J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)
27-3 (1987) 387-399

Sur l'existence des solutions locales de l'équation d'Euler-Poisson pour l'évolution d'étoiles gazeuses

Au Professeur Masaya Yamaguti, à l'occasion de son soixantième anniversaire

Par

Tetu MAKINO et Seiji UKAI

0. Introduction.

Ce travail est consacré à l'étude du problème

$$\text{(1–0)} \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t}+\sum_{j=1}^{3} v_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j}+\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\rho = 0\,,$$

$$\text{(1–i)} \qquad \rho\Big(\frac{\partial v_i}{\partial t}+\sum_{j=1}^{3} v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\Big)+\frac{\partial p}{\partial x_i}+\rho\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = 0 \qquad (i=1, 2, 3),$$

$$\text{(1–4)} \qquad \frac{\partial s}{\partial t}+\sum_{j=1}^{3} v_j \frac{\partial s}{\partial x_j} = 0\,,$$

$$\text{(2)} \qquad p = \rho^{\gamma} e^{s}\,,$$

$$\text{(3)} \qquad \Delta\Phi = 4\pi\rho\,,$$

$$\text{(4)} \qquad \rho|_{t=0} = \rho^0(x) \geqq 0\,, \quad v_i|_{t=0} = v^0{}_i(x)\,, \quad s|_{t=0} = s^0(x)\,,$$

où γ est une constante telle que $\gamma>1$. Les inconnues sont les fonctions $\rho=\rho(t, x)$, $v={}^t(v_1, v_2, v_3)=v(t, x)$, $\Phi=\Phi(t, x)$ et $s=s(t, x)$ de $t\geqq 0$ et $x\in R^3$.

Ce problème vient de l'astrophysique. Les équations (1) (2) (3) modélisent l'évolution hydrodynamique de la structure intérne d'une étoile gazeuse dont le mouvement est gouverné par la gravitation de l'étoile même. La variable ρ est la densité, p la pression et $v=(v_1, v_2, v_3)$ la vitesse du matière. L'équation (1–0) est l'équation de continuité, et (1–1), –2), –3) sont les équations eulériennes du mouvement, où Φ est le potentiel de gravitation qui est lié à la distribution de matière par l'équation de Poisson (3). Ici, pour simplifier, on prend 1 comme la constante de la gravitation. Dans la pratique nous voulons considérer la distribution de la masse à support compact, et donc l'équation de Poisson (3) se réduit au potentiel newtonien, c'est-à-dire,

Communiqué par Prof. M. Yamaguti au 22, Janvier 1986

$$(3)' \qquad \Phi(t, x) = -\int_{R^3} \frac{\rho(t, y)}{|x-y|} dy .$$

Désignant par $g={}^t(g_1, g_2, g_3)$ la champ de gravitation donné par

$$(3)'' \qquad g_i(t, x) = -\frac{\partial}{\partial x_i} \Phi(t, x) = -\int \frac{x_i - y_i}{|x-y|^3} \rho(t, y) dy ,$$

on peut écrir (1–1), –2), –3) sous la forme

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho g_i \qquad (i = 1, 2, 3) .$$

L'équation (2) définit l'état physique d'un gaz parfait, dont le rapport des chaleurs spécifiques est γ. La variable s est l'entropie par masse unitaire. On a $\gamma=5/3$ pour le gaz monoatomique, 7/5 pour le gaz biatomique et cætra (voir [5], [1]). Sous cette équation d'état et l'équation de continuité (1–0), l'équation d'énergie se ramène à (1–4), si l'on peut négliger les écharge par rayonnement et s'il n'y a pas de source d'énergie. C'est le cas adiabatique.

Nous cherchons des conditions suffisantes sur les données initiales ρ^0, v^0, s^0 pour l'existence de C^1-solutions ρ, v, g, s dans un intervalle $[0, T)$, où T peut être assez petit. Nous démontrons le théorème suivant.

Théorème. *Soit $\rho^0(x)$, $v^0(x)$, $s^0(x)$ des fonctions continûment differentiables sur R^3. Supposons que $\rho^0(x)$ soit non-negatif et à support compact. Posons*

$$(5) \qquad U^0 = ((\rho^0)^{(\gamma-1)/2} e^{((\gamma-1)/2\gamma)s^0}, v^0, s^0) .$$

Si I) $1<\gamma\leqq 5/3$ et $U^0 \in H^3(R^3)$, ou si II) $1<\gamma\leqq 3$, $U^0\in H^4(R^3)$ et $\rho^0\in H^3(R^3)$, alors il existe un nombre positif T et une solution $(\rho(t, x), v(t, x), s(t, x), \Phi(t, x))$ continûment différentiable dans $[0, T)\times R^3$ du problème (1) (2) (3) (4).

Ici on note par $H^l(R^3)$, $l=3$, 4, les espaces de Sobolev usuels.

