J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)
27-3 (1987) 553-561

Sur les équations hyperboliques à coefficients analytiques par rapport aux variables spaciales

Par

Shigeo TARAMA

J.-M. Bony and P. Schapira [1] showed that the hyperbolicity asserted the global existence of solutions of the Cauchy problem in the space of analytic functions. In this article we show that this claim is also valid for the equations with continuous coefficients which are analytic with respect to the space variables. We follow the reasoning of J.-M. Bony and P. Schapira except the following point: we use the analyticity of solutions of the elliptic eqations in the place of the Homgren transformation.

1. Le théorème de Cauchy et de Kowalewsky affirme l'existence locale de solutions analytiques du problème de Cauchy non caractéristique pour les équations à coefficients analytiques. M. Nagumo [7] montre que ce théorème est aussi valable pour les équations à coefficients continus qui sont analytiques par rapport aux valiables spaciales. D'autre part J.-M. Bony et P. Schapira [1] établit que l'hyperbolicité affirme l'existence globale de solutions du probème de Cauchy non caractéristique pour les équations à coefficients analytiques. Dans cet article nous montrons que la thèse de J.-M. Bony et P. Schapira est aussi valable pour les équations à coefficients continus qui sont analytiques par rapport aux variables spaciales.

Soit P un opérateur différentiel à l'ordre m

$$P=\partial_t^m+\sum_{\substack{|\alpha|+i\leqq m\\ i\leqq m-1}} a_{i,\alpha}(t, x)\,\partial_t^i\,\partial_x^\alpha \ {}^{1)}$$

avec les coefficients $a_{i,\alpha}(t, x)$ remplissant le suivant: pour tout (i, α), l'application

$$t \mapsto a_{i,\alpha}(t, x)$$

est continue de l'intervalle $[0, T]$ dans l'espace des fonctions holomorphes sur le domaine $\{z\in \boldsymbol{C}^l;\ |\mathrm{Re}\, z_j|<R_1$ et $|\mathrm{Im}\, z_j|<R_2$ pour $j=1, \cdots, l\}$ avec des constantes positives R_1 et R_2.

Rappelons -nous d'abord le théorème de Nagumo. Désignons par $D_\delta(\delta>0)$ l'ensemble

---

Communiqué le 29 Mars 1986 par Prof. S. Mizohata

1) Voir la note a la fin du texte.

$$\{z \in \boldsymbol{C}^l;\ |\mathrm{Re}\, z_j| < R_1 - \delta,\ |\mathrm{Im}\, z_j| < R_2 - \delta \quad \text{pour} \quad j = 1, \cdots, l\}$$

et par $D(z_0, \varepsilon)$ le polydisque

$$\{z \in \boldsymbol{C}^l;\ |z_j - z_{0j}| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad j = 1, \cdots, l\}\ .$$

Théorème de Nagumo (voir F. Treves [7]). *Pour le problème de Cauchy*

$$Pu = 0 \quad t > t_0$$
$$\partial_t^j u|_{t=t_0} = \phi_j \quad (j = 0, 1, \cdots, m-1)$$

avec $0 \leqq t_0 < T$ *et* ϕ_j *holomorphe dans un polydisque* $D(z_0, \varepsilon)$ *contenu dans* D_δ, *il existe une et une seule solution holomorphe en z dans*

$$\{(t, z) \in [t_0, T] \times \boldsymbol{C}^l;\ |z_j - z_{0j}| < \varepsilon - C_\delta(t - t_0)\}$$

où la constante positive C_δ *ne dépend pas données* ϕ_j *ni du polydisque* $D(z_0, \varepsilon)$.

