J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)
27-2 (1987) 217-241

Régularité par rapport au temps des solutions faibles de l'équation de Navier-Stokes

Par

Akio TANAKA

1. Introduction

1.1. Enoncés des résultats

Soient Γ une surface fermée de classe C^3 dans $\mathbf{R}^3$ et Ω le domaine intérieur ou extérieur à Γ; Ω est supposé d'un seul côté de Γ.

Nous étudions dans Ω le problème de Dirichlet pour l'équation de Navier-Stokes dépendant du temps:

$$\partial_t u - \Delta u = -\nabla p - (u \cdot \nabla) u + f \qquad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T) \tag{1.1}$$

$$\operatorname{div} u = 0 \qquad \text{dans} \quad \Omega \tag{1.2}$$

$$u|_\Gamma = 0 \qquad \text{sur} \quad \Gamma = \partial\Omega, \tag{1.3}$$

où $u(x, t) = (u_1, u_2, u_3)$ est un vecteur réel tridimensionnel inconnu, $p(x, t)$ une fonction scalaire inconnue; $(u \cdot \nabla) u$ désigne le vecteur dont le j-ième composant est égal à

$$\sum_i u_i \partial_i u_j = u_i \partial_i u_j \qquad (j = 1, 2, 3),$$

comme nous adoptons dans ce mémoire *la convention de sommation*. Finalement, f est le vecteur de la force extérieure donnée.

Nous employons les espaces fonctionnels suivants:

$$\mathscr{D}_\sigma(\Omega) = \{(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathscr{D}(\Omega) \text{ réel}; \operatorname{div} \varphi = 0 \text{ dans } \Omega\} \tag{1.4}$$

$$V = \text{le complété de } \mathscr{D}_\sigma(\Omega) \quad \text{dans} \quad H^1(\Omega) \tag{1.5}$$

$$H = \text{le complété de } \mathscr{D}_\sigma(\Omega) \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega). \tag{1.6}$$

Dans ce qui suit, nous traitons nos problèmes dans $H^{-1}(\Omega)$. Nous supposons en particulier que f satisfait soit à

$$f \in L^\alpha(0, T; H^{-\beta}(\Omega)), \quad \text{pour certains} \quad \alpha, \beta \text{ tels que} \tag{1.7}$$

$$0 \leq \beta < 1, \quad \alpha > \frac{2}{1-\beta},$$

Reçu le 10 décembre 1985

soit à

(1.8) $$f \in C^{\gamma}([0, T]; H^{-1}(\Omega)), \quad \text{pour certain } \gamma \text{ tel que } 0<\gamma\leqq 1.$$

Théorème 1.1. *Soit u une solution au sens des distributions du système* (1.1)–(1.3) *avec f vérifiant* (1.7) *ou* (1.8), *satisfaisant à*

(1.9) $$u \in L^2(0, T; V) \cap L^{\infty}(0, T; H).$$

Si u vérifie de plus

(1.10) $$u \in L^s(0, T; L^r(\Omega)), \quad \textit{pour certains } r, s \textit{ tels que}$$

(1.11) $$3<r\leqq +\infty, \quad 2<s\leqq +\infty, \quad \frac{3}{r}+\frac{2}{s}<1,$$

alors u est fortement continue en $t \in (0, T]$ *à valeurs dans* V:

(1.12) $$u \in C^0((0, T]; V).$$

u devient plus régulière si on suppose une régularité plus élevée à f. Si en particulier la force extérieure est analytique en t, nous avons le résultat suivant sur l'analyticité de u, qui est un renforcement du théorème dû à K. Masuda [12]:

Théorème 1.2. (Analyticité) *Soient* $f(z)$ *une fonction holomorphe à valeurs dans* $H^{-1}(\Omega)$, *définie dans un ouvert complexe* $\mathcal{O}$ *contenant l'intervalle* $(0, T)$, *et* $f(t)$ *sa réstriction à* $(0, T)$. *Si une solution u du système* (1.1)–(1.3) *avec le terme de la force extérieure* $f(t)$ *satisfait aux hypothèses* (1.9)–(1.11), $u(t)$ *se prolonge en une fonction holomorphe* $u(z)$ *à valeurs dans V définie au voisinage* $\mathcal{O}'$ *de* $(0, T)$; *si de plus* $f(x, z)$ *est holomorphe à valeurs dans* $\mathbf{C}^3$ *en x et en z dans* $\Omega_0 \times \mathcal{O}'$, *où* Ω_0 *est un sous-ensemble ouvert non vide de* Ω, *alors* $u(x, t)$ *est analytique réelle en x et en t dans* $\Omega_0 \times (0, T)$, *après modification éventuelle effectuée en chaque* $t \in (0, T)$ *sur un ensemble nul de* Ω_0.

Notons que dans ce théorème l'hypothèse sur la régularité de f est moins restreinte que dans l'ouvrage cité de Masuda: en effet, cet auteur suppose $f(z)$ holomorphe à valeurs dans $L^2(\Omega)$.

En vertu du Théorème 1.1, nous pouvons démontrer le Théorème 1.2 tout à fait parallèlement aux raisonnements de Masuda, op. cit.; voir le chapitre 5.

1.2. Remarques préliminaires

1) *Caractérisation de V.* V est par définition un sous-espace fermé de $H_0^1(\Omega)$. De plus, la frontière $\partial\Omega=\Gamma$ étant de classe C^3, on sait que V est caractérisé par

(1.13) $$V=\{v \in H_0^1(\Omega); \operatorname{div} v=0 \quad \text{dans } \Omega\},$$

ce qui est valable pour le domaine intérieur dès que la frontière est lipschitzienne (voir R. Temam [16]); pour le domaine extérieur, on se réfère à J. G. Heywood [6].

2) *Existence de la solution faible.* On démontre par la méthode de Galerkin que si $f \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$, le système (1.1)–(1.3) ajouté d'une condition initiale

$$u(x, 0) = u_0(x) \tag{1.14}$$

admet *au sens des distributions* au moins une solution u appartenant à $L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$ pourvu que la donnée initiale u_0 appartienne à H. Cette solution dite faible est globale, se prolongeant indéfiniment en t; sans conditions plus fortes, cependant, elle n'est douée que de la continuité faible dans H par rapport à t. L'unicité n'en est pas démontrée non plus.

L'existence de la solution faible et ses propriétés mensionnées ci-dessus se démontrent dans le domaine extérieur aussi bien que dans l'intérieur, tandis que l'existence d'une solution satisfaisant aux hypothèses de nos théorèmes n'est en général assurée *ni* dans l'intérieur *ni* dans l'extérieur (voir Temam [16]).

3) *Régularité plus forte éventuelle.* Sans imposer aucune condition aux limites sur $\partial\Omega$, J. Serrin montra dans [13] que la solution faible de l'équation (1.1)–(1.2) appartenant à $L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ et vérifiant (1.10)–(1.11) est en presque tout $t \in (0, T)$ de classe C^∞ (en réalité, de C^ω selon Ch. Kahane [7]) en x dans Ω après modification éventuelle sur un sous-ensemble nul de Ω; les deux auteurs supposèrent d'ailleurs que la force extérieure f fût conservative.

Toutefois, Serrin montra en même temps que *sans* condition aux limites, la solution u ne jouit d'aucune régularité en t à cause du choix libre de ∇p dans l'équation.

Ôtant le point de vue de Serrin qui est de caractère foncièrement local, nous allons voir que la condition de Dirichlet (1.3) est suffisante pour la régularité en t. Pour les travaux des autres auteurs dans ce contexte, voir les commentaires bibliographiques à la fin de ce mémoire.

1.3. Esquisse de nos procédés

Nous prenons V', le dual de V, comme espace de base en vue d'éliminer ∇p figurant dans l'équation. Ainsi, nous réduisons le système (1.1)–(1.3) à une équation d'évolution abstraite dans V', dont la solution aura une représentation intégrale à l'aide d'un semi-groupe que nous construirons dans V'.

Nous estimerons u successivement par cette représentation obtenant de meilleures intégrabilités en t de u, pour conclure l'appartenance de u à $L^\infty_{\mathrm{loc}}((0, T]; V)$; la continuité forte de u dans V en résultera immédiatement. Cependant, il faut pour ces estimations que le semi-groupe soit compatible avec la structure des distributions, afin de faire valoir la régularité toute légère du terme non linéaire $(u \cdot \nabla)u$.

Nous étudierons ainsi dans le chapitre 2 les structures de V et de V' en tant qu'espaces de distributions.

V n'étant pas contenu dans V' au sein de $\mathscr{D}'(\Omega)$, nous construirons dans V' un nouvel espace W qui nous servira de domaine de définition d'un opérateur auto-adjoint strictement défini positif, $\mathscr{A}$, qui engendrera un semi-groupe profitable dans V'. Ainsi, nous consacrerons le chapitre 3 aux études des propriétés de $\mathscr{A}$, et nous procéderons dans le chapitre 4 à la représentation intégrale et aux estimations.

L'auteur tient à adresser ses vifs remerciements à MM. les professeurs S. Mizohata et N. Shimakura, pour leurs constants encouragements et précieuses remarques qui l'aidaient tantôt à s'orienter, tantôt à surmonter des difficultés, ou encore à élaborer ce mémoire.

2. Structure de V' et le sous-espace W

2.1. Structures de $H_0^1(\Omega)$ et de son dual

Complété de $\mathscr{D}(\Omega)$ vectoriel dans $H^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$ est muni du même produit scalaire $(\cdot,\ \cdot)_1$ dont $H^1(\Omega)$ est muni, soit

$$(2.1) \qquad (\varphi,\ \psi)_1 = (\nabla\varphi,\ \nabla\psi)_0 + (\varphi,\ \psi)_0\,,$$

où $(\nabla\varphi,\ \nabla\psi)_0 = (\partial_i\varphi_j,\ \partial_i\psi_j)_{L^2(\Omega)}$, $(\varphi,\ \psi)_0 = (\varphi_i,\ \psi_i)_{L^2(\Omega)}$, pour tous vecteurs $\varphi,\ \psi \in H_0^1(\Omega)$.