La méthode utilisée pour la démonstration est assez standarde. Choisissant une densité $\rho=\rho(t, x)$ arbitrairement, qui n'est pas necessairement une solution, on en fait le potentiel de gravitation $\Phi=\Phi(t, x)$ d'après (3)′; sous ce potentiel Φ on détermine une solution $\rho=\hat{\rho}(t, x)$ en résolvant l'équation eulérienne (1) (2) avec la condition (4). Si l'application fonctionelle $\rho\rightarrow\hat{\rho}$ a un point fix, alors nous avons qu'il existe une solution du problème (1) (2) (3) (4) total.

La difficulté dans ce schème se trouve à resoudre l'équation eulérienne. En cas $\inf \rho^0>0$, l'existence des solutions a été bien établi par Lax [4], Kato [2], Majda [6] et Klainermann et Majda [3] en appliquant la théorie des systèmes hyperboliques symétriques quasi-linéaires. Mais leur symétrisation n'est pas utile si $\inf \rho^0=0$. Or il faut chercher des solutions ρ à support compact, ou, au moins, celles qui s'annulent à l'infini, car le potentiel newtonien (3)′ serait divergent si $\inf \rho^0>0$ (le paradoxe d'Olbers!). Donc nous devons utiliser l'autre symétrisation qui s'applique aux solutions à support compact. C'est celle proposée dans Makino, Ukai et

Kawashima [8].

Une fois que l'équation eulérienne est symétrisée convenablement, le reste est un travail de routine. C'est tout comme dans [7], où on a établi l'existence des solutions pour le cas isentropique.

1. Symétrisation de l'équation d'Euler.

Nous introduisons la nouvelle variable

$$w = p^{(\gamma-1)/2\gamma} = \rho^{(\gamma-1)/2} e^{((\gamma-1)/2\gamma)s} \tag{6}$$

pour symétriser le système des équations (1) (2). Alors le problème (1) (2) (4) se ramène au problème

$$A_0(U)\frac{\partial U}{\partial t} + \sum A_j(U)\frac{\partial U}{\partial x_j} = G(t), \tag{7}$$

$$U|_{t=0} = U^0, \tag{8}$$

où $U={}^t(w, v_1, v_2, v_3, s)$, $G(t)={}^t(0, -\partial\Phi/\partial x_1, -\partial\Phi/\partial x_2, -\partial\Phi/\partial x_3, 0)={}^t(0, g_1, g_2, g_3, 0)$,

$$A_0(U) = \begin{pmatrix} \frac{4\gamma}{(\gamma-1)^2}e^{s/\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & I_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_j(U) = \begin{pmatrix} \frac{4\gamma}{(\gamma-1)^2}e^{s/\gamma}v_j & \frac{2\gamma}{\gamma-1}e^{s/\gamma}we_j & 0 \\ \frac{2\gamma}{\gamma-1}e^{s/\gamma}w\,{}^te_j & v_jI_3 & 0 \\ 0 & 0 & v_j \end{pmatrix} \qquad (j=1, 2, 3),$$

I_3 la matrice unitaire de R^3 et $e_j=(\delta_{1j}, \delta_{2j}, \delta_{3j})$. On voit que les matrices $A_j(U)$, $j=0, 1, 2, 3$, sont symétriques et de C^∞ en U. De plus $A_0(U)$ est positif uniformément autant que s est borné. En effet, étant fixé σ assez grand, on a

$$(A_0(U)\Xi, \Xi) \geqq \frac{4\gamma}{(\gamma-1)^2}e^{-\sigma/\gamma}|\Xi|^2 \qquad (\Xi \in R^4)$$

pour chaque $s \geqq -\sigma$. Donc on peut appliquer le théorème II de [2] à (6) (7) sans restriction sur inf w^0. On a le

Lemme 1. *Soit m un entier non-negatif, U^0 une fonction de H^{3+m} et M un nombre fini arbitraire. Alors il existe un nombre positif $T_0=T_0(U^0, M)$ dépendant de U^0 M, γ et m telle que, étant donné $G \in L([0, T]; H^{3+m}) \cap C([0, T]; H^{2+m})$ avec $|||G|||_{3+m} \leqq M$, il existe une solution unique du problème* (7) (8) *avec*

$$U \in C([0, T]; H^{3+m}) \cap C^1([0, T]; H^{2+m}).$$

De plus on a

1) $$|||U|||_{3+m} \leqq C_0 ,$$

2) $$|||U_{(1)} - U_{(0)}|||_{2+m} \leqq C_0 |||G_{(1)} - G_{(0)}|||_{2+m} T \exp(a_0 T) ,$$

ou $U = U_{(0)}$, $U_{(1)}$ sont les solutions correspondantes aux $G = G_{(0)}$, $G_{(1)}$ respectivement,

3) $$w(t) \geqq 0 \qquad si \quad w^0 \geqq 0 ,$$

et

4) $$R\{w(t)\} \leqq R\{w^0\} + C_0 T .$$

La constante $C_0 = C_0(U^0)$ dépend seulement de U^0, γ et m, mais la constante $a_0 = a_0(U^0, M)$ dépend de U^0, M, γ et m.

