X, Y, Z)B$ und $A = B/F \cdot B$, $\mathfrak{m} = \mathfrak{M}/F \cdot B$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}/F \cdot B$. Für $R = A_\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{a} = \mathfrak{p} \cdot R$ gelten dann

$$e_0(R)=\nu_{\mathfrak{m}}(F)=4>e_0(R_{\mathfrak{p}})=\nu_{\mathfrak{P}}(F)=3\,,^{4)}$$

so daß aus $1=\mathrm{ht}(\mathfrak{a})\leqq l(\mathfrak{a})\leqq\mu(\mathfrak{a})=2$ folgt: $l(\mathfrak{a})=2$.

4. Die äquivalenten Bedingungen (i) und (ii) von Satz 2 sind dann erfüllt, wenn der kanonische Morphismus $\phi:\mathrm{Bl}_{\mathfrak{p}}(R)\rightarrow\mathrm{Spec}(R)$ der Aufblasung von $\mathfrak{p}$ endlich ist. Das ist nur möglich für $\mathrm{ht}(\mathfrak{p})=1$. Der folgende Satz 3 zeigt, daß unter dieser zusätzlichen Voraussetzung auch die Umkehrung gilt. Damit hat man ein algebraisches Analogon zu dem wohlbekannten analytischen Resultat, wonach lokal die Aufblasung einer Fläche in einer glatten Kurve genau dann endlich ist, wenn Äquimultiplizität längs dieser Kurve vorliegt.

Der Beweis von Satz 3 beruht wesentlich auf dem folgenden Lemma.

Lemma 2. *Seien* $(R, \mathfrak{m})$ *ein quasi-ungemischter lokaler Ring mit unendlichem Restklassenkörper,* $\mathfrak{p}\subset R$ *ein Primideal der Höhe* 1, *für das* $R/\mathfrak{p}$ *regulär ist und* $\mathfrak{p}'\subsetneqq\mathfrak{p}$ *ein beliebiges Ideal. Ist* $l(\mathfrak{p})=1$ (*also* $e_0(R)=e_0(R_{\mathfrak{p}})$ *nach Satz* 2), *so gibt es ein* $u\in\mathfrak{p}\backslash\mathfrak{p}'$ *derart, daß* uR *minimale Reduktion von* $\mathfrak{p}$ *ist.*

Beweis. Sei $x_1, \cdots, x_r$ ein reguläres Parametersystem von $R/\mathfrak{p}$, so daß $e(x, \mathfrak{p}, R)=e_0(\mathfrak{m})$ gilt wie im Beweis von Satz 2 (es ist $\mathfrak{m}=\mathfrak{p}+xR$). Wir können ohne Einschränkung annehmen, daß x eine Oberflächensequenz für $\mathfrak{m}$ ist wie in Lemma 1. Nach dem Korollar zu Satz 1 genügt es daher, ein $u\in\mathfrak{p}\backslash\mathfrak{p}'$ derart zu finden, daß u ein Parametersystem für R/xR ist und

$$e_0(\mathfrak{m}/xR)=e_0(uR+xR/xR)\,.$$

gilt.

Dafür sei $\bar{R}=R/xR$ und $\bar{\ }$ bezeichne die Bilder in $\bar{R}$. Ist $\bar{\mathfrak{p}}'\neq\bar{\mathfrak{p}}=\bar{\mathfrak{m}}$, so gibt es für $\bar{R}$ ein Parametersystem $\bar{u}\in\bar{\mathfrak{p}}\backslash\bar{\mathfrak{p}}'$ mit

$$e_0(\bar{\mathfrak{m}})=e_0(\bar{u}\bar{R})$$

(vgl. [Na], S. 73 und [Z-S], S. 294 f). In diesem Fall genügt es, für u ein Urbild von $\bar{u}$ in $\mathfrak{p}$ zu wählen. Angenommen es gilt $\bar{\mathfrak{p}}'=\bar{\mathfrak{p}}$, also $\mathfrak{p}'+xR=\mathfrak{p}+xR=\mathfrak{m}$. Dann erzeugen die r Bilder von $x_1, \cdots, x_r$ in $R/\mathfrak{p}'$ das maximale Ideal $\mathfrak{m}/\mathfrak{p}'$. Nun ist aber $\dim R/\mathfrak{p}'\geqq\dim R/\mathfrak{p}=r$, also muß $R/\mathfrak{p}'$ regulär von der Dimension r sein. Folglich ist $\mathfrak{p}'$ ein Primideal der Höhe 1, was zu dem Widerspruch $\mathfrak{p}'=\mathfrak{p}$ führt.

