

Problème d'extension dans la théorie des fonctions entières d'ordre fini

Par

Yasuichiro NISHIMURA

(Reçu par Prof. Y. Kusunoki, le 11, Juin, 1979)

§ 0. Introduction

A propos du problème d'interpolation pour les fonctions entières d'une variable d'ordre fini, Leontev a démontré le résultat suivant [8]:

Théorème. Soit $X = \{\lambda_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ un ensemble discret d'ordre ρ ($0 \leq \rho < \infty$) dans \mathbb{C} ($|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_j| \leq |\lambda_{j+1}| \leq \dots$), et soit F le produit canonique de Weierstrass, d'ordre ρ , défini par X . Alors, deux conditions suivantes sont équivalentes:

(1) Pour toute suite de nombres complexes $\{a_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\log |\lambda_j|} \log (\log |a_j|) \leq \rho,$$

il existe une fonction entière G d'ordre $\leq \rho$ telle que $G(\lambda_j) = a_j$ ($j \in \mathbb{N}$).

(2)
$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\log |\lambda_j|} \log \left(\log \frac{1}{|F'(\lambda_j)|} \right) \leq \rho.$$

Dans ce mémoire, en nous bornant au cas où X est une sous-variété analytique (non singulière) dans \mathbb{C}^n , de dimension pure $n-1$ et d'ordre fini ρ , nous nous proposons de donner une condition suffisante, qui est une généralisation de la condition (2) de Leontev à un certain sens, pour le problème d'extension à croissance et de montrer que la condition n'est pas nécessaire au cas de $n \geq 2$, en indiquant un exemple.

Soit X une telle sous-variété. On sait bien ([5], [11], [7], [10]) qu'il existe une fonction entière F d'ordre ρ dans \mathbb{C}^n , qui s'annule sur et seulement sur X avec la multiplicité 1 en chaque composante de X . Une autre telle fonction ne diffère de F que par la multiplication de e^P où P est un polynôme de degré $\leq \rho$. Cette différence est de peu d'importance dans ce mémoire, ce qui nous permet d'appeler F fonction canonique d'ordre ρ de la sous-variété X .

Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, on pose $|x|^2 = \sum_{k=1}^n |x_k|^2$ et, pour une fonction holomorphe $H(x)$, $|dH|^2(x) = \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial H(x)}{\partial x_k} \right|^2$. Ensuite, pour $\eta > 0$, on désigne par Φ_η l'ensemble des fonctions plurisousharmoniques dans \mathbb{C}^n de la forme $\varphi(x) = A(|x|^\eta + 1)$, où A est une constante ≥ 1 .

Cela posé, nous pouvons énoncer notre résultat principal :

Théorème. Soit X une sous-variété analytique dans \mathbb{C}^n de dimension pure $n-1$ et d'ordre ρ ($0 \leq \rho < \infty$), et soit F une fonction canonique d'ordre ρ de la sous-variété X . Supposons qu'il existe un nombre réel $\eta (> \rho)$ et une fonction $\varphi \in \Phi_\eta$ telles que l'on ait $|dF| \geq \exp(-\varphi)$ en tout point de X . Sous cette hypothèse, pour toute fonction $\psi \in \Phi_\eta$, il existe une $\chi \in \Phi_\eta$ telle que toute fonction holomorphe g sur X vérifiant $|g| \leq \exp \psi$ sur X admette une fonction entière G telle que l'on ait $G|_X = g$ et $|G| \leq \exp \chi$ dans \mathbb{C}^n .

La démonstration du théorème repose sur la méthode classique d'extension due à Cartan et Oka [2], [9] et sur celle du $\bar{\partial}$ -problème due à Hörmander [3]. Pour un certain recouvrement ouvert $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ de \mathbb{C}^n , on forme une extension g_i de g dans U_i . Alors on a un 1-cocycle (h_{ij}) en posant $h_{ij} = (g_j - g_i)/F$. Pour obtenir dans chaque U_i une fonction holomorphe h_i de manière que $h_{ij} = h_j - h_i$, on aura besoin d'une partition de l'unité subordonnée à \mathfrak{U} (Voir Hörmander [3]). La partie essentielle §3 de ce mémoire est donc de construire un recouvrement ouvert et une partition de l'unité, qui nous amènent à former les g_i et h_j avec contrôle de la croissance.

La mode de construction dans §3 s'applique aussi au §4, où on montre que la condition $|dF| \geq \exp(-\varphi)$ n'est pas nécessaire.

§1. Notations et préliminaires

Pour un point $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ et pour un multiindice $m = (m_1, \dots, m_n)$ où m_k sont des entiers ≥ 0 , on pose $|m| = \sum_{k=1}^n m_k$, $m! = \prod_{k=1}^n m_k!$, $|x|^2 = \sum_{k=1}^n |x_k|^2$, $x^m = \prod_{k=1}^n x_k^{m_k}$ et $\frac{\partial^{|m|}}{\partial x^m} = \frac{\partial^{|m|}}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}}$.

On désigne par $B[r]$ la boule fermée $\{|x| \leq r\}$ dans \mathbb{C}^n de centre 0 et de rayon r .

Pour un nombre positif η , on désigne par $\Phi_\eta(\mathbb{C}^n) = \Phi_\eta$ l'ensemble des fonctions plurisousharmoniques $\varphi(x) = A(|x|^\eta + 1)$, où A parcourt l'ensemble des nombres ≥ 1 . Pour deux fonctions $\varphi = A(|x|^\eta + 1)$ et $\psi = B(|x|^\eta + 1)$, $\varphi \geq \psi$ si et seulement si $A \geq B$.

Pour un ensemble ouvert U dans \mathbb{C}^n et pour une sous-variété analytique X dans \mathbb{C}^n , on note $\mathcal{O}(U)$ l'espace des fonctions holomorphes dans U et $\mathcal{O}(X)$ l'espace des fonctions holomorphes sur X .

Rappelons la notion d'ordre de croissance. Soit $\beta = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} |x|^2$ et soit $\beta^{n-1} = \beta \wedge \dots \wedge \beta$ ($n-1$ fois). Pour une sous-variété analytique X dans \mathbb{C}^n , de dimension pure $n-1$, et pour un nombre positif r , on pose

$$n(r) = \begin{cases} \frac{1}{r^{2(n-1)}} \int_{B[r] \cap X} \beta^{n-1} & \text{si } n \geq 2 \\ \text{le nombre des points de } B[r] \cap X & \text{si } n = 1. \end{cases}$$

La fonction $n(r)$ est une fonction croissante de r (Lelong [6]). On dit que X

est d'ordre ρ , si ρ est la borne inférieure des nombres positifs η tels qu'il existe une fonction $\varphi \in \Phi_\eta$ qui vérifie la majoration $n(|x|) \leq \varphi(x)$ dans \mathbf{C}^n . On dit qu'une fonction entière H est d'ordre ρ , si ρ est la borne inférieure des nombres positifs η tels qu'il existe une fonction $\varphi \in \Phi_\eta$ vérifiant $|H| \leq \exp \varphi$ dans \mathbf{C}^n .

Dans le reste de § 1, nous fixons un nombre positif η et posons $K=2^\eta+1$. Nous allons indiquer quelques lemmes dont nous aurons besoin dans la suite.