Ici et dans la suite nous utilisons les notations suivantes:

1) Nous désignons par H^l l'espace de Sobolev usuel dans R^3 muni de la norme

$$||u||_l = ||(1-\Delta)^{l/2} u||_0 , \quad \text{où} \quad ||u||_0^2 = \int_{R^3} |u(x)|^2 dx .$$

2) Du théorème de Sobolev on a $H^{2+m} \subset B^m(R^3)$ avec injections continues, où $B^m(R^3)$ est l'espace des fonctions m fois continûment différentiables sur R^3 avec dérivées bornées muni de la norm

$$\sup_{1 \leqq |\nu| \leqq m} |D^\nu u|_\infty , \quad |u|_\infty = \sup_{x \in R^3} |u(x)| .$$

3) $C^m([0, T]; H^l)$ désigne l'espace des fonctions sur $[0, T]$ à valeurs dans H^l m fois continûment diférrentiables et on écrit

$$|||u|||_l = \sup_{0 \leqq t \leqq T} ||u(t)|| .$$

$L^\infty([0, T]; H^l)$ est l'espace des fonctions sur $[0, T]$ à valeurs dans H^l fortement mesurables et essentielment bornées.

4) Si $u \in C^0(R^3)$, on écrit

$$R\{u\} = \sup\{|x| : u(x) \neq 0\} .$$

Démonstration du lemme 1. L'existance et l'unicité de la solution sont une conséquence de la théorie de [2]. Nous allons dans l'esprit du théorème II de [2].

On introduit l'ensembre X des fonctions $U \in L^\infty([0, T]; H^{3+m}) \cap C([0, T]; H^{2+m})$ telles que

$$|||U|||_{3+m} \leqq B, \ ||U(t+\delta t) - U(t)||_{2+m} \leqq L |\delta t| .$$

Les nombres T, B et L seront choisis convenablement dans la suite. D'après du théorème I de [2], étant donné $G \in L^\infty([0, T]; H^{3+m}) \cap C([0, T]; H^{2+m})$ avec $|||G|||_{3+m} \leqq M$, il existe une solution $\hat{U}(t)$ unique du problème linéaire

$$\left[A_0(U) \frac{\partial}{\partial t} + \sum A_j(U) \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \hat{U} = G(t) ,$$

$$\hat{U}|_{t=0} = U^0$$

telle que

$$\hat{U} \in C([0, T]; H^{3+m}) \cap C^1([0, T]; H^{2+m})$$

et la solution vérifie

$$|||\hat{U} - U^{00}|||_{3+m} \leqq C(||U^0 - U^{00}||_{3+m} + (M + ||U^{00}||_{4+m})T)e^{aT}, \tag{9}$$

$$\left\| \frac{dU}{dt} \right\|_{2+m} \leqq C(||U^0||_{3+m} + ||U^{00}||_{3+m} + M + (M + ||U^{00}||_{4+m})Te^{aT}), \tag{10}$$

où T est arbitraire, et $C = C(B)$ dépend seulement de B, mais $a = a(B, L)$ dépend de B et L, et U^{00} est une fonction arbitraire de H^{4+m}.

Etant fixé $U^0 \in H^{3+m}$, on peut choisir B, U^{00}, L et T succesivement comme suivant:

$$||U^0||_{3+m} < B, \tag{11}$$

$$||U^{00}||_{3+m} + C(B)||U^0 - U^{00}||_{3+m} < B, \tag{12}$$

$$C(B)(B + ||U^{00}||_{3+m} + M + (M + ||U^{00}||_{4+m})Te^{a(B,L)T}) \leqq L, \tag{13}$$

$$||U^{00}||_{3+m} + C(B)(||U^0 - U^{00}||_{3+m} + (M + ||U^{00}||_{4+m})T)e^{a(B,L)T} \leqq B. \tag{14}$$

En effet $U^{00} \in H^{4+m}$ avec (12) se trouve grâce au (11) puisque H^{4+m} est dense dans H^{3+m}.

Alors l'application $U \to \hat{U}$ est de X dans X même.