On désigne par $H^{-1}(\Omega)$ l'espace dual de $H_0^1(\Omega)$. Comme il est habituel pour les distributions, on identifie $L^2(\Omega)$ réel à son dual et considère $H_0^1(\Omega)$ comme contenu dans $H^{-1}(\Omega)$: le produit scalaire $(\varphi, f)_0$ se prolonge par continuité en une dualité entre $H_0^1(\Omega)$ et $H^{-1}(\Omega)$, qui est dénotée $\langle\varphi, f\rangle$ pour $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ et $f \in H^{-1}(\Omega)$. On a donc

$$(2.2) \qquad \begin{aligned}(\varphi,\ \psi)_1 &= (\nabla\varphi,\ \nabla\psi)_0 + (\varphi,\ \psi)_0 \\ &= \langle\varphi,\ (1-\Delta)\psi\rangle\end{aligned}$$

pour tous $\varphi,\ \psi \in H_0^1(\Omega)$.

Par ailleurs, le théorème de Riesz nous assure l'existence d'une isométrie de $H_0^1(\Omega)$ sur $H^{-1}(\Omega)$ comme ce dernier est muni d'une structure hilbertienne en tant qu'espace dual; compte tenu de (2.2), c'est l'opérateur $1-\Delta$ qui donne en fait cette isométrie. Si nous désignons par $(\cdot,\cdot)_{-1}$ le produit scalaire de $H^{-1}(\Omega)$ et par $\mathscr{G}$ l'opérateur de Green du problème de Dirichlet: $\mathscr{G} = (1-\Delta)^{-1}\colon H^{-1}(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$, nous avons ainsi

$$(2.3) \qquad \begin{aligned}(f,\ g)_{-1} &= (\mathscr{G}f,\ \mathscr{G}g)_1 \\ &= \langle\mathscr{G}f,\ g\rangle = \langle f,\ \mathscr{G}g\rangle, \quad \text{pour tous } f,\ g \in H^{-1}(\Omega).\end{aligned}$$

2.2. V' et la projection $\mathscr{P}$ sur V'

On se rappelle que l'espace V défini par (1.5) et caractérisé par (1.13) est un sous-espace fermé de $H_0^1(\Omega)$. Désignons donc par $V^\perp$ le supplémentaire orthogonal de V dans $H_0^1(\Omega)$:

$$(2.4) \qquad H_0^1(\Omega) = V \oplus V^\perp \quad \text{(somme directe orthogonale)}.$$

V et $V^\perp$ sont naturellement des espaces hilbertiens munis du produit scalaire de $H_0^1(\Omega)$.

V', le dual de V, s'identifie par l'isométrie canonique $1-\Delta$ à $(1-\Delta)(V)$, un sous-espace fermé de $H^{-1}(\Omega)$:

(2.5) $$V' = (1-\Delta)(V),$$

(2.6) $$(f, g)_{V'} = (f, g)_{-1}, \quad \|f\|_{V'} = \|f\|_{-1}, \quad \forall f, g \in V'.$$

Le dual de $V^\perp$ s'identifie de même à $(1-\Delta)(V^\perp)$:

(2.7) $$(V^\perp)' = (1-\Delta)(V^\perp);$$

nous avons ainsi une décomposition en somme directe orthogonale de $H^{-1}(\Omega)$:

(2.8) $$H^{-1}(\Omega) = V' \oplus (V^\perp)'.$$

Définition 2.1. On désigne par $\mathscr{P}$ la projection orthogonale de $H^{-1}(\Omega)$ sur son sous-espace fermé V'.

L'opérateur $\mathscr{P}$ est intrinsèquement lié à un système d'équations du type Stokes. Pour ce montrer, nous profitons du fait suivant qui est bien connu (voir Temam [16], p. 14):

Proposition 2.2. *Une distribution vectorielle f vérifie $\langle f, \varphi \rangle = 0$ pour tout $\varphi \in \mathscr{D}_\sigma(\Omega)$, si et seulement s'il existe une distribution scalaire p telle que $f = \nabla p$.*

V étant le complété de $\mathscr{D}_\sigma(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$, nous en avons immédiatement:

Corollaire 2.3. *Un élément f de $H^{-1}(\Omega)$ appartient à $(V^\perp)'$ si et seulement s'il existe une distribution scalaire p telle que $f = \nabla p$:*

(2.9) $$(V^\perp)' = \{f \in H^{-1}(\Omega);\ \exists p \in \mathscr{D}'(\Omega),\ f = \nabla p\}.$$

Pour tout $g \in (V^\perp)'$, une distribution scalaire p satisfaisant à $g = \nabla p$ est déterminée à une constante additive près. Une telle p jouit pour sa part d'une certaine régularité; voir la Proposition A.1 et le Corollaire A.2 dans l'Appendice.

Si f appartient à $H^{-1}(\Omega)$, il existe donc une distribution scalaire p satisfaisant à $(1-\mathscr{P})f = \nabla p$. D'autre part, comme $\mathscr{P}f \in V' = (1-\Delta)(V)$, il existe un et un seul élément v de V tel que $\mathscr{P}f = (1-\Delta)v$. Compte tenu de la caractérisation (1.13) de V, nous avons ainsi le système d'équations vérifié par v et p:

(2.10) $$\begin{cases} (1-\Delta)v + \nabla p = f & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div} v = 0 & \text{dans } \Omega \\ v|_\Gamma = 0 & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

Ce que nous venons de voir nous assure en même temps l'existence unique de la solution $v \in V$, soit:

Proposition 2.4. *Pour tout $f \in H^{-1}(\Omega)$, il existe un et un seul élément v de V et une distribution p, déterminée à une constante additive près et de gradient ∇p dans $H^{-1}(\Omega)$, qui satisfassent au système* (2.10). *Nous avons de plus l'égalité suivante*:

(2.11) $$\|v\|_1^2 + \|\nabla p\|_{-1}^2 = \|f\|_{-1}^2.$$

En effet, $\|f\|_{-1}^2=\|\mathscr{P}f\|_{-1}^2+\|(1-\mathscr{P})f\|_{-1}^2$, tandis que $\mathscr{P}f=(1-\Delta)v$, $(1-\mathscr{P})f=\nabla p$; (2.11) en dérive immédiatement.

A l'aide du système (2.10), nous pouvons montrer que l'opérateur $\mathscr{P}$, a priori continu de $H^{-1}(\Omega)$ sur V', conserve de surcroît la régularité éventuelle d'ordre supérieur. Nous avons en fait:

Théorème auxiliaire 2.5. *Soient Γ une surface fermée de classe C^3 et Ω le domaine intérieur ou extérieur à Γ. Alors pour tout f appartenant à $H^m(\Omega)$ ($m=-1$ ou 0), $\mathscr{P}f$ appartient à $H^m(\Omega)\cap V'$ et vérifie*

$$\|\mathscr{P}f\|_m \leqq C_m\|f\|_m, \tag{2.12}$$

où C_m est une constante, et $\|\cdot\|_m$ désigne la norme de $H^m(\Omega)$.

Ce théorème est une conséquence immédiate du lemme suivant:

Lemme 2.6. *Soient Γ une surface fermée de classe C^{m+3} (m: entier $\geqq -1$) et Ω le domaine intérieur ou extérieur à Γ. Alors pour tout f appartenant à $H^m(\Omega)$, il existe un et un seul élément v de $H^{m+2}(\Omega)\cap V$ et une distribution p, déterminée à une constante additive près, qui satisfassent au système (2.10) avec $\nabla p\in H^m(\Omega)$ et vérifient*

$$\|v\|_{m+2}+\|\nabla p\|_m \leqq C'_m\cdot\|f\|_m, \tag{2.13}$$

où C'_m est une constante positive.

La démonstration de ce lemme sera donnée dans l'Appendice. Remarquons que dans le cas de $m=-1$ la conclusion est déjà établie par la Proposition 2.4.

Tout en gardant la régularité éventuelle, l'opérateur $\mathscr{P}$ élimine ainsi la partie 《laminaire》 de l'élément de $H^{-1}(\Omega)$ représentée en forme du gradient d'une fonction scalaire.

2.3. Espace W et ses propriétés

Il est essentiel dans notre travail de noter que V n'est en général pas contenu dans V' au sein de $\mathscr{D}'(\Omega)$. En effet, à cause de la fonction supplémentaire intervenant dans la fonction de Green de $1-\Delta$, même si v appartient à V, div $\mathscr{G}v$ ne s'annule pas nécessairement et donc $\mathscr{G}v$ ($\in H_0^1(\Omega)$) n'appartient pas toujours à V; si $\mathscr{G}v \notin V$, $v=(1-\Delta)\mathscr{G}v$ n'est pas un élément de V'.

V est néanmoins contenu dans $H_0^1(\Omega)$ et donc a fortiori dans $H^{-1}(\Omega)$.

Définition 2.7. Nous désignons par W l'image de V par la projection $\mathscr{P}$:

$$W=\mathscr{P}(V). \tag{2.14}$$

Par la définition même de $\mathscr{P}$, $W\subseteq V'$; on sait de plus par le Théorème auxiliaire 2.5 que W est contenu dans $L^2(\Omega)$ (dans $H^1(\Omega)$, si Γ est supposée plus lisse).