Lemme 1. *Pour toute fonction $\varphi \in \Phi_\eta$ et pour tous points x et y dans \mathbf{C}^n tels que $|x-y| \leq 1$, on a $\varphi(y) \leq K\varphi(x)$.*

En effet, on a $|y| \leq |x| + |x-y| \leq |x| + 1$ et $|y|^\eta \leq 2^\eta(|x|^\eta + 1)$, d'où

$$A(|y|^\eta + 1) \leq 2^\eta A|x|^\eta + 2^\eta A + A \leq (2^\eta + 1)A(|x|^\eta + 1).$$

On peut facilement démontrer, en vertu du lemme 1 et de l'intégrale de Cauchy, le

Lemme 2. *Soit $\varphi \in \Phi_\eta(\mathbf{C}^n)$. Si $H \in \mathcal{O}(\mathbf{C}^n)$ satisfait à $|H| \leq \exp \varphi$ dans \mathbf{C}^n , alors on a $\left| \frac{1}{m!} \frac{\partial^m H}{\partial x^m} \right| \leq (\sqrt{n})^m \exp(K\varphi)$ dans \mathbf{C}^n , quel que soit le multiindice m .*

Lemme 3. *Soient $\varphi \in \Phi_\eta(\mathbf{C}^n)$ et $H \in \mathcal{O}(\mathbf{C}^n)$ telles que $|H| \leq \exp \varphi$ dans \mathbf{C}^n . Alors, pour tous $x, y \in \mathbf{C}^n$ tels que $|x-y| \leq 1$, on a $|H(x) - H(y)| \leq n|x-y| \exp(K^2\varphi(x))$.*

En effet, comme on a

$$H(y) - H(x) = \int_0^1 \sum_{k=1}^n \frac{\partial H(x+t(y-x))}{\partial x_k} (y_k - x_k) dt,$$

on a, d'après les lemmes 1 et 2,

$$\begin{aligned} |H(y) - H(x)| &\leq \sqrt{n} \exp(K^2\varphi(x)) \sum_{k=1}^n |y_k - x_k| \\ &\leq n|y-x| \exp(K^2\varphi(x)). \end{aligned}$$

Lemme 4. (Voir [4]). *Soit $H \in \mathcal{O}(\mathbf{C}^n)$.*

- (1) *S'il existe $\varphi \in \Phi_\eta$ telle que $|H| \leq \exp \varphi$ dans \mathbf{C}^n , alors on a $\int_{\mathbf{C}^n} |H|^2 e^{-3\varphi} dx < \infty$.*
- (2) *S'il existe $\varphi \in \Phi_\eta$ telle que $\|H\|_\varphi^2 = \int_{\mathbf{C}^n} |H|^2 e^{-\varphi} dx < \infty$, alors on a $|H| \leq \sqrt{\frac{n!}{\pi^n}} \|H\|_\varphi \exp((K+n)\varphi)$ dans \mathbf{C}^n .*

En effet, si l'on a $|H| \leq \exp \varphi$ dans \mathbf{C}^n , alors on a $\int_{\mathbf{C}^n} |H|^2 e^{-3\varphi} dx \leq \int_{\mathbf{C}^n} e^{-\varphi} dx < \infty$, ce qui montre (1).

Réciproquement, supposons $\|H\|_\varphi^2 < \infty$ et, pour un point $x \in \mathbf{C}^n$, posons $U = \{y \mid |x-y| \leq \exp(-\varphi(x))\}$. D'après le lemme 1, on a $\varphi(y) \leq K\varphi(x)$ pour tout $y \in U$. Alors on a

$$|H(x)| \leq \frac{1}{\text{volume } U} \int_U |H(y)| dy$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{\text{volume } U} \left(\int_U |H|^2 e^{-\varphi} dy \right)^{1/2} \left(\int_U e^{\varphi} dy \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{\|H\|_{\varphi}}{\sqrt{\text{volume } U}} \exp(K\varphi(x)) \\ &= \left(\frac{\pi^n}{n!} \exp(-2n\varphi(x)) \right)^{-1/2} \|H\|_{\varphi} \exp(K\varphi(x)), \end{aligned}$$

ce qui démontre (2) du lemme 4.

§ 2. Une condition suffisante

Commençons par donner quelques définitions. Pour une forme différentielle $f = \sum_{k=1}^n f_k \overline{dx}_k$ de bidegré $(0, 1)$, on pose $|f|^2(x) = \sum_{k=1}^n |f_k(x)|^2$.

Soit $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de \mathbf{C}^n . On dira \mathfrak{U} *localement au plus à m feuilles*, m étant un entier positif, si tout point de \mathbf{C}^n admet un voisinage qui rencontre au plus m des U_i . Pour un entier $p \geq 0$ et pour $S = (S_0, \dots, S_p) \in I^{p+1}$, on pose $|S| = p+1$ et $U_S = U_{s_0} \cap \dots \cap U_{s_p}$. Pour une p -cochaîne $h = (h_s) \in C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ où \mathcal{O} est le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur \mathbf{C}^n , et pour une fonction continue φ à valeurs réelles dans \mathbf{C}^n , on pose

$$\|h\|_{\varphi}^2 = \sum_{|S|=p+1} \int_{U_S} |h_s|^2 e^{-\varphi} dx,$$

où dx désigne la mesure de Lebesgue dans \mathbf{C}^n (Voir 7.3 et 7.6 de Hörmander [3]).

En raisonnant comme dans le lemme 4, on peut démontrer facilement le

Lemme 5. *Soient \mathfrak{U} un recouvrement ouvert de \mathbf{C}^n localement au plus à m feuilles, $h = (h_s) \in C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ et $\varphi \in \Phi_{\eta}$ ($\eta > 0$). Si l'on a $|h_s| \leq \exp \varphi$ dans U_s quel que soit $S \in I^{p+1}$, alors $\|h\|_{3\varphi}$ est fini.*

Soit $(\xi_i)_{i \in I}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ de \mathbf{C}^n , où on suppose toujours chaque ξ_i de classe C^{∞} dans \mathbf{C}^n , à support (compact ou non) dans U_i et à valeurs réelles dans l'intervalle $[0, 1]$. Nous dirons que $(\xi_i)_{i \in I}$ satisfait à la condition (A_{η}) avec $\alpha \in \Phi_{\eta}$, η étant un nombre réel positif, si l'on a $|\bar{\partial} \xi_i| \leq \exp \alpha$ dans \mathbf{C}^n pour tout $i \in I$.

Cela posé, nous allons établir d'après Hörmander le

Théorème 1. *Soient $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de \mathbf{C}^n localement au plus à m feuilles, m étant un entier positif, et $(\xi_i)_{i \in I}$ une partition de l'unité subordonnée à \mathfrak{U} et satisfaisant à la condition (A_{η}) avec $\alpha \in \Phi_{\eta}$, η étant un nombre réel positif. Alors, pour toute $\beta \in \Phi_{\eta}$, il existe un nombre positif N et une fonction $\lambda \in \Phi_{\eta}$ qui satisfont à la condition suivante :*

Si un 1-cocycle $h = (h_{i,j}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ vérifie la majoration $|h_{i,j}| \leq \exp \beta$ dans $U_i \cap U_j$ pour tous $i, j \in I$, il existe $h' \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ telle que $\bar{\partial} h' = h$ et $\|h'\|_{\lambda}^2 \leq N$.

En effet, posons $b_j = \sum_{i \in I} \xi_i h_{ij}$ dans U_j et $b = (b_j)$. Comme $\delta h = 0$, on a $b_j - b_i = h_{ij}$ dans $U_i \cap U_j$. Pour tout $x \in U_j$, on a $|b_j(x)|^2 \leq \left(\sum_{i \in I} \xi_i(x)^2 \right) \left(\sum_{U_i \ni x} |h_{ij}(x)|^2 \right) \leq \sum_{U_i \ni x} |h_{ij}(x)|^2$ d'où il vient

$$(1) \quad \|b\|_{3\beta}^2 = \sum_{j \in I} \int_{U_j} |b_j|^2 e^{-3\beta} dx \leq \|h\|_{3\beta}^2.$$

Comme on a $\bar{\delta} b_i = \bar{\delta} b_j$ dans $U_i \cap U_j$, les $\bar{\delta} b_i$ définissent une forme différentielle f de bidegré $(0, 1)$ de classe C^∞ dans tout C^n .