Soit $\hat{U} = \hat{U}_{(0)}$, $\hat{U}_{(1)}$ les solutions associées aux $U = U_{(0)}$, $U_{(1)}$ respectivement. Alors la différence $\delta\hat{U} = \hat{U}_{(1)} - \hat{U}_{(0)}$ est la solution du problème

$$\left[A_0(U_{(0)})\frac{\partial}{\partial t} + \sum A_j(U_{(0)})\frac{\partial}{\partial x_j}\right]\delta\hat{U} = F(t),$$

$$\delta\hat{U}|_{t=0} = 0,$$

où

$$F(t) = -\left[(A_0(U_{(1)}) - A_0(U_{(0)}))\frac{\partial}{\partial t} + \sum (A_j(U_{(1)}) - A_j(U_{(0)}))\frac{\partial}{\partial x_j}\right]\hat{U}_{(1)},$$

d'où il résulte que

$$|||\delta\hat{U}|||_0 \leqq C'|||\delta U|||_0 Te^{a'T}$$

avec des constantes $C' = C'(B)$ et $a' = a'(B, L)$. On peut choisir $T = T(B, L)$ assez petit telle que

$$|||\delta\hat{U}|||_0 \leqq k|||\delta U|||_0 \qquad \text{avec} \quad k > 1,$$

c'est-à-dire, que l'application $U \to \hat{U}$ soit une contraction dans l'espace métrique X complet muni de la distance

$$\text{dist.}(U_{(1)}, U_{(0)}) = |||U_{(1)} - U_{(0)}|||_0 .$$

D'après le théorème de point fixe de Banach, X admet un point fixe unique qui est la solution de (7) (8).

Soit $U = U_{(0)}$, $U_{(1)}$les solutions associées aux $G = G_{(0)}$, $G_{(1)}$ respectivement. Alors $\delta U = U_{(1)} - U_{(0)}$ est la solution du problème

$$\Big[A_0(U_{(0)})\frac{\partial}{\partial t} + \sum A_j(U_{(0)})\frac{\partial}{\partial x_j}\Big]\delta U = F(t)\,,$$

$$\delta U\,|_{t=0} = 0\,,$$

où

$$F(t) = G_{(1)}(t) - G_{(0)}(t) -$$
$$-\Big[(A_0(U_{(1)}) - A_0(U_{(0)}))\frac{\partial}{\partial t} + \sum (A_j(U_{(1)}) - A_j(U_{(0)}))\frac{\partial}{\partial x_j}\Big]U_{(1)}\,.$$

On a $F \in C([0, T]; H^{2+m})$ avec

$$|||F|||_{2+m} \leqq |||G_{(1)} - G_{(0)}|||_{2+m} + C''|||\delta U|||_{2+m}\,,$$

où $C'' = C''(B, L)$ est une constante. Il en résulte l'estimation

$$|||U|||_{2+m} \leqq C'''|||G_{(1)} - G_{(0)}|||_{2+m}\, Te^{a''T}$$

où C''' dépend de B et a$''$ dépend de B et L.

Nous montrons que $w(t) \geqq 0$ sous l'hypothèse $w^0 \geqq 0$.

Soit (τ, ξ) un point dans $[0, T] \times R^3$. Considérons le problème

$$\frac{dx}{dt} = v(t, x),\ x\,|_{t=\tau} = \xi\,.$$

Comme $v \in C([0, T]; H^3)$ est borné et continûment différentiable par raport à x, on a une solution $x = \psi(t) \in C^1([0, T]; R^3)$ unique d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz de la théorie des équations différentielles ordinaires. De l'équation (7) on a

$$\frac{d}{dt}w(t, \psi(t)) = -\frac{\gamma-1}{2}\Big(\sum \frac{\partial v_j}{\partial x_j}\Big)w\,,$$

d'où, en l'intégrant de $t=0$ à $t=\tau$, on a

$$w(\tau, \xi) = w(0, \psi(0)) \exp\Big[-\frac{\gamma-1}{2}\int_0^\tau \sum \frac{\partial v_j}{\partial x_j}(t, \psi(t))dt\Big]$$

d'où $w(\tau, \xi) \geqq 0$ si $w(0, \psi(0)) = w^0(\psi(0)) \geqq 0$.

De plus supposons que $w(\tau, \xi) \neq 0$. Alors on voit que $w^0(\psi(0)) \neq 0$ et donc $|\psi(0)| \leqq R\{w^0\}$;

$$
\begin{aligned}
|\xi| = |\psi(\tau)| &= \left|\psi(0)+\int_0^\tau \psi'(t)dt\right| \\
&\leqq |\psi(0)|+\int_0^\tau |v(t)|_\infty dt \\
&\leqq R\{w^0\}+|||U|||_2 T.
\end{aligned}
$$

C'est-à-dire,

$$R\{w(\tau)\} \leqq R\{w^0\}+|||U|||_2 T.$$

Le lemme est démontré.