Dans la suite nous supposons que l'opérateur P soit hyperbolique; c'est-à-dire la partie principale de P

$$p_m(t, x; \tau, \xi) = \tau^m + \sum_{\substack{i+|\alpha|=m \\ i \leqq m-1}} a_{i,\alpha}(t, x)\, \tau^i\, \xi^\alpha$$

n'a que des racines réelles pour tout $(t, x, \xi) \in [0, T] \times \boldsymbol{R}^l \times \boldsymbol{R}^l$ tel que $|x_j| < R_1$. Désignons par $V_\delta(\delta > 0)$ le maximum du module des racines du polynôme en τ, $p_m(t, x; \tau, \xi)$, quand le point (t, x, ξ) demeure dans $[0, T] \times \{x \in \boldsymbol{R}^l;\ |x_j| \leqq R_1 - \delta\} \times \{\xi \in \boldsymbol{R}^l;\ |\xi| = 1\}$.

Alors nous avons le

Théorème *Si l'opérateur P est hyperbolique, alors pour le problème de Cauchy*

$$Pu = 0 \quad t > 0$$
$$\partial_j^i u|_{t=0} = \phi_i(x) \quad i = 0, 1, \cdots, m-1$$

avec les données $\phi_i(x)$ *analytiques dans une boule* $\{x \in \boldsymbol{R}^l;\ |x_j| < \rho\}$ *contenue dans un domaine* D_δ *avec* $\delta > 0$, *il existe une et une seule solution*[2] *analytique en x dans* $\{(t, x) \in [0, T] \times \boldsymbol{R}^l;\ |x_j| < \rho - V_\delta\, t\}$.

J.-M. Bony et P. Schpira [1] montrent ce théorème pour les opérateurs à coefficients analytiques en (t, x). L'idée de la démonstration du théorème est la même que celle de J.-M. Bony et P. Schpira. Mais nous utilisons l'analyticité de solutions des équations elliptiques à la place de la transformation de Holmgren.

Nous remarquons que le problème abordé dans cet article est aussi traité par F. Colombini- S. Spagnolo [3] et E. Jannelli [5-a, b]. D'autre part si les coefficients sont continus en sens de Hölder, le problème est bien posé dans une classe de Gevrey convenable. (voir Y. Ohya—S. Tarama [8])

2. Démonstration du théorème.

Désignons par $\Gamma_V^\sigma(t_0, x_0)$ le domaine $\{(t, x+iy) \in [0, t_0] \times \boldsymbol{C}^l;\ |x-x_0|^2+r^{-2}|y|^2 < V^2(t_0-t)^2-\sigma\}$ avec $0<r<1$.

Proposition. 1 *Pour tout $V>V_\delta$, il existe des constantes positives $C_{V,1}$* et $C_{V,2}$ *telles que, si l'ensemble*

$\Gamma_V^0(t_0, x_0) \cap [t_1, t_0] \times \boldsymbol{C}^l$ *est contenu dans* $[0, T] \times \{z \in \boldsymbol{C}^l;\ |\mathrm{Re}\, z_j| \leqq R_1-\delta,\ |\mathrm{Im}\, z_j| \leqq C_{V,2}\}$ *avec $t_0 \geqq t_1 \geqq t_0 - C_{V,1}$, le problème de Cauchy avec les données, holomorphes en z dans $\{z \in \boldsymbol{C}^l;\ (t_1, z) \in \Gamma_V^0(t_0, x_0)\}$, sur le plan $t=t_1$ ait une solution dans $\Gamma_V^0(t_0, x_0) \cap [t_1, t_0] \times \boldsymbol{C}^l$.*

Compte tenu du fait que t_0-t_1 est indépendant de la constante r qui intervient dans la définition de $\Gamma_V^0(t_0, x_0)$, et du fait que le théorème de Nagumo affirme l'unicité de solutions, le théorème découle de la proposition 1.

Pour montrer la proposition 1, nous n'avons qu'à montrer le

Lemme. 2. *S'il existe une solution de problème abordé à la proposotion* 1 *dans un ensemble $\Gamma_V^\sigma(t_0, x_0) \cap [t_1, t_0] \times \boldsymbol{C}^l$ avec $\sigma>0$, elle peut se prolonger dans $\Gamma_V^{\sigma_1}(t_0, x_0) \cap [t_1, t_0] \times \boldsymbol{C}^l$ avec $\sigma>\sigma_1>0$ comme solution.*

Remarquons qu'il existe $\sigma>0$ tel qu'on ait une solution dans un ensemble non vide $\Gamma_V^\sigma(t_0, x_0) \cap [t_1, t_0] \times \boldsymbol{C}^l$ vu le théorème de Nagumo.