D'autre part, d'après la condition (A_η) , on a $|f|^2(x) \leq m \exp(2\alpha(x)) \sum_{U_i \ni x} |h_{ij}(x)|^2$ dans U_j . Alors, on a

$$(2) \quad \|f\|_{2\alpha+3\beta}^2 \leq m \|h\|_{3\beta}^2.$$

On prend $\lambda \in \Phi_\eta$ de sorte que l'on ait $\lambda \geq 2\alpha + 3\beta + 2 \log(1 + |x|^2)$. Alors, d'après Hörmander ([3] Theorem 4.4.2.), il existe $u \in L^2(C^n, \text{loc.})$ telle que l'on ait $\bar{\delta} u = f$ et

$$(3) \quad \|u\|_\lambda^2 \leq \|f\|_{2\alpha+3\beta}^2.$$

On pose $h'_i = b_i - u$ pour tout $i \in I$. Alors on a $h' = (h'_i) \in C^0(\mathbb{U}, \mathcal{O})$, qui satisfait à $\bar{\delta} h' = h$ et, d'après (1), (2) et (3), à l'estimation

$$\begin{aligned} \|h'\|_\lambda^2 &= \sum_{i \in I} \int_{U_i} |h'_i|^2 e^{-\lambda} dx \\ &\leq 2 \left\{ \sum_{i \in I} \int_{U_i} |b_i|^2 e^{-\lambda} dx + \sum_{i \in I} \int_{U_i} |u|^2 e^{-\lambda} dx \right\} \\ &\leq 2 \{ \|b\|_\lambda^2 + m \|u\|_\lambda^2 \} \\ &\leq 2(1 + m^2) \|h\|_{3\beta}^2. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \|h\|_{3\beta}^2 &= \sum_{i, j \in I} \int_{U_i \cap U_j} |h_{ij}|^2 e^{-3\beta} dx \\ &\leq \sum_{i, j \in I} \int_{U_i \cap U_j} e^{-\beta} dx \\ &\leq m^2 \int_{C_n} e^{-\beta} dx. \end{aligned}$$

En posant $N = 2m^2(1 + m^2) \int_{C_n} e^{-\beta} dx$, on obtient $\|h'\|_\lambda^2 \leq N$, ce qui démontre le théorème.

Soit X une sous-variété analytique dans C^n , de dimension pure $n-1$ et d'ordre fini ρ et soit F une fonction canonique d'ordre ρ de X (voir l'introduction § 0). Soit donnée une fonction holomorphe g sur X . On appelle *extension locale de g subordonnée au recouvrement $\mathbb{U} = (U_i)_{i \in I}$ de C^n* toute 0-cochaîne $(g_i)_{i \in I} \in C^0(\mathbb{U}, \mathcal{O})$ telle que $g_i|_{X \cap U_i} = g|_{X \cap U_i}$ pour tout $i \in I$. Nous dirons qu'une extension locale

$(g_i)_{i \in I}$ de g satisfait aux conditions (B_η) avec $\beta \in \Phi_\eta$ si

- 1° $|g_i| \leq \exp \beta$ dans U_i pour tout $i \in I$,
- 2° $\left| \frac{g_j - g_i}{F} \right| \leq \exp \beta$ dans $U_i \cap U_j$ pour tous $i, j \in I$.

Maintenant, on peut énoncer le

Théorème 2. Soit X une sous-variété analytique dans \mathbf{C}^n , de dimension pure $n-1$ et d'ordre fini ρ , et soit F une fonction canonique d'ordre ρ de X . Supposons qu'il existe un recouvrement ouvert $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ de \mathbf{C}^n localement au plus à m feuilles, m étant un entier positif, et une partition de l'unité $(\xi_i)_{i \in I}$, subordonnée à \mathfrak{U} et satisfaisant à la condition (A_η) avec une fonction $\alpha \in \Phi_\eta$, η étant un nombre réel plus grand que ρ . Sous ces hypothèses, pour toute $\beta \in \Phi_\eta$, il existe une $\gamma \in \Phi_\eta$ telle que, si $(g_i)_{i \in I}$ est une extension locale d'une fonction holomorphe g sur X , subordonnée à \mathfrak{U} et satisfaisant à (B_η) avec la fonction β , alors on puisse trouver une fonction entière G dans \mathbf{C}^n telle que $G|_X = g$ et $|G| \leq \exp \gamma$ dans \mathbf{C}^n .

En effet, les $h_{ij} = (g_j - g_i)/F$ forment un 1-cocycle qui vérifie $|h_{ij}| \leq \exp \beta$ dans chaque $U_i \cap U_j$. D'après le théorème 1, il existe un $N > 0$ et une $\lambda \in \Phi_\eta$, indépendantes de (h_{ij}) , telles que l'on puisse trouver $h' = (h'_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ satisfaisant à $h_{ij} = h'_j - h'_i$ (dans chaque $U_i \cap U_j$) et $\|h'\|_1^2 \leq N$. Alors $G = g_i - Fh'_i$ dans chaque U_i est une fonction bien définie et holomorphe dans tout \mathbf{C}^n telle que $G|_X = g$. Il ne reste qu'à vérifier la majoration.

Comme on a $\eta > \rho$, il y a une $\tau \in \Phi_\eta$ telle que $|F| \leq \exp \tau$ dans \mathbf{C}^n . On peut supposer $\lambda > 3\beta$ comme dans la démonstration du théorème 1. Alors, on a

$$\begin{aligned} \|G\|_{2\tau+\lambda}^2 &\leq 2 \sum_{i \in I} \int_{U_i} |g_i|^2 e^{-2\tau-\lambda} dx + 2 \sum_{i \in I} \int_{U_i} |Fh'_i|^2 e^{-2\tau-\lambda} dx \\ &\leq 2 \sum_{i \in I} \int_{U_i} |g_i|^2 e^{-3\beta} dx + 2 \sum_{i \in I} \int_{U_i} |h'_i|^2 e^{-\lambda} dx \\ &\leq 2 \left(m \int_{\mathbf{C}^n} e^{-\beta} dx + N \right). \end{aligned}$$

D'après le lemme 4, N_1^2 étant ce dernier member, on a

$$|G| \leq \sqrt{\frac{n!}{\pi^n}} N_1 \exp((K+n)(2\tau+\lambda)).$$

En prenant une $\gamma \in \Phi_\eta$ qui vérifie $\gamma \geq (K+n)(2\tau+\lambda) + \log \left(\sqrt{\frac{n!}{\pi^n}} N_1 \right)$, on voit qu'elle ne dépend que des n, η, m, τ, α et β , et qu'on a $|G| \leq \exp \gamma$ dans \mathbf{C}^n .

C.Q.F.D.