2. Solution de l'équation d'Euler.

Revenons maintenenant au problème (1) (2) (4), où la fonction $g(t, x)$ est regardé comme cela connue. Donc dans ce paragraphe on considére le problème

$$
(1) \qquad
\begin{aligned}
&\frac{\partial\rho}{\partial t}+\sum v_j \frac{\partial\rho}{\partial x_j}+\sum \frac{\partial v_j}{\partial x_j}\rho = 0, \\
&\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}+\sum v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)+\frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho g_i \qquad (i = 1, 2, 3), \\
&\frac{\partial s}{\partial t}+\sum v_j \frac{\partial s}{\partial x_j} = 0,
\end{aligned}
$$

$$(2) \qquad p = \rho^\gamma e^s,$$

$$(4) \qquad \rho|_{t=0} = \rho^0(x) \geqq 0, \quad v|_{t=0} = v_0(x), \quad s|_{t=0} = s^0(x).$$

Pour appliquer la conclusion précédente on utilisons les conditions suivantes sur les données initiales:

$$(15) \qquad \rho^0(x) \geqq 0, \quad \rho^0(x) \in C_0^1(R^3);$$

$$(16)_m \qquad \rho^0 \in H^{2+m};$$

$$(17)_m \qquad U^0 = ((\rho^0)^{(\gamma-1)/2} e^{((\gamma-1)/2\gamma)s^0}, v^0, s^0) \in H^{3+m};$$

$$
(18)_m \qquad
\begin{aligned}
&g \in L^\infty([0, T]; H^{3+m}) \cap C([0, T]; H^{2+m}) \\
&\text{avec } |||g|||_{3+m} \leqq M \quad \text{et} \quad T \leqq T_0(U^0, M).
\end{aligned}
$$

Soit m un entier $\geqq 0$. D'après le lemme 1 sous $(17)_m$ $(18)_m$ il existe une solution $U(t)$ de la classe $C([0, T]; H^{3+m}) \cap C^1([0, T]; H^{2+m})$ unique du problème (7) (8) avec U^0 défini dans $(17)_m$ et $G(t) = {}^t(0, g(t), 0)$. Posons

$$(19) \qquad \rho(t, x) = w(t, x)^{2/(\gamma-1)} \exp\left(-\frac{1}{\gamma}s(t, x)\right).$$

Il est temps de supposer que $1 < \gamma \leqq 3$. Alors, comme $2/(\gamma-1) \geqq 1$ pour $1 < \gamma \leqq 3$, l'application $w \rightarrow (\text{sign. } w)w^{2/(\gamma-1)}$ est continûment différentiable en

$|w|<+\infty$. Puisque $w, s\in C^1([0, T]\times R^3)$, on voit qu'il en est de même de la fonction $\rho(t, x)$ comme le produit de composition.

Multipliant l'équation

$$\text{(7–0)} \qquad \frac{\partial w}{\partial t}+\sum v_j\frac{\partial w}{\partial x_j}+\frac{\gamma-1}{2}\sum\frac{\partial v_j}{\partial x_j}w=0$$

par

$$\frac{\partial}{\partial w}\rho(w, s)=\frac{2}{\gamma-1}e^{-s/\gamma}w^{2/(\gamma-1)-1}\in C([0, T]\times R^3)$$

on obtient l'équation (1–0) valide dans $[0, T]\times R^3$ partout. Les équations

$$\text{(7–i)} \qquad \frac{\partial v_j}{\partial t}+\sum v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{2}{\gamma-1}we^{s/\gamma}\frac{\partial w}{\partial x_i}=g_i,$$

$i=1, 2, 3$, multipliées par $\rho\in C^1([0, T]\times R^3)$ vinnent aux équations (1–1), –2), –3). Donc (ρ, v, s) est une solution classique du problème (1) (2) (4).

Mais il faut travailler dans les espaces de Sobolev. Pour cela on distingue deux cas.

Cas I). Soient m et γ comme $m\geqq 0$ et $1<\gamma\leqq(m+5)/(m+3)$.

Alors, comme $2/(\gamma-1)\geqq m+3$, il en resulte que l'application $(w, s)\rightarrow\rho=(\text{sign. } w)|w|^{2/(\gamma-1)}e^{-s/\gamma}$ est de classe $C^{3+m}(R^2)$. Donc la fonction $\rho(t, x)$, comme le produit de composition, revient à celle de classe $C([0, T]; H^{3+m})\cap C^1([0, T]; H^{2+m})$. De plus il existe une constante C dépendante de $||w||_{3+m}$ et $||s||_{3+m}$, γ et m telle que

$$|||\rho|||_{2+m}\leqq C$$

et

$$|||\rho_{(1)}-\rho_{(0)}|||_{2+m}\leqq C|||U_{(1)}-U_{(0)}|||_{2+m},$$

où $\rho_{(0)}$, $\rho_{(1)}$ sont les fonctions associées aux $U=U_{(1)}$, $U_{(0)}$ respectivement.