Proposition 2.8. *W est dense dans V'.*

Démonstration. Soit f un élément de V' tel qu'on ait $(f, \mathscr{P}v)_{-1}=0$ pour tout

$v \in V$. Comme $\mathscr{G}f \in V$, grâce aux propriétés de $\mathscr{P}$ on a $(f, \mathscr{P}v)_{-1} = \langle \mathscr{G}f, \mathscr{P}v \rangle = \langle \mathscr{G}f, v \rangle$. Prenant en particulier $v = \mathscr{G}f$, on a $\|\mathscr{G}f\|_0^2 = 0$ et donc $f = 0$, ce dont s'ensuit la densité de W dans V'. $\square$

Proposition 2.9. *L'application restreinte* $\mathscr{P}|_V$: $V \to W$ *est bijective.*

Démonstration. La surjectivité vient immédiatement de la définition de W. L'injectivité nous reste donc à montrer. $\mathscr{P}$ étant linéaire, supposons qu'on a $\mathscr{P}v = 0$ avec $v \in V$. Alors v satisfait à $\langle v, \psi \rangle = \langle \mathscr{P}v, \psi \rangle = 0$ pour tout $\psi \in V$. Prenant en particulier $\psi = v$, on a $\|v\|_0^2 = 0$ et donc $v = 0$. L'application restreinte $\mathscr{P}|_V$ est par conséquent injective. $\square$

3. Opérateur auto-adjoint strictement défini positif $\mathscr{A}$

Pour profiter de la théorie du semi-groupe, il est primordial de construire dans V' un opérateur auto-adjoint strictement défini positif, soit $\mathscr{A}$, qui fasse fonction de $1 - \Delta$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$; c'est ce que nous allons faire dans ce chapitre. Nous étudierons ensuite le domaine de définition de la puissance fractionnaire $\mathscr{A}^\lambda$ de $\mathscr{A}$ pour $\lambda \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

3.1. Opérateur $\mathscr{A}$ et son domaine de définition

On désigne par $\mathscr{J}$ l'inverse de l'application restreinte $\mathscr{P}|_V$:

$$\mathscr{J} = (\mathscr{P}|_V)^{-1} \colon W \longrightarrow V. \tag{3.1}$$

Définition 3.1. Nous définissons l'opérateur $\mathscr{A}$ de W dans V' par

$$\mathscr{A} = (1 - \Delta) \circ \mathscr{J} \tag{3.2}$$

Remarquons que par cette définition le diagramme suivant devient commutatif:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\mathscr{J}"] \arrow[d, "\mathscr{A}"'] & V \arrow[dl, "1-\Delta"] \\ V' & \end{tikzcd} \tag{3.3}$$

Proposition 3.2. *L'opérateur* $\mathscr{A}$ *défini par* (3.2) *est auto-adjoint dans* V' *et strictement défini positif. Son domaine de définition* $D(\mathscr{A})$ *coïncide avec* W, *et son image* $\mathscr{A}(W)$ *est* V'.

Pour la démonstration, considérons l'inverse S de $\mathscr{A}$:

$$S = \mathscr{P} \circ (\mathscr{G}|_{V'}) \colon V' \longrightarrow W. \tag{3.4}$$

Lemme 3.3. *S est symétrique et continu en tant qu'opérateur de V' dans lui-même. $S(V')$ coïncide avec W.*

Démonstration. 1) *Symétrie.* Soient f et g deux éléments de V'. Alors nous avons

$$(3.5)\qquad \begin{aligned}(Sf, g)_{-1} &= (\mathscr{P}\mathscr{G}f, g)_{-1}\\ &= \langle \mathscr{P}\mathscr{G}f, \mathscr{G}g\rangle\\ &= \langle \mathscr{G}f, \mathscr{G}g\rangle, \quad \text{grâce à la définition de } \mathscr{P}\end{aligned}$$

et donc $(Sf, g)_{-1} = (f, Sg)_{-1}$.

2) *Continuité.* L'inclusion $H_0^1(\Omega)\to H^{-1}(\Omega)$ étant continue (même compacte pour le domaine intérieur), $\mathscr{G}$: $H^{-1}(\Omega)\to H_0^1(\Omega)\subseteq H^{-1}(\Omega)$ est continu en tant qu'opérateur de $H^{-1}(\Omega)$ dans lui-même (compact pour le domaine intérieur). Par conséquent l'opérateur composé $\mathscr{P}\circ(\mathscr{G}|_{V'}) = S$ est continu (compact). Finalement, $S(V') = \mathscr{P}(V) = W$. □

Démonstration de la Proposition 3.2. S étant ainsi un opérateur symétrique et continu de V' dans lui-même, son inverse $\mathscr{A}$ est naturellement auto-adjoint. Son domaine $D(\mathscr{A})$ coïncide avec l'image de V' par S, soit W.

Il reste donc à montrer que $\mathscr{A}$ est strictement défini positif. Pour tout f appartenant à $D(\mathscr{A}) = W$, nous avons avec $v = \mathscr{I}f \in V$:

$$(3.6)\qquad \begin{aligned}(\mathscr{A}f, f)_{-1} &= ((1-\Delta)v, f)_{-1}\\ &= \langle v, f\rangle = \langle v, \mathscr{P}v\rangle\\ &= \langle v, v\rangle = \|v\|_0^2.\end{aligned}$$

D'autre part, d'après le Théorème auxiliaire 2.5 avec $m=0$

$$(3.7)\qquad \|f\|_0 = \|\mathscr{P}v\|_0 \leqq C_0\|v\|_0\,;$$

il en résulte donc

$$(3.8)\qquad (\mathscr{A}f, f)_{-1} = \|v\|_0^2 \geqq C\|f\|_0^2\,;$$

la norme de $L^2(\Omega)$ étant plus forte que celle de $H^{-1}(\Omega)$, nous avons avec une constante positive κ:

$$(3.9)\qquad (\mathscr{A}f, f)_{-1} \geqq \kappa\cdot\|f\|_{-1}^2, \quad \text{pour tout } f\in D(\mathscr{A}). \quad \square$$

$\mathscr{A}$ étant ainsi auto-adjoint et strictement défini positif, $W = D(\mathscr{A})$ est un espace hilbertien muni du produit scalaire

$$(3.10)\qquad (f, g)_W = (\mathscr{A}f, \mathscr{A}g)_{-1}, \quad \text{pour tous } f, g\in W;$$

la norme en est

$$(3.11)\qquad \|f\|_W = \|\mathscr{A}f\|_{-1}, \quad {}^\forall f\in W.$$

Proposition 3.4. *L'opérateur $\mathscr{P}|_V$: $V\to W$ et son inverse $\mathscr{I}$ sont isométriques à l'égard de la topologie de W.*

Démonstration. En effet, on a pour tout $v\in V$

$$(3.12)\qquad \begin{aligned}\|\mathscr{P}v\|_W &= \|\mathscr{A}\mathscr{P}v\|_{-1} = \|(1-\Delta)v\|_{-1} \quad \text{(par (3.3))}\\ &= \|v\|_1,\end{aligned}$$

puisque $1-\Delta$ est une isométrie de $H_0^1(\Omega)$ sur $H^{-1}(\Omega)$. Nous avons de même

$$\|f\|_W=\|\mathscr{I}f\|_1 \qquad \text{pour tout } f\in W. \quad \square \tag{3.13}$$

3.2. Domaine de définition de la puissance fractionnaire

$\mathscr{A}$ étant auto-adjoint et strictement défini positif, sa puissance fractionnaire $\mathscr{A}^\lambda$ se définit pour tout λ: $0<\lambda<1$, qui est elle-même auto-adjointe et strictement définie positive.

Proposition 3.5. *$D(\mathscr{A}^{1/2})$, le domaine de définition de $\mathscr{A}^{1/2}$, est le complété de W dans $L^2(\Omega)$. Il existe une constante positive C telle que*

$$C\|f\|_0\leqq\|\mathscr{A}^{1/2}f\|_{-1}\leqq\|f\|_0 \qquad \textit{pour tout } f\in D(\mathscr{A}^{1/2}). \tag{3.14}$$

Démonstration. Comme $\mathscr{A}^{1/2}$ est strictement défini positif, $D(\mathscr{A}^{1/2})$ est normé par $f\mapsto\|\mathscr{A}^{1/2}f\|_{-1}$; de plus, $W=D(\mathscr{A})$ est dense dans $D(\mathscr{A}^{1/2})$. Il suffit donc de montrer pour les éléments de W l'inégalité (3.14), qui signifie l'équivalence des normes.

Soit donc f un élément quelconque de W. Nous avons alors, comme (3.6)

$$\begin{aligned}\|\mathscr{A}^{1/2}f\|_{-1}^2&=(\mathscr{A}^{1/2}f,\mathscr{A}^{1/2}f)_{-1}\\&=(\mathscr{A}f,f)_{-1}\\&=\langle v,f\rangle=\langle v,v\rangle,\quad\text{avec}\quad v=\mathscr{I}f\in V.\end{aligned} \tag{3.15}$$

Le Théorème auxiliaire 2.5 nous assurant que f appartient à $L^2(\Omega)$, nous avons $|\langle v,f\rangle|\leqq\|v\|_0\cdot\|f\|_0$; d'où, vu (3.15),

$$\|v\|_0\leqq\|f\|_0. \tag{3.16}$$

Nous avons donc $\|\mathscr{A}^{1/2}f\|_{-1}=\|v\|_0\leqq\|f\|_0$.

D'autre part, comme (3.7), le Théorème auxiliaire 2.5 entraîne l'inégalité

$$\|v\|_0\geqq C\|\mathscr{P}v\|_0=C\|f\|_0. \tag{3.17}$$

Nous obtenons ainsi (3.14). $\square$

Ceci fait, nous étudierons maintenant l'image $\mathscr{P}(H^{-\theta}(\Omega))$ à l'aide de la théorie d'interpolation.

Proposition 3.6. *L'image de $L^2(\Omega)$ par $\mathscr{P}$ coïncide avec $D(\mathscr{A}^{1/2})$: $\mathscr{P}(L^2(\Omega))=D(\mathscr{A}^{1/2})$.*

Pour la démonstration nous préparons le lemme suivant, une conséquence de la Proposition 2.2 comme le Corollaire 2.3:

Lemme 3.7. *$H^\perp$, le supplémentaire orthogonal dans $L^2(\Omega)$ du sous-espace fermé H défini par* (1.6), *se caractérise*:

$$H^\perp=\{\varphi\in L^2(\Omega);\ {}^\exists q\in\mathscr{D}'(\Omega),\ \varphi=\nabla q\}. \tag{3.18}$$

Remarquons que $H^{\perp} \subseteq (V^{\perp})'$ d'après le Corollaire 2.3; ainsi que la Proposition 2.2, ce lemme est d'ailleurs valable dès que la frontière $\partial\Omega$ est lipschitzienne.