§ 3. Résultat principal

Ce paragraphe tout entier est consacré à la démonstration du théorème principal :

Théorème 3. Soit X une sous-variété analytique dans \mathbf{C}^n de dimension pure $n-1$ et d'ordre fini ρ , et soit F une fonction canonique d'ordre ρ de la sous-

variété X . Supposons qu'il existe un nombre réel $\eta (> \rho)$ et une fonction $\varphi \in \Phi_\eta$, telles que l'on ait $|dF| \geq \exp(-\varphi)$ en tout point de X . Sous cette hypothèse, pour toute fonction $\psi \in \Phi_\eta$, il existe une $\chi \in \Phi_\eta$ telle que toute fonction holomorphe g sur X vérifiant $|g| \leq \exp \psi$ sur X admette une fonction entière G telle que l'on ait

$$G|_{x=g} \quad \text{et} \quad |G| \leq \exp \chi \quad \text{dans } \mathbf{C}^n.$$

Remarque: Cette hypothèse ne dépend pas du choix d'une fonction canonique d'ordre ρ de X . En fait, P étant un polynôme de degré $\leq \rho$, on a $|d(Fe^P)| \geq \exp(-\varphi)$ pour le même η mais pour une certaine $\tilde{\varphi} \in \Phi_\eta$.

Pour démontrer le théorème, on peut supposer sans perdre la généralité que, pour $\eta (> \rho)$, pour $a \in \Phi_\eta$ et pour $g \in \mathcal{O}(X)$, on ait

- (i) $|F| \leq \exp a$ dans \mathbf{C}^n ;
- (ii) $\left| \frac{\partial F}{\partial x_k}(x) \right| \geq \exp(-a(x))$ en tout point $x \in X$ et pour un certain k dépendant de x ;
- (iii) $|g| \leq \exp a$ sur X ,

et que X ne rencontre pas $B[1]$. Alors la restriction de toute fonction de Φ_η à X est de classe C^∞ sur X . Rappelons $K=2^n+1$.

En vertu du théorème 2, il suffira donc de construire un recouvrement ouvert fini de \mathbf{C}^n , qui admet une partition de l'unité satisfaisant à (A_η) , et une extension locale de g satisfaisant à (B_η) .

Pour cela, on aura besoin des lemmes suivants. Si l'on a $\frac{\partial F}{\partial x_k}(y) \neq 0$ en un point y de X , X est représentée par $x_k = f(x')$ au voisinage de $y = (y_1, \dots, y_n)$, où f est une fonction holomorphe de $x' = (x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)$ au voisinage de $y' = (y_1, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_n)$. Par abus de notations, on écrira (x_k, x') au lieu de $x = (x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)$.

Lemme 6. *Toute fonction $\lambda \in \Phi_\eta$ admet une fonction $\sigma \in \Phi_\eta$ ayant la propriété suivante :*

Pour toute fonction $\tau \in \Phi_\eta$ telle que $\tau > \sigma$, il existe $\kappa \in \Phi_\eta$ telle que, si $\left| \frac{\partial F}{\partial x_k}(y) \right| \geq \exp(-\lambda(y))$ en un point $y \in X$ et si $x_k \in \mathbf{C}$ et $\exp(-\tau(y)) \leq |x_k - y_k| \leq \exp(-\sigma(y))$, alors $|F(x_k, y')| \geq \exp(-\kappa(x_k, y'))$. (En particulier, si $x_k \in \mathbf{C}$ et $0 < |x_k - y_k| \leq \exp(-\sigma(y))$, alors (x_k, y') n'appartient pas à X .)

Démonstration. On a

$$F(x_k, y') = \frac{\partial F}{\partial x_k}(y)(x_k - y_k) + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m F}{\partial x_k^m}(y)(x_k - y_k)^m.$$

Posons $t = |x_k - y_k|$. Si $0 < t < \frac{1}{\sqrt{n}}$, on a, d'après le lemme 2,

$$\left| \frac{\partial F}{\partial x_k}(y)(x_k - y_k) \right| \geq \exp(-\lambda(y))t \quad \text{et}$$

$$\left| \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m F}{\partial x_k^m}(y)(x_k - y_k)^m \right| \leq \sum_{m=2}^{\infty} (\sqrt{n})^m \exp(Ka(y)) t^m \\ = \exp(Ka(y)) \frac{nt^2}{1 - \sqrt{n}t}.$$

Si $t \leq \frac{\exp(-\lambda(y))}{2n \exp(Ka(y)) + \sqrt{n} \exp(-\lambda(y))}$, on peut en déduire $|F(x_k, y')| \geq \frac{1}{2} \exp(-\lambda(y))t$. Il suffit donc de prendre une $\sigma \in \Phi_\eta$ telle que

$$\exp(-\sigma) \leq \frac{\exp(-\lambda)}{2n \exp(Ka) + \sqrt{n} \exp(-\lambda)} \quad \text{dans } C^n.$$

En effet, pour $\tau \in \Phi_\eta$ telle que $\tau > \sigma$, prenons une $\kappa \in \Phi_\eta$ telle que $\kappa \geq K(\lambda + \tau)$ log 2. Alors on a, pour tout t tel que $\exp(-\tau(y)) \leq t \leq \exp(-\sigma(y))$,

$$\begin{aligned} |F(x_k, y')| &\geq \frac{1}{2} \exp(-(\lambda(y) + \tau(y))) \\ &\geq \frac{1}{2} \exp(-K(\lambda(x_k, y') + \tau(x_k, y'))) \\ &\geq \exp(-\kappa(x_k, y')), \end{aligned}$$

ce qui démontre le lemme.

Lemme 7. *Posons $L = K(\log 2 + 1)$. Pour toute $\lambda \in \Phi_\eta$, il existe $\theta \in \Phi_\eta$ telle que, si $\left| \frac{\partial F}{\partial x_k}(x) \right| \geq \exp(-\lambda(x))$ et $|x - y| \leq \exp(-\theta(x))$ pour deux points x et y de C^n , on ait $\left| \frac{\partial F}{\partial x_k}(y) \right| \geq \exp(-L\lambda(y))$.*

En effet, le lemme 3 s'applique à $\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial F}{\partial x_k}$, qui vérifie $\left| \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial F}{\partial x_k} \right| \leq \exp(Ka)$ d'après le lemme 2. En prenant une $\theta \in \Phi_\eta$ de sorte que $\theta \geq K^3 a + \log n + \log 2 + \log \sqrt{n} + \lambda$, on a, quand $|x - y| \leq \exp(-\theta(x))$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{\partial F}{\partial x_k}(x) - \frac{\partial F}{\partial x_k}(y) \right) \right| &\leq n|x - y| \exp(K^3 a(x)) \\ &\leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \exp(-\lambda(x)). \end{aligned}$$

Alors on a $\left| \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial F}{\partial x_k}(y) \right| \geq \frac{1}{2\sqrt{n}} \exp(-\lambda(x))$ et

$$\left| \frac{\partial F}{\partial x_k}(y) \right| \geq \exp(-\lambda(x) - \log 2) \geq \exp(-K(\log 2 + 1)\lambda(y)) = \exp(-L\lambda(y)).$$

C.Q.F.D.

