J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)
30-4 (1990) 705-748

Sur les sociétés de surfaces caractéristiques dans l'espace de deux variables complexes II. Singularité essentielle dégénérative

Par

Seizo KONDO

Introduction

1. Dans le mémoire précédent [8], on a introduit la société de surfaces caractéristiques dans l'étude des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes. Alors on s'est occupé de l'étudier indifférement aux fonctions analytiques. Ainsi on a trouvé sa structure la plus générale sur la continuité et sur la normalité. Et on a construit diverses sortes d'exemples qui réalisent sa singularité trouvée concernant la continuité ou la normalité respectivement.

Dans le présent mémoire, j'étudierai sa structure sur l'analycité. Ainsi je recherche la singularité essentielle d'une société de surfaces caractéristiques, un des problèmes les plus importants dans la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes. Je me borne à la singularité essentielle dégénérative, un des cas les plus élémentaires, pour obtenir promptement une perspective sur ce problème.

Comme un cas particulier du problème, je traite aussi le problème d'analycité globale d'une société de surfaces caractéristiques : Est-ce-qu'une société localement analytique est toujours globalement analytique?

Dans la note précédente [9], j'ai écrit un résumé des résultats principaux du présent mémoire.

2. Dans les §§ 1 et 2, on rappelle les propriétés générales d'une société de surfaces caractéristiques données précédemment, en clarifiant quelques points restés obscures. On définit ses analycités locale et globale et prépare ce qui seront nécessaires dans les §§ 4-6. (§ 1) On étudie ses continuités locale et globale et prépare ce qui seront nécessaires dans les §§ 4-6. En particulier, on caractérise les points (α) et (β) à l'aide de la continuite. (§ 2) Dans le § 3, on rappelle quelques résultats antérieurs sur les ensembles pseudoconcaves, en unifiant leurs démonstrations sur quelques points.

Au § 4, avec des préparations des paragraphes précédents, on étudie des propriétés d'une société de surfaces caractéristiques à singularité essentielle dégénérative : propriétés sur sa projection analytique restreinte aus $\boldsymbol{P}^1$, $\boldsymbol{C}^1$, $\boldsymbol{C}^*$ ou $\boldsymbol{T}^1_\lambda$ et sur l'accumulation de ses surfaces à sa singularité essentielle. En même temps, on répond affirmativement à un cas très spécial du problème d'analycité globale.

Communiqué par Prof. Y. Kusunoki, le 18 Janvier, 1989.

Aux §§ 5 et 6, à l'aide des fonctions entières ou méromorphes d'une variable, on construit des sociétés de surfaces caractéristiques qui ont des singularités essentielles dégénératives, mais qui ne contiennent aucunes surfaces s'accumulant à leurs singularités essentielles: sociétés dont les projections analytiques sont $\boldsymbol{P}^1$ (§ 5) ou $\boldsymbol{T}^1_\lambda$ (§ 6) et dont les allures au voisinage de leurs singularités essentielles présentent des divers rangs concernant l'analycité, la continuité ou la normalité respectivement. Particulièrement on répond négativement, dans le cas plus général, au problème d'analycité globale. Pour la démonstration, l'idée de l'arbre topologique joue un rôle très important, comme elle le joue dans la théorie des distributions de valeurs des fonctions entières ou méromorphes d'une variable complexe. (*Cf.* H. Wittich [18] pp. 118-145.) Au § 7, on trouve les formes nécessaires des fonctions entières ou méromorphes de rang 1 que l'on emploie dans les §§ 5 et 6 précédents.

3. On utilise ici les notations suivantes:

1° i (l'unité imaginaire)$=\sqrt{-1}$;

2° $\boldsymbol{P}^1\{z\}$ (la sphère de Riemann de la variable $z)=\{z \mid |z|\leqq+\infty\}$;

3° $\boldsymbol{P}^*\{z\}$ (la sphère de Riemann pointée à l'origine de la variable $z)=\{z|0<|z| \leqq+\infty\}$;

4° $\boldsymbol{C}^1\{z\}$ (le plan complexe de la variable $z)=\{z \mid |z|<+\infty\}$;

5° $\boldsymbol{C}^*\{z\}$ (le plan complexe pointé à l'origine de la variable $z)=\{z \mid 0<|z|<+\infty\}$;

6° $\boldsymbol{T}^1_\lambda\{\zeta\}$ (le tore complexe du module λ de la variable $\zeta)=$l'espace quotient de $\boldsymbol{C}^*\{z\}$ par un sous-groupe multiplicatif discret $\{z|z=d^j_\lambda,\ j=0,\ \pm1,\ \pm2, \cdots\}$ où λ est un nombre complexe dont la partie réelle est >0, et $d_\lambda=e^{2\pi\lambda}$. Pour deux moduli λ et μ tels que λi et μi soient équivalents par rapport au groupe modulaire du demi-plan supérieur, $\boldsymbol{T}^1_\lambda\{\zeta\}$ et $\boldsymbol{T}^1_\mu\{\zeta\}$ sont analytiquement équivalents;

7° $\boldsymbol{P}^2\{x, y\}$ (l'espace produit des deux variables x et $y)=\{\boldsymbol{P}^1\{x\}, \boldsymbol{P}^1\{y\}\}$;

8° $\boldsymbol{C}^2\{x, y\}$ (l'espace entier des deux variables x et $y)=\{\boldsymbol{C}^1\{x\}, \boldsymbol{C}^1\{y\}\}$.

Dans les notations précédentes, des variables seront supprimées souvent.

§ 1. Applications analytiques

On explique ici les analycités locale et globable des sociétés de surfaces caractéristiques.

4. On définit la surface caractéristique de première espèce (en abrégé, surface de première espèce) et la surface caractéristique de seconde espèce (en abrégé, surface de seconde espèce). On les appelle souvent surfaces caractéristiques ou plus simplement surfaces, en supprimant d'indiquer leurs espèces, quand il n'y a pas de confusion.

1° Soit D un domaine dans l'espace $\boldsymbol{P}^2\{x, y\}$. Soit Σ un ensemble fermé de points dans D. Supposons que, pour tout point $p\in\Sigma$, il y ait un voisinage $v_p\subseteqq D$ de p tel que la partie $\Sigma\cap v_p$ soit représentée par une équation $F(x, y)=0$, F $(\not\equiv0)$ étant une fonction holomorphe dans v_p. Alors Σ est appelée *surface caractéristique de première espèce* dans D. Au voisinage de chaque point $p\in\Sigma$, Σ est représentée par des fonctions analytiques uniformes ou multiformes de la forme $y=\varphi_p(x)$ ou $x=\psi_p(y)$ en nombre fini. Soit p un point de Σ. p est appelé *point simple* de Σ (et Σ est dite *simple* au point p), s'il y a un voisinage $v_p \subseteqq D$ de p et un système de coordonnées locales ξ et η dans v_p tel que la partie $\Sigma \cap v_p$ soit représentée par l'équation $\eta=0$. Si non, p est appelé *point multiple* de Σ (et Σ est dite *multiple* au point p).

2° Soit Γ un ensemble fermé ou non de points dans D. Supposons que Γ soit représentable par une réunion dénombrable des surfaces de première espèce, chacune desquelles étant définie respectivement dans un domaine contenu dans D de manière que le prolongement analytique de chacune de ces surfaces au delà de son domaine n'engendre aucun point à nouveau en dehors de Γ. Le prolongement analytique d'une surface de première espèce au delà de son domaine est défini par cel des fonctions analytiques uniformes ou multiformes $y=\varphi_p(x)$ ou $x=\psi_p(y)$ représentant la surface. Si Γ est une surface de première espèce dans D, Γ satisfait évidemment à cette condition. Si Γ n'est pas de surface de première espèce, Γ est alors appelé *surface caractéristique de seconde espèce* dans D.

3° Une surface d'espèce quelconque Γ dans D est dite *réductible* dans D, s'il y a deux surfaces d'espèces quelconques Γ_1 et Γ_2 dans D, non vides et différentes de Γ, telles que $\Gamma=\Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Si non, Γ est dite *irréductible* dans D. Une surface d'espèce quelconque Γ dans D peut être représentée par une réunion dénombrable de surfaces d'espèces quelconques irréductibles dans D: *composantes irréductibles* de Γ dans D.

Soit Γ une surface d'espèce quelconque irréductible dans D. Alors Γ est représentée globalement par une fonction analytique uniforme ou multiforme de la forme $y=\varphi(x)$ ou $x=\psi(y)$. Γ peut être regardée comme une surface de Riemann qui est équivalente analytiquement à la surface de Riemann de la fonction $y=\varphi(x)$ ou de la fonction $x=\psi(y)$ respectivement.

5. 1° Soit $\mathfrak{F}$ une famille de surfaces caractéristiques irréductibles d'espèces quelconques dans D. Si toute surface de $\mathfrak{F}$ est de première espèce dans D, $\mathfrak{F}$ est dite de *première espèce* dans D. Si $\mathfrak{F}$ contient au moins une surface de seconde espèce dans D, $\mathfrak{F}$ est dite de *seconde espèce* dans D. Si D' est un domaine contenu dans D, on peut considérer la partie $\mathfrak{F}'$ dans D' de $\mathfrak{F}$, en décomposant la partie dans D' de chacune des surfaces de $\mathfrak{F}$ en ses composantes irréductibles. Cette décomposition étant faite, on appelle $\mathfrak{F}'$ la *restriction* de $\mathfrak{F}$ à D'. Si $\mathfrak{F}$ est de première espèce dans D, $\mathfrak{F}'$ est aussi de première espèce dans D'. Si $\mathfrak{F}$ est de seconde espèce dans D, $\mathfrak{F}'$ ou bien peut dégénérer à être de première espèce dans D' ou bien peut conserver d'être de seconde espèce dans D'. On désigne par $|\mathfrak{F}|$ l'ensemble de tous les points appartenant aux surfaces caractéristiques de $\mathfrak{F}$. $|\mathfrak{F}|$ est appelé *support* de $\mathfrak{F}$.