Cas II). Soient m et γ comme $m\geqq 1$ et $1<\gamma\leqq 3$. Supposons $(16)_m$ en plus de$(17)_m$ $(18)_m$. On regarde la fonction $\rho(t, x)$ comme une solution classique du problème

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\sum v_j\frac{\partial\rho}{\partial x_j}+\sum\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\rho=0, \quad \rho|_{t=0}=\rho^0(x)\in H^{2+m}.$$

Puisque v_j, $j=1, 2, 3$, et $\sum\partial v_j/\partial x_j\in C([0, T]; H^{2+m})$ avec $m\geqq 1$ et $\rho^0\in H^{2+m}$, il en resulte que la solution $\rho(t, x)$ vient à celle de classe $C([0, T]; H^{2+m})\cap C^1([0, T]; H^{1+m})$ grâce au théorème I de [2]. De plus il existe une constante C dépendante de m telle que

$$|||\rho|||_{2+m}\leqq|||\rho^0|||_{2+m}\exp(C|||v|||_{3+m}T)$$

et

$$|||\rho_{(1)}-\rho_{(0)}|||_{1+m}\leqq C|||\rho^0|||_{2+m}T\exp(C|||v|||_{3+m}T)|||v_{(1)}-v_{(0)}|||_{2+m}.$$

Dans deux les cas, liaisonnant les estimes avec celles du lemme 1, on obtient le lemme suivant.

Lemme 2. *Soit m un entier* $\geqq 0$. *Supposons I)* $m \geqq 0$ *et* $1 < \gamma \leqq (m+5)/(m+3)$. *Etant donné* ($\rho^0(x)$, $v^0(x)$, $s^0(x)$ *et* $g(t, x)$ *vérifiants* (15) $(17)_m$ $(18)_m$, *il existe une* C^1-*solution de* (1) (2) (4) *dans* $[0, T] \times R^3$ *telle que*

1) $$\rho(t, x) \geqq 0\,,$$

2) $$R\{\rho(t)\} \leqq R\{\rho^0\} + C_I t\,,$$

3) $$\rho(t, x) \in C([0, T]; H^{3+m}) \cap C^1([0, T]; H^{2+m})$$

avec

$$|||\rho|||_{2+m} \leqq C_I\,,$$

et

4) $$|||\rho_{(1)} - \rho_{(0)}|||_{2+m} \leqq C_I |||g_{(1)} - g_{(0)}|||_{2+m} T e^{a_I T}\,,$$

où $\rho_{(0)}$, $\rho_{(1)}$ *sont les solutions associées aux* $g = g_{(0)}$, $g_{(1)}$ *respectivement. La constante* $C_I = C_I(U^0)$ *dépend seulement de* U^0 *en plus de m et* γ, *mais la constante* $a_I = a_I(U^0, M)$ *dépend de* U^0 *et encore de M en plus de m et* γ.

D'autre part supposons que II) $m \geqq 1$ *et* $1 < \gamma \leqq 3$. *Alors, étant donné* $\rho^0(x)$, $v^0(x)$, $s^0(x)$ *et* $g(t, x)$ *vérifiants* (15) $(16)_m$ $(17)_m$ $(18)_m$, *il existe une solution classique de* (1) (2) (4) *dans* $[0, T] \times R^3$ *telle que*

1) $$\rho(t, x) \geqq 0\,,$$

2) $$R\{\rho(t) \leqq R\{\rho^0\} + C_{II} t\,,$$

3) $$\rho(t, x) \in C([0, T]; H^{2+m}) \cap C^1([0, T]; H^{1+m})$$

avec

$$|||\rho|||_{2+m} \leqq C_{II} ||\rho^0||_{2+m}\,,$$

et

4) $$|||\rho_{(1)} - \rho_{(0)}|||_{1+m} \leqq C_{II} ||\rho^0||_{2+m} |||g_{(1)} - g_{(0)}|||_{2+m} T^2 e^{a_{II} T}\,,$$

où la constante $C_{II} = C_{II}(U^0)$ *dépend de* U^0, *m et* γ, *et la constante* $a_{II} = a_{II}(U^0, M)$ *dépend de* U^0, *M, m et* γ.

Maintenant nous avons établi l'existence des solutions, mais l'unicité est détournée. En effet, si on veut identifier la solution pris ci-dissus, autant que nous venons de dire, il faut la prescrire comme une solution de telle sorte que la fonction $U(t)$ définie par

$$U(t, x) = (\rho(t, x)^{(\gamma-1)/2} e^{((\gamma-1)/2\gamma)s(t,x)}, v(t, x), s(t, x))$$

soit une solution du système (7) de classe $C([0, T]; H^3) \cap C^1([0, T]; H^2)$.

Cette condition ajoutée pour l'unicité entraîne de restrictions fortes et peu natureles des solutions. En passant du système (1) (2) pour ρ, v, s au système (7) pour $U=(w, v, s)$, on demande que la vitesse v se gouverne par le champ de gravitation comme

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}+\sum v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}=g_i\,, \qquad i=1, 2, 3\,,$$

dans l'extérieur du support de ρ, où il n'y a pas de matière. C'est peu naturel comme ≪une grimace sans chat≫ au Pays des Merveilles d'Alice. Dans l'extérieur du Supp. ρ, on voit que, quel que soit la vitesse, les équations originales (1–1), –2), –3) sont satisfaites automatiquement et laissent la vitesse. Le fantôme vient quand on divise les équations par ρ $(=0)$ formellement même dans l'extérieur du Supp. ρ.