Lemme 8. *λ et θ étant celles du lemme 7, il existe $\mu \in \Phi_\eta$ et $\nu \in \Phi_\eta$ de la façon suivante :*

Si l'on a $\left| \frac{\partial F}{\partial x_k}(y) \right| \geq \exp(-\lambda(y))$ en un point $y \in X$ pour un entier k ($1 \leq k \leq n$), alors la fonction $x_k = f(x')$, qui représente X au voisinage de y est bien définie et holomorphe sur la boule $B' = \{x' \in \mathbb{C}^{n-1} \mid |x' - y'| \leq \exp(-\mu(y))\}$ et elle satisfait à $|f(x') - y_k| \leq \exp(-\nu(y))$ pour tout $x' \in B'$. De plus, on a

$$\{x \mid |x_k - y_k| \leq 2 \exp(-\nu(y)), x' \in B'\} \subset \{x \mid |x - y| < \exp(-\theta(y))\}.$$

En effet, en vertu de $\frac{\partial f}{\partial x_m}(x') = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_m}(f(x'), x')}{\frac{\partial F}{\partial x_k}(f(x'), x')}$ ($1 \leq m \leq n, m \neq k$), si

$(f(x'), x') \in \{x \mid |x - y| \leq \exp(-\theta(y))\}$, on a, d'après les lemmes 2 et 7,

$$(1) \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x_m}(x') \right| \leq \sqrt{n} \exp(Ka(f(x'), x') + L\lambda(f(x'), x')).$$

Tout d'abord, on prend $\bar{\mu} \in \Phi_\eta$ et $\nu \in \Phi_\eta$, qui ne dépendent que de θ , telles que l'on ait

$$(2) \quad \{x \mid |x_k - y_k| \leq 2 \exp(-\nu(y)), |x' - y'| \leq \exp(-\bar{\mu}(y))\} \\ \subset \{x \mid |x - y| < \exp(-\theta(y))\}.$$

Ensuite, on prend une $\mu \in \Phi_\eta$ telle que $\mu \geq \bar{\mu}$ et $\mu \geq K(Ka + L\lambda) + \nu + \log n + \log 2$. On va voir que f est bien définie et holomorphe sur $B' = \{x' \in \mathbb{C}^{n-1} \mid |x' - y'| \leq \exp(-\mu(y))\}$ et f vérifie $|f(x') - y_k| \leq \exp(-\nu(y))$ sur B' .

En effet, s'il n'en était pas ainsi, en tenant compte de (2), on pourrait trouver un nombre positif $t < \exp(-\mu(y))$ tel que $f(x')$ soit définie et satisfasse à $|f(x') - y_k| \leq \exp(-\nu(y))$ sur $B'' = \{x' \in \mathbb{C}^{n-1} \mid |x' - y'| \leq t\}$ et qu'il existe $z' \in \partial B''$ tel que $|f(z') - y_k| = \exp(-\nu(y))$. D'après (1) et (2), pour tout $x' \in B''$, on tirerait de la formule

$$f(x') - y_k = \int_0^1 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n \frac{\partial f}{\partial x_m}(y' + s(x' - y'))(y_m - x_m) ds$$

les inégalités suivantes :

$$|f(x') - y_k| \leq \sqrt{n} \exp(K(Ka(y) + L\lambda(y))) \sqrt{n-1} |x' - y'| \\ \leq \frac{1}{2} \exp(-\nu(y)).$$

C'est une contradiction.

C.Q.F.D.

D'après les lemmes ainsi établis, nous allons choisir en plus de la fonction a prise plus haut six fonctions b, c, p, q, r et s , appartenant à Φ_η , ne dépendant que des n, η et a , et satisfaisant aux conditions suivantes :

(iv) Pour tout point $z \in \mathbb{C}^n$ tel que $\left| \frac{\partial F}{\partial x_k}(z) \right| \geq \exp(-L^j a(z))$ et pour tout point

x tel que $|x-z| \leq \exp(-b(z))$, on a $\left| \frac{\partial F}{\partial x_k}(x) \right| \geq \exp(-L^{j+1}a(x))$, où k et j sont des entiers tels que $1 \leq k \leq n$ et $0 \leq j \leq 4$. (L est le nombre défini dans le lemme 7.)

(v) Pour tout point $y \in X$ tel que $\left| \frac{\partial F}{\partial x_k}(y) \right| \geq \exp(-L^5 a(y))$, il n'existe d'autre point de X que y dans le disque $\{x \mid |x_k - y_k| \leq 2 \exp(-c(y)), x' = y'\}$ sur le plan $\{x \mid x' = y'\}$.

(vi) Pour tout point $y \in X$ tel que $\left| \frac{\partial F}{\partial x_k}(y) \right| \geq \exp(-L^4 a(y))$, la fonction $x_k = f(x')$ qui représente X au voisinage de y est bien définie et holomorphe sur la boule $B' = \{x' \in \mathbb{C}^{n-1} \mid |x' - y'| \leq \exp(-p(y))\}$ et elle vérifie $|f(x') - y_k| \leq \exp(-q(y))$ pour tout point $x' \in B'$. De plus, on a

$$\begin{aligned} & \{x \mid |x - y| \leq \exp(-r(y))\} \\ & \subset \{x \mid |x_k - y_k| \leq \exp(-q(y)), x' \in B'\} \\ & \subset \{x \mid |x_k - f(x')| \leq \frac{1}{6} \exp(-c(f(x'), x')), x' \in B'\} \\ & \subset \{x \mid |x - y| < \exp(-b(y))\}. \end{aligned}$$

(vii) Pour tout $y \in X$ tel que $\left| \frac{\partial F}{\partial x_k}(y) \right| \geq \exp(-L^3 a(y))$ et pour tout x tel que $x_i = y_i$ ($i \neq k$) et que

$$\exp(-r(y)) \leq |x_k - y_k| \leq \exp(-c(y)), \quad \text{on a } |F(x)| \geq \exp(-s(x)).$$

$$(viii) \quad c > \log \sqrt{n} \quad \text{et} \quad q \geq c + K \log \frac{5}{2}.$$

En effet, d'après le lemme 7, on prend $b \in \Phi_\eta$ tellement que la condition (iv) soit satisfaite. Ensuite, d'après le lemme 8, on prend $\tilde{p}, \tilde{q} \in \Phi_\eta$ de façon que, pour tout point $y \in X$ tel que $\left| \frac{\partial F}{\partial x_k}(y) \right| \geq \exp(-L^4 a(y))$, la fonction $x_k = f(x')$, qui représente X au voisinage de y , soit bien définie et holomorphe sur la boule $\tilde{B}' = \{x' \mid |x' - y'| \leq \exp(-\tilde{p}(y))\}$ et vérifie l'estimation $|f(x') - y_k| \leq \exp(-\tilde{q}(y))$ pour tout $x' \in \tilde{B}'$, et de plus qu'on ait $\{x \mid |x_k - y_k| \leq 2 \exp(-\tilde{q}(y)), x' \in \tilde{B}'\} \subset \{x \mid |x - y| < \exp(-b(y))\}$. Ensuite, d'après le lemme 6, on prend $\tilde{c} \in \Phi_\eta$ de sorte que (v) soit satisfaite, c étant remplacée par \tilde{c} , que (vii) soit vérifiée pour la fonction r qui sera déterminée tout à l'heure, et qu'on ait $\tilde{c} > \log \sqrt{n}$. On pose $c = \max\{\tilde{c}, K\tilde{q}\}$. Alors on a (v) sans dire et de plus

$$\begin{aligned} & \{x \mid |x_k - f(x')| \leq \frac{1}{6} \exp(-c(f(x'), x')), x' \in \tilde{B}'\} \\ & \subset \{x \mid |x - y| < \exp(-b(y))\}. \end{aligned}$$

En effet, pour tout point x tel que $x' \in \tilde{B}'$ et

$$|x_k - f(x')| \leq \frac{1}{6} \exp(-c(f(x'), x')) \quad \text{on a}$$

$$\begin{aligned}
|x_k - y_k| &\leq |x_k - f(x')| + |f(x') - y_k| \\
&\leq \frac{1}{6} \exp(-c(f(x'), x')) + \exp(-\tilde{q}(y)) \\
&\leq \frac{1}{6} \exp\left(-\frac{c(y)}{K}\right) \exp(-\tilde{q}(y)) \\
&\leq 2 \exp(-\tilde{q}(y)).
\end{aligned}$$

Maintenant, on prend une $q \in \Phi_\eta$ telle que $q \geq \max\left\{Kc + \log 6 + \log 2, c + K \log \frac{5}{2}\right\}$ et $q \geq \tilde{q}$ et, pour cette q , comme dans la démonstration du lemme 8, on prend $p \in \Phi_\eta$ de sorte que $p \geq \tilde{p}$ et que l'on ait $|f(x') - y_k| \leq \exp(-q(y))$ dans $B' = \{x' \in \mathbf{C}^{n-1} \mid |x' - y'| \leq \exp(-p(y))\}$. Remarquons que p et q ci-dessus ne dépendent que des n, η, a, b et c . Pour tout point x tel que $|x_k - y_k| \leq \exp(-q(y))$ et $x' \in B'$, on a

$$\begin{aligned}
|x_k - f(x')| &\leq |x_k - y_k| + |y_k - f(x')| \leq 2 \exp(-q(y)) \\
&\leq \exp(-Kc(y) - \log 6) \\
&\leq \frac{1}{6} \exp(-c(f(x'), x')),
\end{aligned}$$

ce qui montre que p et q satisfont à (vi) avec une $r \in \Phi_\eta$ assez grande.