2° Un plan caractéristique L est dit indifférent à $\mathfrak{F}$, si aucune de ses composantes irréductibles dans D n'est identique à une des surfaces caractéristiques de $\mathfrak{F}$. Une famille $\mathfrak{L}$ des plans caractéristiques est dite distribuée partout dense dans D, si étant donnés un point $p \in D$ et un plan caractéristique L passant par p, on peut trouver un plan caractéristique $\in \mathfrak{L}$ passant par un point $\in D$ arbitrairement voisin de p et avec une inclinaison arbitrairement voisine de celle de L. Cela étant, on emploiera des terminologies pour les ensembles de points sur un plan pour aussi la famille $\mathfrak{F}$ de surfaces caractéristiques irréductibles de la manière suivante:

a) $\mathfrak{F}$ est dite de *première catégorie* au sens de R. Baire, si pour tout plan caractéristique L indifférent à $\mathfrak{F}$, l'ensemble de points communs $|\mathfrak{F}|\cap L$ est de première catégorie au sens de R. Baire sur L. On y suppose l'existence de tels L distribués partout dense dans D. Si non, $\mathfrak{F}$ est dite de *seconde catégorie* au sens de R. Baire.

b) $\mathfrak{F}$ est dite de *mesure linéaire finie* ou *infinie dénombrable au plus*, si pour tout plan caractéristique L indifférent à $\mathfrak{F}$, l'ensemble de points communs $|\mathfrak{F}|\cap L$ est de mesure linéaire respectivement finie ou infinie dénombrable au plus sur L. On y suppose l'existence de tels L distribués partout dense dans D. (V. A. S. Besicovitch [2] p. 3.)

6. On définit la société de surfaces caractéristiques de première espèce (en abrégé, société de première espèce) et la société de surfaces caractéristiques de seconde espèce (en abrégé, société de seconde espèce). On les appelle souvent sociétés de surfaces caractéristiques ou plus simplement sociétés, en supprimant d'indiquer leurs espèces, quand il n'y a pas de confusion. On définit de plus le point d'indétermination de première espèce et le point d'indétermination de seconde espèce. De même on les appelle souvent points d'indétermination.

1° Soit S une famille de première espèce de surfaces caractéristiques irréductibles dans D. Supposons que S satisfasse aux deux conditions suivantes:

a_1) *Par tout point de D passe au moins une surface de S;*

a_2) *Sur une surface quelconque de S, l'ensemble de points, par lesquels passent plusieurs surfaces de S, pouvant être en nombre infini, n'a pas de points d'accumulation dans D.*

Dans cette condition S est appelée *société de surfaces caractéristiques de première espèce* dans D. Soit p un point de D. p est appelé *point simple* de S, s'il n'y a qu'une seule surface de S qui passe par p et si p est un point simple de cette surface passant par p. p est appelé *point multiple* de S, s'il n'y a qu'un nombre fini de surfaces de S qui passent par p et si p est un point multiple de la surface formée de ces surfaces passant par p. Tout point de D par lequel passent une infinité de surfaces de S s'appelle *point d'indétermination de première espèce* de S.

2° Soit $\mathcal{S}$ une famille d'espèce quelconque de surfaces caractéristiques irréductibles dans D. Supposons qu'il y ait un ensemble e de points dans D qui n'a aucun point d'accumulation dans D satisfaisant aux deux conditions suivantes:

b_1) *Pour tout point $p\in D-e$, il y a un voisinage $v_p\subseteqq D-e$ de p de façon que la restriction $\mathcal{S}_p$ de $\mathcal{S}$ à v_p soit une société de première espèce dans v_p;*

b_2) *Pour chaque point $p\in e$, il n'existe aucun voisinage $v_p\subseteqq D$ de p tel que la restriction $\mathcal{S}_p$ de $\mathcal{S}$ à v_p soit une société de première espèce dans v_p.*

Si $\mathcal{S}$ est une société de première espèce dans D, $\mathcal{S}$ satisfait évidemment à ces conditions avec l'ensemble e vide. Si $\mathcal{S}$ n'est pas de société de première espèce, $\mathcal{S}$ est alors appelée *société de surfaces caractéristiques de seconde espèce* dans D. Soit p un point de $D-e$. p est appelé point simple de $\mathcal{S}$, point multiple de $\mathcal{S}$ ou point d'indétermination de première espèce de $\mathcal{S}$ suivant qu'il l'est de $\mathcal{S}_p$ respectivement. Tout point de e s'appelle *point d'indétermination de seconde espèce* de $\mathcal{S}$.

7. *Normalités des sociétés de surfaces caractéristiques.* Soit S une société de première espèce dans D. Prenons un point $p \in D$. Si, dans un voisinage de p, S est normale comme famille simple de surfaces de première espèce au sens de K. Oka ([13] p. 26), S est dite *globalement normale au point* p. Si, à tout point de D, S est globalement normale, S est dite *globalement normale dans* D.

Soit $\mathcal{S}$ une société d'espèce quelconque dans D. Prenons un point $p \in D$. S'il y a un voisinage $v_p \subseteqq D$ de p tel que la restriction $\mathcal{S}_p$ de $\mathcal{S}$ à v_p soit de première espèce et globalement normale dans v_p, $\mathcal{S}$ est dite *localement normale en* p. Dans ce cas, on dit aussi que p est un *point* (ν) de $\mathcal{S}$. Pour un point p différent de point d'indétermination de $\mathcal{S}$, on a une caractérisation pour que p soit un point (ν) de $\mathcal{S}$ ([8] p. 62). Comme cas particuliers d'un point (ν) de $\mathcal{S}$, on définit des *points* (α) *et* (β) de $\mathcal{S}$, où $\mathcal{S}$ admet localement un paramètre complexe continu ([8] p. 62).

8. *Analycités des sociétés de surfaces caractéristiques.* 1° Soient D un domaine dans l'espace $\boldsymbol{P}^2\{x, y\}$ et R une surface de Riemann. Soit $F\colon D \to R$ une application analytique[1] (non constante) de D dans R. Alors F définit une société S de première espèce dans D formée de toutes les composantes irréductibles de surfaces caractéristiques définies par les équations

$$F(x, y)=c\,, \qquad c \in R\,.$$

Dans cette condition, S est dite *globalement analytique dans* D. Tout point d'indétermination de F est un point d'indétermination de première espèce de S.

Soit $\mathcal{S}$ une société d'espère quelconque dans D. Soit p un point de D. S'il y a un voisinage $v_p \subseteqq D$ de p tel que la restriction $\mathcal{S}_p$ de $\mathcal{S}$ à v_p soit de première espèce et y globalement analytique, $\mathcal{S}$ est dite *localement analytique en* p. Si $\mathcal{S}$ est localement analytique en tout point de D, $\mathcal{S}$ est dite *localement analytique dans* D.

2° Soit $G(x, y)$ une fonction méromorphe dans D. Considérons l'équation différentielle du premier ordre suivante:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=G(x, y)\,. \tag{1}$$

Elle définit une société $\mathcal{S}$ d'espèce quelconque dans D formée de toutes les surfaces caractéristiques irréductibles définies par ses solutions analytiques uniformes ou multiformes de la formes $y=\varphi(x)$ ou $x=\psi(y)$. Soit p un point de D. Prenons un système de coordonnées locales ξ et η dans un voisinage $v_p \subseteqq D$ de p tel que $p=(\xi=0,\ \eta=0)$. Soit $\mathrm{d}\eta/\mathrm{d}\xi=\Psi(\xi, \eta)$ l'équation obtenue en récrivant l'équation (1) avec les coordonnées locales ξ et η. $\Psi(\xi, \eta)$ est une fonction méromorphe dans v_p. Si $(\xi=0,\ \eta=0)$ est un point d'indétermination du coefficient $\Psi(\xi, \eta)$, on dit que p est un point d'indétermination de l'équation (1). (*Cf.* P. Boutroux [3] pp. 8-15.) Soit e l'ensemble de tous les points d'indétermination de l'équation (1). e comprend tous les points d'indétermination du coefficient $G(x, y)$ à distance finie. Quant aux points à distance infinie, e ne comprend pas nécessairement tous les points d'indétermination de $G(x, y)$, mais comprend parfois des points qui ne sont pas de points d'indétermination de $G(x, y)$. e ne com-

1) Application méromorphe d'après R. Remmert.

prend qu'un nombre infini dénombrable au plus de points ne s'accumulant pas à l'intérieur de D. Soit p un point de $D-e$. Alors p est un point simple de $\mathcal{S}$ et y $\mathcal{S}$ est localement analytique. Soit q un point de e. Alors, ou bien il y a un voisinage v_q de q tel que la restriction de $\mathcal{S}$ à v_q soit de première espèce, ou bien il n'en est pas ainsi. Dans le premier cas q est un point multiple ou un point d'indétermination de première espèce et dans le second point d'indétermination de seconde espèce.

3° Concernant l'analycité globale et l'analycité locale je dit comme suivant:

a) Si $\mathcal{S}$ est de première espèce dans D et si e est vide, $\mathcal{S}$ n'est pas nécessairement globalement analytique dans D;

b) Si q est un point d'indétermination de première espèce de $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}$ n'est pas nécessairement localement analytique en q.

Ce sont des phénomènes trouvés antérieurement[2] et considérés comme des cas faibles des résultats actuels (N°s43 et 52; N°s47 et 56 respectivement). Si q est un point multiple de $\mathcal{S}$, je ne sais pas si $\mathcal{S}$ est nécessairement localement analytique en q.