Donc le résultat du lemme 2 laisse beaucoup à désirer d'amelioration. Quoi qu'il en soit, nous allons dénoter cette sorte de solution classique, dont l'unicité est établi tant bien que mal, par les mots ≪la solution an sens du lemme 2≫ dans la suite.

3. Equation de Poisson.

Quant à l'équation de Poisson, il est facile de vérifier la conclusion suivante.

Lemme 3. *Soit m un entier $\geqq 0$. Si $\rho\in H^{2+m}\subset C^m(R^3)$ est à support compact, alors g défini par*

$$(3)'' \qquad g(x)=-\mathrm{grad}_x\,\Phi(x)=-\int\frac{x-y}{|x-y|^3}\rho(y)dy$$

appartient à H^{3+m} et

$$(20) \qquad ||g||_{3+m}\leqq C_{III}(1+R\{\rho\})^{5/2}||\rho||_{2+m}\,,$$

où la costante C_{III} dépend seulement de m.

Pour la démonstration voir Makino [7].

4. Démonstration du théoreme.

Maintenant nous allons vérifier le théorème en combinant les conclusions des lemmes 2 et 3.

Commençons par envisager le

Cas I, où m un entier $\geqq 0$, $1<\gamma\leqq(m+5)/(m+3)$ et les données initiales $\rho^0(x)$, $v^0(x)$, $s^0(x)$ satisfassent (15) et $(17)_m$.

Alors on peut choisir un nombre positif T tel que les inégalités suivantes soient vérifiées:

$$(21) \qquad T\leqq T_0(U^0, M)$$

avec

$$(22)_I \qquad M = C_{II}(2+R\{\rho^0\})^{5/2}C_I(U^0)\,,$$

$$(23)_I \qquad C_I(U^0)T \leqq 1$$

et

$$(24)_I \qquad 1 > k = C(U^0)C_{III}(2+R\{\rho^0\})^{5/2}\,Te^{a_I(U^0,M)T}\,.$$

Désignons par X_I l'ensembre des toutes fonctions

$$\rho \in C([0,\,T];\,H^{2+m})$$

telles que

$$(25) \qquad \rho \geqq 0\,,$$

$$(26) \qquad R\{\rho(t)\} \leqq R\{\rho^0\}+1$$

et

$$(27)_I \qquad |||\rho|||_{2+m} \leqq C_I(U^0)\,.$$

L'ensembre X_I muni de la distance

$$\text{dist.}\,(\rho_{(1)},\,\rho_{(0)}) = |||\rho_{(1)}-\rho_{(0)}|||_{2+m}$$

est un espace métrique complet. Nous considérons l'application $\rho \to \hat{\rho}$ dans X_I.

Soit $\rho \in X_I$. Alors, d'après lemme 3, la fonction g définie par (3)$''$ est de classe $C([0,\,T];\,H^{3+m})$ et on a $|||g|||_{3+m} \leqq M$ (d'après (22)). De suite, en intégrant les équation eulérienne, on a la solution $\hat{\rho}$ au sens du lemme 2. D'après le lemme 2 il en résulte que $\hat{\rho}$ vérifie les conditions (25), (26) (d'après (23)) et $(27)_I$, car on a choisi T assez petit de manière à satisfaire (21). Donc $\hat{\rho}$ est resté dans X_I, c'est-à-dire, l'application $\rho \to \hat{\rho}$ est bien défini de X_I dans X_I même.

Soient $\rho_{(0)},\,\rho_{(1)} \in X_I$. Alors, d'après lemme 3, les fonctions associées $g = g_{(0)},\,g_{(1)}$ satisfont

$$|||g_{(1)}-g_{(0)}|||_{3+m} \leqq C_{III}(2+R\{\rho^0\})^{5/2}|||\rho_{(1)}-\rho_{(0)}|||_{2+m}\,.$$

(Remarquons que l'application $\rho \to g$ est linéaire.) De suite, d'après le lemme 2, on a

$$|||\hat{\rho}_{(1)}-\hat{\rho}_{(0)}|||_{2+m} \leqq C_I|||g_{(1)}-g_{(0)}|||_{2+m}\,Te^{a_IT} \leqq k|||\rho_{(1)}-\rho_{(0)}|||_{2+m}$$

(d'après (24)). Donc l'application $\rho \to \hat{\rho}$ est une contraction stricte, d'où, grâce au théorème de point fixe de Banach, il y a un point fixe unique, qui est la solution que l'on a cherché.

Cas II, où $m \geqq 1$, $1 < \gamma \leqq 3$ et les données initiales $\rho^0(x)$, $v^0(x)$, $s^0(x)$ satisfassent (15), $(16)_m$ et $(17)_m$.