Cela étant, nous allons définir un recouvrement ouvert fini de \mathbf{C}^n dont il s'agit. Pour deux entiers k et j tels que $1 \leq k \leq n$ et $1 \leq j \leq 5$, on pose

$$\begin{aligned}
X_k^j &= \left\{ y \in X \mid \left| \frac{\partial F}{\partial x_k}(y) \right| > \exp(-L^j a(y)) \right\}; \\
A_k^j &= \left\{ x \in \mathbf{C}^n \mid \exists y \in X_k^j, |x_k - y_k| < \frac{j}{5} \exp(-c(y)), x_i = y_i \ (1 \leq i \leq n, i \neq k) \right\};
\end{aligned}$$

$$U_k = A_k^3;$$

$$U_0 = \mathbf{C}^n - \bigcup_{k=1}^n \overline{A_k^1};$$

$$\mathfrak{U} = \{U_0, U_1, \dots, U_n\}$$

Alors, on voit

$$X_k^1 \subset X_k^2 \subset \dots \subset X_k^5;$$

$$A_k^1 \subset A_k^2 \subset \dots \subset A_k^5;$$

$$X_k^j \subset A_k^j;$$

$$X = \bigcup_{k=1}^n X_k^j \text{ et } \overline{U_0} \cap X = \emptyset.$$

\mathfrak{U} est un recouvrement ouvert fini de \mathbf{C}^n . D'après les conditions imposées à

$c \in \Phi_\eta$, on peut monter immédiatement que, pour tout $x \in \mathcal{A}_k^0$, il existe un et un seul point $y = (y_1, \dots, y_n)$ de X tel que $y_i = x_i$ pour $i \neq k$ et que $|x_k - y_k| \leq \exp(-c(y))$. L'application $x \mapsto y$ est alors une retraction holomorphe

$$\pi_k : \mathcal{A}_k^0 \longrightarrow X_k^0.$$

Nous allons construire une partition de l'unité $(\xi_i)_{i=0}^n$ subordonnée à \mathcal{U} et satisfaisant à la condition (A_η) avec une certaine $\alpha \in \Phi_\eta$. Prenons d'abord une fonction w définie sur \mathbf{R} , de classe C^∞ et à valeurs réelles dans $[0, 1]$, telle que $w(t) = 0$ pour $t \leq \frac{1}{3}$ et $w(t) = 1$ pour $t \geq \frac{2}{3}$. Pour chaque $k (1 \leq k \leq n)$, posons

$$\begin{aligned} V_k &= \{x \in U_k \mid \pi_k(x) \in X_k^0\}, \\ \sigma_k(x) &= w(3 - 5|x_k - f(x')| \exp c(\pi_k(x))) \quad \text{dans } U_k, \\ \mu_k(x) &= \begin{cases} w\left(3 - \frac{1}{\log L} \log \left(\frac{-\log \left| \frac{\partial F}{\partial x_k}(\pi_k(x)) \right|}{a(\pi_k(x))} \right)\right) & \text{dans } U_k - V_k \\ 1 & \text{dans } V_k, \end{cases} \\ \eta_k(x) &= \begin{cases} \mu_k(x)\sigma_k(x) & \text{dans } U_k \\ 0 & \text{dans } C^n - U_k. \end{cases} \end{aligned}$$

Manifestement, η_k est une fonction définie dans C^n , à valeurs dans $[0, 1]$, vérifiant $\eta_k = 1$ au voisinage de \mathcal{A}_k^0 , dont le support est contenu dans U_k . Les fonctions de Φ_η étant C^∞ sur X , η_k est de classe C^∞ dans tout C^n , en vertu de la nature de w .

Il s'agit d'évaluer leur croissance. On a, dans U_k ,

$$\begin{aligned} \bar{\partial} \sigma_k(x) &= -\frac{5}{2} \frac{dw}{dt} \frac{(x_k - f(x'))}{|x_k - f(x')|} \exp c(\pi_k(x)) \overline{dx_k} \\ &+ \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n \frac{dw}{dt} \left(\frac{5}{2} \frac{(x_k - f(x'))}{|x_k - f(x')|} \frac{\overline{\partial f(x')}}{\partial x_m} \right) \\ &- 5|x_k - f(x')| \left(\frac{\partial c(\pi_k(x))}{\partial x_m} + \frac{\partial c(\pi_k(x))}{\partial x_k} \frac{\overline{\partial f(x')}}{\partial x_m} \right) \exp c(\pi_k(x)) \overline{dx_m}. \end{aligned}$$

A l'aide de

$$\frac{\partial f}{\partial x_m}(x') = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_m}(\pi_k(x))}{\frac{\partial F}{\partial x_k}(\pi_k(x))},$$

et par un calcul direct, on pourra trouver sans difficulté une $\phi_1 \in \Phi_\eta$ telle que $|\bar{\partial} \sigma_k| \leq \exp \phi_1$ dans U_k . De la même façon, en évaluant les fonctions qui figurent dans

$$\begin{aligned} \bar{\partial} \mu_k(x) &= \frac{dw}{dt} \frac{1}{\log L} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n \left(\frac{-1}{2 \frac{\partial F}{\partial x_k}(\pi_k(x)) \log \left| \frac{\partial F}{\partial x_k}(\pi_k(x)) \right|} \left(\frac{\partial^2 F(\pi_k(x))}{\partial x_k^2} \frac{\overline{\partial f(x')}}{\partial x_m} + \frac{\partial^2 F(\pi_k(x))}{\partial x_k \partial x_m} \right) \right) \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{a(\pi_k(x))} \left(\frac{\partial a}{\partial \bar{x}_k}(\pi_k(x)) \overline{\frac{\partial f}{\partial x_m}(x')} + \frac{\partial a}{\partial x_m}(\pi_k(x)) \right) \overline{dx_m}.$$

on aura une $\phi_2 \in \Phi_\eta$ telle que $|\bar{\delta}\mu_k| \leq \exp \phi_2$ dans U_k . En somme, il existe une $\varphi_1 \in \Phi_\eta$ telle que l'on ait $|\bar{\delta}\eta_k| \leq \exp \varphi_1$ pour tout $k(1 \leq k \leq n)$ et dans C^n .