9. Pour étudier les analycités des sociétés de surfaces caractéristiques, on observera dans la suite leurs projections analytiques et leurs prolongements analytiques. Alors un résultat de M. Ohtsuka [12] jouera un rôle très important et qui s'énonce ainsi:

Lemme a. *Soit* $\delta_\rho^*=\{z\,|\,0<|z|<\rho\}$, ρ *étant un nombre positif* $\leqq 1$, *un cercle pointé à l'origine sur* $\boldsymbol{C}^1\{z\}$. *Soit* $\bar{R}$ *une surface de Riemann maximale. Soit* $f:\delta_1^*\to\bar{R}$ *une application holomorphe de* δ_1^* *dans* $\bar{R}$. *Soient* $f(\delta_\rho^*)$ *l'image de* δ_ρ^* *et* $\overline{f(\delta_\rho^*)}$ *l'adhérence de* $f(\delta_\rho^*)$ *dans* $\bar{R}$.

Alors ils n'existent que deux possibilités suivantes:

i. *L'intersection* $\bigcap_\rho \overline{f(\delta_\rho^*)}$ *pour tout nombre positif* $\rho\leqq 1$ *se réduit à un point intérieur de* $\bar{R}$ *(cas où* $z=0$ *est un point singulier artificiel de* f*); ou*

ii. *L'intersection* $\bigcap_\rho f(\delta_\rho^*)$ *pour tout nombre positif* $\rho\leqq 1$ *est analytiquement équivalente à une des surfaces de Riemann* $\boldsymbol{P}^1$, $\boldsymbol{C}^1$, $\boldsymbol{C}^*$ *ou* $\boldsymbol{T}_1^1$ *(cas où* $z=0$ *est un point singulier essentiel de* f*).*

10. *Projection analytique.* 1° Soit S une société de surfaces caractéristiques dans D, qui est globalement analytique.

Supposons d'abord que S n'ait aucun point d'indétermination. Alors, d'après les résultats de K. Koch [7] et de K. Stein [15], il existe une application analytique $F: D\to R$, R étant une surface de Riemann, satisfaisant aux deux conditions suivantes:

a) $F: D\to R$ définit la société S dans D;

b) $F_1: D\to R_1$ étant une application analytique quelconque telle que F_1 définisse aussi la société S dans D, il existe une application holomorphe et unique $\varphi: R\to R_1$ de façon que l'on ait la relation $F_1=\varphi\circ F$.

La *projection analytique* de S signifie l'application analytique $F: D\to R$ ou plus simplement la surface de Riemann R. R est définie comme un espace quotient de D par une relation d'équivalence entre les surfaces caractéristiques de S et F est définie comme

2) Ce qu'aussi M.M. Suzuki a remarqué.

sa projection canonique de D sur R.

Ensuite considérons le cas où S a des points d'indétermination. Appelons e l'ensemble de ces points. Posons $D_0=D-e$ et appelons S_0 la restriction de S à D_0. On définit la projection analytique de S_0: $F_0: D_0\to R$. Or F_0 a tout point de e comme point d'indétermination, et R doit être analytiquement équivalente à $\boldsymbol{P}^1$. On obtient une application analytique $F: D\to R$ en prolongeant F_0 en tout point de e. C'est la *projection analytique* de S.

2° Soient D' un domaine contenu dans D et S' la restriction de S à D'. Soit R' la projection analytique de S'. Alors il existe une application holomorphe $\phi: R'\to R$ telle que pour tout point $\zeta\in R'$ et pour le point $\phi(\zeta)\in R$, on a l'inclusion

$$|\zeta|\subseteqq|\phi(\zeta)|,$$

$|\zeta|$ et $|\phi(\zeta)|$ signifiant les supports de ζ et de $\phi(\zeta)$ respectivement, considérées comme familles de surfaces caractéristiques appartenant aux classes d'équivalence ζ et $\phi(\zeta)$ dans la définition des projections analytiques de S et de S'. On appelle ϕ *l'application restrictive* de S' dans S.

11. 3° Envisageons quelques conditions particulières concernant les restrictions. Soit S une société de surfaces caractéristiques dans D, qui est globalement analytique. Soient Δ_0 et Δ_1 deux domaines contenus dans D tels que $\Delta_0\subseteqq\Delta_1$. Soient S_0 et S_1 les restrictions de S à Δ_0 et à Δ_1 respectivement. Soient R_0, R_1 et R les projections analytiques de S_0, de S_1 et de S respectivement. Soit ζ un point quelconque de R. On considère $|\zeta|$ comme une surface caractéristique dans D.

Lemme 1. *Dans cette circonstance, supposons qu'il existe un ouvert σ dans R satisfaisant aux conditions suivantes*:

a) *Toute surface caractéristique $|\zeta|$, $\zeta\in\sigma$, contient effectivement des points dans Δ_0*;

b) *La restriction de $|\zeta|$, $\zeta\in\sigma$, dans Δ_0 forme une et une seule classe d'équivalence dans la définition de R_0.*

Supposons de plus la condition suivante:

c) *Soient $\tilde{R}_0$ et $\tilde{R}$ les surfaces de Riemann maximales contenant respectivement R_0 et R. Alors $\tilde{R}_0$ est compacte et $R_0=\tilde{R}_0-\{\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_h\}$, où les ζ_j sont des points de $\tilde{R}_0$ en nombre fini.*

Alors, pour tout point $\zeta\in R$ tel que $|\zeta|$ satisfasse à la condition a), *satisfait aussi à la condition* b), *et $\tilde{R}_0$ et $\tilde{R}$ sont analytiquement équivalentes.*

En effet, soit $\phi: R_0\to R$ l'application restrictive de S_0 dans S. On regarde ϕ comme une application: $R_0\to\tilde{R}$. D'après l'hypothèse, pour tout point $\zeta\in\sigma$, $\phi^{-1}(\zeta)$ contient un et un seul point dans R_0. D'où, d'après le lemme a, chaque point ζ_j est un point singulier artificiel de ϕ. Et ϕ est prolongée à une application holomorphe $\tilde{\phi}: \tilde{R}_0\to\tilde{R}$. $\tilde{\phi}$ est une application biunivoque de $\tilde{R}_0$ sur $\tilde{R}$. D'où l'assertion.

Lemme 2. *Dans la même circonstance, supposons que pour tout point $\zeta\in R$, $|\zeta|$ satisfasse aux conditions* a) *et* b) *citées dans le lemme* 1, *et par suite que R_0 et R soient* *analytiquement équivalentes. Alors c'est la même chose pour la paire R_1 et R:*

Pour tout point $\zeta \in R$, la restriction de $|\zeta|$ dans Δ_1 forme une et une seule classe d'équivalence dans la définition de R_1, et par suite R_1 et R sont analytiquement équivalentes.

En effet, soient $\phi_0: R_0 \to R_1$ et $\phi_1: R_1 \to R$ les applications restrictives de S_0 dans S_1 et de S_1 dans S respectivement. Alors, d'après l'hypothèse, l'application composée $\phi_1 \circ \phi_0: R_0 \to R$ est une application biunivoque de R_0 sur R. D'où, ϕ_0 est une application biunivoque de R_0 sur R_1 et ϕ_1 de R_1 sur R. Ce que l'on démontre avec la propriété d'être applications ouvertes de ϕ_0 et de ϕ_1. D'où l'assertion.

12. *Prolongement analytique.* 1° Soient $\tilde{D}$ un domaine dans l'espace $P^2\{x, y\}$ et E un ensemble fermé dans $\tilde{D}$. Posons $D = \tilde{D} - E$. Supposons que D soit un domaine. Soit S une société de surfaces caractéristiques dans D, qui est globalement analytique. Soient p un point de E et $v_p \subseteqq \tilde{D}$ un voisinage de p. Posons $D^{(p)} = D \cup v_p$. Supposons que l'on peut trouver un v_p tel que $D^{(p)}$ soit un domaine et qu'il existe une société $S^{(p)}$ globalement analytique dans $D^{(p)}$, de façon que S soit la restriction de $S^{(p)}$ à D. Dans cette condition, on dit que S est *prologeable globalement analytiquement au point* p. Et p s'appelle *point singulier artificiel de* S. Au contraire s'il n'en est pas ainsi, p s'appelle *point singulier essentiel de* S.

2° Envisageons un cas particulier où $D = \tilde{D} - |\Sigma|$, Σ étant une surface caractéristique de première espèce dans $\tilde{D}$. Soit S une société de surfaces caractéristiques dans D, qui est globalement analytique. Etudions le prolongement analytique de S à chaque point de Σ. Or cela est faite à l'aide de la projection analytique de S. Soit $F: D \to R$ la projection analytique de S. Soit $\tilde{R}$ une surface de Riemann maximale qui contient R. On regarde F comme une application: $D \to \tilde{R}$. Soit Σ_0 une composante irréductible de Σ. Soit Σ_0' l'ensemble de tout point $p \in \Sigma_0$ tel que p n'appartienne à aucune autre composante de Σ.

Lemme 3. *Dans cette circonstance, on peut dire*:

a) *Qu'un point $p \in \Sigma_0'$ est un point singulier artificiel de S, si et seulement si F est prolongeable analytiquement à p*;

b) *Que pour Σ_0' lui-même il n'existent que deux cas suivants*:

i. *tout point de Σ_0' est un point singulier artificiel de S*;

ii. *tout point de Σ_0' est un point singulier essentiel de S.*

En effet, l'assertion a) se démontre à l'aide du lemme a. L'assertion b) découle de l'assertion a), d'après un théorème de P. Thullen [17].

D'après le lemme 3 b), on appelle Σ_0 *composante singulière artificielle pour* S ou *composante singulière essentielle pour* S suivant que Σ_0' entre dans le cas b) i ou dans le cas b) ii.

Cela étant, on a un énoncé suivant qui sera utilisé dans les §§ 4-6:

Théorème A. *Dans la même circonstance, s'il existe au moins une composante de* Σ

singulière essentielle pour S, la projection analytique de S doit être analytiquement équivalente à une des surfaces de Riemann $\boldsymbol{P}^1$, $\boldsymbol{C}^1$, $\boldsymbol{C}^*$ *ou* $\boldsymbol{T}^1_\lambda$.

