J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)
21-1 (1981) 85-103

Sur le problème de Cauchy pour un système d'équations aux dérivées partielles

Par

Keiichiro KITAGAWA et Takashi SADAMATSU

(Reçu le 1er Octobre 1979)

1. Introduction

Quand on envisage un problème de Cauchy pour un système d'équations aux dérivées partielles, c'est normalement pour un système normal (au sens de Petrowsky). C. Wagschal [8] a étudié diverses formulations du problème de Cauchy...étant donné un système d'équations aux dérivées partielles à coefficients holomorphes et une hypersurface (initiale) analytique, trouver une (et une seule) solution holomorphe pour des données holomorphes. Il a montré d'abord des conditions nécessaires (suffisantes d'ailleurs) pour qu'un problème de Cauchy avec poids, c'est-à-dire, avec des données assujetties à la condition de compatibilité, ait une et une seule solution; notamment celle telle que, dite abréviativement, ce problème de Cauchy doive être non caractéristique. Il a ensuite montré que, cette dernière condition réalisée, un (au moins) problème de Cauchy sans poids, c'est-à-dire, celui ordinairement posé, peut être formulé et a une et une seule solution.

Nous aussi, nous voulons étudier diverses formulations du problème de Cauchy pour des systèmes plus généraux et ceci d'une manière differente. Tandis que Wagschal n'a spécialisé aucune des variables et qu'il a consideré l'hypersurface quelconque, nous spécialisons une des variables, soit t, et n'envisageons par suite que l'hyperplane initial $t=$constante.

En envoyant à la note ultérieure les considérations sur le cas général où la situation est fort différente, nous nous bornons ici à l'étude des systèmes assez restreints (Hypothèse 2). Nous montrons, sous cette hypothèse, parallèlement aux travaux de Wagschal, que, pour qu'un problème de Cauchy avec poids ait une et une seule solution, il faut primo, que la matrice-coefficient de partie principale est inversible...une généralisation de ce que le plan initial est non caractéristique... (Théorème 2), secondo, qu'un (au moins) problème de Cauchy sans poids peut être formulé et a une et une seule solution (Théorème 3) et tertio, que ce dernier est équivalent à un autre problème pour un système normal (par rapport à la dérivation en t) et kowalewskien...dont l'existence d'une unique solution est toujours assurée... (Théorème 3); plus précisément dite, si la matrice-coefficient de partie prin cipale est inversible, un (au moins) probèlme de Cauchy sans poids peut être formulé et ceci est équivalent à un autre problème pour un système normal (par rapport à la dérivation en t). Mais contrairement à la situation considérée par Wagschal où ce dernier système est kowalewskien au sens de Volevič, ce qui rend d'ailleurs suffisante la condition d'être non caractéristique, notre système-ci n'est généralement plus kowalewskien. Et, pour compléter notre considération, il faudrait encore des considérations comme celles de S. Mizohata [5], [6] et M. Miyake [3], [4].

Outre ceux assurés ci-haut, bien d'autres problèmes de Cauchy sans poids peuvent être formulés. Mais les considérations sur eux nous conduisent à la même difficulté qu'en celles sur le cas général dont nous nous abstenons (ci-haut). Nous les envoyons aussi à la note ultérieure.

§ 2. Préliminaire

Les coordonnées d'un point de $\boldsymbol{C}^{n+1}$ seront notées $(t, x)\equiv(t, x_1,\dots, x_n)$. La dérivation par rapport à t sera notée ∂_t et celle par rapport à $x\equiv(x_1,\dots, x_n)$ sera notée ∂_x. Soit Ω un domaine de $\boldsymbol{C}^{n+1}$. Soit $A\equiv(a_{ij})\equiv(a_{ij}(t, x; \partial_t, \partial_x))$ une $N\times N$ matrice d'opérateurs différentiels à coefficients holomorphes dans Ω. Nous laisserons tomber les variables s'il n'y pas de confusion, pour abréger les notations.

Nous envisageons un problème de Cauchy (C) au voisinage d'un point (t_0, x_0) de Ω.

$$(\mathrm{C})\begin{cases} Au(t, x)=f(t, x) \\ \textit{avec des données initiales sur l'hyperplan } t=t_0 \end{cases}$$

où $f(t, x)$ est donnée *holomorphe* à (t_0, x_0) et que les données initiales sont données *holomorphes* à x_0. Et nous étudions diverses formulations de ce problème de Cauchy (C) par déterminer la manière de donner les données initiales.

Définition 1.

Déterminée une fois la manière de donner les données initiales, si ce problème de Cauchy (C) a une et une seule solution holomorphe à (t_0, x_0) pour toute f et toutes données initiales données à cette manière, nous disons (abréviativement) que ce problème de Cauchy (C) est bien posé à (t_0, x_0).

Définition 2

Pour un opérateur différentiel $a\equiv a(t, x; \partial_t, \partial_x)$, non identiquement nul, à coefficients holomorphes dans Ω, l'ordre de dérivation par rapport à ∂_t, noté par $\underset{\partial_t}{\mathit{ordre}}\, a$, est défini par

$$\underset{\partial_t}{\mathit{ordre}}\, a=\sup_{\substack{(t,x)\in\Omega \\ \xi\in\boldsymbol{C}^n}}\{\text{degré de } a(t, x; \tau, \xi) \text{ comme polynôme en } \tau\}.$$

Nous conviendrons que l'ordre d'un opérateur nul est $-\infty$.

L'ordre d'une matrice A par rapport à t, noté $m=\underset{\partial_t}{\mathit{ordre}}\, A$, est défini par

$$m=\underset{\partial_t}{\mathit{ordre}}\, A=\operatorname{Sup}\{\sum_{i=1}^{N}\underset{\partial_t}{\mathit{ordre}}\, a_{i\pi(i)};\ \pi \text{ permutation de } \{1,\dots, N\}\}.$$

Remarquons que m est non négatif sinon $-\infty$. Et nous écartons cette dérnière possibilité. A partir d'ici, nous supposons la suivante

Hypothèse 1.
L'ordre m de matrice A est non négatif.

Définition 3.
Un système admissible pour A par rapport à ∂_t, ou un système admissible pour A tout court, est, par définition, un système d'entiers non négatifs $\sigma=\{t_j, s_i\}_{i,j=1,\dots,N}$ tels que

1) $\underset{\partial_t}{ordre}\ a_{ij} \leqq t_j - s_i$

2) $\sum_{j=1}^{N} t_j - \sum_{i=1}^{N} s_i = m\ (=\underset{\partial_t}{ordre}\ A)$.

L'existence d'un tel système est assurée par le lemme de Volevič [7].

Définition 4.
Soit $\sigma=\{t_j, s_i\}$ un système admissible pour A. La σ-partie principale A^σ de A est, par définition, la matrice définie par

$A^\sigma = (a^\sigma_{ij}(t, x; \partial_t, \partial_x)) \equiv (\mathring{a}^\sigma_{ij}(t, x; \partial_x)\partial_t^{t_j - s_i})$
où $a^\sigma_{ij}(t, x; \partial_t, \partial_x)$ est la partie d'ordre $t_j - s_i$ par rapport à ∂_t de $a_{ij}(t, x; \partial_t, \partial_x)$.

Et nous appelons la matrice $\mathring{A}^\sigma \equiv (\mathring{a}^\sigma_{ij})$ la matrice-coefficient de σ-partie principale A^σ de A.

Définition 5.
La partie principale A^p de A est, par définition, la matrice définie par

$A^p = (a^p_{ij}(t, x; \partial_t, \partial_x)) \equiv (\mathring{a}^p_{ij}(t, x; \partial_x)\partial_t^{m_{ij}})$
où $a^p_{ij}(t, x; \partial_t, \partial_x)$ est la partie d'ordre $m_{ij}(=\underset{\partial_t}{ordre}\ a_{ij})$ de $a_{ij}(t, x; \partial_t, \partial_x)$ par rapport à ∂_t si (i, j) est $(i, \pi(i))$ avec une certaine $\pi \in \Gamma_A$, et est identiquement nul ailleurs.