Durch Induktion zeigt man nun folgendes

Korollar. *Unter den Voraussetzungen von Lemma* 2 *hat* $\mathfrak{p}$ *ein* (*minimales*) *Erzeugendensystem* $u_1, \cdots, u_m$ *derart, daß* u_iR *für jedes* $i\in\{1, \cdots, m\}$ *eine minimale Reduktion von* $\mathfrak{p}$ *ist.*

Satz 3. *Seien* $(R, \mathfrak{m})$ *ein quasi-ungemischter lokaler Ring mit unendlichem Restklassenkörper und* $\mathfrak{p}\subset R$ *ein Primideal der Höhe* 1, *für das* $R/\mathfrak{p}$ *regulär ist. Gilt* $e_0(R)=e_0(R_{\mathfrak{p}})$, *so ist der kanonische Morphismus*

4) $\nu_{\mathfrak{M}}(F)=\sup\{n\mid F\in\mathfrak{M}^n\}$, analog für $\nu_{\mathfrak{P}}$.

$$\phi : \mathrm{Bl}_{\mathfrak{p}}(R) \to \mathrm{Spec}\,(R)$$

der Aufblasung von $\mathfrak{p}$ *ein endlicher Morphismus.*

Beweis. Sei $u_1, \cdots, u_m$ ein minimales Erzeugendensystem von $\mathfrak{p}$ wie im Korollar zu Lemma 2. Da u_iR minimale Reduktion von $\mathfrak{p}$ ist, gilt $\mathrm{ht}\,(u_iR)=1$ (wegen $\sqrt{u_iR}=\mathfrak{p}$) und jedes u_j ist ganz über dem Ideal u_iR. Dann ist $\frac{u_j}{u_i} \in R_{u_i}$ ganz über R und es folgt, daß für jedes $i \in \{1, \cdots, m\}$ der Unterring $R\left[\frac{u_1}{u_i}, \cdots, \frac{u_m}{u_i}\right]$ von R_{u_i} ein endlich erzeugter R-Modul ist. Insbesondere hat ϕ endliche Fasern. Aus dem erwähnten Satz von Chevalley würde damit die Endlichkeit von ϕ folgen, es soll hier jedoch direkt nachgewiesen werden, daß ϕ affin ist:

1. Fall: R ist reduziert. Dann ist jedes u_i ein Nichtnullteiler wegen $\mathrm{ht}\,(u_iR)=1$, und alle Ringe R_{u_i} werden als Unterringe des vollen Quotientenringes von R aufgefaßt. Da für jedes i und j sowohl $\frac{u_i}{u_j}$ als auch $\frac{u_j}{u_i}$ über R ganz sind, ist $\frac{u_j}{u_i}$ Einheit in $R\left[\frac{u_j}{u_i}\right]$, also $\frac{u_i}{u_j} \in R\left[\frac{u_j}{u_i}\right]$. Daher stimmen die Ringe $R\left[\frac{u_1}{u_i}, \cdots, \frac{u_m}{u_i}\right]$ für alle i überein, und $\mathrm{Bl}_{\mathfrak{p}}(R)=\mathrm{Spec}\left(R\left[\frac{u_1}{u_i}, \cdots, \frac{u_m}{u_i}\right]\right)$ ist affin.

2. Fall (allgemein): Sei $\bar{R}=R_{\mathrm{red}}$ und $\bar{\mathfrak{p}}$ bzw. $\bar{u}_i$ das Bild von $\mathfrak{p}$ bzw. u_i in $\bar{R}$. Dann ist $\bar{\mathfrak{p}}$ ganz über dem Ideal $\bar{u}_iR$, also $\mathrm{Bl}_{\bar{\mathfrak{p}}}(\bar{R})$ affin nach dem 1. Fall. Nun ist aber $\mathrm{Bl}_{\bar{\mathfrak{p}}}(\bar{R})=\mathrm{Bl}_{\mathfrak{p}}(R)_{\mathrm{red}}$, also ist auch $\mathrm{Bl}_{\mathfrak{p}}(R)$ affin.

SFB 40 Theoretische Mathematik
Universität Bonn 5300
Mathematisches Institut
Universität Köln

Literatur

[Bö] E. Böger, Eine Verallgemeinerung eines Multiplizitätensatzes von D. Rees, J. Algebra, **12** (1969), 207-215.

[Bu] L. Burch, Codimension and analytic spread, Proc. Camb. Phil. Soc., **72** (1972), 369-373.

[C-N] R.C. Cowsik and M.V. Nori, On the fibres of blowing up, J. Indian Math. Soc., **40** (1976), 217-222.

[E-H-V] D. Eisenbud, M. Herrmann and W. Vogel, Remarks on regular sequences, Nagoya Math. J., **67** (1977), 177-180.

[H-S-V] M. Herrmann, R. Schmidt und W. Vogel, Theorie der normalen Flachheit, Teubner-Texte zur Mathematik, Leipzig 1977.

[Na] M. Nagata, Local rings, New York-London 1962.

[No] D.G. Northcott, Lessons on rings, modules and multiplicities, Cambrigde University Press 1968.

[N-R] D.G. Northcott and D. Rees, Reductions of ideals in local rings, Proc. Camb. Phil. Soc., **50** (1954), 145-158.

[Re] D. Rees, $\mathfrak{a}$-transforms of local rings and a theorem on multiplicities of ideals, Proc. Camb. Phil. Soc., **57** (1961), 8-17.

[Ru] J. Rung, Mengentheoretische Durchschnitte und Zusammenhang, Regensburger Math. Schriften 1978.

[R.S.] R. Schmidt, Normale Flachheit als Spezialfall der Cohen-Macaulay-Eigenschaft von Graduierungen, Dissertation Humboldt-Universität Berlin 1976.

[W] R. Waldi, Vollständige Durchschnitte in Cohen-Macaulay-Ringen, Arch. Math., **31** (1979), 439-442.

[Z-S] O. Zariski and P. Samuel, Commutative Algebra II, Princeton 1960.