Démonstration de la Proposition 3.6. Soit f un élément quelconque de $L^2(\Omega)$. Compte tenu du Lemme 3.7, f se décompose comme suit:

$$f = h + \nabla q, \quad h \in H, \quad \nabla q \in H^{\perp}. \tag{3.19}$$

Comme nous avons remarqué tout à l'heure, ∇q appartient à $(V^{\perp})'$ de sorte que $\mathscr{P} f = \mathscr{P} h$; par ailleurs, $\mathscr{D}_\sigma(\Omega)$ étant dense dans H, il existe une suite $\{\varphi_j\}_j$ d'éléments de $\mathscr{D}_\sigma(\Omega)$ convergeant vers h dans $L^2(\Omega)$: $\varphi_j \to \mathscr{P} h$. Le Théorème auxiliaire 2.5 nous apprend alors $\mathscr{P}\varphi_j \to \mathscr{P} h$ dans $L^2(\Omega)$, tandis que $\mathscr{P}\varphi_j \in W$. $\mathscr{P} f = \mathscr{P} h$ appartient donc à l'adhérence de W dans $L^2(\Omega)$, qui n'est rien d'autre que $D(\mathscr{A}^{1/2})$ par la Proposition 3.5. Ainsi $\mathscr{P}(L^2(\Omega)) \subseteq D(\mathscr{A}^{1/2})$; l'inclusion inverse est évidente. □

Il est à noter que $h(\in H)$ et $\mathscr{P} h$ se diffèrent en général l'un de l'autre par le gradient d'une fonction harmonique.

Lemme 3.8. (Interpolations) *Pour tout* $\theta \in [0, 1]$, *la restriction de* $\mathscr{P}$ *est un opérateur continu de* $H^{-\theta}(\Omega)$ *dans* $D(\mathscr{A}^{(1-\theta)/2})$:

$$\mathscr{P}(H^{-\theta}(\Omega)) \subseteq D(\mathscr{A}^{(1-\theta)/2}). \tag{3.20}$$

Démonstration. $D(\mathscr{A}^{1/2})$ étant muni d'une norme équivalente à celle de $L^2(\Omega)$, $\mathscr{P}|_{L^2(\Omega)}: L^2(\Omega) \to D(\mathscr{A}^{1/2})$ est un opérateur linéaire continu en conséquence du Théorème auxiliaire 2.5. Vu que $\mathscr{P}: H^{-1}(\Omega) \to V'$ est par définition continu, nous pouvons y appliquer le théorème d'interpolation (Lions-Magenes [10], p. 31):

$$\mathscr{P}: [L^2(\Omega), H^{-1}(\Omega)]_\theta \longrightarrow [D(\mathscr{A}^{1/2}), V']_\theta \tag{3.21}$$

est linéaire continu par rapport aux normes naturelles des espaces intermédiaires pour tout $\theta \in [0, 1]$. Toujours d'après Lions-Magenes [10], nous savons d'une part

$$[D(\mathscr{A}^{1/2}), V']_\theta = D(\mathscr{A}^{(1-\theta)/2)}), \quad \theta \in [0, 1]; \tag{3.22}$$

d'autre part, nous avons $H^{-\theta}(\Omega) = [L^2(\Omega), H^{-1}(\Omega)]_\theta$ pour $\theta \neq \frac{1}{2}$, tandis que $H^{-1/2}(\Omega)$ est contenu dans $[L^2(\Omega), H^{-1}(\Omega)]_{1/2}$ avec une topologie strictement plus fine ([10], pp. 72–79). Nous avons donc la conclusion. □

4. Démonstration du Théorème 1.1.

4.1. Etablissement de la représentation intégrale

Par ce que nous venons d'établir au chapitre 3, l'opérateur $-\mathscr{A}$ engendre un semi-groupe $e^{-t\mathscr{A}}$ dans V'. Pour la solution faible u satisfaisant aux hypothèses du Théorème 1.1, nous allons obtenir une représentation intégrale de $\mathscr{P} u$ dans V' au moyen de $e^{-t\mathscr{A}}$ à partir de l'équation originelle.

Soit f un élément de $L^\alpha(0, T; H^{-\beta}(\Omega))$ ou de $C^\gamma([0, T]; H^{-1}(\Omega))$, pour α, β, γ

tels que $0 \leqq \beta < 1$, $\alpha > \frac{2}{1-\beta}$; $0 < \gamma \leqq 1$. Supposons que u, une solution au sens des distributions du système (1.1)–(1.3):

$$\partial_t u - \Delta u = -\nabla p - (u \cdot \nabla) u + f \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T) \tag{1.1}$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \tag{1.2}$$

$$u|_{\Gamma} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega = \Gamma, \tag{1.3}$$

satisfait de plus aux hypothèses (1.9)–(1.11), soit

$$u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H) \tag{1.9}$$

$$u \in L^s(0, T; L^r(\Omega)), \tag{1.10}$$

pour certains r, s tels que

$$3 < r \leqq +\infty, \quad 2 < s \leqq +\infty, \quad \frac{3}{r} + \frac{2}{s} < 1. \tag{1.11}$$

Si nous posons pour simplicité

$$w(t) = \mathscr{P} u(t), \tag{4.1}$$

alors nous avons la proposition suivante:

Proposition 4.1. *$w(t)$ est fortement continu par rapport à $t \in [0, T]$ à valeurs dans $D(\mathscr{A}^{1/2})$ et est représenté comme suit:*

$$w(t) = e^{-t\mathscr{A}} w_0 + \int_0^t e^{-(t-\tau)\mathscr{A}} (w(\tau) + B(u)(\tau) + F(\tau)) \mathrm{d}\tau, \tag{4.2}$$

avec

$$w_0 = w(0), \quad B(u) = -\mathscr{P}(u \cdot \nabla) u, \quad F = \mathscr{P} f. \tag{4.3}$$

Pour la démonstration, nous avons besoin de deux lemmes concernant les généralités des équations d'évolution, dont nous ne donnerons pas ici les démonstrations.

Définissons d'abord l'espace X par

$$X = \left\{ \varphi \in L^2(0, T; W); \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \in L^2(0, T; V') \right\}, \tag{4.4}$$

où la dérivée est prise à l'égard de la topologie de V'.

Lemme 4.2. *Tout élément φ de X est fortement continu par rapport à $t \in [0, T]$ à valeurs dans $D(\mathscr{A}^{1/2})$.*

Lemme 4.3. *Pour tout $w_0 \in D(\mathscr{A}^{1/2})$ et tout $g \in L^2(0, T; V')$, $\tilde{w}(t)$ défini par*

$$\tilde{w}(t) = e^{-t\mathscr{A}} w_0 + \int_0^t e^{-(t-\tau)\mathscr{A}} g(\tau) \mathrm{d}\tau \tag{4.5}$$

est la solution unique appartenant à X du problème de Cauchy:

$$\frac{d}{dt}\tilde{w}+\mathscr{A}\tilde{w}=g \tag{4.6}$$

$$\tilde{w}(0)=w_0 . \tag{4.7}$$

Remarquons que la condition initiale (4.7) a bien un sens puisque $\tilde{w}(t)$ est continu en vertu du Lemme 4.2.

Nous revenons au système (1.1)–(1.3). $(u\cdot\nabla)u$ appartient à $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$, étant donné la proposition suivante:

Proposition 4.4. *Pour tout v satisfaisant en même temps aux conditions*

$$v\in L^2(0, T; V)\cap L^\infty(0, T; H) \tag{4.8}$$

$$v\in L^{s'}(0, T; L^{r'}(\Omega)) \quad \textit{pour certains } r',\ s' \textit{ tels que} \tag{4.9}$$

$$\frac{3}{r'}+\frac{2}{s'}\leqq 1,$$

nous avons

$$(v\cdot\nabla)v\in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)). \tag{4.10}$$

Notons que l'égalité est *incluse* dans (4.9) *à la différence de* (1.11). Pour la preuve de ce résultat très bien connu, on se réfère à Serrin [14] et à Lions [9].

Démonstration de la Proposition 4.1. Comme nous avons supposé que f est un élément de $L^\alpha(0, T; H^{-\beta}(\Omega))$ ou de $C^\gamma([0, T]; H^{-1}(\Omega))$, f appartient en tout cas à $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$. Opérant $\mathscr{P}$ sur les deux membres de l'équation (1.1) en tant qu'éléments de $\mathscr{D}'((0, T); H^{-1}(\Omega))$, nous pouvons la réduire à celle dans $\mathscr{D}'((0, T); V')$ vérifiée par $w(t)$:

$$\frac{d}{dt}w+\mathscr{A}w=w+B(u)+F. \tag{4.11}$$

Par ce que nous avons vu, $B(u)$, $F\in L^2(0, T; V')$; d'autre part, l'hypothèse $u\in L^2(0, T; V)$ implique l'appartenance de w à $L^2(0, T; W)$ et par conséquent celle de $\mathscr{A}w$ à $L^2(0, T; V')$. Nous avons donc $\frac{d}{dt}w\in L^2(0, T; V')$, d'où $w\in X$; les Lemmes 4.2 et 4.3 nous donnent alors la représentation (4.2) et la continuité forte de $w(t)$ dans $D(\mathscr{A}^{1/2})$. □

Dans ce qui suit, nous nous proposons de montrer d'abord

$$w\in L^\infty(T', T; W) \quad \text{pour tout } T' \text{ tel que } 0<T'<T, \tag{4.12}$$

et ensuite

$$w\in C^0([T', T]; W) \quad \text{et} \quad u\in C^0([T', T]; V), \tag{4.13}$$

le but final de ce chapitre.

4.2. Estimations des termes intégraux dans (4.2)

Nous adoptons pour simplicité la notation

$$Jh(t)=\int_0^t e^{-(t-\tau)\mathscr{A}}h(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{4.14}$$

pour tout $h(t)$ tel que cette intégrale ait un sens dans V'.

Proposition 4.5. *Si $h(t)$ appartient à $L^{\nu}(0, T; D(A^{\lambda}))$ avec $\nu>1$, $0<\lambda\leqq 1$, alors $Jh(t)$ est un élément de $L^{\mu}(0, T; W)$, μ satisfaisant à*

$$\frac{1}{\mu}>\frac{1}{\nu}-\lambda. \tag{4.15}$$

Si en particulier $\lambda>\frac{1}{\nu}$, on peut prendre $\mu=+\infty$.