Où Γ_A est l'ensemble de toutes permutations π de $\{1,\dots, N\}$ réalisant

$$\sum_{i=1}^{N} \underset{\partial_t}{ordre}\ a_{i\pi(i)} = m\,.$$

Et nous appelons la matrice $\mathring{A}^p \equiv (\mathring{a}^p_{ij})$ la matrice-coefficient de partie principale A^p de A.

Définition 6.
Soit $X=(x_{ij})$ une matrice carrée d'opérateurs différentiels partiels à coefficients holomorphes dans Ω. X est dite inversible dans Ω s'il existe une matrice carrée Y d'opérateurs différentiels partiels à coefficients holomorphes dans Ω telle que

$$XY = YX = I\ (=\text{matrice identité}).$$

Et X est dite inversible à un point s'il existe un voisinage de ce point dans lequel X est inversible. Y est dite l'inverse de X et notée X^{-1}.

Grâce au théorème d'unicité pour la fonction holomorphe, si X est inversible à tout point de Ω, elle est inversible dans Ω.

§3. σ-partie principale A^{σ} et partie principale A^{p} de A

Commençons par préparer deux lemmes concernant les mathématiques combinatoires.

Soit Π_S l'ensemble de toutes permutations de l'ensemble fini S. Soit $I=\{1, 2,\dots, N\}$.

Lemme 1.

Soit Σ un sous-ensemble de $I^2=I\times I$ tel qu'il existe au moins une $\pi_0\in\Pi_I$ telle qu'on ait $(i, \pi_0(i))\in\Sigma$ pour $i\in I$.

Alors pour qu'il existe des π et $\mu\in\Pi_I$ telles qu'on ait

$$\pi(i)\leqq\mu(j) \qquad \textit{pour tout} \quad (i, j)\in\Sigma,$$

il faut et il suffit

$$\{\pi\in\Pi_I;\ (i, \pi(i))\in\Sigma \qquad \textit{pour tout} \quad i\in I\}=\{\pi_0\}.$$

Lemme 2.

Soient Λ un sous-ensemble de I^2, $\Pi=\{\pi\in\Pi_I;\ (i, \pi(i))\in\Lambda$ pour tout $i\in I\}$ supposé non vide et $\Sigma=\{(i, \pi(i))\in I^2;$ pour tous $\pi\in\Pi$ et $i\in I\}$.

Alors il existe des λ, $\mu\in\Pi_I$, $I_j\subset I$ ($I=\sum_{j=1}^{p} I_j$ (somme directe)) tels que l'on a

1) *pour toute $\pi\in\Pi$, il existe des $\pi_j\in\Pi_{I_j}$ $(j=1,\dots, p)$ telles que $\lambda\pi\mu^{-1}=\sum_{j=1}^{p}\pi_j$ (somme directe)*
2) $\Sigma=\Lambda\cap\{(i, j)\in I^2;\ i\in\mu^{-1}(I_k), j\in\lambda^{-1}(I_k), k=1,\dots. p\}$.
3) *pour toute $\sigma\in\Pi_{\{1,\dots,p\}}$ différente de l'identité, il existe un entier $k\in\{1,\dots, p\}$ tel que*

$$\Lambda\cap\{(i, j)\in I^2;\ i\in\mu^{-1}(I_k), j\in\lambda^{-1}(I_{\sigma(k)})\}=\phi .$$

Les démonstrations de ces deux lemmes n'ont aucun intérêt à notre considération et nous les envoyons aux appendices. Et interprétons ici le lemme 1, par exemple, en des termes de matrice: Soit $X=(x_{ij})$ une $N\times N$-matrice telle qu'il existe une permutation π_0 de $\{1,\dots, N\}$ telle que $x_{i\pi_0(i)}\neq 0$ pour tout $i=1,\dots, N$. Pour que X soit triangularisable par des échanges entre des lignes et entre des colonnes, il faut et il suffit qu'il n'existe pas d'autres telles permutations que π_0.

L'opération des échanges entre des lignes (des colonnes resp.) d'une matrice X est l'opération de gauche (de droite resp.) à X d'un produit fini de matrices $P_{\alpha\beta}=(p_{ij})$; $p_{\alpha\beta}=p_{\beta\alpha}=p_{ii}=1$ pour $i\neq\alpha$, β, et $p_{ij}=0$ ailleurs. Pour abréger les notations nous utiliserons la suivante.

Soit P_N l'ensemble de tous les produits finis de $N\times N$-matrices $P_{\alpha\beta}$. Nous notons $A\sim B$ pour des $N\times N$-matrices A, B, si nous avons $B=PAQ$ avec $P, Q\in P_N$.

Proposition 1.

1) $$A^p\sim\begin{pmatrix} A_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{pp}\end{pmatrix}$$

où A_{ii} sont des matrices carrées.

2) *Pour un système admissible σ pour A*

$$A^\sigma\sim\begin{pmatrix} A_{i_1i_1} & & A^\sigma_{ij} \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{i_pi_p}\end{pmatrix}$$

où A_{ii} sont celles notées ci-haut et A^σ_{ij} $(i<j)$ sont aussi des matrices.

Démonstration.

Soient $\Lambda=\{(i,j);\ a^\sigma_{ij}\neq 0\}$, $\Pi=\Gamma_\Lambda$ (voir Définition 5.) et $\Sigma=\{(i,j);\ a^p_{ij}\neq 0\}$. Alors le lemme 2 y est appliquable. Pour montrer 1) il suffit d'appliquer et intérpreter en termes de matrice le lemme 2. Et pour montrer 2) il suffit d'y combiner encore le lemme 1. ■

Remarque.

Nous avons les mêmes résultats quand nous remplaçons A^p et A^σ par leurs homologues $\mathring{A}^p$ et $\mathring{A}^\sigma$.

Proposition 2.

Soit X une $N\times N$-matrice d'opérateurs différentiels partiels à coefficients holomorphes dans Ω telle que l'on ait

$$X\sim\begin{pmatrix} X_{11} & & X_{ij} \\ & \ddots & \\ 0 & & X_{pp}\end{pmatrix}$$

où X_{ij} $(i<j)$ sont des matrices d'opérateurs différentiels partiels à coefficients holomorphes dans Ω et que X_{ii} sont des matrices de fonctions holomorphes dans Ω.

Alors nous avons

1) *Les énoncées suivantes sont équivalentes pour $(t_0, x_0)\in\Omega$ fixé.*

a) *L'équation différentielle $Xv=g$ a, pour toute g holomorphe à (t_0, x_0), une et une seule solution holomorphe à (t_0, x_0).*

b) *L'équation différentielle $Xv=g$ a, pour toute g holomorphe à (t_0, x_0), une solution holomorphe à (t_0, x_0).*

c) det $X_{ii}(t_0, x_0)\neq 0$ *pour tout $i=1,\dots, p$.*

d) *X est inversible à (t_0, x_0).*

2) *Si* det $X_{ii}(t_0, x_0)\neq 0$ *pour tout $i=1,\cdots, p$, alors, pour un choix arbitraire des k lignes (colonnes resp.) de X, on peut choisir k colonnes (lignes resp.) de*

X de manière à en former une sous-matrice de X inversible à (t_0, x_0).

Démonstration.

1) On voit aisément a)$\Rightarrow$b)$\Rightarrow$c)$\Rightarrow$d)$\Rightarrow$a). 2) Clair. ■

Nous posons ici l'hypothèse principale de cette note que nous supposons à partir d'ici.

Hypothèse 2.

La matrice-coefficient $\mathring{A}^p$ de partie principale de A est une matrice de fonctions holomorphes dans Ω.

Le théorème suivant est une conséquence des deux propositions précédentes.

Théorème 1.

1) *Les énoncées suivantes sont équivalentes pour* $(t_0, x_0) \in \Omega$ *fixé.*

a) *Une matrice-coefficient de σ-partie principale de A jouit, comme opérateur différentiel en* (t, x), *une des propriétés de X énoncées à* 1) *de proposition* 2.

b) *Une matrice-coefficient de σ-partie principale de A jouit, t étant fixé à* $t=t_0$, *comme opérateur différentiel en x, une des propriétés de X à* 1) *de proposition* 2.

c) $\det \mathring{A}^p(t_0, x_0) \neq 0$.

d) *La matrice-coefficient* $\mathring{A}^p$ *ainsi que la matrice-coefficient* $\mathring{A}^\sigma$ *pour tout système admissible σ pour A sont inversibles à* (t_0, x_0).