En effet, ce théorème se démontre avec le lemme a ii et à l'aide d'un théorème de P. Thullen [17].

§ 2. Applications intérieures

On étudie ici les continuités locale et globale des sociétés de surfaces caractéristiques.

13. *Application intérieure.* 1° Soit D un domaine dans l'espace $\boldsymbol{P}^2\{x, y\}$. Soit e un ensemble de points dans D, qui n'a aucun point d'accumulation dans D. Soit R une surface de Riemann. Soit $F: D \to R$ une application de D dans R prenant une valeur bien définie en tout point de $D-e$ et une infinité de valeurs en tout point de e, satisfaisant aux trois conditions suivantes:

a) *F est une application continue de $D-e$ dans R;*

b) *F est une application ouverte de $D-e$ dans R;*

c) *Chaque ensemble de points défini par l'équation*

$$F(x, y)=c\,, \qquad c \in R\,,$$

est une surface caractéristique de première espèce dans D.

Dans cette condition, F s'appelle *application intérieure* de D dans R. Spécialement si R est un domaine de $\boldsymbol{P}^1$, F s'appelle aussi *fonction intérieure.* Tout point de e s'appelle point d'indétermination de F. Une application intérieure est une généralisation à deux variables d'une transformation intérieure d'une variable sur une surface de Riemann définie par S. Stoïlow ([16] p. 107). Elle jouit des propriétés topologiques d'une application analytique.

2° Citons ici une de ses propriétés qui sera utilisée à plusieures reprises dans la suite. Soit $F: D \to R$ une application intérieure. Soit Σ une surface caractéristique de première espèce, irréductible et ne passant par aucun point d'indétermination de F. Supposons pour la simplicité que Σ soit simple en tout de ses points. Désignons par φ la restriction de F sur Σ, Σ étant regardée comme une surface de Riemann.

Lemme 4. *Dans cette condition, si φ n'est pas constante sur Σ, φ est une transformation intérieure de Σ dans R.*

En effet, a) φ est continue sur Σ, car F étant continue au voisinage de Σ dans l'espace. b) Soit p un point de Σ. Prenons un voisinage σ_p de p sur Σ arbitrairement petit. Soit v_p un voisinage de p dans D suffisamment petit par rapport à σ_p. Alors toute surface caractéristique $F^{-1}(c)$, $c \in R$, qui passe par un point de v_p passe aussi par un point de σ_p. Ce qui est démontré facilement à l'aide de la pseudoconcavité de la surface caractéristique de première espèce. (V. le § 3 ci-dessous.) Donc $\varphi(\sigma_p) \supseteqq F(v_p)$. F étant une application ouverte dans v_p, $\varphi(\sigma_p)$ contient un ouvert contenant le point $\varphi(p)$. c) Pour tout $c \in R$, $\varphi^{-1}(c)$ est un ensemble discret de points sur

Σ, car $\varphi^{-1}(c)$ $(=F^{-1}(c)\cap\Sigma)$ est l'ensemble de points communs de deux surfaces caractéristiques de première espèce et différentes dans D. Les énoncés a), b) et c) démontrent ensemble l'intérieurité de φ.

14. *Continuités des sociétés de surfaces caractéristiques.* Soit $F: D\to R$ une application intérieure de D dans R. Alors F définit une société S de première espèce dans D formée de toutes les composantes irréductibles de surfaces caractéristiques définies par les équations

$$F(x, y)=c\,, \qquad c\in R\,.$$

Dans cette condition, S est dite *globalement continue* dans D. Tout point d'indétermination de F est un point d'indétermination de première espèce de S.

Soit $\mathcal{S}$ une société d'espèce quelconque dans D. Soit p un point de D. S'il y a un voisinage $v_p\subseteqq D$ de p tel que la restriction $\mathcal{S}_p$ de $\mathcal{S}$ à v_p soit de première espèce et y globalement continue, $\mathcal{S}$ est dite *localement continue en* p. Si $\mathcal{S}$ est localement continue en tout point de D, $\mathcal{S}$ est dite *localement continue dans* D.

15. *Prolongement continu.* 1° Soient $\tilde{D}$ un domaine dans l'espace $\boldsymbol{P}^2\{x, y\}$ et E un ensemble fermé dans $\tilde{D}$. Posons $D=\tilde{D}-E$. Supposons que D soit un domaine. Soit S une société de surfaces caractéristiques dans D, qui est globalement continue. Soient p un point de E et $v_p\subseteqq\tilde{D}$ un voisinage de p. Posons $D^{(p)}=D\cup v_p$. Supposons que l'on peut trouver un v_p tel que $D^{(p)}$ soit un domaine et qu'il existe une société $S^{(p)}$ globalement continue dans $D^{(p)}$, de façon que S soit la restriction de $S^{(p)}$ à D. Dans cette condition, on dit que S est *prolongeable globalement continûment au point* p.

2° Envisageons un cas particulier où $D=\tilde{D}-|\Sigma|$, Σ étant une surface caractéristique de première espèce dans $\tilde{D}$. Soit S une société de surfaces caractéristiques dans D, qui est globalement continue. Cela étant, on a un énoncé suivant:

Lemme 5. *Supposons les conditions suivantes*:

a) *Ils existent des nombres positifs* r_0 *et* r *tels que*:

i. $$\tilde{D}\cap\{|x|\leqq+\infty,\ r<|y|\leqq+\infty\}=\{|x|<r_0,\ r<|y|\leqq+\infty\}\,;$$

ii. $$\Sigma=(|x|<r_0,\ y=\infty)\,.$$

b) *Toute surface de* S *qui passe par un point* $(x=0,\ y=\alpha)$, $r_1<|\alpha|<+\infty$, r_1 *étant un nombre positif plus grand que* r, *soit représentée par* $y=\psi_\alpha(x)$, $\psi_\alpha(x)$ *étant une fonction holomorphe de la variable* x *telle que* $r<|\psi_\alpha(x)|$ *dans* $|x|<r_0$.

Alors S *peut être prolongée globalement continûment dans tout domaine* $\tilde{D}$ *en ajoutant la surface* Σ *à* S.

En effet, soit $F: D\to\boldsymbol{P}^1$ une fonction intérieure qui définit S dans D. On peut ici, sans perdre la généralité, prendre une fonction intérieure au lieu d'application intérieure générale. Soit $N=(x=0,\ r<|y|<+\infty)$ une surface caractéristique de première espèce. Soit $\varphi: N\to\boldsymbol{P}^1$ la restriction de F sur N. D'après le lemme 4, φ est une transformation intérieure de la variable y. Or d'après la structure de S, la valeur de F sur chacune des surfaces $y=\psi_\alpha(x)$, $r_1<|\alpha|<+\infty$, est déterminée par la valeur $\varphi(\alpha)$. Cela étant, remplaçons φ par une transformation intérieure $\tilde{\varphi}: \tilde{N}\to \boldsymbol{P}^1$, $\tilde{N}=(x=0, r<|y|\leqq +\infty)$, telle que $\tilde{\varphi}(y)=\varphi(y)$ pour tout point y, $r<|y|\leqq r_1$. $\tilde{\varphi}$ existe certainement. Remplaçons F par une fonction $\tilde{F}$: $\tilde{D}\to \boldsymbol{P}^1$ telle:

a) Que $\tilde{F}=\tilde{\varphi}(\infty)$ sur la surface Σ; et

b) Que $\tilde{F}=\tilde{\varphi}(\alpha)$ sur la surface $y=\psi_\alpha(x)$, $r_1<|\alpha|<+\infty$; et

c) Que $\tilde{F}=F$ sur une surface de S qui n'a pas été citée dans b).

F est une fonction intérieure, ce qui est facilement vérifié. D'après sa définition, $\tilde{F}$ définit dans $\tilde{D}$ une société globalement continue, obtenue en ajoutant la surface Σ à S. *C.Q.F.D.*

16. On va dans la suite caractériser les points (α) et (β) à l'aide de l'application intérieure. (*V*. Lemmes 6 et 7 suivants.) A l'aide de ces lemmes, on pourra remplacer la démonstration faite dans le mémoire précédent ([8] pp. 70–74) par une très courte et plus générale. Ces lemmes clarifieront en même temps les résultats de T. Nishino [10]. Ils correspondent respectivement aux structures locale et globale des sociétés de surfaces caractéristiques qui sont continues. Elles sont presque identiques topologiquement aux structures locale et globale des sociétés de surfaces caractéristiques qui sont analytiques.

Pour la démonstration on utilisera librement le théorème fondamental établi par S. Stoïlow sur la transformation intérieure ([16] pp. 116–117).

17. Lemme 6. *Soit $\mathcal{S}$ une société d'espèce quelconque dans un domaine D. Soit p un point de D qui est différent de point d'indétermination de $\mathcal{S}$. Alors, pour que p soit un point (α) de $\mathcal{S}$, il faut et il suffit que p est un point simple de $\mathcal{S}$ et auquel $\mathcal{S}$ est localement continue.*

18. *Démonstration du lemme* 6. 1° Supposons que p soit un point (α) de $\mathcal{S}$. Alors $\mathcal{S}$ satisfait aux conditions citées dans le lemme 6. Ce qui est évident d'après la définition de point (α).