Démonstration. *Nous avons*

$$\begin{aligned}\|Jh(t)\|_W&=\|\int_0^t \mathscr{A}^{1-\lambda}e^{-(t-\tau)\mathscr{A}}(\mathscr{A}^{\lambda}h(\tau))\mathrm{d}\tau\|_{V'}\\ &\leqq\int_0^t \|\mathscr{A}^{1-\lambda}e^{-(t-\tau)\mathscr{A}}\|_{V'\to V'}\cdot\|\mathscr{A}^{\lambda}h(\tau)\|_{V'}\mathrm{d}\tau,\end{aligned} \tag{4.16}$$

$\|\cdot\|_{V'\to V'}$ désignant la norme de l'espace des opérateurs linéaires continus de V' dans lui-même.

Par ailleurs, comme $\mathscr{A}$ est un opérateur auto-adjoint défini positif, nous avons l'estimation bien connue

$$\begin{aligned}&\|\mathscr{A}^{\sigma}e^{-t\mathscr{A}}\|_{V'\to V'}\leqq t^{-\sigma}(\sigma/e)^{\sigma}\quad\text{pour}\quad \sigma>0 \text{ et } t>0,\\ &\text{où}\quad(\sigma/e)^{\sigma}\leqq 1\quad\text{si}\quad 0<\sigma\leqq e,\end{aligned} \tag{4.17}$$

grâce à la représentation spectrale. Il en résulte donc

$$\|Jh(t)\|_W\leqq\int_0^t (t-\tau)^{\lambda-1}\|\mathscr{A}^{\lambda}h(\tau)\|_{V'}\mathrm{d}\tau. \tag{4.18}$$

D'une part $\|\mathscr{A}^{\lambda}h(t)\|_{V'}$ appartient par hypothèses à $L^{\nu}(0, T)$, et d'autre part la fonction $t^{\lambda-1}$ se trouve dans $L^q(0, T)$ dès que $(1-\lambda)q<1$, soit $\frac{1}{q}>1-\lambda$. Il s'ensuit donc de l'inégalité de Hausdorff-Young pour les convolutions l'appartenance $\|Jh(t)\|_W\in L^{\mu}(0, T)$, pour tout μ qui satisfasse à

$$1<\mu\leqq+\infty,\quad 1+\frac{1}{\mu}\geqq\frac{1}{q}+\frac{1}{\nu}>1-\lambda+\frac{1}{\nu},$$

c'est-à-dire à (4.15). □

L'hypothèse (1.9) implique que w appartient à $L^2(0, T; W)$; donc par la Proposition 4.5 avec $\nu=2$ et $\lambda=1$, $Jw(t)$ se trouve dans $L^\infty(0, T; W)$. De plus, si nous supposons que f appartient à $L^\alpha(0, T; H^{-\beta}(\Omega))$, $0\leqq\beta<1$, $\alpha>\frac{2}{1-\beta}$, alors d'après le Lemme 3.8

(4.19) $$F=\mathscr{P}f\in L^\alpha(0, T; D(\mathscr{A}^\lambda)), \quad \text{pour} \quad \lambda=(1-\beta)/2.$$

Vu que

(4.20) $$\frac{1}{\alpha}-\lambda=\frac{1}{\alpha}-\frac{1-\beta}{2}<0,$$

$JF(t)$ est un élément de $L^\infty(0, T; W)$ en vertu de la Proposition 4.5. Si $f\in C^\gamma([0, T]; H^{-1}(\Omega))$, $0<\gamma\leqq 1$, alors $JF(t)$ a bien un sens et appartient cette fois-ci à $C^0([0, T]; W)$, comme nous le savons bien.

4.3. Estimation de la forme B

Proposition 4.6. *Soit μ un nombre réel $\geqq 2$. Si un élément v de $L^\mu(0, T; V)$ satisfait de plus à $v\in L^s(0, T; L^r(\Omega))$ avec r, $s>1$, $\frac{3}{r}+\frac{2}{s}<1$, alors nous avons*

(4.21) $$B(v)=-\mathscr{P}(v\cdot\nabla)v\in L^\nu(0, T; D(\mathscr{A}^\rho)),$$

pour tout ν tel que

(4.22) $$\nu>1 \quad et \quad \frac{1}{\nu}\geqq\frac{1}{s}+\frac{1}{\mu}$$

et pour ρ donné par

(4.23) $$\rho=\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{r}\right).$$

Remarquons que par hypothèses $0<\rho\leqq\frac{1}{2}$.

Démonstration. Soit θ un nombre non négatif quelconque. Le théorème d'immersions de Sobolev nous assure que si $\frac{1}{q}=\frac{1}{2}-\frac{\theta}{3}$, on a

(4.24) $$H_0^\theta(\Omega)\subseteq L^q(\Omega) \quad \text{avec injection continue,}$$

où $H_0^\theta(\Omega)$ est le complété de $\mathscr{D}(\Omega)$ dans $H^\theta(\Omega)$. Notant que $H^{-\theta}(\Omega)$ est par définition l'espace dual de $H_0^\theta(\Omega)$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$, nous avons

(4.25) $$L^{q'}(\Omega)\subseteq H^{-\theta}(\Omega) \quad \text{avec injection continue,}$$

(4.26) $$\frac{1}{q'}=1-\frac{1}{q}=\frac{1}{2}+\frac{\theta}{3}.$$

Nous prenons en particulier $\theta=\frac{3}{r}$. Alors, étant donné (4.26), l'inégalité de Hölder nous donne

(4.27) $$\|(v\cdot\nabla)v\|_{L^{q'}(\Omega)}\leqq\|v\|_{L^r(\Omega)}\cdot\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Par hypothèses

$$\|v(t)\|_{L^r(\Omega)} \in L^s(0, T), \quad \|\nabla v(t)\|_{L^2(\Omega)} \in L^2(0, T);$$

il en résulte de nouveau par l'inégalité de Hölder, avec v satisfaisant à (4.22),

$$(4.28) \qquad (v \cdot \nabla)v \in L^v(0, T; L^{q'}(\Omega)) \subseteq L^v(0, T; H^{-3/r}(\Omega)).$$

Tenant compte de la continuité de $\mathscr{P}$: $H^{-3/r}(\Omega) \to D(\mathscr{A}^\rho)$ établie par le Lemme 3.8, nous obtenons finalement (4.21). □

4.4. Exploitation de la récurrence

Nous allons montrer que la norme $\|JB(u)(t)\|_W$ est elle-même bornée sur $[T', T]$ pour $T' \in (0, T)$ arbitrairement choisi et fixé; nous y procédons par estimer successivement l'intégrabilité en t de w comme fonction à valeurs dans W, à l'aide des Propositions 4.5 et 4.6.

Nous commençons par les hypothèses (1.9)–(1.11): la Proposition 4.6 nous donne, avec $\mu = 2$ par (1.9),

$$(4.29) \qquad \begin{aligned} & B(u) \in L^v(0, T; D(\mathscr{A}^\rho)), \\ & \text{où } \rho = (1-\theta)/2, \quad \theta = 3/r \quad \text{et} \quad \frac{1}{v} \geqq \frac{1}{s} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Posons donc

$$(4.30) \qquad \mu_0 = 2, \quad \frac{1}{v_0} = \frac{1}{s} + \frac{1}{\mu_0} = \frac{1}{s} + \frac{1}{2};$$

d'après la Proposition 4.5 avec $\lambda = \rho = (1-\theta)/2$, la fonction $JB(u)(t)$ appartient à $L^\mu(0, T; W)$ pour tout μ tel que

$$(4.31) \qquad \frac{1}{\mu} > \frac{1}{v_0} - \rho = \frac{1}{v_0} - \frac{1-\theta}{2},$$

soit, compte tenu de ce que $\theta = 3/r$, $\mu_0 = 2$,

$$(4.32) \qquad \frac{1}{\mu} > \frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{2}\left\{1 - \left(\frac{3}{r} + \frac{2}{s}\right)\right\}.$$

La constante

$$(4.33) \qquad \delta = \frac{1}{2}\left\{1 - \left(\frac{3}{r} + \frac{2}{s}\right)\right\}$$

est par (1.11) strictement positive, de sorte qu'on peut prendre un nombre positif μ_1 tel que

$$(4.34) \qquad \frac{1}{\mu_0} - \delta < \frac{1}{\mu_1} < \frac{1}{\mu_0} - \frac{\delta}{2}$$

pour avoir $JB(u) \in L^{\mu_1}(0, T; W)$.

Or, dans la représentation (4.2)

(4.2)' $$w(t)=e^{-t\mathscr{A}}w_0+J(w+B(u)+F)(t),$$

$e^{-t\mathscr{A}}w_0$ appartient à $C^\infty((0, T]; W)$, tandis que $J(w+F)(t)$ se trouve dans $L^\infty(0, T; W)$ comme nous avons déjà vu.

Somme toute, nous avons

(4.35) $$w \in L^{\mu_1}(T_1, T; W)$$

et en conséquence de la continuité de $\mathscr{I}: W \to V$,

(4.36) $$u \in L^{\mu_1}(T_1, T; V),$$

pour tout $T_1 \in (0, T')$.

Fixons un tel T_1; nous recommençons les mêmes procédés sur l'intervalle $[T_1, T]$. La représentation intégrale s'écrit maintenant:

(4.37) $$w(t)=\exp(-(t-T_1)\mathscr{A})w(T_1)+ + \int_{T_1}^{t} e^{-(t-\tau)\mathscr{A}}(w+B(u)+F)(\tau)d\tau$$

où $B(u) \in L^{\nu_1}(T_1, T; D(\mathscr{A}^\rho))$, ν_1 étant donné par

(4.38) $$\frac{1}{\nu_1}=\frac{1}{s}+\frac{1}{\mu_1},$$

en vertu de la Proposition 4.6. Les mêmes calculs que ci-dessus nous donnent un nombre positif μ_2 tel que

(4.39) $$\frac{1}{\mu_1}-\delta<\frac{1}{\mu_2}<\frac{1}{\mu_1}-\frac{\delta}{2},$$

pour lequel nous avons

$$\int_{T_1}^{t} e^{-(t-\tau)\mathscr{A}}B(u)(\tau)d\tau \in L^{\mu_2}(T_1, T; W).$$

Nous répétons ces procédés pour avoir la loi de récurrence

(4.40) $$\frac{1}{\mu_k}<\frac{1}{\mu_{k-1}}-\frac{\delta}{2}, \quad \delta\text{: constante}>0,$$

de sorte qu'au bout d'un nombre fini de fois de répétitions nous pouvons prendre $\mu_k=+\infty$: $w(t)$ appartient à $L^\infty(T_k, T; W)$, $0<T_1<T_2<\cdots<T_k<T'$. Ainsi nous parvenons finalement à:

(4.41) $$u \in L^\infty(T', T; V)$$

(4.42) $$(u\cdot\nabla)u \in L^\infty(T', T; H^{-1/2}(\Omega)), \quad \text{pour tout } T'>0.$$

4.5. Continuité forte de *u* par rapport à *t*

La continuité forte de $u(t)$ dans V se démontre en conséquence de celle de $w(t)$ dans W, facilement vérifiée au moyen de la régularisation.