2) *Si* $\det \mathring{A}^p(t_0, x_0) \neq 0$, *alors, pour un choix arbitraire des k lignes* (*colonnes resp.*) *de* $\mathring{A}^p$, *on peut choisir k colonnes* (*lignes resp.*) *de* $\mathring{A}^p$ *de manière à en former une sous-matrice de* $\mathring{A}^p$ *inversible à* (t_0, x_0).

§4. Problèmes de Cauchy avec poids

Soit $\sigma = \{t_j, s_i\}$ un système admissible pour A. Soit (t_0, x_0) un point de Ω. Et nous envisageons un problème de Cauchy $(\mathrm{C})_\sigma$ au voisinage de (t_0, x_0).

$$(\mathrm{C})_\sigma \begin{cases} Au(t, x) = f(t, x) \\ \partial_t^k u_j(t_0, x) = \phi_j^k(x) \quad k = 0, 1, \dots, t_j - 1, \text{ et } j = 1, \dots, N \end{cases}$$

pour $f(t, x) = {}^t(f_1, \dots, f_N)$ holomorphe à (t_0, x_0) et $\phi_j^k(x)$ holomorphes à x_0. Or il est bien connu que, pour qu'il y ait une solution $u = {}^t(u_1, \dots, u_N)$, ces données f et ϕ_j^k ne peuvent être données aribtrairement et qu'elles doivent satisfaire une certaine condition.

Différentions, en effet, les deux membres de $Au = f$: l_i fois chaque i-ième équation de $Au = f$. Alors nous avons

$$(*)\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=0}^{t_j-s_i+l_i} \alpha_{ij}^{l_ik}(t,x;\partial_x)\partial_t^k u_j(t,x)=\partial_t^{l_i}f_i(t,x) \quad i=1,\dots,N \\ \text{avec } \alpha_{ij}^{lk}(t,x;\partial_x)=\displaystyle\sum_{\substack{\mu+\nu=k \\ 0\leqq\mu\leqq l,\,0\leqq\nu\leqq t_j-s_i}} \frac{l!}{\mu!(l-\mu)!}a_{ij}^{\nu(l-\mu)}(t,x;\partial_x) \\ \text{où } a_{ij}(t,x;\partial_t,\partial_x)\equiv\displaystyle\sum_{\nu} a_{ij}^{\nu}(t,x;\partial_x)\partial_t^{\nu} \\ \text{et } a_{ij}^{\nu(\mu)}(t,x;\xi)=\partial_t^{\mu}a_{ij}^{\nu}(t,x;\xi). \end{cases}$$

Remarquons ici pour le besoin ultérieur

$$(**)\quad \alpha_{ij}^{s_i+l\,t_j+l}=a_{ij}^{t_j-s_i}\equiv\mathring{a}_{ij}^{\sigma} \quad \text{pour tout} \quad l:\ t_j+l\geqq0,\ s_i+l\geqq0.$$

En posant $t=t_0$ à $(*)$ avec $0\leqq l_i\leqq s_i-1$, nous avons

$$(\mathrm{CC})_{\sigma}\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=0}^{t_j-s_i+l_i} \alpha_{ij}^{l_ik}(t_0,x;\partial_x)\phi_j^k(x)=\partial_t^{l_i}f_i(t_0,x) \\ \text{où} \quad l_i=0,1,\dots,s_i-1, \text{ et } i=1,\dots,N. \end{cases}$$

Définition 7.

Nous appelons $(\mathrm{CC})_{\sigma}$ la condition de compatibilité et le problème de Cauchy $(\mathrm{C})_{\sigma}$ avec les données assujetties à $(\mathrm{CC})_{\sigma}$ le σ-problème de Cauchy $(\mathrm{C})_{\sigma}$.

Lemme 3.

Pour qu'un σ-problème de Cauchy $(\mathrm{C})_{\sigma}$ soit bien posé à (t_0, x_0) de Ω, il faut que l'équation $\mathring{A}^{\sigma}v=g$ a, pour $t=t_0$ fixé, une solution holomorphe à x_0 pour toute g holomorphe à x_0.

Démonstration.

Soit $g={}^t(g_1,\dots,g_N)$ holomorphe à x_0. Posons

$$f_i(t,x)=\frac{(t-t_0)^{s_i}}{s_i!}g_i(x) \quad i=1,\dots,N.$$

Et envisageons le σ-problème de Cauchy $(\mathrm{C})_{\sigma}$ pour $f={}^t(f_1,\dots,f_N)$ et $\phi_j^k\equiv0$ et soit $u={}^t(u_1,\dots,u_N)$ sa solution. Alors, d'après $(*)$ avec $l_i=s_i$ et posé $t=t_0$, nous avons

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=0}^{t_j}\alpha_{ij}^{s_ik}(t_0,x;\partial_x)\partial_t^k u_j(t_0,x)=\partial_t^{s_i}f_i(t_0,x) \quad i=1,\dots,N$$

qui s'écrit, compte tenu de $(**)$ et $\phi_j^k\equiv0$,

$$\mathring{A}^{\sigma}(t_0,x;\partial_x)v(x)=g(x)$$
$$\text{avec} \quad v(x)={}^t(\partial_t^{t_1}u_1(t_0,x),\dots,\partial_t^{t_N}u_N(t_0,x)). \qquad \blacksquare$$

Théorème 2.

Si, pour un système admissible σ_1 pour A, le σ_1-problème de Cauchy $(\mathrm{C})_{\sigma_1}$ est bien posé à (t_0, x_0) de Ω, la matrice-coefficient $\mathring{A}^p$ de partie principale de A est inversible à (t_0, x_0), et, pour tout système admissible σ pour A, le σ-problème de

Cauchy $(\mathrm{C})_\sigma$ *est bien posé à* (t_0, x_0).

Démonstration.

Il est clair si l'on considère le théorème 1 et le lemme 3. ■

§ 5. Problèmes de Cauchy sans poids

Nous voulons envisager le problème de Cauchy (C) où les données peuvent être données arbitrairement. Soit $\nu=\{n_j\}$ un système d'entiers non négatifs avec $\sum_{j=1}^{N} n_j=m$. Et nous envisageons un problème de Cauchy $(\mathrm{C})_\nu$ au voisinage d'un point (t_0, x_0) de Ω

$$(\mathrm{C})_\nu \begin{cases} Au(t, x)=f(t, x) \\ \partial_t^k u_j(t_0, x)=\phi_j^k(x) \quad k=0, 1,\dots, n_j-1, \text{ et } j=1,\dots, N \end{cases}$$

pour $f(t, x)={}^t(f_1,\dots,f_N)$ *holomorphe* à (t_0, x_0) et $\phi_j^k(x)$ *holomorphes* à x_0. *Nous l'appelons* ν*-problème de Cauchy* $(\mathrm{C})_\nu$.

On se demande s'il est possible de formuler un tel problème de Cauchy. Et le lemme suivant, essentiellement dû à Wagschal, répond à cette question.

Soit $\sigma=\{t_j, s_i\}$ un système admissible pour A. Et soient

$$S_k=\{\, i\in\{1,\dots, N\};\ s_i\geqq k\} \quad k=0, 1,\dots, p_0\equiv \max_{i=1,\dots,N} s_i$$

$$T_k=\{\, j\in\{1,\dots, N\};\ t_j\geqq k\} \quad k=0, 1,\dots, q_0\equiv \max_{i=1,\dots,N} t_j$$

que nous supposons ordonnés canoniquement.

Lemme 4.