3. Preuve du lemme 2.

Soit (t^*, x^*+iy^*) un point sur le bord de $\Gamma_V^\sigma(t_0, x_0)$ remplissant $t_1<t^*<t_0$ et

$$|x^*-x_0|^2+r^{-2}|y^*|^2 = V^2(t_0-t^*)^2-\sigma\,.$$

Si $x^*+iy^*=x_0$, il existe une constante c telle que, pour tout $\varepsilon>0$ petit,

$$\{t^*-\varepsilon^2\} \times D(x^*+iy^*, c\varepsilon) \subset \Gamma_V^\sigma(t_0, x_0) \cap [t_1, t_0] \times \boldsymbol{C}^l\,.$$

Alors, compte tenu du Théorème de Nagumo, nous voyons que la solution peut se prolonger au voisinage de (t^*, x^*+iy^*).

Considérons le cas ou $x^*+iy^* \neq x_0$. Par le changement de coordonnées:

$$\begin{aligned} x+iy &= x^*+iy^*+A\zeta+|z^*|^{-2}\, sV^2(t^*-t_0)\, z^* \\ t &= t^*+s \end{aligned}$$

où $z^*=x^*+ir^{-2}y^*-x_0$ et que A est la matrice unitaire telle que $A\vec{e}_1=-i|z^*|^{-1}z^*$ avec $\vec{e}_1={}^t(1, 0, \cdots, 0)$, l'ensemble $\Gamma_V^\sigma(t_0, x_0)$ se transforme en

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}^\sigma = \{&(s, \zeta) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{C}^l; \\ &2|z^*|\,\mathrm{Im}\,\zeta_1+|\mathrm{Re}\,(A\zeta+|z^*|^{-2}\, sV^2(t^*-t_0)\, z^*)|^2+ \\ &r^{-2}|\mathrm{Im}\,(A\zeta+|z^*|^{-2}\, sV^2(t^*-t_0)\, z^*)|^2<V^2 s^2\}\,. \end{aligned}$$

Nous avons, avec des constantes positives et petites C_1 et C_2,

$$\{(s, \zeta)\in \boldsymbol{R}\times \boldsymbol{C}^l;\ C_1>-\mathrm{Im}\ \zeta_1>C_2(|\mathrm{Re}\ \zeta_1|^2+|\zeta'|^2+s^2)\}$$
$$\subset \tilde{\Gamma}^\sigma \qquad \text{ou} \quad \zeta'=(\zeta_2, \cdots, \zeta_l)\,.$$

D'autre part, l'opérateur P se met sous $Q(s, \zeta; \partial_s, \partial_\zeta)$ avec la partie principale

$$q_m(s, \zeta; \tilde{\tau}, \tilde{\xi})=p_m(t^*+s,\ x^*+iy^*+A\zeta+|z^*|^{-2}sV^2(t^*-t_0)z^*;$$
$$\tilde{\tau}-i|z^*|^{-1}V^2(t^*-t_0)\tilde{\xi}_1,\ \bar{A}\tilde{\xi})\,.$$

Si les constantes $C_{V,1}$ et $C_{V,2}$ intervenant à la proposition 1 sont petites, nous avons le

Lemme. 3. *L'opérateur Q remplit les suivants*:
[I] *Les coefficients de Q sont continus en (s, ζ) et holomorphes en ζ dans un ouvert $\{(s, \zeta)\in \boldsymbol{R}\times \boldsymbol{C}^l;\ |s|<c,\ |\zeta_j|<c\ j=1, \cdots, l\}$ avec une constante $c>0$.*
[II] *Nous avons*

$$|q_m(s, \zeta; \tilde{\tau}, \tilde{\xi})|\geqq C(|\tilde{\tau}|+|\tilde{\xi}_1|)^m$$

pour $(s, \zeta)\in \boldsymbol{R}\times \boldsymbol{C}^l$ vérifiant $|s|+|\zeta|\leqq C_1$ et $(\tilde{\tau}, \tilde{\xi})\in \boldsymbol{R}^{1+l}$ remplissant $C_2|\tilde{\xi}_1|\geqq \sum_{j=1}^{l}|\tilde{\xi}_j|$ avec des constantes positives C, C_1 et *C_2.*

Le lemme 3 découle du lemme suivant concernant les propriétés de polynômes hyperboliques.