$e^{-(t-T')\mathscr{A}}w(T')$ étant continu dans l'intervalle $(T', T]$ à valeurs dans W, il suffit d'étudier le terme intégral

$$\int_{T'}^{t} e^{-(t-\tau)\mathscr{A}}(w+B(u)+F)(\tau)d\tau.$$

Prenons le régularisant de Friedrichs de dimension 1, $\rho_\varepsilon(t)$:

$$\rho_\varepsilon(t)=\frac{1}{\varepsilon}\cdot\rho\left(\frac{t}{\varepsilon}\right),\quad \rho\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^1),\quad \rho(t)\geqq 0 \text{ et } \int_{\mathbf{R}}\rho(t)dt=1.$$

Soit g un élément de $L^\sigma(0, T; D(\mathscr{A}^\lambda))$ pour σ, λ satisfaisant à $1<\sigma\leqq+\infty$, $0<\lambda\leqq 1$ et $\lambda>(1/\sigma)$. Prolongeant $g(t)$ par zéro en dehors de l'intervalle $[0, T]$ et le régularisant par $\rho_\varepsilon(t)$, nous vérifions facilement que les fonctions

$$G_\varepsilon(t)=\int_0^t e^{-(t-\tau)\mathscr{A}}(g*\rho_\varepsilon)(\tau)d\tau$$

sont fortement continues sur $[0, T]$ à valeurs dans W et qu'elles y convergent uniformément vers

$$G(t)=\int_0^t e^{-(t-\tau)\mathscr{A}}g(\tau)d\tau$$

grâce à la convergence forte $g*\rho_\varepsilon\to g$ dans $L^\sigma(0, T; D(\mathscr{A}^\lambda))$. $G(t)$ appartient donc à $C^0([0, T]; W)$.

Etant donné que w et $B(u)$ sont des éléments de $L^\sigma(T', T; D(\mathscr{A}^\lambda))$ pour $(\sigma, \lambda)=(+\infty, 1)$, $(+\infty, 1/4)$ respectivement, les considérations ci-dessus nous assurent la continuité forte envisagée de

$$\int_{T'}^{t} e^{-(t-\tau)\mathscr{A}}(w+B(u))(\tau)d\tau\,;$$

il en est de même pour f appartenant à $L^\alpha(0, T; H^{-\beta}(\Omega))$, avec α, β tels que $0\leqq\beta<1$, $\alpha>\frac{2}{1-\beta}$. Quant à f appartenent à $C^\gamma([0, T]; H^{-1}(\Omega))$, $0<\gamma\leqq 1$, l'intégrale

$$\int_{T'}^{t} e^{-(t-\tau)\mathscr{A}}F(\tau)d\tau$$

appartient en fait à $C^0([T', T]; W)$, comme nous le savons bien.

Le théorème 1.1 fut ainsi démontré.

5. Méthodes de la démonstration du Théorème 1.2.

Pour démontrer le Théorème 1.2, nous n'avons qu'à retracer fidèlement les raisonnements de Masuda [12] tenant compte du Théorème 1.1.

En vue de la première moitié du Théorème, soit l'analyticité de u comme fonction à valeurs dans V, nous démontrons que $w(t)=\mathscr{P}u(t)$ peut se prolonger en une fonction holomorphe définie au voisinage complexe $\mathscr{O}'$ de l'intervalle $(0, T)$.

Il est à noter d'abord que le Théorème 1.1 nous assure aussi sous les hypothèses du Théorème 1.2 que $w(t)$ appartient à $C^0((0, T); W)$. Rappelons-nous maintenant la représentation intégrale (4.2) de $w(t)$; la considérant comme équation intégrale, nous en passons à la complexification: avec $T' \in (0, T)$ arbitrairement choisi et fixé,

$$w(z) = e^{-(z-T')\mathscr{A}} \mathscr{P} u(T') + \tag{5.1}$$
$$+ \int_{[T', z]} e^{-(z-\zeta)\mathscr{A}} (w + \tilde{B}(w) + F)(\zeta) d\zeta$$

pour z tel que Re $z > T'$, $|z|$ suffisamment petit, où $\tilde{B}(w) = B(\mathscr{I} w) = -\mathscr{P}(\mathscr{I} w \cdot \nabla) \mathscr{I} w$; $[T', z]$ est le segment orienté de T' à z, et $F(z) = \mathscr{P} f(z)$ se définit dans $\mathcal{O}$.

Nous construisons localement une solution de (5.1) à partir de chaque T' par approximations successives à la manière de Fujita-Kato [3]. Les solutions ainsi obtenues sont holomorphes à valeurs dans W tant qu'elles existent par la convergence dominée, et nous pouvons donc les connecter grâce au théorème de coïncidence en une fonction holomorphe $w(z)$ définie au voisinage complexe $\mathcal{O}'$ de l'intervalle $(0, T)$.

$w(z)$ est en fait un prolongement de $w(t) = \mathscr{P} u(t)$ définie dans $(0, T)$, d'où l'analyticité de u à valeurs dans V.

Pour l'analyticité locale de u par rapport à x et à t, soit la dernière moitié du Théorème 1.2, il en est tout à fait de même que dans l'ouvrage cité de Masuda, à moins qu'il ne faille un peu plus d'étapes pour élever la régularité de la solution.

APPENDICE Démonstration du Lemme 2.6.

A.1. Préliminaires

Le but de cet Appendice est de démontrer le lemme fondamental du chapitre 2:

Lemme 2.6. *Soient Γ une surface fermée de classe C^{m+3}(m: entier $\geqq -1$) et Ω le domaine intérieur ou extérieur à Γ. Pour tout f appartenant à $H^m(\Omega)$, il existe un et un seul élément v de $H^{m+2}(\Omega) \cap V$ et une distribution p, déterminée à une constante additive près, qui satisfassent au système*

$$(1-\Delta)v + \nabla p = f \quad \text{dans} \quad \Omega \tag{A.1}$$

$$\operatorname{div} v = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \tag{A.2}$$

$$v|_\Gamma = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma, \tag{A.3}$$

avec $\nabla p \in H^m(\Omega)$ et vérifient l'inégalité

$$\|v\|_{m+2} + \|\nabla p\|_m \leqq C'_m \|f\|_m, \tag{A.4}$$

où C'_m est une constante positive dépendant de Ω.

Nous avons déjà obtenu la conclusion pour le cas de $m = -1$ par la Proposition 2.4. Il nous reste donc de montrer les régularités de v et de p.

Une proposition due à J.-L. Lions joue un rôle essentiel dans la démonstration (voir Magenes-Stampacchia [11]):

Proposition A.1. *Soient Γ une surface fermée de classe C^1, et Ω^i le domaine intérieur à Γ. Alors, toute distribution p dans Ω^i dont le gradient ∇p appartienne à $H^{-1}(\Omega^i)$ est en fait un élément de $L^2(\Omega^i)$. De plus, il existe une constante C indépendante de p telle que*

$$\|p\|_{L^2(\Omega^i)/\mathbf{R}} \leqq C\|\nabla p\|_{-1}, \tag{A.5}$$

$$\text{où} \quad \|p\|_{L^2(\Omega^i)/\mathbf{R}} = \inf\{\|p+\kappa\|_{L^2(\Omega^i)};\ \kappa \in \mathbf{R}\}.$$

Remarque. Pour Γ de classe C^2, cette proposition est en fait équivalente à la caractérisation (1.13) de V:

$$V = \{v \in H_0^1(\Omega^i);\ \operatorname{div} v = 0\}. \tag{1.13}$$

En effet, (1.13) se déduit facilement de la Proposition A.1 (voir Temam [16]); en revanche, Heywood [6] a donné une preuve directe de (1.13) sans recourir à celle-ci. Le fait que l'image de l'espace $L^2(\Omega^i)$ scalaire par l'opérateur $\nabla: L^2(\Omega^i) \to H^{-1}(\Omega^i)$ est fermée, résultat immédiat du théorème de Cattabriga [2], nous suffit maintenant pour conclure la Proposition A.1 à partir de (1.13) pour Γ de classe C^2.

Corollaire A.2. *On désigne par Ω^e le domaine extérieur à la surface Γ telle qu'on s'est donnée dans la Proposition A.1. Alors, toute distribution p dans Ω^e dont le gradient ∇p appartienne à $H^{-1}(\Omega^e)$ est de carré localement intégrable sur $\overline{\Omega^e}$: $p \in L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega^e})$. De plus, pour tout sous-domaine borné D de Ω^e, il existe une constante $C(D)$ telle que*

$$\|p\|_{L^2(D)/\mathbf{R}} \leqq C(D) \cdot \|\nabla p\|_{H^{-1}(\Omega^e)} \tag{A.6}$$

Ce corollaire s'ensuit immédiatement de la Proposition A.1 si on considère la restriction de p à D.

Notons ici que la distribution p dont la Proposition 2.4 assure l'exitence dans Ω^i (resp. Ω^e) appartient en vérité à $L^2(\Omega^i)$ (resp. $L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega^e})$), grâce à la Proposition A.1 et au Corollaire A.2.