Supposons $\mathring{A}^p$ *inversible à un point* (t_0, x_0) *de* Ω. *Alors il existe des ensembles ordonnés* V_k; $k=0, 1,\dots, p_0$ *tels que l'on ait*

1) $V_k\subset T_k$, $V_{k+1}\subset V_k$ $\quad k=0, 1,\dots, p_0$
   $(S_0=T_0=V_0=\{1,\dots, N\}$ *et* $V_{p_0+1}=\phi)$
2) *Les matrices* $Q_{kk}^*=(\mathring{a}_{ij}^\sigma)_{i\in S_k, j\in V_k}$ *sont inversibles à* (t_0, x_0)
3) *Il existe un système* $\nu^*=\{n_j^*\}$ *d'entiers non négatifs avec* $\sum_{j=1}^{N} n_j^*=m$ *tel que*

$$V_k=\{\, j\in\{1,\dots, N\};\ t_j-n_j^*\geqq k\} \quad et \quad p_0=\max_{j=1,\dots,N}(t_j-n_j^*).$$

Démonstration.

1) et 2) se démontrent aisément par l'induction grâce au théorème 1. D'après $V_{k+1}\subset V_k$, il existe, pour j fixé, un entier k_j non négatif tel que $j\in V_k$ pour tout $k\leqq k_j$ et $j\notin V_{k_j+1}$. Pour 3) il suffit d'envisager $n_j^*=t_j-k_j$. ■

Reprenons $(*)$ avec $0\leqq l_i\leqq s_i-1$. Compte tenu de $(**)$, celle-ci peut être écrit

(1) $Q^*(t, x;\partial_x)U^*(t, x)+R^*(t, x;\partial_t, \partial_x)u(t, x)=F^*(t, x)$
   avec $Q^*=(Q_{hk}^*)_{h,k=1,\dots,p_0}$ *où* $Q_{hk}^*=(\alpha_{ij}^{s_i-h\,t_j-k})_{i\in S_h, j\in V_k}$ *sont telles que* $Q_{hk}^*\equiv 0$

pour $h>k$ *et* $Q^*_{kk}=(\mathring{a}^q_{ij})_{i\in S_k, j\in V_k}$,
$U^*={}^t((\partial_t^{t_j-1}u_j)_{j\in V_1},\dots,(\partial_t^{t_j-p_0}u_j)_{j\in V_{p_0}})$
$F^*={}^t((\partial_t^{s_i-1}f_i)_{i\in S_1},\dots,(\partial_t^{s_i-p_0}f_i)_{i\in S_{p_0}})$ *et*

R^* *est une* $\sum_{i=1}^N s_i\times N$*-matrice telle que* R^*u *ne contienne que de* $\partial_t^{t_j-k}u_j$ *pour* $j\in T_k-V_k$ $(1\leqq k\leqq p_0)$ *et* $j\in T_k$ $(p_0+1\leqq k\leqq q_0)$.

Proposition 3.

Soit $\mathring{A}^p$ *inversible à* $(t_0, x_0)\in\Omega$. *Alors il existe un système* $v^*=\{n_j^*\}$ *d'entiers non négatifs avec* $\sum_{j=1}^N n_j^*=m$ *tel que* Q^* *à* (1) *est inversible à* (t_0, x_0). *Et si un* σ*-problème de Cauchy* $(\mathrm{C})_\sigma$ *pour un système admissible* σ *pour* A *est bien posé à* (t_0, x_0), *le* v^**-problème de Cauchy* $(\mathrm{C})_{v^*}$ *l'est aussi. Et, vice versa, si ce* v^**-problème de Cauchy-ci est bien posé à* (t_0, x_0), *le* σ*-problème de Cauchy* $(\mathrm{C})_\sigma$ *pour tout système admissible* σ *pour* A *l'est aussi.*

Démonstration.

La première partie n'est autre que le lemme 4. Remarquons pour le reste que $j\in T_k-V_k$ $(1\leqq k\leqq p_0)$ où $j\in T_k$ $(p_0+1\leqq k\leqq q_0)$ entrainent t_j-$k<n_j^*$ en sorte que R^*u ne contient que de $\partial_t^k u_j$ pour $k<n_j^*$. Grâce à l'inversibilité de Q^* et de $\mathring{A}^\sigma$, à partir des données d'un problème de Cauchy, on peut construire des données d'un autre problème de Cauchy telle que sa solution soit celle du premier problème de Cauchy,...c'est tout à fait pareil à la démonstration du théorème 1... . Ceci montre le reste du théorème. ■

Revenons encore à (*). Soient $v=\{n_j\}$ un système d'entiers non négatifs avec $\sum_{j=1}^N n_j=m$ et $\sigma=\{t_j, s_i\}$ un système admissible pour A tel que $t_j\geqq n_j$ pour $j=1,\dots, N$. Soient

$$S_k=\{i\in\{1,\dots,N\};\, s_i\geqq k\}\qquad k=0,1,\dots,p_0\equiv\max_{i=1,\dots,N} s_i$$
$$T_k=\{j\in\{1,\dots,N\};\, t_j\geqq k\}\qquad k=0,1,\dots,q_0\equiv\max_{j=1,\dots,N} t_j$$
$$V_k=\{j\in\{1,\dots,N\};\, t_j-n_j\geqq k\}\quad k=0,1,\dots,r_0\equiv\max_{j=1,\dots,N}(t_j-n_j)$$

que nous supposons ordonnés canoniquement. Préparons encore des notations. Soient

$$D={}^t(D_1,\dots,D_{p_0})\ \text{une}\ \sum_{i=1}^N s_i\times N\text{-matrice}\ ^{(*)}$$

avec $|S_k|\times N$-matrices $D_k=(\delta_{ij}\partial_t^{k-1})_{i\in S_k, j\in\{1,\dots,N\}}$
où $|S_k|$ est le cardinal de S_k et δ_{ij} le symbole de Kronecker en sorte que nous ayons

$$Df=F\equiv{}^t((f_i(t,x))_{i\in S_1},\dots,(\partial_t^{p_0-1}f_i(t,x))_{i\in S_{p_0}}),$$

(*) Cette notation de transposé est mal utilisée: cela signifie simplement que l'on range $D_1,\dots, D_{p_0}$ verticalement.

$$R_\nu = {}^t(R_1^\nu, \dots, R_{p_0}^\nu) \text{ une } \sum_{i=1}^N s_i \times N\text{-matrice}$$

avec $|S_k| \times N$-matrices $R_k^\nu = (\sum_{h=0}^{n_j-1} \alpha_{ij}^{k-1h}(t, x; \partial_x)\partial_t^h)_{i \in S_k j, \in \{1,\dots,N\}}$,

$$D_\nu = {}^t(D_1^\nu, \dots, D_{r_0}^\nu) \text{ une } \sum_{i=1}^N s_i \times N\text{-matrice}$$

avec $|V_k| \times N$-matrices $D_k^\nu = (\delta_{ij}\partial_t^{n_j+k-1})_{i \in V_k, j \in \{1,\dots,N\}}$
en sorte que nous avons

$$D_\nu u = U_\nu \equiv {}^t((\partial_t^{n_j} u_j(t, x))_{j \in V_1}, \dots, (\partial_t^{n_j+r_0-1} u_j(t, x))_{j \in V_{r_0}}),$$

et

$$Q_\nu = (Q_{hk}^\nu)_{h=1,\dots,p_0, k=1,\dots,r_0} \text{ une } \sum_{i=1}^N s_i \times \sum_{i=1}^N s_i\text{-matrice}$$

avec $|S_h| \times |V_k|$-matrices $Q_{hk}^\nu = (q_{ij}^{hk})_{i \in S_h, j \in V_k}$
où $q_{ij}^{hk} = \alpha_{ij}^{h-1 n_j+k-1}(t, x; \partial_x)$ $i \in S_h$ et $j \in V_k$.

Alors (*) avec $0 \leqq l_i \leqq s_i - 1$ s'ecrit

(2) $Q_\nu(t, x; \partial_x)U_\nu(t, x) + R_\nu(t, x; \partial_t, \partial_x)u(t, x) = D(\partial_t)f(t, x)$
avec $U_\nu(t, x) = D_\nu(\partial_t)u(t, x)$.

Définition 8.

Soient $X = (x_{ij})$ une matrice carrée d'opérateurs différentiels partiels à coefficients holomorphes dans Ω, et $\nu = \{n_j\}$ un système d'entiers non négatifs. X est dite ν-normale par rapport à ∂_t si l'on a $\underset{\partial_t}{ordre}\, x_{ij} \leqq n_j$ et que le coefficient de $\partial_t^{n_j}$ à x_{ij} est 1.