2° Supposons, inversement, que $\mathcal{S}$ satisfasse à ces conditions. Soient $v_p\subseteqq D$ un voisinage de p, et ξ, η un système de coordonnées locales dans v_p tel que $p=(\xi=0, \eta=0)$ et $v_p=\{|\xi|<r, |\eta|<r_1\}$, r et r_1 étant des nombres positifs. Et soient $\sigma_\varepsilon=\{\beta||\beta|<\varepsilon\}$ et $\bar{\sigma}_\varepsilon=\{\beta||\beta|\leqq\varepsilon\}$ des voisinages ouvert et fermé de l'origine du plan $\boldsymbol{C}^1\{\beta\}$, ε étant un nombre positif. Soit $F: v_p\to\sigma_\varepsilon$ une fonction intérieure qui définit la restriction $\mathcal{S}_p$ de $\mathcal{S}$ à v_p. Ce qui est possible en prenant r, r_1 et ε suffisamment petits. On suppose sans perdre la généralité que $F(0, 0)=0$, que la surface caractéristique $M_0=(\xi=0, |\eta|<r_1)$ ne soit pas contenue dans $\mathcal{S}_p$, et que la surface caractéristique de $\mathcal{S}_p$ qui passe par p soit représentée par l'équation $\eta=0$ dans $|\xi|<r$. On détermine trois nombres r, r_1 et ε tels que pour tout $\beta\in\bar{\sigma}_\varepsilon$, la surface caractéristique $F^{-1}(\beta)$ passe par des points de la partie $(\xi=0, |\eta|<r_1/2)$ de M_0 et ne rencontre pas l'hypersurface $H=(|\xi|\leqq r, |\eta|=r_1)$ à 3 dimensions réelles, et que la surface caractéristique $F^{-1}(0)$ se réduit à celle représentée par l'équation $\eta=0$ dans $|\xi|<r$. C'est possible en reprenant r, r_1 et ε suffisamment petits et convenables.

Soit $M_\xi=(\xi=\xi, |\eta|<r_1)$ la surface caractéristique passant par le point $(\xi, 0)$. Soit

φ_ξ la restriction de F sur M_ξ. D'après le lemme 4, φ_ξ est une transformation intérieure de la variable η. Alors si la surface caractéristique $F^{-1}(\beta)$ ou bien a un point multiple (ξ', η') situé sur la surface $M_{\xi'}$, ou bien a une tangeante $M_{\xi'}$ au point (ξ', η') parallèle à l'axe des η, $\eta=\eta'$ est un point multiple de $\varphi_{\xi'}(\eta)$. Car si l'on prend une suite de surfaces M_{ξ_j} $(j=1, 2, \cdots)$ tendant vers $M_{\xi'}$, φ_{ξ_j}, à partir d'un certain terme, prend la valeur β au moins en deux points $\eta_{j,1}, \cdots, \eta_{j,h_j}$ au voisinage de $\eta=\eta'$. La suite φ_{ξ_j} $(j=1, 2, \cdots)$ tend uniformément vers $\varphi_{\xi'}$ et les points $\eta_{j,1}, \cdots, \eta_{j,h_j}$ tendent tous vers η'. D'où l'assertion.

3° Prenons maintenant un nombre positif $\varepsilon_0<\varepsilon$ tel que $l_0=\{\eta \mid |\varphi_0(\eta)|=\varepsilon_0\}$ soit une courbe de Jordan fermée sur la surface caractéristique M_0, contenant à son intérieure le point origine. On suppose que sur l_0 il n'y a aucun point multiple de φ_0. Ce qui sera réalisée en prenant ε_0 suffisamment petit. Prenons un nombre positif $r_0<r$. On suppose que pour tout ξ, $|\xi|<r_0$, $l_\xi=\{\eta \mid |\varphi_\xi(\eta)|=\varepsilon_0\}$ soit aussi une courbe de Jordan fermée sur la surface caractéristique M_ξ, contenant à son intérieur le point origine telle que sur l_ξ il n'y a aucun point multiple de φ_ξ. Ce qui sera réalisée en prenant r_0 suffisamment petit. Dans cette circonstance, supposons par l'absurde qu'il existe une valeur $\beta'\in\bar{\sigma}_{\varepsilon_0}-\{0\}$ telle que la surface caractéristique $F^{-1}(\beta')$ ou bien ait un point multiple (ξ', η'), $|\xi'|<r_0$ et $|\eta'|<r_1$, situé sur $M_{\xi'}$, ou bien ait une tangente $M_{\xi'}$ au point (ξ', η') parallèle à l'axe des η. Alors $\varphi_{\xi'}(\eta)$ a un point multiple en un point $\eta=\eta'$ à l'intérieur de $l_{\xi'}$ et différent de l'origine. C'est impossible d'après un résultat de S. Stoïlow ([16] pp. 139-140), généralisation aux transformations intérieures d'un théorème d'A. Denjoy concernant les fonctions analytiques.

On a ainsi démontré que toute surface caractéristique $F^{-1}(\beta)$, $\beta\in\bar{\sigma}_{\varepsilon_0}$, est représentée, au voisinage d'un quelconque (ξ', η') de ses points, par une équation

$$\eta=\psi_\beta(\xi),$$

ψ_β étant une fonction holomorphe au voisinage de $\xi=\xi'$. Le domaine $|\xi|<r_0$ étant simplement connexe, toute composante irréductible de $F^{-1}(\beta)$ dans $\{|\xi|<r_0, |\eta|<r_1\}$ est représentée globalement par une fonction $\eta=\Psi_\beta(\xi)$ holomorphe dans $|\xi|<r_0$. Posons $\alpha=\Psi_\beta(0)$ pour cette composante. En reprenant α comme paramètre, on peut représenter la totalité des composantes irréductibles de $F^{-1}(\beta)$ par une équation

$$\eta+a(\xi, \alpha)=0,$$

$a(\xi, \alpha)$ étant une fonction continue de deux variables complexes ξ et α, et holomorphe de la variable ξ. Cela veut dire que p est un point (α) de $\mathcal{S}$. *C.Q.F.D.*

19. Lemme 7. *Soit $\mathcal{S}$ une société d'espèce quelconque dans un domaine D. Soit p un point de D qui est différent de point d'indétermination de $\mathcal{S}$. Alors pour que p soit un point (β) de $\mathcal{S}$, il faut et il suffit que p est un point auquel $\mathcal{S}$ est localement continue.*

20. *Démonstration du lemme* 7. 1° Supposons que p soit un point (β) de $\mathcal{S}$. Alors $\mathcal{S}$ est localement continue en p. Ce qui avait été démontré dans le mémoire précédent ([8] p. 71).

2° Supposons, inversement, que $\mathcal{S}$ est localement continue en p. Soient $v_p\subseteq D$ un voisinage de p et ξ, η un système de coordonnées locales dans v_p tel que $p=(\xi=0, \eta=0)$ et $v_p=\{|\xi|<r, |\eta|<r_1\}$, r et r_1 étant des nombres positifs. Et soient $\sigma_\varepsilon=\{\beta||\beta|<\varepsilon\}$ et $\bar{\sigma}_\varepsilon=\{\beta||\beta|\leqq\varepsilon\}$ des voisinages ouvert et fermé de l'origine du plan $C^1\{\beta\}$, ε étant un nombre positif. Soit $F: v_p\to\sigma_\varepsilon$ une fonction intérieure qui définit la restriction $\mathcal{S}_p$ de $\mathcal{S}$ à v_p. Ce qui est possible en prenant r, r_1 et ε suffisamment petits. On suppose sans perdre la généralité que $F(0, 0)=0$, et que la surface caractéristique $M_0=(\xi=0, |\eta|<r_1)$ ne soit pas contenue dans $\mathcal{S}_p$. On détermine trois nombres r, r_1 et ε tels que pour tout $\beta\in\bar{\sigma}_\varepsilon$, la surface caractéristique $F^{-1}(\beta)$ passe par des points de la partie $(\xi=0, |\eta|<r_1/2)$ de M_0 et ne rencontre pas l'hypersurface $H=(|\xi|\leqq r, |\eta|=r_1)$ à 3 dimensions réelles. C'est possible en reprenant r, r_1 et ε suffisamment petits et convenables. Soit $M_\xi=(\xi=\xi, |\eta|<r_1)$ la surface caractéristique passant par le point $(\xi, 0)$. Soit φ_ξ la restriction de F sur M_ξ. D'après le lemme 4, φ_ξ est une transformation intérieure de la variable η.

Prenons un point (ξ', η') sur une surface caractéristique $F^{-1}(\beta')$, $\beta'\in\bar{\sigma}_\varepsilon$. Supposons que (ξ', η') n'est ni de point multiple de $F^{-1}(\beta')$, ni de point où une tangente de $F^{-1}(\beta')$ est parallèle à l'axe des η. Alors, d'après le résultat précédent, au voisinage de (ξ', η'), $\mathcal{S}_p$ est représentée par une équation

$$\eta+a(\xi, \alpha)=0\,,$$

$a(\xi, \alpha)$ étant une fonction continue de deux variables ξ et α, et holomorphe de la variable ξ. Dans cette condition, si la transformation intérieure $\varphi_{\xi'}$ prend la valeur β' de multiplicité m' au point $\eta=\eta'$, m' étant un entier positif, la transformation intérieure $\varphi_{\xi''}$ prend la valeur β' de même multiplicité m' au point $\eta=\eta''$, (ξ'', η'') étant un point sur $F^{-1}(\beta')$ voisin de (ξ', η'). Or, comme on voit facilement, la multiplicité m' est constante pour tout point (ξ, η) sur la composante irréductible dans v_p de $F^{-1}(\beta')$ qui passe par (ξ', η'), sauf pour des points exceptés au commencement. D'où cet entier m' s'appelle multiplicité de la valur β' prise par F sur cette composante.

3° Cela étant, posons e l'ensemble de tout $\beta\in\bar{\sigma}_\varepsilon$ tel que la surface caractéristique $F^{-1}(\beta)$ contienne au moins une composante irréductible dans v_p sur laquelle F prend la valeur β de multiplicité >1. Alors e est fini. En effet prenons une surface caractéristique M_ξ. Posons e' l'ensemble de valeurs de φ_ξ de multiplicité >1 dans $|\eta|<r_1$. Alors e' est fini. Or e est contenu dans e'. D'où l'assertion.