A.2. Estimations a priori globale et à l'écart de la frontière

Nous étudions ici le système (A.1)–(A.2) dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^3$ tout entier. Nous montrerons d'abord:

Lemme A.3. *Soient v un élément de $H^1(\mathbf{R}^3)$ et p une distribution telle que $\nabla p \in H^{-1}(\mathbf{R}^3)$. On suppose de plus pour m: entier $\geqq 0$,*

$$f = (1-\Delta)v + \nabla p \in H^m(\mathbf{R}^3). \tag{A.7}$$

$$g = \operatorname{div} v \in H^{m+1}(\mathbf{R}^3). \tag{A.8}$$

Alors v et p appartiennent en fait à $H^{m+2}(\mathbf{R}^3)$ et à $H^{m+1}(\mathbf{R}^3)$ respectivement et satisfont à l'inégalité suivante:

$$\|v\|_{m+2}+\|\nabla p\|_m \leqq \tilde{C}_m(\|f\|_m+\|g\|_{m+1}+\|v\|_0), \tag{A.9}$$

où $\tilde{C}_m$ est une constante positive indépendante de v et de p.

Démonstration. 1) Cas de $m=0$. Posons $r=\nabla p$. La transformation de Fourier effectuée sur (A.7) et (A.8) donne

$$\hat{f}=\langle\xi\rangle^2\hat{v}+\hat{r} \tag{A.7)^}$$

$$\hat{g}=i\xi\cdot\hat{v} \tag{A.8)^}$$

où $\langle\xi\rangle=(1+|\xi|^2)^{1/2}$. Définissons maintenent une fonction scalaire $\lambda(\xi)$ par $\lambda(\xi)=\xi'\cdot\hat{r}(\xi)$, avec $\xi'=\xi/|\xi|$. Comme $r_j=\partial_j p$ pour tout j, nous avons $\partial_k r_j=\partial_j r_k$ et donc $\xi_k\hat{r}_j=\xi_j\hat{r}_k$, d'où $\hat{r}(\xi)=\lambda(\xi)\xi'$.

Vérifions maintenant que $\lambda\in L^2$. Prenant le produit scalaire de ξ' et de chaque membre de (A.7)^, nous obtenons

$$\lambda(\xi)=\xi'\cdot\hat{f}-\langle\xi\rangle^2\xi'\cdot\hat{v}.$$

(A.8)^ implique par ailleurs

$$\langle\xi\rangle^2\xi'\cdot\hat{v}=\xi'\cdot\hat{v}-i|\xi|\hat{g},$$

d'où

$$\lambda(\xi)=\xi'\cdot(\hat{f}-\hat{v})+i|\xi|\hat{g}. \tag{A.10}$$

$\lambda(\xi)$ appartient donc à L^2 grâce aux hypothèses et à la propriété de v, et vérifie

$$\|\lambda\|_0\leqq\|\hat{f}\|_0+\|\hat{v}\|_0+\|\,|\xi|\hat{g}\|_0. \tag{A.11}$$

$\hat{r}(\xi)=\lambda(\xi)\xi'$ appartient ainsi à L^2, et par conséquent (A.7)^ nous donne $\langle\xi\rangle^2\hat{v}\in L^2$, c'est-à-dire $v\in H^2(\mathbf{R}^3_x)$ tadis que $\nabla p=r\in L^2(\mathbf{R}^3_x)$. L'estimation (A.9) en résulte immédiatement.

2) Cas de $m\geqq 1$. Nous multiplions par $\langle\xi\rangle^m$ chaque terme de (A.7)^ et (A.8)^. Nous voyons par les mêmes raisonnements que $\langle\xi\rangle^{m+2}\hat{v}$ et $\langle\xi\rangle^m\hat{r}$ appartiennent à $L^2(\mathbf{R}^3_\xi)$, d'où la conclusion. □

Corollaire A.4. (Estimation à l'écart de la frontière) *Soient Ω un domaine de $\mathbf{R}^3$, borné ou non, et D un sous-domaine strictement contenu dans Ω: $\bar{D}\subseteq\Omega$. Supposons que $v\in H^1(\Omega)$, $p\in\mathscr{D}'(\Omega)$, $\nabla p\in H^{-1}(\Omega)$, $f=(1-\Delta)v+\nabla p\in H^m(\Omega)$, $g=$* div $v\in H^{m+1}(\Omega)$ *et*

$$\text{supp}\, v,\ \text{supp}\, p\subseteq D. \tag{A.12}$$

Alors v et ∇p appartiennent à $H^{m+2}(\Omega)$ et à $H^m(\Omega)$ resp., satisfaisant à l'inégalité suivante avec la même constante que dans le Lemme A.3:

$$\|v\|_{m+2}+\|\nabla p\|_m\leqq\tilde{C}_m(\|f\|_m+\|g\|_{m+1}+\|v\|_0). \tag{A.13}$$

En effet, nous pouvons prolonger toutes ces distributions par zéro en dehors de Ω pour que le Lemme A.3 s'y applique.

A.3. Estimation a priori dans un domaine borné

Nous supposons dans cette section que le domaine Ω est borné, $\partial\Omega$ est de classe C^{m+3} ($m=0, 1, 2,\ldots$).

Lemme A.5. *Soient v et p des éléments de $H^1(\Omega)$ et de $L^2(\Omega)$ respectivement. Nous supposons de plus*

$$\text{(A.14)} \qquad \begin{cases} f=(1-\Delta)v+\nabla p \in H^m(\Omega) \\ g=\operatorname{div} v \qquad \in H^{m+1}(\Omega) \\ \varphi=v|_{\partial\Omega} \qquad \in H^{m+(3/2)}(\partial\Omega). \end{cases}$$

Alors v et p appartiennent en fait à $H^{m+2}(\Omega)$ et à $H^{m+1}(\Omega)$ resp., satisfaisant à l'inégalité suivante avec une constante positive $\tilde{C}_m(\Omega)$ déterminée par m et Ω:

$$\text{(A.15)} \qquad \|v\|_{m+2}+\|p\|_{m+1} \leqq$$
$$\leqq \tilde{C}_m(\Omega)(\|f\|_m+\|g\|_{m+1}+\|\varphi\|_{m+(3/2),\partial\Omega}+\|v\|_1+\|p\|_0).$$

Démonstration. Posons

$$\text{(A.16)} \qquad L^0(\xi)=(L^0_{jk}(\xi))=\begin{pmatrix} |\xi|^2 & 0 & 0 & i\xi_1 \\ 0 & |\xi|^2 & 0 & i\xi_2 \\ 0 & 0 & |\xi|^2 & i\xi_3 \\ i\xi_1 & i\xi_2 & i\xi_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notons que $L^0(\mathrm{D})$ est la partie principale au sens d'Agmon-Douglis-Nirenberg [1] (ouvrage désormais cité comme A.D.N. II) de l'opérateur

$$\text{(A.17)} \qquad L(\mathrm{D})=\begin{pmatrix} 1-\Delta & 0 & 0 & \partial_1 \\ 0 & 1-\Delta & 0 & \partial_2 \\ 0 & 0 & 1-\Delta & \partial_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous avons

$$\text{(A.18)} \qquad \det L^0(\xi)=|\xi|^6,$$

de sorte que le système

$$\text{(A.19)} \qquad L(\mathrm{D})\,{}^t(v_1, v_2, v_3, p)={}^t(f_1, f_2, f_3, g)$$

est un système elliptique au sens d'A.D.N. II. Si donc on suppose, en sus des hypothèses du présent Lemme, que $v \in H^2(\Omega)$ et $p \in H^1(\Omega)$, la conclusion s'ensuit immédiatement de l'estimation a priori établie dans A.D.N. II. Il est d'ailleurs à noter que pour cela seul il suffit que $\partial\Omega$ soit de C^{m+2}.

Il nous reste donc de montrer que les hypothèses du Lemme entraînent l'appartenance de v à $H^2(\Omega)$ et celle de p à $H^1(\Omega)$, ce qui s'effectue par les procédés bien habituels.

Rappelons-nous d'abord que $\partial\Omega$ est de classe C^{m+3}, $v\in H^1(\Omega)$, $p\in L^2(\Omega)$ et que v et p satisfont à (A.14). Par ailleurs, il existe une application linéaire continue R de $H^{m+(3/2)}(\partial\Omega)$ dans $H^{m+2}(\Omega)$ telle que $R\psi|_{\partial\Omega}=\psi$ pour tout $\psi\in H^{m+(3/2)}(\partial\Omega)$. Si on pose donc $w=v-R\varphi$, on a $w\in H_0^1(\Omega)$ et

$$\text{(A.20)}\qquad \begin{cases} (1-\Delta)w+\nabla p=F\in H^m(\Omega), \\ \operatorname{div} w=G \qquad\quad \in H^{m+1}(\Omega). \end{cases}$$

avec $F=f-(1-\Delta)R\varphi$ et $G=g-\operatorname{div} R\varphi$.

Nous allons démontrer que $w\in H^{m+2}(\Omega)$ et $p\in H^{m+1}(\Omega)$. Grâce au résultat de la régularité à l'écart de la frontière, il suffit d'établir la régularité seulement au voisinage de la frontière.

Pour simplicité, supposons que la frontière coïncide localement avec le plan $x_3=0$. Au moyen de la transformation de Fourier partielle ou des quotients différentiels, nous voyons facilement que

$$\text{(A.21)}\qquad \partial_k w\in H^1 \quad\text{et}\quad \partial_k p\in L^2 \quad\text{pour}\quad k=1,2.$$

Comme nous en avons

$$\text{(A.22)}\qquad \partial_3^2 w_k=w_k-\partial_1^2 w_k-\partial_2^2 w_k+\partial_k p-F_k\in L^2,$$

w_k appartient à H^2 si $k=1$ ou 2; cela implique maintenant

$$\text{(A.21)}'\qquad \partial_3 w_3=G-\partial_1 w_1-\partial_2 w_2\in H^1,$$

et somme toute nous avons $w_3\in H^2$. Il en résulte que $\nabla p=F-(1-\Delta)w\in L^2$, et par conséquent $p\in H^1$.

Une répétition de ces arguments nous permet d'obtenir la régularité d'ordre supérieur jusqu'à $w\in H^{m+2}$ et $p\in H^{m+1}$.