Proposition 4.

Soient $\mathring{A}^p$ et Q_ν à (2) inversibles à un point (t_0, x_0) de Ω. Alors il existe une matrice $P_\nu(t, x; \partial_t, \partial_x)$ inversible à (t_0, x_0) telle que $P_\nu A$ soit ν-normale par rapport à ∂_t.

Démonstration.

Remarquons tout d'abord que, bien que Q_ν à (2) dépende aussi de σ, soit Q_ν^σ, quand on remplace σ par $\sigma + k = \{t_j + k, s_i + k\}$ (k; entier>0), $Q_\nu^{\sigma+k}$ est encore inversible si Q_ν^σ l'est. En effet on montre aisément que l'on a

$$Q_\nu^{\sigma+k} \sim \begin{pmatrix} \mathring{A}^\sigma & & * \\ & \ddots & \mathring{A}^\sigma \\ 0 & & Q_\nu^\sigma \end{pmatrix}$$

Cette remarque faite, nous supposons $t_j \geqq n_j + 1$, $s_i \geqq 1$.

Soit $Au = f$ pour u donnée. Par opérer D à deux membres de $Au = f$ nous avons (2) qui donne par suite

$$U_\nu + Q_\nu^{-1} R_\nu u = Q_\nu^{-1} Df.$$

Par l'introduction des projections p_k $(k=0, 1)$

$$p_0:{}^t(V_1,\dots, V_{r_0})\longrightarrow {}^t(V_1)\,,\quad p_1:{}^t(V_1,\dots, V_{r_0})\longrightarrow {}^t(V_2,\dots, V_{r_0})$$

en sorte que nous avons

$$p_0U_\nu={}^t(\partial_t^{n_j}u_j)_{j=1,\dots,N}\,,\quad p_1U_\nu={}^t((\partial_t^{n_j+1}u_j)_{j\in V_2},\dots, (\partial_t^{n_j+r_0-1}u_j)_{j\in V_{r_0}})$$

celle-ci s'écrit, en posant

$$P_\nu=p_0Q_\nu^{-1}D$$

$$(2)_1\quad \begin{cases} P_\nu Au=P_\nu f \\ p_1D_\nu u+p_1Q_\nu^{-1}R_\nu u=p_1Q_\nu^{-1}Df. \end{cases}$$

Il est alors aisé de voir

$$A_\nu\equiv P_\nu A=p_0D_\nu+p_0Q_\nu^{-1}R_\nu$$

est ν-normale par rapport à ∂_t et que l'équation $Au=f$ est équivalente à $(2)_1$. Nous allons voir les deuxièmes équations de $(2)_1$ sont déduites des premières en sorte que $(2)_1$ est équivalente à ses seules premières équations $P_\nu Au\equiv A_\nu u\equiv P_\nu f$.

Soit $\tilde{D}={}^t(\tilde{D}_1,\dots, \tilde{D}_{r_0})$ une $\sum\limits_{i=1}^{N} s_i\times N$-matrice avec

$$\tilde{D}_k=(\delta_{ij}\partial_t^{k-1})_{i\in V_k, j\in\{1,\dots,N\}}\,.$$

Alors

$$\tilde{D}A_\nu u=\tilde{D}p_0D_\nu u+\tilde{D}p_0Q_\nu^{-1}R_\nu u$$

où le premier terme du deuxième membre n'est autre que

$$\tilde{D}p_0D_\nu u=U_\nu\equiv D_\nu u\,.$$

Et du deuxième terme, nous éliminons des $\partial_t^{n_j+k}u_j$ $(k\geqq 0)$ par des opérations élémentaires. Soit J la matrice représentant cette opération. Alors nous avons

$$(2)_2\quad J\tilde{D}A_\nu u=D_\nu u+\tilde{R}u=J\tilde{D}P_\nu f$$

avec $\tilde{R}=(\tilde{r}_{ij})_{i\in\sum\limits_{k=1}^{r_0} V_k, j\in\{1,\dots,N\}}$ une $\sum\limits_{i=1}^{N} s_i\times N$-matrice telle que $\underset{\partial_t}{\textit{ordre}}\, r_{ij}\leqq n_j-1$.

Reprenant la projection p_1, et compte tenu de $(2)_1$, nous avons

$$(3)\quad p_1(Q_\nu^{-1}D-J\tilde{D}P_\nu)f=p_1(Q_\nu^{-1}R_\nu-\tilde{R})u$$

pour tout u arbitraire et $f=Au$.

Si, inversement, nous en montrons

$$(\dagger)\quad p_1(Q_\nu^{-1}D-J\tilde{D}P_\nu)\equiv p_1(Q_\nu^{-1}R_\nu-\tilde{R})\equiv 0$$

il est claire que $(2)_1$ n'est autre que $(2)_2$ et par conséquent que les deuxièmes équations sont déduites des premières dans $(2)_1$ en sorte que $Au=f$ est équivalente à $A_\nu u=P_\nu f$. Montrons donc ces identités.

Prenons $t=\tau$ proche à t_0 d'ailleurs arbitraire. Soient ϕ_{jk} ($k=0, 1,\dots, n_j-1$, $j=1,\dots, N$) des fonctions holomorphes à x_0. Résolvons (2) pour $t=\tau$ fixé, grâce à l'inversibilité de Q_ν, pour les données; $\partial_t^k u_j(\tau, x)=\phi_{jk}$ et $Df(\tau, x)=0$. Encore grâce à l'inversibilité de $\mathring{A}^\sigma$, résolvons (*) avec $0\leqq l_i\leqq s_i+h-1$, inductivement par rapport à h, pour des données déjà obtenues et $\partial_t^{l_i} f_i(\tau, x)=0$ $(0\leqq l_i\leqq s_i+h-1)$. Ainsi nous obtenons $\partial_t^h u_j(\tau, x)$ pour h inférieure à une valeur H suffisamment grande. Formons-en des fonctions $u_j(t, x)=\sum_{0\leqq k\leqq H}\frac{(t-\tau)^k}{k!}\partial_t^k u_j(\tau, x)$ $(j=1,\dots, N)$ et posons $f=Au$ pour $u={}^t(u_1,\dots, u_N)$. Et appliquons ces fonctions u et f à (3) et y posons $t=\tau$. Alors son premier membre s'annule pour H suffisamment grande. Et nous avons

$$p_1(Q_\nu^{-1}R_\nu-\tilde{R})u(\tau, x)=0.$$

Compte tenu de l'ordre de $p_1(Q_\nu^{-1}R_\nu-\tilde{R})$ par rapport à ∂_t, grâce à ce qu'on peut choisir ϕ_{jk} arbitrairement, nous en déduisons

$$p_1(Q_\nu^{-1}R_\nu-\tilde{R})(\tau, x; \partial_x)=0.$$

Or τ étant choisi arbitraire, nous concluons

$$p_1(Q_\nu^{-1}R_\nu-\tilde{R})=0.$$

Si nous procédons pareillement, mais cette fois $\partial_t^k f(\tau, x)$ arbitrairement données pour k inférieure à une valeur suffisamment grande, nous concluons aussi

$$p_1(Q_\nu^{-1}D-J\tilde{D}P_\nu)=0.$$

Montrons l'inversibilité de P_ν à (t_0, x_0) qui reste à montrer. Nous avons eu montré que $(2)_1$ n'est autre que

$$J\tilde{D}A_\nu u=J\tilde{D}P_\nu f.$$

Donc, si nous envisageons la projection q; ${}^t(S_1,\dots, S_{p_0})\to{}^tS_1$, en sorte que $qD_f=f$, alors $qQ_\nu J\tilde{D}A_\nu u=qQ_\nu J\tilde{D}P_\nu f$ n'est autre que $Au=f$. Et si nous posons

$$\tilde{P}_\nu=qQ_\nu J\tilde{D}.$$

Alors nous avons $\tilde{P}_\nu P_\nu f=f$, et celle-ci pour toute $f=Au$. Nous en concluons, par un procédé pareil à celui ci-haut,

$$\tilde{P}_\nu P_\nu=\text{identité}.$$

Soient v et g telles que $A_\nu v=g$ et posons $f=Av$. Alors nous avons d'une part $A_\nu v=P_\nu f$, et par suite, $P_\nu f=g$ et d'autre part $f=\tilde{P}_\nu P_\nu f$. Et nous avons $P_\nu\tilde{P}_\nu g=g$ pour toute $g=A_\nu v$. Toujours par le même procédé, nous en concluons

$$P_\nu\tilde{P}_\nu=\text{identité}. \qquad \blacksquare$$

Remarque.