Lemme. 4. *Pour tout $V>V_\delta$, il existe deux constantes C_1 et C_2 telles que nous ayons*

$$|p_m(t, x+iy; \tau, \xi)|\geqq C(|\mathrm{Im}\ \tau|)^m$$

pour $(t, x+iy)\in[0, T]\times\{x+iy\in \boldsymbol{C}^l;\ |x|\leqq R_1-\delta,\ |y|\leqq C_1\}$ et $(\tau, \xi)\in \boldsymbol{C}^{l+1}$ vérifiant $|\mathrm{Im}\ \tau|\geqq \max\,(V|\mathrm{Im}\ \xi|,\ C_2|\mathrm{Re}\ (\tau, \xi)||y|)$

En effet, soit $\Gamma=\{(\tau, \xi)\in S^l;\ |\tau|\geqq V|\xi|\}$. Posons

$$p(s, \theta, t, x, \xi)=p_m(t, x; s\theta+(0, \xi)) \quad \text{avec} \quad \theta\in\Gamma\,.$$

Pour $(\theta, t, x, \xi)\in\Gamma\times[0, T]\times\{x\in \boldsymbol{R}^l;\ |x|\leqq R_1-\delta\}\times\{\xi\in \boldsymbol{R}^l;\ |\xi|\leqq 1\}$, le polynôme en s, p, n'a que des racines réelles. (voir L. Hormander [4-b])

D'après M.D. Bronshtein [2-a, b] nous avons les majorations uniformes en (θ, t, x, ξ) dans l'ensemble ci-dessus;

$$\left|\frac{\partial_x^\beta p(s_1+is_2, \theta, t, x, \xi)}{p(s_1+is_2, \theta, t, x, \xi)}\right|\leqq C_\beta(|s_2|)^{-\min(m,|\beta|)}$$

et

$$|p(s_1+is_2, \theta, t, x, \xi)|^{-1}\leqq C|s_2|^{-m}$$

avec s_1 et $s_2 \in \boldsymbol{R}$ tel que $|s_2| \leqq C$.
D'ou nous tirons

$$|p(s_1+is_2, \theta, t, x+iy, \xi)| \geqq |p(s_1+is_2, \theta, t, x, \xi)|(1-C_1\frac{|y|}{|s_2|} -C_2\Big(\frac{|y|}{|s_2|}\Big)^m).$$

Alors, quand $\frac{|y|}{|s_2|}$ est petit, nous avons

$$|p(s_1+is_2, \theta, t, x+iy, \xi)| \geqq C|s_2|^m,$$

d'où nous avons la minoration à montrer. C.Q.F.D.

Remarque. Nous pouvons montrer le lemme 4 en se servant de la version locale du théorème des tubes de Bochner. (voir J.-M. Bony et P. Schapira [1, Th. 2.3.])

Pour l'opérateur Q vérifiant [I] et [II] du lemme 3, nous avons le

Lemme. 5. *Toute solution $u(s, \zeta)$ holomorphe en ζ vérifiant*

$$Q(s, \zeta; \partial_s, \partial_\zeta)\, u = 0$$

dans $\{(s, \zeta) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{C}^l;\ C_1 > -\mathrm{Im}\ \xi_1 > C_2(s^2+|\zeta'|^2+|\mathrm{Re}\ \zeta_1|^2)$ *peut se prolonger dans un voisinage de l'origine comme solution holomorphe en ζ.*

Du lemme 5 nous voyons que la solution du lemme 2 peut se prolonger dans un voisinage de (t^*, x^*+iy^*). Ce qui démontre le lemme 2.