D'après ce qui précède, toute surface caractéristique $F^{-1}(\beta)$, $\beta\in\bar{\sigma}_\varepsilon-e$, a exactement m points communs avec une surface caractéristique M_ξ, ξ étant un point général relativement à $F^{-1}(\beta)$ et m étant un entier positif fixé pour tout $\beta\in\bar{\sigma}_\varepsilon-e$. D'où, d'après un théorème bien connu de Weierstrass, $F^{-1}(\beta)$ est représentée dans v_p par une équation pseudopolynôme d'ordre m (et sans composante multiple):

$$\eta^m+a_1(\xi, \beta)\eta^{m-1}+\cdots+a_m(\xi, \beta)=0\,,$$

m étant fixé pour tout $\beta\in\bar{\sigma}_\varepsilon-e$ et $a_j(\xi, \beta)$ étant fonctions holomorphes de la variable ξ dans $|\xi|<r$. On peut facilement vérifier que $a_j(\xi, \beta)$ sont des fonctions continues de deux variables complexes ξ et β dans $\{|\xi|<r, \beta\in\bar{\sigma}_\varepsilon-e\}$. D'ailleurs, la définition des $a_j(\xi, \beta)$ est prolongée en tout point $\beta\in e$ par la continuité de façon que la pseudopolynôme ainsi prolongée représente la surface caractéristique $F^{-1}(\beta)$, $\beta\in e$. Cela veut

dire que p est un point (β) de $\mathcal{S}$. *C.Q.F.D.*

21. 1° Soit $F: D \to R$ une application intérieure. Soit e l'ensemble de points d'indétermination de F. Soit S la société de surfaces caractéristiques définie par F dans D.

Lemme 8. *Dans cette circonstance, S est globalement normale dans D.*

En effet, pour tout point $p \in D-e$, normalité globale de S en p résulte de la démonstration du lemme 7 précédent. Pour un point $p \in e$, celle résulte de la pseudoconvexité du domaine de normalité globale d'une famille de surfaces caractéristiques de première espèce. Cela achève la démonstration.

Pour toute surface caractéristique $\Sigma \in S$, on définit la *multiplicité de la valeur prise par F sur Σ*, d'après la démonstration du lemme 7 précédent. Elle se détermine indépendemment du choix d'un point simple de Σ et de son voisinage de coordonnées locales. Si la multiplicité de la valeur de F sur Σ est >1, Σ est appelée *composante multiple par rapport à F*. Cela étant, on a un énoncé suivant dont la démonstration est immédiate.

Lemme 9. *Dans cette circonstance, la famille de toutes les composantes multiples par rapport à F, n'en contient qu'une infinité dénombrable au plus ne s'accumulant pas à l'intérieur de D.*

2° T. Nishino [10] a fait une étude sur les fonctions entières de plusieurs variables complexes. Et en particulier, il a recherché la structure globale des sociétés de surfaces caractéristiques définies par ces fonctions. Or, dans la démonstration, il n'a utilisé aucune analycité, mais seulement cotinuité résumée dans les lemmes 8 et 9 précédents. D'où toutes les définitions et tous les résultats établis sont aussi varables pour une société de surfaces caractéristiques qui est globalement continue. Dans ce qui suit on emploie librement les terminologies et les résultats de T. Nishino, sans répéter leurs définitions. Particulièrement on utilisera les surfaces conjuguées l'une à l'autre et les surfaces irrégulières de type (A) ou de type (B). (*V.* [10] pp. 62-64.) Voici un énoncé ([10] p. 76) qui sera utilisé dans le § 4:

Théorème B. *Pour une société S de surfaces caractéristiques dans D qui est globalement continue, la famille de toutes les surfaces irrégulières de S est de première catégorie au sens de R. Baire.*

§ 3. Ensembles pseudoconcaves

Dans le paragraphe actuel, on se borne à traiter les ensembles pseudoconcaves dans un dicylindre. Tous les énoncés donnés ici subsistent aussi pour cels dans un domaine quelconque dans l'espace $\boldsymbol{P}^2$ avec les modifications évidentes.

22. Soient γ et δ des cercles sur le plan $\boldsymbol{C}^1\{x\}$ et sur le plan $\boldsymbol{C}^1\{y\}$ respectivement. Soit δ' un cercle concentrique avec δ et contenu à l'intérieur de δ. Soient $\Delta=\{\gamma, \delta\}$ et $\Delta'=\{\gamma, \delta'\}$ des dicylindres dans l'espace $C^2\{x, y\}$. Soit L_x un plan caractéristique de la forme $(x=x,\ y\in C^1)$.

Soit I un ensemble de points quelconque dans Δ. On désigne par I^a l'adhérence de I dans Δ. On désigne par I^x la section de I par L_x: $I^x=I\cap L_x$. $I^{x,a}$ signifie l'adhérence de I^x dans Δ^x. $I^{a,x}$ signifie la section de I^a par L_x: $I^{a,x}=I^a\cap L_x$.

23. *Les dérivés spatiaux et les dérivés sectionnels des ensembles fermés.* 1° Soit E un ensemble fermé dans Δ. Soit J un sous-ensemble de E, pouvant être vide. On dit qu'un point $p\in\Delta$ est un *point de J-première espèce* de E si $p\notin J^a$ et s'il y a un voisinage $v_p\subseteqq\Delta$ de p tel que $E\cap v_p$ soit une surface caractéristique de première espèce dans v_p. Si non, *point de J-seconde espèce* de E. On appelle *ensemble J-dérivé* de E, et désigne par E_J^1, l'ensemble formé de tous les points de J-seconde espèce de E. D'où, on définit avec une procédé usuelle *ensemble J-dérivé d'ordre* α de E, désigné par E_J^α, pour tout nombre ordinal α des classes I et II. (*V.* R. Baire [1] p. 50.) E_J^α est fermé dans Δ et comprend J^a. On désigne par E_J^Ω l'ensemble commun à tous les ensembles E_J^α. Ω signifie le premier nombre ordinal de la classe III. Tout point de E_J^Ω est un point de J-seconde espèce de E_J^Ω lui-même.

2° Soient Δ^x, E^x et J^x les sections respectivement de Δ, de E et de J par un plan caractéristique L_x, $x\in\gamma$. E^x est un ensemble fermé dans Δ^x et J^x un sous-ensemble de E^x. On did qu'un point $p\in\Delta^x$ est un *point de J^x-première espèce* de E^x si $p\notin J^{x,a}$ et s'il y a un voisinage $\sigma_p\subseteqq\Delta^x$ de p tel que $E^x\cap\sigma_p$ soit un ensemble discret de points dans σ_p. Si non, *point de J^x-seconde espèce* de E^x. On appelle *ensemble J^x-dérivé* de E^x, et désigne par $E_J^{x,1}$, l'ensemble formé de tous les points de J^x-seconde espèce de E^x; d'où on définit *ensemble J^x-dérivé d'ordre* α de E^x, désigné par $E_J^{x,\alpha}$, pour tout nombre ordinal α des classes I et II. On désigne par $E_J^{x,\Omega}$ l'ensemble commun à tous les ensembles $E_J^{x,\alpha}$. $E_J^{x,\alpha}$ sera aussi appelé ensemble J-dérivé sectionnel d'ordre α de E sur L_x. La section de E_J^α par L_x, désignée par $E_J^{\alpha,x}$, sera alors appelée ensemble J-dérivé spatial d'ordre α de E sur L_x.

3° Quand J est vide, on supprime parfois la lettre J dans les notations précédentes. Si E^Ω est vide, E est dit *dégénératif dans* Δ. Si $E^{x,\Omega}$ est vide, E^x est dit *dégénératif dans* Δ^x. Cela étant, on a les énoncés suivants:

a) Il existe toujours un certain nombre β des classes I ou II tel que $E_J^\beta=E_J^\Omega$, et $E_J^{x,\beta}=E_J^{x,\Omega}$, x étant fixé à l'avance;

b) Pour tout nombre $\alpha\leqq\Omega$, on a les égalités $E_J^\alpha=E^\alpha\cup J^a$ et $E_J^{x,\alpha}=E^{x,\alpha}\cup J^{x,a}$;

c) E^x est dégénératif dans Δ^x, si et seulement si le nombre de points de E^x est au plus infini dénombrable;

d) E est dégénératif dans Δ, si et seulement si E est une surface caractéristique de première ou de seconde espèce dans Δ. Dans ce cas $\Delta-E$ est toujours un domaine.

La vérification des énoncés a), b) et c) est immédiate. Quant à la vérification de l'énoncé d), on pourra la faire à l'aide du théorème C_1 qui sera démontré à la fin du paragraphe actuel.

24. *Les ensembles pseudoconcaves*[3]. 1° Soit E un ensemble de points dans Δ, pouvant être vide. E est dit *pseudoconcave dans* Δ, s'il satisfait aux deux conditions suivantes:

a) *E est fermé dans Δ;*

b) *E satisfait au théorème de continuité en tout point $p \in E$ par rapport à un système de coordonnées locales quelconques au voisinage de p.*

Une surface caractéristique de première espèce dans Δ est un premier exemple d'ensembles pseudoconcaves. Un ensemble pseudoconcave contenu dans une surface caractéristique de première espèce dans Δ est formé par quelques composantes irréductibles de cette surface caractéristique. Une surface caractéristique de seconde espèce, si elle est fermée dans Δ, est un second exemple d'ensembles pseudoconcaves. Et en général, un ensemble fermé dans Δ est pseudoconcave s'il est formé par une réunion quelconque des ensembles pseudoconcaves définis respectivement dans leurs ouverts de Δ.