La construction précédente nous donne aussi une fonction ρ_k définie dans C^n , de classe C^∞ et à valeurs dans $[0, 1]$, telle que $\rho_k=1$ au voisinage de \bar{A}_k^1 et $\rho_k=0$ sur $C^n - A_k^2$ et que l'on ait $|\bar{\delta}\rho_k| \leq \exp \varphi_2$ dans C^n avec une certaine $\varphi_2 \in \Phi_\eta$. La fonction $\eta_0 = \prod_{k=1}^n (1 - \rho_k)$ prend la valeur 0 sur $\bigcup_{k=1}^n \bar{A}_k^1$ et la valeur 1 sur $C^n - \bigcup_{k=1}^n A_k^2$. Elle vérifie $|\bar{\delta}\eta_0| \leq n \exp \varphi_2$ dans C^n .

Finalement, on pose pour chaque $i=0, 1, \dots, n$,

$$\xi_i = \frac{\eta_i}{\sum_{k=0}^n \eta_k}.$$

Comme le dénominateur est ≥ 1 partout, $(\xi_i)_{i=0}^n$ est certainement une partition de l'unité dans C^n subordonnée à \mathfrak{U} et satisfaisant à (A_η) avec une fonction $\alpha \in \Phi_\eta$ telle que $\exp \alpha \geq n(\exp \varphi_1 + \exp \varphi_2)$.

Nous allons définir une extension locale $(g_i)_{i=0}^n$ de g subordonnée à \mathfrak{U} et satisfaisant aux conditions (B_η) avec une certaine $\beta \in \Phi_\eta$. Posons $g_0(x)=0$ dans U_0 , et pour chaque $k(1 \leq k \leq n)$, $g_k(x)=g(\pi_k(x))$ dans U_k . Il est clair que $(g_i)_{i=0}^n$ est une extension locale de g subordonnée à \mathfrak{U} . Remarquons que, pour chaque $k(1 \leq k \leq n)$, $g_k(x)$ est définie dans A_k^2 et y vérifie $|g_k(x)| = |g(\pi_k(x))| \leq \exp a(\pi_k(x)) \leq \exp(Ka(x))$, ce qui montre que la condition 1° de (B_η) est satisfaite.

Soit $x \in U_0 \cap U_k$ ($1 \leq k \leq n$) et posons $y = \pi_k(x)$. On a $|x_k - y_k| > \exp(-r(y))$. En effet, s'il n'en était pas ainsi, on aurait $|x - y| = |x_k - y_k| \leq \exp(-r(y))$. D'autre part, d'après (ii), il existe un entier m (égal à k ou non, $1 \leq m \leq n$) tel que

que $\left| \frac{\partial F}{\partial x_m}(y) \right| \geq \exp(-a(y))$. Les conditions (iv) et (vi) entraînent $x \in \bar{A}_m^1$, ce

qui est en contradiction avec $x \in U_0$. Alors, en vertu de (vii), on a

$$\left| \frac{g_k(x) - g_0(x)}{F(x)} \right| = \left| \frac{g(y)}{F(x)} \right| \leq \exp(Ka(x) + s(x)).$$

Finalement, nous allons estimer $(g_k - g_j)/F$ dans $U_j \cap U_k$ ($1 \leq j < k \leq n$). Pour la simplicité, supposons $j=1$ et $k=2$. Prenons un point quelconque z de $U_1 \cap U_2$. Les valeurs z_i de x_i ($3 \leq i \leq n$) étant fixées, on ne les écrira pas. Posons $y = \pi_1(z) = (y_1, z_2)$ et $w = \pi_2(z) = (z_1, w_2)$. X est représenté par $x_1 = f_1(x_2)$ au voisinage de y et par $x_2 = f_2(x_1)$ au voisinage de w .

Soit $\varphi_1 = \max(K^2 p, r)$. Si l'on a $|z_1 - y_1| \geq \exp(-\varphi_1(y))$ ou $|z_2 - w_2| \geq \exp(-\varphi_1(w))$, il existe une $\varphi_2 \in \Phi_\eta$ (qui ne dépend que des η, a, c et φ_1), d'après le lemme 6, telle que l'on ait

$$\left| \frac{g_2(z) - g_1(z)}{F(z)} \right| \leq \left| \frac{g(y)}{F(z)} \right| + \left| \frac{g(w)}{F(z)} \right|$$

$$\leq 2 \exp(Ka(z) + \varphi_2(z))$$

Il ne reste qu'à estimer $(g_2(z) - g_1(z))/F(z)$ sous les hypothèses

$$(1) \quad |z_1 - y_1| < \exp(-\varphi_1(y)) \quad \text{et} \quad |z_2 - w_2| < \exp(-\varphi_1(w)).$$

Par définition, on a

$$(2) \quad |z_2 - w_2| \leq \exp(-\varphi_1(w)) \leq \exp\left(-\frac{1}{K}\varphi_1(z)\right) \\ \leq \exp\left(-\frac{1}{K^2}\varphi_1(y)\right) \leq \exp(-p(y))$$

Alors, d'après (vi), la fonction f_1 est définie et holomorphe au point $(w_2) = (w_2, z_2, \dots, z_n)$ et vérifie $|f_1(w_2) - y_1| \leq \exp(-q(y))$. De plus, il n'existe d'autre point de X que $(f_1(w_2), w_2)$ dans le disque $\{(x_1, w_2) \mid |x_1 - y_1| \leq \exp(-q(y))\}$, d'où on a

$$(3) \quad f_1(w_2) = z_1.$$

Ensuite, d'après (2) et (3), en appliquant (iv) et (v) au point y avec $k=1$, on a $\left|\frac{\partial F}{\partial x_1}(w)\right| \geq \exp(-L^4 a(w))$. Alors, d'après (iv) et (vi), on a $\Gamma = \{(z_1, x_2) \mid |x_2 - w_2| \leq \exp(-r(w))\} \subset \mathcal{A}_1^5$. D'autre part, on a sans doute $\Gamma \subset \mathcal{A}_2^5$, d'où $\Gamma \subset \mathcal{A}_1^5 \cap \mathcal{A}_2^5$. En conséquence, $(g_2 - g_1)/F$ est holomorphe au voisinage de Γ . En vertu de (vii), on a $\left|\frac{g_2 - g_1}{F}\right| \leq 2 \exp(Ka(w) + s(w))$ sur la circonférence $\partial\Gamma = \{x \mid x_1 = z_1, |x_2 - w_2| = \exp(-r(w))\}$. La même inégalité est valide sur Γ , d'après le principe du maximum. Comme $|z_2 - w_2| < \exp(-\varphi_1(w)) \leq \exp(-r(w))$, on a $\left|\frac{g_2(z) - g_1(z)}{F(z)}\right| \leq 2 \exp(K^2 a(z) + Ks(z))$. Si l'on prend une $\beta \in \Phi_\eta$ de manière que $\beta \geq \max(K^2 a + Ks + \log 2, Ka + \varphi_2 + \log 2)$, alors $(g_k)_{k=0}^\infty$ satisfait aux (B_η) avec β .

Nous avons donc achevé la démonstration du théorème 3.

§ 4. Un exemple

Dans ce §, nous donnons une sous-variété analytique irréductible X dans \mathbf{C}^2 , de dimension 1 et d'ordre 0, pour laquelle, F étant une fonction canonique d'ordre 0 de X , on ne peut avoir l'estimation $|dF| \geq \exp(-\varphi)$, quels que soient $\eta > 0$ et $\varphi \in \Phi_\eta$, mais le problème d'extension à croissance est résoluble.