Le lemme 5 découle de l'analyticité de solutions des équations elliptiques comme énonce le lemme suivant

Lemme. 6. *Soit Q un opérateur vérifiant* [I] *et* [II] *du lemme* 3. *Soient ε et δ de petites constantes. Alors toute solution u holomorphe en ζ'*

$$Qu = 0$$

dans $\{(s, \zeta) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{C}^l;\ |s| < \varepsilon,\ \zeta_1 = \xi_1 - i\delta$ *avec* $\xi_1 \in \boldsymbol{R}$ *et* $|\xi_1| < \varepsilon,\ |\zeta_j| < \varepsilon$ *pour* $j = 2, \cdots, l\}$
peut se prolonger comme une solution dans le domaine

$$]-\varepsilon/2, \varepsilon/2[\times D((-i\delta, 0, \cdots, 0), C\varepsilon)$$

où la constante C est indépendante de ε et de δ.

Nous pouvons démontrer ce lemme en utilisant l'ellipticité partielle en (s, ζ_1) de Q vu [II] du lemme 3. Mais nous le démontrons ici en nous servant de la méthode d'érergies micro-locales due à S. Mizohata (voir p. ex. [6]). Soit χ_N $N=1, 2, \cdots$ une suite de fonctions indéfiniment dérivables remplissant le suivant:

$$\chi_N = 1 \text{ pour } |x| \leqq \frac{1}{2}$$

$$\chi_N = 0 \text{ pour } |x| \geqq \frac{3}{4}$$

et

$$|\partial_x^\alpha \chi_N| \leqq (CN)^{|\alpha|} \qquad \text{pour} \quad |\alpha| \leqq N$$

avec une constante C indépendante de N. (voir L. Hörmander [4]) Dans la suite nous écrvons x à la place de ζ qui demeure dans l'espace réel. De plus nous désignons par A, A_1, $\cdots$ (resp. C, C_1, $\cdots$) les constantes positives et indépendantes de N et de n (resp. indépendantes de N, de n, de ε et de la solution u.). Posons $D=[-\varepsilon/2, \varepsilon/2]\times \boldsymbol{R}_x^l$.

Vu le lemme de Sobolev et le fait que u remplit l'équation $Qu=0$, nous n'avons qu'à montrer les majorations

$$\sum_{i=0}^{m} \|\partial_s^i \Delta_x^p \chi_N(x/\varepsilon)\, u(s, x)\|_{L^2(D)} \leqq A\left(\frac{CN}{\varepsilon}\right)^{2p}$$

avec $p=[(N-d)/2]$, où $\Delta_x = \sum_{i=1}^{l} \partial_{x_i}^2$, $[y]$ représantant le plus grand nombre entier qui ne dépasse pas y, et d étant une constante indépendante de N.

De l'holomorphie de $\partial_s^i u(s, \zeta)$ en ζ', nous avons

$$\sum_{i=1}^{m} \|\partial_s^i \Delta_{x'}^p \chi_N(x/\varepsilon)\, u(s, x)\|_{L^2(D)} \leqq A_1\left(\frac{C_1 N}{\varepsilon}\right)^{2p}$$

d'où nous avons

$$\sum_{i=0}^{m} \|(1-\phi(D_x))\, \partial_s^i \Delta_x^p \chi_N(x/\varepsilon)\, u(s, x)\|_{L^2(D)} \leqq A_1\left(\frac{C_2 N}{\varepsilon}\right)^{2p} \text{ 3)}$$

ou $\phi(\xi)$ est une fonction caractéristique de l'ensemble

$$\{\xi \in \boldsymbol{R}^l;\, 2(1+\rho)^{-2} \rho^3 |\xi_1|^2 \geqq |\xi'|^2\}, \text{ ou } \rho = \frac{1}{2d_1}$$

avec une constante d_1 choisie ultérieurement.