Cette démonstration se passe de l'hypothèse 2, et elle nous permet de construire éffectivement la matrice P_ν ainsi que son inverse P_ν^{-1}.

Par combiner les propositions 3 et 4, nous avons le théorème suivant.

Théorème 3.

Si $\mathring{A}^p$ est inversible à $(t_0, x_0) \in \Omega$, alors il existe un système $\nu^* = \{n_j^*\}$ d'entiers non négatifs avec $\sum_{1=j}^{N} n_j^* = m$ et une matrice P_{ν^*} inversible à (t_0, x_0) tels que $A_{\nu^*} \equiv P_{\nu^*} A$ soit ν^*-normale par rapport à ∂_t. Et si un σ-problème de Cauchy $(\mathrm{C})_\sigma$ pour un système admissible σ pour A est bien posé à $(t_0, x_0) \in \Omega$, alors ce ν^*-problème de Cauchy pour A_{ν^*} l'est aussi.

Démonstration.

Il suffirait de remarquer

$$Q_{\nu^*} \sim Q^*. \qquad \blacksquare$$

Plaçons-nous un instant à la situation à Wagschal. Computons l'ordre total, soit $\underset{\partial_t\ \partial_x}{\mathit{ordre}}\, A$, c'est-à-dire, par rapport à ∂_t et ∂_x.

Soit

$$m = \underset{\partial_t\ \partial_x}{\mathit{ordre}}\, A = \underset{\partial_t}{\mathit{ordre}}\, A \geqq 0 \quad \text{(Hypothèse 1)}.$$

Alors l'hypothèse 2 est toujours realisée. Un système admissible σ pour A par rapport à (∂_t, ∂_x) est aussi un système admissible pour A par rapport à ∂_t, et la matrice-coefficient $\mathring{A}^\sigma$ de σ-partie principale de A pour un tel système admissible pour A est une matrice de fonctions holomorphes dans Ω. Que $\mathring{A}^p$ soit inversible à (t_0, x_0) est que le point (t_0, x_0) est un point non caractéristique de l'hyperplan $t = t_0$ pour A. Nous avons en effet $P(t_0, x_0; 1, 0) = \det \mathring{A}^p(t_0, x_0)$ où $P(t, x; \tau, \xi)$ est un polynôme caractéristique de A. (voir Wagschal [8]) Et nous avons en plus, comme un corollaire du théorème 3, la suivante.

Corollaire.

Si l'on compute l'ordre total au lieu de l'ordre par rapport à ∂_t, A_{ν^*} au théorème 3 est un système de Volevič (pour lequel le problème de Cauchy $(\mathrm{C})_{\nu^*}$ est toujours bien posé).

Nous envoyons sa démonstration, ainsi que l'explication de terminologie, à l'appendice. Et revenons à notre situation.

Soient π une permutation de Γ_A et $\sigma = \{t_j, s_i\}$ un système admissible pour A. Soit $\nu^\pi = \{n_j\}$ un système d'entiers non négatifs avec $\sum_{j=1}^{N} n_j = m$ défini par $n_j = t_j - s_{\tilde{\pi}(j)}$ où $\tilde{\pi} \equiv \pi^{-1}$. Si nous posons $V_k = \{j \in \{1, \dots, N\};\ t_j - n_j \geqq k\}$, nous avons $V_k = \pi S_k$ comme ensemble. Et nous ordonnons V_k en sorte que nous avons $V_k = \pi S_k$ comme ensemble ordonné. Nous avons en plus $V_k \subset T_k$ et $V_{k+1} \subset V_k$ $(k = 1, \dots, p_0)$. Représentons $(*)$ avec $0 \leqq l_i \leqq s_i - 1$ sous la même forme que (1), soit

$(1)_1$ $Q^\pi U + Ru = F$ où $Q^\pi = (Q^\pi_{hk})_{h,k=1,\dots,p_0}$

avec $Q^\pi_{hk} \equiv 0$ pour $h > k$ et $Q^\pi_{hh} = (\mathring{a}^\sigma_{ij})_{i \in S_h, j \in V_h}$.

Alors nous avons le lemme suivant.

Lemme 5.

Supposons que σ est tel que $s_i \geqq 1$ pour $i = 1,\dots, N$. Alors

1)

$$Q^\pi \sim \begin{pmatrix} B_{11} & & & * \\ & \ddots & & \\ & & B_{q_1 q_1} & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & B_{qq} \end{pmatrix}$$

où les B_{ii} sont des sous-matrices de $\mathring{A}^p$.

2)

$$\mathring{A}^\sigma \sim \begin{pmatrix} B_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & B_{q_1 q_1} \end{pmatrix}$$

Démonstration.

Prenons une $Q^\pi_{hh} = (\mathring{a}^\sigma_{ij})_{i \in S_h, j \in V_h} = (\mathring{a}^\sigma_{i\pi(j)})_{i,j \in S_h}$. Nous avons alors pour toute permutation μ de S_h

$$\sum_{i \in S_h} \underset{\partial_t}{ordre}\, a_{i\pi(\mu(i))} \leqq \sum_{i \in S_h} t_{\pi(i)} - s_i\,.$$

Et pour celle qui établit l'égalité à cette inégalité, permutation identité de S_h en étant une, nous avons

$$\mathring{a}^\sigma_{i\pi(\mu(i))} = \mathring{a}^p_{i\pi(\mu(i))} \qquad \text{pour tout} \quad i \in S_h\,.$$

Donc le lemme 2 (et ensuite le lemme 1) est appliquable. Et on montre, pareillement à la proposition 1, le lemme-ci. ■

Il est alors aisé de voir le théorème suivant.

Théorème 4.

Si un ν^π-problème de Cauchy $(\mathrm{C})_{\nu^\pi}$ pour une $\pi \in \Gamma_A$ est bien posé à un point (t_0, x_0) de Ω, alors $\mathring{A}^p$ est inversible à (t_0, x_0) et

1) *pour tout système admissible σ pour A, le σ-problème de Cauchy $(\mathrm{C})_\sigma$ est bien posé à (t_0, x_0)*

2) *il existe une matrice P^π inversible à (t_0, x_0) telle que $P^\pi A$ est ν^π-normale par rapport à ∂_t.*

Remarque.

Remarquons que l'on peut montrer que, parmi des ν^* dont l'existence est assurée par le lemme 4, il y en a au moins un tel que $\nu^* = \nu^\pi$ avec une $\pi \in \Gamma_A$. Ainsi le théorème 4 est une sorte d'inverse du théorème 3.

Appendices

I] Démonstration du lemme 1

La nécessité étant claire, montrons la suffisance, et supposons

$$\{\pi \in \Pi_I;\ (i,\ \pi(i)) \in \Sigma \text{ pour tout } i \in I\} = \{\pi_0\}\,.$$

Remarquons qu'il existe un i_0 tel que

$$(\mathrm{A})_1 \quad (i_0,\ j) \notin \Sigma \quad \textit{pour tout } j \textit{ sauf } \pi_0(i_0)\,.$$

En effet, si ceci est nié, il existe, pour tout i, un $j \neq \pi_0(i)$ tel qu'on a $(i, j) \in \Sigma$. Et prenons un tel $(i_1, j_1) \in \Sigma$, et puis, pour $i_2 = \pi_0^{-1}(j_1)$, un tel (i_2, j_2) et ainsi de suite jusqu'au moment où i_{k+1} revient à un $i_h\,(h<k)$. Avec cette suite des couples (i_l, j_l) $h \leqq l \leqq k+1$, nous pouvons construire une permutation π de I telle que

$$\pi(i) = \pi_0(i) \quad \text{pour} \quad i \neq i_l\ (h \leqq l \leqq k) \text{ et } \pi(i_l) = j_l\ (h \leqq l \leqq k)\,.$$

Ceci est en contradiction avec l'hypothèse.