2° Pour l'inverse de quelques uns de ces énoncés, les lemmes b et c suivants sont fondamentaux. (*V*. K. Oka [13] pp. 128 et 135.) Le mot capacité signifie dans le mémoire actuel *capacité logarithmique.*

Lemme b. *Soit E un ensemble pseudoconcave dans Δ et contenu dans Δ'. Supposons qu'il existe un ensemble $e \subseteqq \gamma$ de capacité non nulle tel que, pour tout point $x \in e$, E^x ne contienne qu'un nombre fini de points dans Δ^x qui peuvent varier avec x. Alors il en est ainsi pour tout point $x \in \gamma$ et cela de façon que E^x, $x \in \gamma$, consiste des fonctions algébroïdes en nombre fini de la variable x.*

Lemme c. *Soit E un ensemble pseudoconcave dans Δ. Alors E^α, α étant un nombre des classes I ou II, est aussi pseudoconcave dans Δ.*

25. 1° Soit E un ensemble fermé de points dans Δ. Soit Γ un sous-ensemble de E, pouvant être fermé ou non dans Δ. Γ est appelé *surface caractéristique générale* (en abrégé, surface générale) dans E, s'il est représentable par une réunion dénombrable de surfaces caractéristiques de première espèce définies respectivement dans leurs ouverts de Δ de manière que le prolongement analytique contenu dans E de chacune de ces surfaces caractéristiques au delà de son ouvert n'engendre aucun point à nouveau en dehors de Γ. D'après la définition, toutes les notions relatives aux surfaces caractéristiques dans Δ expliquées précédemment (N°4) s'appliquent aussi aux surfaces caractéristiques générales dans E.

2° Comme un cas particulier, on a un énoncé suivant:

Lemme 10. *Soit E un ensemble fermé dans Δ, représentable par une réunion dénombrable de surfaces caractéristiques de première espèce définies respectivement dans leurs ouverts de Δ. Alors E est une surface caractéristique de première ou de seconde espèce dans Δ.*

---

3) Les ensembles de la classe (H) d'après K. Oka. On a adopté ici la dénomination d'après T. Nishino.

En effet, soit $\tilde{E}$ la plus petite entre les surfaces caractéristiques dans Δ qui comprennent E. Soit Γ_1 une composante irréductible de $\tilde{E}$ dans Δ. Posons $E_1=E\cap\Gamma_1$. Regardons Γ_1 comme une surface de Riemann et E_1 comme un ensemble de points sur la surface de Riemann Γ_1. Alors E_1 est un ensemble fermé sur Γ_1, représentable par une réunion dénombrable de points ou d'ensembles ouverts sur Γ_1. De plus, d'après la définition de Γ_1, E_1 contient au moins un ensemble ouvert. Dans cette condition, si $E_1\neq\Gamma_1$, l'ensemble de points frontières de E_1 sur Γ_1 est dénombrable. Donc E_1 ne peut admettre aucuns points extérieurs sur Γ_1, car Γ_1 étant connexe. C'est une contradiction. Donc on a la relation $E_1=\Gamma_1$. Cela revient à dire que Γ_1 est contenue dans E. D'où la démonstration.

26. Lemme 11. *Si E est un ensemble pseudoconcave dans Δ et si Γ est une surface caractéristique générale dans E, alors E_Γ^α, α étant un nombre des classes I ou II, est aussi pseudoconcave dans Δ.*

En effet, $E_\Gamma^0=E$ est a priori pseudoconcave dans Δ. Supposons donc que l'on ait déjà établi la pseudoconcavité de $E_\Gamma^{\alpha'}$ dans Δ pour tout nombre $\alpha'<\alpha$. Distinguons deux cas: si α est un nombre de première espèce et a un précédent $\alpha-1$, posons $E_\Gamma^{\alpha-1}=K$. Alors K est pseudoconcave dans Δ, et Γ reste comme une surface générale dans K. Par définition $E_\Gamma^\alpha=K_\Gamma^1$. Posons $\Sigma=K_\Gamma^1-K^1$. Alors Σ est une surface caractéristique de première espèce dans $\Delta-K^1$. Parce que, d'après la définition de K^1, pour tout point $p\in\Sigma$ il y a un voisinage $v_p\subseteqq\Delta$ de p tel que $K\cap v_p$ soit une surface caractéristique de première espèce dans v_p. De là, on voit que $\Sigma\cap v_p$ est formée par quelques composantes irréductibles dans v_p de cette surface caractéristique de première espèce: composantes contenues dans Γ. $\Sigma\cap v_p$ est donc une surface caractéristique de première espèce dans v_p. p étant un point quelconque de Σ et Σ étant un ensemble fermé dans $\Delta-K^1$, on a vérifié l'énoncé pour Σ. D'après le lemme c, K^1 est un ensemble pseudoconcave dans Δ. Σ est un ensemble pseudoconcave dans $\Delta-K^1$. Donc $K_\Gamma^1(=K^1\cup\Sigma)$ est pseudoconcave dans Δ. Si α est de seconde espèce, on a par définition, la relation $E_\Gamma^\alpha=\bigcap_{\alpha'<\alpha}E_\Gamma^{\alpha'}$. En comptant les relations $E_\Gamma^{\alpha''}\supseteqq E_\Gamma^{\alpha'}$ pour tous les nombres α' et α'' tels que $\alpha''<\alpha'$ et la supposition faite sur les $E_\Gamma^{\alpha'}$, on voit que E_Γ^α est pseudoconcave dans Δ. Cela achève la démonstration.

27. *Les dérivés spatiaux et les dérivés sectionnels des ensembles pseudoconcaves.* 1° Le but principal du paragraphe actuel est démontrer l'énoncé suivant:

Lemme 12. *Soient E un ensemble pseudoconcave dans Δ et Γ une surface caractéristique générale dans E. Alors on peut déterminer un ensemble e de capacité nulle dans γ de façon que l'on ait l'identité*

$$E_\Gamma^{\alpha,x}=E_\Gamma^{x,\alpha}$$

pour tout nombre $\alpha\leqq\Omega$ et pour tout point $x\in\gamma-e$.

2° On peut ici diviser ce lemme 12 en deux lemmes suivants:

Lemme 13. *Sous l'hypothèse précédente, on peut déterminer un ensemble* e' *de capacité nulle dans* γ *de façon que l'on ait l'inclusion*

$$E_\Gamma^{\alpha,x} \supseteqq E_\Gamma^{x,\alpha}$$

pour tout nombre $\alpha \leqq \Omega$ *et pour tout point* $x \in \gamma - e'$.

Lemme 14. *Sous la même hypothèse, pour chaque nombre* α *des classes I ou II on peut déterminer un ensemble* e_α, *pouvant dépendre de* α, *de capacité null dans* γ *de façon que l'on ait l'inclusion*

$$E_\Gamma^{\alpha',x} \subseteqq E_\Gamma^{x,\alpha'}$$

pour tout $\alpha' \leqq \alpha$ *et pour tout* $x \in \gamma - e_\alpha$.

En effet, démontrons le lemme 12 avec les lemmes 13 et 14. D'un côté, avec le lemme 13, on détermine un ensemble e' de capacité nulle dans γ tel que $E_\Gamma^{\alpha,x} \supseteqq E_\Gamma^{x,\alpha}$ pour tout nombre $\alpha \leqq \Omega$ et pour tout point $x \in \gamma - e'$. D'autre côté, soit β le plus petit des nombres β' des classes I ou II tels que $E_\Gamma^{\beta'} = E_\Gamma^{\Omega}$. Avec le lemme 14, on détermine un ensemble $e_{\beta+1}$ de capacité nulle dans γ tel que $\cdots$, $E_\Gamma^{\beta,x} \subseteqq E_\Gamma^{x,\beta}$, $E_\Gamma^{\beta+1,x} \subseteqq E_\Gamma^{x,\beta+1}$ pour tout point $x \in \gamma - e_{\beta+1}$. Si l'on pose $e = e_{\beta+1} \cup e'$, e est de capacité nulle dans γ. On a les identités $E_\Gamma^{\beta,x} = E_\Gamma^{x,\beta}$ et $E_\Gamma^{\beta+1,x} = E_\Gamma^{x,\beta+1}$ pour tout $x \in \gamma - e$. Or on a les identités: $E_\Gamma^{x,\beta} = E_\Gamma^{\beta,x} = E_\Gamma^{\beta+1,x} = E_\Gamma^{x,\beta+1}$, $x \in \gamma - e$. D'où, on a les identités $E_\Gamma^{x,\alpha} = E_\Gamma^{x,\beta} = E_\Gamma^{\beta,x} = E_\Gamma^{\alpha,x}$ pour tout nombre $\alpha \geqq \beta$ et pour tout point $x \in \gamma - e$. On a aussi, d'après les définitions de $e_{\beta+1}$ et de e', les identités $E_\Gamma^{x,\alpha} = E_\Gamma^{\alpha,x}$ pour tout nombre $\alpha < \beta$ et pour tout point $x \in \gamma - e$. *C. Q. F. D.*

On va dans la suite démontrer les lemmes 13 et 14 eux-mêmes.