D'autre part nous avons

$$\text{*)} \qquad \begin{aligned} &\sum_{i=0}^{m} \|\phi(D_x)\, \partial_s^i \Delta_x^p \chi_N(x/\varepsilon)\, u(s, x)\|_{L^2(D)}^2 \\ &\leqq A_2 (C_3 N)^{4p} + \\ &\sum_{k=0,1} \sum_{\substack{n=Nd_2(1+\rho)^j \\ j=0,1,\cdots}} \sum_{i=0}^{m} (C_4 N d_2 (1+\rho)^j)^{4p} \times \\ &\times \|\partial_s^i \chi_N\left(d_1\left(\frac{D_x}{n}+(-1)^k \vec{e}_1\right)\right) \chi_N(x/\varepsilon)\, u(s, x)\|_{L^2(D)}^2 . \end{aligned}$$

Compte tenu des propriétés de l'opérateur Q, nous avons les majorations suivantes: avec des constantes convenables d, d_1, d_2 et d_3, pour $n \geqq d_2 N$

$$**) \qquad \sum_{i=0}^{m} \|\partial_s^i \chi_N(d_1\left(\frac{D_x}{n} \pm \vec{e}_1\right)) \chi_N\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) u(s, x)\|_{L^2(D)} \leqq A\left(\frac{d_3 N}{\varepsilon n}\right)^{N-d+1}.$$

En effet ces majorations **) sont montrées en utilisant le raisonnement de S. Mizohata [6]. (voir l'appendice)

De **), nous voyons que chaque terme de la série du second membre de *) est majoré par

$$A_3\left(\frac{C_4 d_3 N}{\varepsilon}\right)^{4p}\left(\frac{d_3}{d_2(1+\rho)^j}\right)^{2N-2d-4p+2}.$$

Alors nous avons les majorations à montrer. C.Q.F.D.

Appendice

Nous esquissons la preuve de **). Nous nous servons dans la suite des constantes $A, \cdots, C, \cdots$ qui ont les propriétés indiquées au début de la preuve du lemme 6. Soit $\psi_N(s)$ $N=1, 2, \cdots$ une suite de foncions sur $\boldsymbol{R}$ qui jouit des même propriétés que celles de χ_N. Posons

$$\tilde{\chi}_{N,n}(\xi) = \chi_N(d_1(\xi/n - \vec{e}_1))$$

où nous prenons une constante $d_1 > 0$ pour que

$$\tilde{\chi}_{N,n}(\xi) = 0 \qquad \text{pour} \quad 2^{-1} C_2 |\xi_1| \leqq \sum_{i=2}^{l} |\xi_i|$$

où la constante C_2 est intervenue à [II] du lemme 3.

Posons

$$u_{(\tilde{\alpha},\beta)} = (\varepsilon n)^{-|\tilde{\alpha}|} \tilde{\chi}_{N,n}^{(\beta)}(D_x) \psi_N^{(\alpha_0)}\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) \chi_N^{(\alpha)}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) u(s, x)$$

avec $\tilde{\alpha} = (\alpha_0, \alpha)$, $\tilde{\chi}_{N,n}^{(\beta)}(\xi) = \partial_\xi^\beta \tilde{\chi}_{N,n}(\xi)$ et etc.

Pour $n \geqq C_1 N$ et $|\tilde{\alpha}| + |\beta| \leqq N - C_3$, nous avons

$$\chi_N(x/C_0)\, Q(s, x; \partial_s, \partial_x)\, u_{(\tilde{\alpha},\beta)} = f_{(\tilde{\alpha},\beta)}$$

avec

$$\|f_{(\tilde{\alpha},\beta)}\|_{L^2} \leqq \sum_{0 < |\tilde{\alpha}'| + |\beta'| \leqq N - |\tilde{\alpha}| - |\beta| - C_3} C_4^{1+|\tilde{\alpha}'|+|\beta'|} |||u_{(\tilde{\alpha}+\tilde{\alpha}', \beta+\beta')}||| + A_1\left(\frac{C_5 N}{\varepsilon n}\right)^{N-C_6} \quad \text{ou} \quad |||u||| = \sum_{i+|\alpha| \leqq m} \|\partial_s^i \partial_x^\alpha u\|_{L^2}.$$