Les raisonnements sont analogues pour la frontière plus générale. Nous gagnons d'abord la régularité dans les directions tangentielles au moyen des quotients différentiels; puis nous voyons par la première équation différentielle que les composants tangentiels de w appartiennent à H^2. La seconde équation implique alors que le composant normal de w appartient aussi à H^2. Nous démontrons finalement que $p\in H^1(\Omega)$. □

A.4. Démonstration du Lemme 2.6 dans le domaine borné

Nous nous situons dans les hypothèses du Lemme 2.6. Nous avons l'inégalité suivante pour v, p dont la Proposition 2.4 assure l'existence:

$$\text{(A.23)}\qquad \|v\|_1+\|\nabla p\|_{-1}\leqq\tilde{C}_{-1}(\Omega)\|f\|_{-1}$$

f appartenant par hypothèses à $H^m(\Omega)$, $m \geqq 0$, nous avons en vertu du Lemme A.5 avec $g=0$, $\varphi=0$

$$v \in H^{m+2}(\Omega), \quad p \in H^m(\Omega) \tag{A.24}$$

$$\|v\|_{m+2} + \|\nabla p\|_m \leqq \tilde{C}_m(\Omega)(\|f\|_m + \|v\|_1 + \|p+\kappa\|_0), \tag{A.25}$$

où κ est une constante additive arbitraire.

Compte tenu de la Proposition A.1, nous avons

$$\inf\{\|p+\kappa\|_0;\ \kappa \in \mathbf{R}\} \leqq C \cdot \|\nabla p\|_{-1}; \tag{A.26}$$

prenant donc l'infimum des deux membres de (A.25) et y appliquant (A.23), nous obtenons l'inégalité envisagée (A.4):

$$\|v\|_{m+2} + \|\nabla p\|_m \leqq C'_m \cdot \|f\|_m. \quad \square \tag{A.4}$$

A.5. Démonstration du Lemme 2.6 dans le domaine extérieur

Grâce à la Proposition 2.4, $v \in V$ est univoquement déterminé même dans le domaine Ω extérieur à la surface Γ. p, déterminé à une constante additive près, appartient pour sa part à $L^2_{\mathrm{loc}}(\bar{\Omega})$ en vertu du Corollaire A.2. L'inégalité (A.23) est en outre toujours valable.

1) *Cas de* $m=0$

Soit $\zeta(x)$ un élément de $\mathscr{D}(\mathbf{R}^3)$ tel que

$$0 \leqq \zeta(x) \leqq 1, \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbf{R}^3,$$
$$\zeta(x)=1 \quad \text{au voisinage de} \quad \Gamma.$$

Il existe donc deux ouverts U, U' de frontière suffisamment lisse, U borné, U' non borné, tels que

$$\Omega \cap \operatorname{supp} \zeta \subseteq U, \quad \Omega \cap \operatorname{supp}(1-\zeta) \subseteq U, \quad U \cup U' = \Omega. \tag{A.27}$$

Définissons les fonctions $v^{(1)}$, $v^{(2)}$, $p^{(1)}$, $p^{(2)}$ par

$$v^{(1)} = \zeta v, \ p^{(1)} = \zeta p; \quad v^{(2)} = (1-\zeta)v, \ p^{(2)} = (1-\zeta)p. \tag{A.28}$$

Alors nous avons

$$\begin{cases} (1-\Delta)v^{(1)} + p^{(1)} = \\ \quad = \zeta f - 2\nabla\zeta \cdot \nabla v - (\Delta\zeta)v + p\nabla\zeta & \text{dans} \quad U \\ \operatorname{div} v^{(1)} = -v \cdot \nabla\zeta & \text{dans} \quad U \\ v^{(1)}|_{\partial U} = 0 & \text{sur} \quad \partial U \end{cases} \tag{A.29}$$

$$\begin{cases} (1-\Delta)v^{(2)} + \nabla p^{(2)} = \\ \quad = (1-\zeta)f + 2\nabla\zeta \cdot \nabla v + (\Delta\zeta)v - p\nabla\zeta & \text{dans} \quad U' \\ \operatorname{div} v^{(2)} = v \cdot \nabla\zeta & \text{dans} \quad U' \\ v^{(2)}|_{\partial U'} = 0 & \text{sur} \quad \partial U' \end{cases} \tag{A.30}$$

C désigne désormais une constante positive reprise si nécessaire d'une ligne à l'autre.

Notons d'abord que $p\nabla\zeta\in L^2(\Omega)$, puisque $p\in L^2_{\mathrm{loc}}(\bar{\Omega})$. D'une part le Lemme A.5 appliqué à (A.29) nous donne

$$v^{(1)}\in H^2(U),\ \nabla p^{(1)}\in L^2(U),\tag{A.31}$$

$$\begin{aligned}\|v^{(1)}\|_{2,U}+\|\nabla p^{(1)}\|_{0,U}&\leqq\\ &\leqq C(\|\zeta f-2\nabla\zeta\cdot\nabla v-(\Delta\zeta)v+p\nabla\zeta\|_{0,U}+\|-v\cdot\nabla\zeta\|_{1,U}+\|v^{(1)}\|_{1,U}+\|p^{(1)}\|_{0,U})\\ &\leqq C(\|f\|_{0,\Omega}+\|v\|_{1,\Omega}+\|p\|_{0,U}).\end{aligned}\tag{A.32}$$

D'autre part, comme $v^{(2)}$ et $p^{(2)}$ sont à support contenu dans U', le Corollaire A.4 nous donne maintenant

$$v^{(2)}\in H^2(U'),\quad p^{(2)}\in L^2(U'),\tag{A.33}$$

$$\begin{aligned}\|v^{(2)}\|_{2,U'}+\|\nabla p^{(2)}\|_{0,U'}&\leqq\\ &\leqq C(\|(1-\zeta)f+2\nabla\zeta\cdot\nabla v+(\Delta\zeta)v-p\nabla\zeta\|_{0,U'}+\|v\cdot\nabla\zeta\|_{1,U'})\\ &\leqq C(\|f\|_{0,\Omega}+\|v\|_{1,\Omega}+\|p\nabla\zeta\|_{0,U'}).\end{aligned}\tag{A.34}$$

Somme toute, nous avons $v\in H^2(\Omega)$, $\nabla p\in L^2(\Omega)$ et

$$\|v\|_{2,\Omega}+\|\nabla p\|_{0,\Omega}\leqq C(\|f\|_{0,\Omega}+\|v\|_{1,\Omega}+\|p\|_{0,U}).\tag{A.35}$$

Substituant $p+\kappa$ à p et prenant l'infimum par rapport à $\kappa\in\mathbf{R}$, nous obtenons finalement l'estimation envisagée par (A.23) et (A.6).

2) *Cas de m en général*

Nous n'avons qu'à répéter les arguments ci-dessus. □

Commentaires bibliographiques

Après Serrin [13] et Kahane [7], quelques auteurs traitèrent le problème de la régularité par rapport au temps sous la condition de Dirichlet.

Dans le cadre de L^2, S. Kaniel et M. Shinbrot [8] obtinrent la conclusion de notre Théorème 1.1 pour f appartenant à $L^2_t(L^2_x)$ dans le domaine borné de frontière suffisamment lisse. Alors que leur méthode est assez délicate, on peut obtenir le même résultat plus simplement en partant d'une estimation a priori convenable, à l'aide des théorèmes de l'existence locale des solutions fortes et de l'unicité (suggestion du Professeur K. Masuda, communication privée). Cette méthode serait applicable aussi au domaine extérieur, mais la force extérieure f doit toujours rester dans le cadre de $L^2_t(L^2_x)$.

Récemment, H. Sohr [15] et Y. Giga [5] réussirent à démontrer la régularité en t de la solution faible dans le cas critique $\frac{5}{r}+\frac{2}{s}=1$, toujours pour f dans $L^2_t(L^2_x)$. Leurs démonstrations, différentes l'une de l'autre, tirent toutes deux profit de la théorie de l'opérateur de Stokes dans L^r.

Notre traitement dans le cadre de H^{-1} est neuf.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ DE KYOTO

Bibliographie

[1] S. Agmon, A. Douglis et L. Nirenberg: Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II, Comm. Pure Appl. Math. **17** (1964), 35–92.

[2] L. Cattabriga: Su un problema al contorno relativo al sistema di equazioni di Stokes, Rend. Mat. Sem. Univ. Padova, **31** (1961), 308–340.

[3] H. Fujita et T. Kato: On the Navier-Stokes initial value problem I, Arch. Rat. Mech. Anal. **16** (1964), 269–315.

[4] Y. Giga: Time and spatial analyticity of solutions of the Navier-Stokes equations, Comm. Part. Diff. Eqs. **8** (1983), 929–948.

[5] Y. Giga: Solutions for semilinear parabolic equations in L^p and regularity of weak solutions of the Navier-Stokes system, à paraître dans le J. Diff. Eqs.

[6] J. G. Heywood: On uniqueness questions in the theory of viscous flow, Acta Math., **136** (1976), 61–102.

[7] Ch. Kahane: On the spatial analyticity of solutions of the Navier-Stokes equations, Arch. Rat. Mech. Anal. **33** (1969), 386–405.

[8] S. Kaniel et M. Shinbrot: Smoothness of weak solutions of the Navier-Stokes equations, Arch. Rat. Mech. Anal. **24** (1967), 302–324.

[9] J.-L. Lions: *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod/Gauthier-Villars, 1969.

[10] J.-L. Lions et E. Magenes: *Problèmes aux limites non homogènes*, volume 1, Dunod, 1968.

[11] E. Magenes et G. Stampacchia: I problemi al contorno per le equazioni differenziali di tipo ellittico, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **12** (1958), 247–357; note 27, p. 320.

[12] K. Masuda: On the analyticity and the unique continuation theorem for solutions of the Navier-Stokes equations, Proc. Jap. Acad. **43** (1967), 827–832.

[13] J. Serrin: On the interior regularity of weak solutions of Navier-Stokes equations, Arch. Rat. Mech. Anal. **9** (1962), 187–195.

[14] J. Serrin: The initial value problem for the Navier-Stokes equations, *Non-linear problems*, éd. par R. E. LANGER, Univ. Wisconsin Press, 1963, pp. 69–98.

[15] H. Sohr: Zur Regularitätstheorie der instationären Gleichungen von Navier-Stokes, Math. Zeit. **184** (1983), 359–375.

[16] R. Temam: *Navier-Stokes equations*, 2^e éd. North-Holland, 1979.