Cette remarque faite, nous démontrons le lemme par l'induction par rapport à N. C'est trivial pour $N=2$. Supposons que ce soit vrai pour $N-1$ et montrons pour N. D'après la remarque faite ci-haut, il existe un i_0 satisfaisant $(\mathrm{A})_1$. Envisageons les permutations π_1, μ_1 telles que $\pi_1(i_0)=1$, $\pi_1(1)=i_0$, $\pi_1(i)=i\ (i \neq 1,\ i_0)$ et $\mu_1(\pi_0(i_0))=1$, $\mu_1(1)=\pi_0(i_0)$, $\mu_1(i)=i\ (i \neq 1,\ \pi_0(i_0))$. Et soit

$$\Sigma^* = \{(i,\ j) \in \{2,\dots,\ N\}^2;\ (\pi_1^{-1}(i),\ \mu_1^{-1}(j)) \in \Sigma\}\,.$$

On vérifie aisément que Σ^* satisfait la même propriétè que Σ. Et d'aprés l'hypothèse de l'induction, il existe des π^*, $\mu^* \in \Pi_{\{2,\dots,N\}}$ telles que $\pi^*(i) \leqq \mu^*(j)$ pour tout $(i, j) \in \Sigma^*$. Alors les permutations de I

$$\pi = (\pi^* \oplus I_{\{1\}})\pi_1 \quad \text{et} \quad \mu = (\mu^* \oplus I_{\{1\}})\mu_1$$

satisfont $\pi(i) \leqq \mu(j)$ pour tout $(i, j) \in \Sigma$.

II] Démonstration du lemme 2

Lemme A.

Soit Π un sous-ensemble non vide de Π_I. Pour qu'il existe des permutations λ, $\mu \in \Pi_I$ et un nombre entier n_1 $(1 \leqq n_1 < N)$ tels que, pour chaque $\pi \in \Pi_I$, il existe des $\pi_i \in \Pi_{I_i}$ $(i=1,\ 2)$, où $I_1=\{1,\dots,\ n_1\}$ et $I_2=\{n_1+1,\dots,\ N\}$, telles que

$$\lambda\pi\mu^{-1} = \pi_1 + \pi_2$$

il faut et il suffit que l'ensemble

$$\Sigma = \{(i,\ \pi(i));\ i \in I,\ \pi \in \Pi\}$$

ne satisfasse pas la condition

$$(\text{☆}) \quad \begin{cases} \textit{il existe, pour chaque } (i_0, j_0)\in I^2, \textit{ une } \pi\in\Pi_I \textit{ telle que } \pi(i_0)=j_0 \textit{ et} \\ (i, \pi(i))\in\Sigma \textit{ pour tout } i\in I-\{i_0\}. \end{cases}$$

Démonstration.

1) *Nécessité.* Nous pouvons remarquer

$$\Sigma\subset\{(i, j);\ i\in\mu^{-1}(\{1,\dots, n_1\}), j\in\lambda^{-1}(\{1,\dots, n_1\})\}$$
$$\cup\{(i, j);\ i\in\mu^{-1}(\{n_1+1,\dots, N\}), j\in\lambda^{-1}(\{n_1+1,\dots, N\})\}.$$

Prenons un (i_0, j_0) tel que $i_0\in\mu^{-1}(\{1,\dots, n_1\})$ et $j_0\in\lambda^{-1}(\{n_1+1,\dots, N\})$. Alors pour toute permutation $\pi\in\Pi_I$ telle que $j_0=\pi(i_0)$, il existe un i_1 tel que $i_1\in\mu^{-1}(\{n_1+1,\dots, N\})$ et $\pi(i_1)\in\lambda^{-1}(\{1,\dots, n_1\})$ et, par suite, que, grâce à la remarque faite ci-haut, $(i_1, \pi(i_1))\notin\Sigma$. Par conséquent Σ ne satisfait pas la condition (☆).

2) *Suffisance.* Montrons-le par l'absurde. Supposons qu'il n'existe pas de telles λ, $\mu\in\Pi_I$. Alors nous avons

$$(\mathrm{A})_2 \quad \begin{cases} \text{pour tout choix } \{i_1,\dots, i_s\}\ \{j_1,\dots,j_{N-s}\}\ 1\leqq s<N, \text{ il existe des } i\in\{i_1, \\ \dots, i_s\} \text{ et } j\in\{j_1,\dots, j_{N-s}\} \text{ tels que } (i, j)\in\Sigma. \end{cases}$$

Prenons un $(i_0, j_0)\in I^2$ et formons des ensembles

$$E_i=\{j\in\{1,\dots, N\}-\{j_0\};\ (i, j)\in\Sigma\} \quad (i\in\{1,\dots, N\}-\{i_0\}).$$

Nous avons alors, pour tout choix $\{i_1,\dots, i_k;\ i_h\neq i_0\}$ $1\leqq k\leqq N-1$,

$$\mathrm{Card}\,(\bigcup_{j=1}^{k} E_{i_j})\geqq k.$$

Prenons en effet un choix $\{i_1,\dots, i_k;\ i_h\neq i_0\}$. Prenons encore $\{j_1,\dots, j_{N-k};\ j_h\neq j_0\}$. Alors, par l'application de $(\mathrm{A})_2$, nous avons des $i^{(1)}\in\{i_1,\dots, i_k;\ i_h\neq i_0\}$ et $j^{(1)}\in\{j_1, \dots, j_{N-k};\ j_h\neq j_0\}$ tels que $(i^{(1)}, j^{(1)})\in\Sigma$. Encore par l'application de $(\mathrm{A})_2$ pour $\{i_1,\dots, i_k;\ i_h\neq i_0\}$ et $\{j_1,\dots, j_{N-k};\ j_h\neq j_0, j^{(1)}\}$ nous avons des $i^{(2)}\in\{i_1,\dots, i_k;\ i_h\neq i_0\}$ et $j^{(2)}\in\{j_1,\dots, j_{N-k};\ j_h\neq j_0, j^{(1)}\}$ tels que $(i^{(2)}, j^{(2)})\in\Sigma$. Et ainsi de suite. Nous obtenons ainsi des $j^{(h)}\in\bigcup_{j=1}^{k} E_{i_j}$ $(1\leqq h\leqq k)$ différents.

Alors d'après le théorème de Hall [2] il existe une application biunivoque π; $\{1,\dots, N\}-\{i_0\}\to\{1,\dots, N\}-\{j_0\}$ que nous étendons à une permutation π de I par $\pi(i_0)=j_0$. Or ceci est en contradiction avec l'hypothèse. ■

Ayant ainsi préparé le lemme, démontrons le lemme 2. Or 1) et 2) étant aisées par l'application successive du lemma A jusqu'à ce que $\Sigma_k=\{(i, \pi_k(i));\ i\in I_k$ *et* π_k *à* 1) *du lemme* 2$\}$ *satisfait la condition* (☆), nous montrons 3), et ceci par l'absurde. Nions la conséquence. Alors nous avons des (i_k, j_k); $k=1,\dots, p$ tels que

> $\mu(i_k)\in I_k$, $\lambda(j_k)\in I_{\sigma(k)}$ et $(i_k, j_k)\in\Lambda$ avec une certaine permutation σ de $\{1,\dots, p\}$ qui n'est pas l'identité.

En plus, grâce à 2) du lemme 2,

$(\mathrm{A})_3$ *il existe au moins un* $(i_k, j_k)\in\Lambda-\Sigma$.

Décomposons σ en somme directe $\sigma=\sum_{\alpha=1}^{q}\sigma_\alpha$. Bien que nous fassions l'investigation sur une des σ_α, pour éviter la complication de l'écriture, nous tenons, un moment, σ pour une de σ_α. Nous supposons en plus que σ est telle que $\sigma(k)=k+1$ (permutation cyclique). Ceci ne gêne en rien notre raisonnement.