D'autre part, du [II] du lemme 3, nous avons

$$|||u_{(\tilde{\alpha},\beta)}|||\leqq C_7||\chi_N(x/C_0)\; Q\; u_{(\tilde{\alpha},\beta)}||+A_2\left(\frac{C_8N}{\varepsilon n}\right)^{N-C_6}.$$

Enfin nous avons $\sum_{|\tilde{\alpha}|+|\beta|\leqq N-C_3} C_9^{|\tilde{\alpha}|+|\beta|}|||u_{(\tilde{\alpha},\beta)}|||\leqq A_3\left(\frac{C_9'N}{\varepsilon n}\right)^{N-C_6}$.

NOTE

1) $\alpha=(\alpha_1, \cdots, \alpha_l)$ avec α_j entier non-negatif

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i\,, \quad \partial_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1}\cdots\partial_{x_l}^{\alpha_l}$$

2) Dans la suite nous entendons par "solution" une fonction m-fois continûment dérivable qui remplit l'équation.

3)
$$f(D_x)\,u = (2\pi)^{-l}\int e^{ix\xi}f(\xi)\,u(\xi)\,d\xi$$

où $\hat{u}(\xi)$ est la transformé de Fourier de $u(x)$.

Remerciment L'auteur est partiellement supporté par "Grant-in-Aid for Scientific Research (No. 60740081)" de la ministère de l'éducation nationale du JAPON.

Section de Mathématique et Physique
Appliquées, Université de Kyoto

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. -M Bony et P. Schapira, Solutions hyperfonctions du probléme de Cauchy, Lecture note in Math. 287 (1973), 82–98, Springer. Voir aussi l'article dans Astérisque 2–3 (1973) S.M.F.

[2-a] M. D. Bronshtein, Smoothness of roots of polynomials depending on parameters, Sib. Mat. zh., **20** (1979), 493–501 (Sib. Math. J. 20 (1979) 347–352.).

[2-b] M. D. Bronshtein, The Cauchy problem for hyperbolic operators with variable multiple characteristics, Trudy Moskov Mat. Obsc., **41** (1980), 83–99. (Trans. Moscow Math. Soc. 1982 Issue 1, 87–103.)

[3] F. Colombini et S. Spagnolo, Second erder hyperbolic equations with coefficients real analytic in space variables and discontinuous in time, J. Analyse Math., **37** (1980), 1–33.

[4] L. Hormander, The analysis of linear partial differential operators Vol. I, Th. 1.4.2., 1983, Springer, Berlin.

[4-b] L. Hormander, Linear partial differential operators, Th. 5.5.5, 1969, 3ed Springer, Berlin.

[5-a] E. Jannelli, Hyperbolic systems with coefficients analytic in space variables, J. Math. Kyoto Univ., **21** (1981), 715–739.

[5-b] E. Jannelli, Weakly hyperbolic equations of second ordre with coefficients real analytic in space variables, Comm. in Partial Differential Equations., **7** (1982), 537–558.

[6] S. Mizohata, On the Cauchy problem for hyerbolic equations and related problems micro local energy method—, Proc the Taniguchi int'l sympo. on hyperbolic equations and related

topics 1984, Kinokuniya, Tokyo. 1986 Voir aussi l'article dans Hokkaido Math. J., **12** (1983), 298–310.

[7] M. Nagumo, Uber das Aufangswertproblem Parieller Differentialgleichungen, Japan. J. Math., **18** (1941), 41–47.

[8] Y. Ohya et S. Tarama, Le probléme de Cauchy a caractéristiques multiples dans la classe de Gevrey —coefficients hölderiens en t—. Proc. the Taniguchi int'l sympo. on hyperbolic equations and related topics 1984, Kinokuniya, Tokyo. 1986.

[9] F. Treves, Basic linear partial differntial equations, Acad. Press. New York. 1967.