Posons d'abord pour $k=1, 2, \dots$

$$\lambda_{2k-1} = 2^k - \exp(-2^{k^2}) \quad \text{et} \quad \lambda_{2k} = 2^k.$$

La suite $\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$ forme un ensemble discret Y dans \mathbf{C} d'ordre 0. La série $\sum |\lambda_j|^{-1}$ étant convergente, le produit canonique de Weierstrass $f(x) = \prod_{j=1}^\infty \left(1 - \frac{x}{\lambda_j}\right)$ est une fonction canonique d'ordre 0 de Y . Observons qu'on ne peut estimer $|f'(\lambda)| \geq \exp(-A(|\lambda|^\eta + 1))$ pour tout $\lambda \in Y$, quels que soient $\eta > 0$ et $A > 0$. En effet,

si l'on avait une telle majoration, il existerait, d'après le lemme 6, un $B > 0$ tel que l'on ait $f(x) \neq 0$ pour tout $\lambda \in Y$ et pour tout $x \in C$ avec $0 < |x - \lambda| \leq \exp(-B(|\lambda|^\eta + 1))$. Or, $|\lambda_{2k} - \lambda_{2k-1}| = \exp(-\lambda_{2k}^k)$ deviendrait plus petit que $\exp(-B(\lambda_{2k}^\eta + 1))$ pour k assez grand, ce qui est une contradiction. Donc, Y ne satisfait pas à (2) du théorème de Leontev. On pourra facilement montrer que la fonction h sur Y définie par $h(\lambda_{2k-1}) = 0$ et $h(\lambda_{2k}) = 1$ ($k = 1, 2, \dots$) ne peut jamais étendre en une fonction entière d'ordre fini.

Considérons maintenant à l'aide de cette fonction f l'ensemble analytique $X = \{(x_1, x_2) \mid x_2^2 = f(x_1)\}$ dans C^2 . $F(x_1, x_2) = x_2^2 - f(x_1)$ étant certainement d'ordre 0, on voit que X est une sous-variété analytique irréductible dans C^2 , de dimension 1 et d'ordre 0, et que F est une fonction canonique d'ordre 0 de X .

Comme on a $|dF|(\lambda, 0) = |f'(\lambda)|$ en $(\lambda, 0) \in X$, l'observation faite plus haut montre qu'on ne peut avoir $|dF| \geq \exp(-\varphi)$ quels que soient $\eta > 0$ et $\varphi \in \Phi_\eta(C^2)$.

D'autre part, en réduisant le problème au théorème 2, nous allons voir rapidement la possibilité de l'extension avec contrôle de croissance. Soient donnés $\eta > 0$, $a \in \Phi_\eta$ et $g \in \mathcal{O}(X)$ de manière que $|F| \leq \exp a$ dans C^2 , $|g| \leq \exp a$ sur X et $a > \log 6$.

Pour chaque entier j ($1 \leq j \leq 4$) on pose

$$V_j = \left\{ (x_1, x_2) \mid \left| 2\sqrt{f(x_1)} \geq \sqrt{j} \exp(-a(x_1, \sqrt{f(x_1)})) \right. \right. \\ \left. \left. \mid x_2 - \sqrt{f(x_1)} \mid \text{ ou } \mid x_2 + \sqrt{f(x_1)} \mid < \frac{j}{17} \exp(a(x_1, \sqrt{f(x_1)})) \right\};$$

$$W_j = \left\{ (x_1, x_2) \mid \left| 2\sqrt{f(x_1)} \right| < \sqrt{j} \exp(a(x_1, \sqrt{f(x_1)})) \right. \\ \left. \mid x_2 \mid < j \exp(-a(x_1, \sqrt{f(x_1)})) \right\};$$

$$A_j = V_j \cup W_j.$$

Alors les A_j sont des voisinages ouverts de X et on a $\bar{A}_1 \subset A_3$. Donc, si l'on note $U_0 = C^2 - \bar{A}_1$ et $U_1 = A_3$, $\mathfrak{U} = (U_0, U_1)$ est un recouvrement ouvert de C^2 . D'une façon analogue à celle dans § 3, on pourra construire une partition de l'unité, subordonnée à \mathfrak{U} et satisfaisant à (A_η) .

Considérons trois fonctions entières

$$h_0(x_1) = \frac{g(x_1, \sqrt{f(x_1)}) + g(x_1, -\sqrt{f(x_1)})}{2}, \\ h_1(x_1) = \frac{\sqrt{f(x_1)} g(x_1, \sqrt{f(x_1)}) - \sqrt{f(x_1)} g(x_1, -\sqrt{f(x_1)})}{2f(x_1)} \text{ et}$$

$$H(x_1, x_2) = h_0(x_1) + x_2 h_1(x_1).$$

Alors, on a $H|_X = g$ mais on ne peut l'estimer globalement. Le numérateur de h_0 et celui de h_1 , considérés comme fonctions dans C^2 , peuvent être évalués sur X . Pour estimer h_1 , on remarque qu'il existe une $\theta \in \Phi_\eta(C)$ telle que l'on ait

$|f| > \exp(-\theta)$ dans le domaine $\Omega = \{x_1 \in \mathbb{C} \mid |x_1 - \lambda_j| > |\lambda_j|^{-1} \text{ pour tout } j \in N\}$ (Voir [1] p. 21). Donc, on peut estimer f inférieurement surtout sur les circonférences $|x_1| = 2^k + 1$, toutes situées dans Ω . De là, d'après le principe du maximum, h_1 ainsi que H peuvent être estimées sur X et par suite dans le voisinage U_1 de X .

Si l'on pose $g_0 = 0$ dans U_0 et $g_1 = H|_{U_1}$, alors ce que nous venons de dire assure que (g_0, g_1) est une extension locale de g , subordonnée à $\mathfrak{U} = (U_0, U_1)$ et satisfaisant à 1° de (B_η) . Or, tout point de $U_0 \cap U_1$ conserve une distance bien estimée inférieurement de X , on pourra prouver sans difficulté que la condition 2° de (B_η) est aussi remplie.

D'après le théorème 2, on aura une fonction $\psi \in \Phi_\eta(\mathbb{C}^2)$ indépendante de g et une fonction entière G telles que l'on ait $G|_X = g$ et $|G| \leq \exp \psi$ dans tout \mathbb{C}^2 .

FACULTÉ DES SCIENCES,
UNIVERSITÉ DE KYOTO

Bibliographie

- [1] Boas, R.P., Entire Functions, Academic Press, New York, 1954.
- [2] Cartan, H., Sur les fonctions de deux variables complexes, Bull. Soc. Math. France, **54** (1930), 99-116.
- [3] Hörmander, L., An introduction to complex analysis in several variables, Van Nostrand Company, New York, 1966.
- [4] Hörmander, L., Generators for some rings of analytic functions, Bull. Amer. Math. Soc., **73** (1967), 943-949.
- [5] Kneser, H., Zur Theorie der gebrochenen Funktionen mehrerer Veränderlicher, Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung, **48** (1938), 1-28.
- [6] Lelong, P., Intégration sur un ensemble analytique complexe, Bull. Soc. Math. France **85** (1957), 239-262.
- [7] Lelong, P., Fonctions entières (n variables) et fonctions plurisousharmoniques d'ordre fini dans \mathbb{C}^n , Jour. d'analyse Math. Jérusalem, **12** (1964), 365-407.
- [8] Leontev, A.F., On the interpolation of the class of entire functions of finite order, Doklady Akademii Nauk S.S.S.R. **56** (1948), 785-787.
- [9] Oka, K., Domaines convexes par rapport aux fonctions rationnelles, Jour. Sci. Hiroshima Univ. **6** (1936), 245-255.
- [10] Skoda, H., Croissance des fonctions entières s'annulant sur une hypersurfaces donnée de \mathbb{C}^n , Séminaire P. Lelong. 11^e année 1970/71. Springer-Verlag, Berlin.
- [11] Stoll, W., Ganze Funktionen endlicher Ordnung mit gegeben Nullstellenflächen, Math. Zeit. **57** (1953), 211-237.