On peut choisir T tel que

(21) $T \leqq T_0(U^0, M)$

avec

$(22)_{II}$ $M = C_{III}(2+R\{\rho^0\})^{5/2} C_{II}(U^0)$,

$(23)_{II}$ $C_{II}(U^0)T \leqq 1$,

et

$(24)_{II}$ $1 > k = \|\rho^0\|_{2+m} C_{II}(U^0) C_{III}(2+R\{\rho^0\})^{5/2} T^2 e^{a_{II}(U^3, M)T}$.

Nous considérons l'application $\rho \to \hat{\rho}$ comme dans le cas I dans l'ensembre X_{II} des toutes fonctions

$$\rho \in L^\infty([0, T]; H^{2+m}) \cap C([0, T]; H^{1+m})$$

telles que

(25) $\rho \geqq 0$,

(26) $R\{\rho(t)\} \leqq R\{\rho^0\} + 1$

et

$(27)_{II}$ $|||\rho|||_{2+m} \leqq C_{II}(U^0)\|\rho^0\|_{2+m}$.

L'ensembre X_{II} muni de la distance

$$\text{dist.}(\rho_{(1)}, \rho_{(0)}) = |||\rho_{(1)} - \rho_{(0)}|||_{1+m}$$

est un espace métrique complet (voir Kato [2]).

Appliquant les lemmes 3 et 2 succesivement comme dans le cas I, on voit que l'application $\rho \to \hat{\rho}$ est une contraction stricte de X_{II} dans X_{II} même, et donc admet un point fixe.

Dans deux les cas le théorème est démontré.

5. Remarques.

Ce travail, avec [7] pour le cas isentropique, peut être fait à nouveau pour le problème concernant aux solutions à support compact de l'équation eulérienne. Mais le résultat n'est pas décisive.

D'abord on remaarque que les conditions I et II excluent les solutions stationnaires

$$\rho = \left(\frac{(\gamma-1)4\pi}{\gamma A^2}\right)^{1/(2-\gamma)} \theta(A|x|)^{1/(\gamma-1)}, \qquad v = 0, s = 0,$$

où $\theta(r)$ est la ≪fonction de Lane-Emden d'ordre $1/(\gamma-1)$≫, c'est-à-dire, la solution du problème

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\theta}{dr}\right) + \theta^{1/(\gamma-1)} = 0, \qquad \theta|_{r=0} = 1,$$

$$\left.\frac{d\theta}{dr}\right|_{r=0}=0$$

(voir [1], Chapter IV) et A est un nombre positif arbitraire. Bien que cette solution ρ soit de classe C^1, la variable w associée n'est pas de H^2. En effet

$$w \sim \text{Const.}\,(R-r)^{1/2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial w}{\partial r} \sim \text{Const.}\,(R-r)^{-1/2}$$

quand $r \rightarrow R-0$, où R est la diametre de l'étoile. C'est pour ça que l'on veut trouver des conditions plus faible que I et et II.

En outre, comme nous l'avons dit plus haut (§ 2), en passant du (ρ, v, s)-système au (w, v, s)-système, on prend des dètours pour l'unicité et des conditions sur les initiels tres embrouillées pour l'existence.

C'est pour ces raisons qu'on a le désir d'amélioration de ce travail. Ce n'est qu'un premier pas vers la théorie strictement mathématique de l'évolution d'étoiles.

DEPARTMENT OF LIBERAL ARTS
OSAKA INDUSTRIAL UNIVERSITY
DEPARTMENT OF APPLIED PHYSICS
OSAKA CITY UNIVERSITY

Références

[1] S. Chandrasekhar, An Introduction to the Study of Stellar Structure, Univ. of Chicago Press, 1938.
[2] T. Kato, The Cauchy problem for quasi-linear symmetric hyperbolic systems, Arch. Rational Mech. Anal., **58** (1975), 181–205.
[3] S. Klainerman and A. Majda, Compressible and incompressible fluids, Comm. Pure Appl. Math., **35** (1982), 629–651.
[4] P. D. Lax, Hyperbolic systems of concervation laws and the mathematical theory of schock waves, STAM Reg. Conf. Lecture No. 11, Philadelphia, 1973.
[5] P. Ledoux and T. Walraven, Variable stars, Handbuch der Physik, Bd. LI (1958), Springer, Berlin, 353–604.
[6] A. Majda, Compressible fluid flow and systems of conservation laws in several variables, Appl. Math. Sci., **53** (1984), Springer.
[7] T. Makino, On a local existence theorem for the evolution equation of gaseous stars, Pattern and Wave —Qualitative Analysis of Nonlinear Differential Equations—, Ed. par T. Nishida, M. Mimura and H. Fujii, North-Holland, 1986, 459–479.
[8] T. Makino, S. Ukai and S. Kawashima, Sur la solution à support compact de l'équation d'Euler compressible, Jap. J. of Appl. Math., **3** (1986), 249–257.