Cette convention faite, $(\mu(i_k), \lambda(j_{k-1}))\in I_k^2$; $k=1,\dots, p$ $(j_0\equiv j_p)$. Or, Σ_k satisfait la condition (☆), et il existe une permutation ν_k de I_k telle que $\lambda(j_{k-1})=\nu_k(\mu(i_k))$ et $(i, \nu_k(i))\in\Sigma_k$ pour tout $i\in I_k$ sauf $\mu(i_k)$, c'est-à-dire, $(\mu^{-1}(i), \lambda^{-1}(\nu_k(i))\in\Sigma$. Définissons alors une application biunivoque γ de $\mu^{-1}(\sum_{k=1}^{p}I_k)$ à $\lambda^{-1}(\sum_{k=1}^{p}I_k)$

$\gamma(i_k)=j_k$, $\gamma(i)=\lambda^{-1}\nu_k\mu(i)$ pour tout $i\in\mu^{-1}(I_k)$ sauf i_k et ceci pour tout k $(k=1,\dots, p)$.

Revenons à la décomposition de σ et construisons γ_α comme ci-haut, pour tout σ_α. Si nous posons $\gamma^*=\sum_{\alpha=1}^{q}\gamma_\alpha$ (somme directe), alors γ^* est une permutation de I telle que $(i, \gamma^*(i))\in\Lambda$ pour tout $i\in I$. Donc elle appartient à Π. Mais c'est en contradiction, compte tenu de $(A)_3$, avec la définition de Σ. ■

III] Démonstration du corollaire du théorème 3

Définition A.

Soit $A=(a_{ij}(t, x;\partial_t, \partial_x))$ ν-normale par rapport à ∂_t où $\nu=\{n_j\}$ est un système d'entiers non négatifs avec $\sum_{j=1}^{N}n_j=m$.

Le poids P_0 de A est défini par

$$P_0=\mathrm{Inf}\left\{p=\frac{r}{q};\ q,\ r \text{ entiers},\ \sup_{\pi\in\Pi_N}\sum_{i=1}^{N}\operatorname*{degr\acute{e}}_{\tau\ \ \xi} a_{i\pi(i)}(t, x, \tau^r, \xi^q)\leqq rm\right\}$$

où $\xi^q=\xi_1^q\cdots\xi_n^q$.

Et A est dite un système de Volevič, si son poids $P_0\leqq 1$.

Pour A, ν-normale par rapport à ∂_t, un système d'équations

$$Au=f$$

est canoniquement rendu à un système (plus grand) d'ordre 1 par rapport à ∂_t;

$$\mathscr{A}U=F.$$

Proposition A.

1) *P_0 peut être aussi défini par*
   $P_0=\mathrm{Inf}\{p$; *il existe un système* $\{s_j\}_{j=1,\dots,N}$ *de nombres rationnels tel que l'on ait, pour tous* $i, j=1,\dots, N$ *et* $k=0, 1,\dots, n_j-1$, $\operatorname*{ordre}_{\partial_x} a_{ij}^k(t, x;\partial_x)+kp\leqq s_j-s_i+pn_j\}$
   où $a_{ij}(t, x;\partial_t, \partial_x)=\sum_k a_{ij}^k(t, x;\partial_x)\partial_t^k$.
2) *Le poids de A est identique à celui de $\mathscr{A}$.*
3) *Le polynôme caractéristique de A est aussi identique à celui de $\mathscr{A}$.*

4) *Les problèmes de Cauchy* $(C)_\nu$ *pour* A *et* $(C)_{\{1\}}$ *pour* $\mathscr{A}$ *sont équivalentes, c'est-à-dire, si l'un est bien posé, l'autre l'est aussi et vice versa.*
5) *Pour un système de Volevič* A, *le problème de Cauchy* $(C)_\nu$ *est toujours bien posé* [1].

Admettons-la sans démonstration et montrons le corollaire du théorème 3. Rappelons les notations à la démonstration de la proposition 4. Soient

$$\tilde{\tilde{D}}=\tilde{\tilde{D}}(D_1,\dots,\tilde{\tilde{D}}_{p_0}) \quad \text{avec} \quad \tilde{\tilde{D}}=(\delta_{ij}\partial_t^{s_i-k})_{i\in S_k, j\in\{1,\dots,N\}}$$

et $\tilde{p}_0$ une projection telle qu'on ait

$$\tilde{p}_0({}^t((\partial_t^{t_j-1}u_j)_{j\in V_1},\dots,(\partial_t^{t_j-p_0}u_j)_{j\in V_{p_0}}))={}^t(\partial_t^{n_j}u_j)_{j=1,\dots,N}\,.$$

Alors nous avons

$$A_{\nu*}=\tilde{p}_0Q^{*-1}\tilde{\tilde{D}}A$$

où, rappelons-nous, $Q^*=(Q^*_{hk})$ est telle que

$$Q^*_{hk}=0 \quad (h>k), \qquad Q^*_{hk}=(\alpha_{ij}^{s_i-h t_j-k})_{i\in S_h, j\in V_k} \quad (h\leqq k)\,.$$

Et remarquons qu'à la situation actuelle, on a

$$\operatorname*{ordre}_{\partial x} \alpha_{ij}^{s_i-h t_j-k}\leqq k-h\,.$$

Il suffit alors computer l'ordre (total) de (i, j)-élément de $A_{\nu*}$. Soit en effet

$$Q^{*-1}=\begin{pmatrix} \tilde{Q}^*_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \tilde{Q}^*_{p_0p_0}\end{pmatrix} \text{avec } \tilde{Q}^*_{hk}=(\tilde{Q}^{*hk}_{ij})_{i\in V_h, j\in S_k}\,.$$

Alors nous pouvons évaluer

$$\operatorname*{ordre}_{\partial x} \tilde{Q}^{*hk}_{ij}\leqq k-h\,.$$

Et (α, j)-bloc de $Q^{*-1}\tilde{\tilde{D}}A$ $(1\leqq\alpha\leqq p_0,\ 1\leqq j\leqq N)$ est

$$\sum_{\beta\geqq\alpha}\tilde{Q}^*_{\alpha\beta}{}^t(\partial_t^{s_h-\beta}a_{hj})_{h\in S_\beta}\,.$$

Or $\tilde{p}_0$ ne choisit de ce (α, j)-bloc que (i, j) tel que $t_j-\alpha=n_i$ et $i\in V_\alpha$. Donc nous avons, pour (i, j)-élément de $A_{\nu*}$, soit $a_{ij}^{\nu*}$,

$$\begin{aligned}\operatorname*{ordre}_{\partial_t\ \partial_x} a_{ij}^{\nu*}&\leqq \operatorname*{Max}_{\substack{\beta\leqq\alpha\\ h\in S_\beta}}(\beta-\alpha+s_h-\beta+t_j-s_h)=t_j-t_i+n_i\\ &=(t_j-n_j)-(t_i-n_i)+n_j\,.\end{aligned}$$

D'aprés 1) de proposition A, $A_{\nu*}$ est un systéme de Volevič.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

ET CELUI DE MATHÉMATIQUES
APPLIQUÉES RESPECTIVEMENT
UNIVERSITÉ D'EHIME
MATSUYAMA

Bibliographie

[1] L. Garding, T. Kotake et J. Leray, Uniformisation et développement asymptotique de la solution du problème de Cauchy linéaire à données holomorphes, Bull. Soc. math. France **92** (1964), 263–361.

[2] L. Mirsky, Transversal Theory, Academic Press, (1971).

[3] M. Miyake, On Cauchy-Kowalewski's theorem for general systems, à paraître dans Publ. RIMS, Kyoto Univ.

[4] M. Miyake, Reduction to the first order systems of the Kowalewskian systems in the sense of Volevič, à paraître dans Publ. RIMS, Kyoto Univ.

[5] S. Mizohata, On Kowalewskian systems, (en russe) Uspehi Math. Nauk **29** (1974), 213–227.

[6] S. Mizohata, Sur le théorème de Cauchy-Kowalewski, Séminaire Goulaouic-Schwartz 1978–1979.

[7] L. R. Volevič, On general systems of differential equations, Dokl. Acad. Nauk SSSR = Soviet Math. Dokl. **1** (1960), 458–461.

[8] C. Wagschal, Diverses formulations du problème de Cauchy pour un système d'équations aux dérivées partielles, J. Math. pure et appl. **53** (1974), 51–70.