28. *Démonstration du lemme* 13. Posons $K = E - E^{\Omega}$. D'après le lemme 10, K est une surface caractéristique dans $\Delta - E^{\Omega}$. Désignons par e' l'ensemble de tout point $x \in \gamma$ tel que le plan caractéristique L_x contienne au moins une composante irréductible de K. Alors e' est un ensemble dénombrable et a priori de capacité nulle dans γ. Or on a la relation $E_\Gamma^{0,x} = E_\Gamma^{x,0}$, pour tout $x \in \gamma$ sans exception. Supposons donc que l'on ait déjà établi l'inclusion $E_\Gamma^{\alpha',x} \supseteqq E_\Gamma^{x,\alpha'}$ pour tout $\alpha' < \alpha$ et pour tout $x \in \gamma - e'$. Distinguons deux cas: si α est un nombre de première espèce et a un précédent $\alpha - 1$, soit $p = (x, y) \in L_x$, $x \in \gamma - e'$, un point de Γ-première espèce de $E_\Gamma^{\alpha-1}$. Alors $p \notin \Gamma^{\alpha}$ et il y a un voisinage $v_p \subseteqq \Delta$ de p tel que $E_\Gamma^{\alpha-1} \cap v_p$ soit une surface caractéristique de première espèce dans v_p qui forme une partie de K. Prenons un voisinage $\sigma_p \subseteqq \Delta^x$ de p suffisamment petit. La condition que $x \in \gamma - e'$ entraîne que $E_\Gamma^{\alpha-1,x} \cap \sigma_p$ est un ensemble discret de points dans σ_p. La condition que $p \notin \Gamma^{\alpha}$ entraîne a priori que $p \notin \Gamma^{x,\alpha}$. Dans cette condition, avec la supposition que $E_\Gamma^{\alpha-1,x} \supseteqq E_\Gamma^{x,\alpha-1}$, on peut vérifier immédiatement que p est un point de Γ^x-première espèce de $E_\Gamma^{x,\alpha-1}$. p étant un point quelconque de la nature citée, il suit d'où l'inclusion $E_\Gamma^{\alpha,x} \supseteqq E_\Gamma^{x,\alpha}$. Si α est de seconde espèce, on a, par définition, les relations $E_\Gamma^{\alpha,x} = \bigcap_{\alpha' < \alpha} E_\Gamma^{\alpha',x}$ et $E_\Gamma^{x,\alpha} = \bigcap_{\alpha' < \alpha} E_\Gamma^{x,\alpha'}$. Avec la supposition que $E_\Gamma^{\alpha',x} \supseteqq E_\Gamma^{x,\alpha'}$, pour tout $\alpha' < \alpha$ et pour tout $x \in \gamma - e'$, il suit d'où l'inclusion $E_\Gamma^{\alpha,x} \supseteqq E_\Gamma^{x,\alpha}$.
On a achevé la démonstration du lemme 13.

29. *Démonstration du lemme* 14. 1° On a l'identité $E_{\Gamma}^{0,x}=E_{\Gamma}^{x,0}$, pour tout $x\in\gamma$ sans exception. Supposons donc que l'on ait déjà établi, pour chaque nombre $\alpha'<\alpha$, l'inclusion $E_{\Gamma}^{\alpha'',x}\subseteqq E_{\Gamma}^{x,\alpha''}$ pour tout $\alpha''\leqq\alpha'$ et pour tout $x\in\gamma-e_{\alpha'}$, $e_{\alpha'}$ étant un ensemble de capacité nulle dans γ. Distinguons deux cas: si α est un nombre de première espèce et a un précédent $\alpha-1$, on peut déterminer un ensemble e'' de capacité nulle dans $\gamma-e_{\alpha-1}$ de façon que l'on ait l'inclusion

$$E_{\Gamma}^{\alpha,x}\subseteqq E_{\Gamma}^{x,\alpha}$$

pour tout $x\in\gamma-\{e_{\alpha-1}\cup e''\}$. Si l'on donc pose $e_\alpha=e_{\alpha-1}\cup e''$, e_α répondrera à la demande dans ce cas. Si α est un nombre de seconde espèce, on a par définition, les identités $E_{\Gamma}^{\alpha,x}=\bigcap_{\alpha'<\alpha}E_{\Gamma}^{\alpha',x}$ et $E_{\Gamma}^{x,\alpha}=\bigcap_{\alpha'<\alpha}E_{\Gamma}^{x,\alpha'}$. Pour chaque $\alpha'<\alpha$, on a, d'après la supposition, l'inclusion $E_{\Gamma}^{\alpha',x}\subseteqq E_{\Gamma}^{x,\alpha'}$, $x\in\gamma-e_{\alpha'}$. Posons $e_\alpha=\bigcup_{\alpha'<\alpha}e_{\alpha'}$. e_α est de capacité nulle dans γ, car e_α étant une réunion dénombrable d'ensembles de capacité nulle dans γ. D'où, e_α répondrera à la demande dans ce cas.

30. 2° Démontrons ce que l'on a dit pour le cas où α est de première espèce. Désignons par e'' l'ensemble de tout point $x\in\gamma-e_{\alpha-1}$ tel que le plan caractéristique L_x contienne au moins un point de Γ^x-première espèce de $E_{\Gamma}^{x,\alpha-1}$, ce point étant un point de Γ-seconde espèce de $E_{\Gamma}^{\alpha-1}$. Désignons par (x, η_x) un point de cette espèce sur L_x correspondant à chaque $x\in e''$. D'après sa définition, pour tout point (x, η_x), $x\in e''$, on peut trouver dans Δ^x un cercle de la forme (x, δ_x) avec $\delta_x=\{y\,|\,|y-\eta'_x|<\rho_x\}$, η'_x étant un nombre complexe dont la partie réelle et la partie imaginaire sont toutes les deux rationnelles et ρ_x un nombre positif rationnel, tel que les deux conditions suivantes soient réalisées:

$$\Gamma^{x,\alpha}\cap(x, \delta_x)=\emptyset\,; \tag{2}$$

$$E_{\Gamma}^{x,\alpha-1}\cap(x, \delta_x)=\{(x, \eta_x)\}. \tag{3}$$

Le point (x, η_x) étant un point de Γ-seconde espèce de $E_{\Gamma}^{\alpha-1}$, avec la condition (3) et avec l'inclusion $E_{\Gamma}^{\alpha-1,x}\subseteqq E_{\Gamma}^{x,\alpha-1}$, $x\in\gamma-e_{\alpha-1}$, on a la relation

$$E_{\Gamma}^{\alpha-1,x}\cap(x, \delta_x)=\{(x, \eta_x)\}. \tag{4}$$

Supposons, par l'absurde, que e'' soit de capacité non nulle. On fait correspondre à chaque $x\in e''$ le cercle δ_x sur un plan $C^1\{y\}$. La famille des δ_x, $x\in e''$, est dénombrable. e'' sera donc représenté par une réunion dénombrable des e_j ($j=1, 2, \cdots$) tels que le cercle δ_x correspondant soit même pour tout $x\in e_j$, j étant fixé. Il existe alors au moins un entre ces e_j, e_1 par example, de capacité non nulle. Prenons un point $\xi\in e_1$ tel qu'au voisinage arbitrairement petit de ξ la partie de e_1 soit de capacité non nulle. Envisageons le point (ξ, η_ξ) qui correspond à ξ. Soit $\delta_\xi=\{y\,|\,|y-\eta'_\xi|<\rho_\xi\}$ le cercle qui correspond à ξ. Soit $\gamma'_\xi\subseteqq\gamma$ un cercle contenant ξ sur le plan $C^1\{x\}$. Supposons que γ'_ξ soit suffisamment petit pour que la condition suivante soit réalisée: Pour tout $x\in\gamma'_\xi$, en prenant dans Δ^x les deux cercles (x, δ'_ξ) et (x, δ''_ξ) avec $\delta'_\xi=\{y\,|\,|y-\eta'_\xi|<\rho'_\xi\}$ et $\delta''_\xi=\{y\,|\,|y-\eta'_\xi|<\rho''_\xi\}$, ρ'_ξ et ρ''_ξ étant des nombres positifs fixés, suffisamment approchés de ρ_ξ, et $\rho''_\xi<\rho'_\xi<\rho_\xi$, on a l'inclusion

(5) $$E_{\Gamma}^{\alpha-1,x}\cap(x,\ \delta'_\xi)\subseteqq(x,\ \delta''_\xi).$$

C'est possible, car $E_{\Gamma}^{\alpha-1}$ étant fermé dans Δ. Posons $\Delta'_\xi=\{\gamma'_\xi,\ \delta'_\xi\}$ un dicylindre contenu dans Δ. Δ'_ξ comprend le point $(\xi,\ \eta_\xi)$. $E_{\Gamma}^{\alpha-1}$ est, d'après le lemme 11, pseudoconcave dans Δ. $\gamma'_\xi\cap e_1$ est de capacité non nulle. Donc, avec les conditions (4) et (5), la partie $E_{\Gamma}^{\alpha-1}\cap\Delta'_\xi$ satisfait à la supposition du lemme b. D'où il suit que $E_{\Gamma}^{\alpha-1}\cap\Delta'_\xi$ est une surface caractéristique représentée par une fonction holomorphe $y=\varphi(x)$ de la variable x dans γ'_ξ. De plus la partie $\Gamma\cap\Delta'_\xi$ est vide. Puisque, Γ étant une surface générale dans $E_{\Gamma}^{\alpha-1}$, si $\Gamma\cap\Delta'_\xi$ contient au moins un point, elle doit être identique à la surface caractéristique $y=\varphi(x)$, $x\in\gamma'_\xi$. Donc elle doit rencontrer, dans le cercle $(x,\ \delta'_\xi)$, à tout plan caractéristique L_x, $x\in\gamma'_\xi$, et en particulier à tout L_x, $x\in\gamma'_\xi\cap e_1$. C'est une contradiction avec la condition (3). On a ainsi vu que tout point de $E_{\Gamma}^{\alpha-1}\cap\Delta'_\xi$, et en particulier le point $(\xi,\ \eta_\xi)$, est un point de Γ-première espèce de $E_{\Gamma}^{\alpha-1}$. C'est une contradiction avec la définition du point $(\xi,\ \eta_\xi)$. On a ainsi démontré que e'' est de capacité nulle.

On a achevé la démonstration du lemme 14.

31. Les deux théorèmes C_1 et C_2 suivants avaient été démontrés séparément. (*V.* K. Oka [13] pp. 136-146.) On les redémontre ici en unité comme conséquences du lemme 12 précédent.

Théorème C_1. *Soit E un ensemble pseudoconcave dans Δ et contenu dans Δ'. Supposons qu'il existe un ensemble $e\subseteqq\gamma$ de capacité non nulle tel que pour tout point $x\in e$, E^x soit dégénératif dans Δ^x. Alors on en déduit*:

1° *Que E est dégénératif dans Δ*; *et*

2° *Que E est une surface caractéristique de première ou de seconde espèce dans Δ*; *et*

3° *Que pour tout point $x\in\gamma$ sans exception, E^x est dégénératif dans Δ^x.*

En effet 1°) supposons par l'absurde que E^Ω ne soit pas vide. Alors la projection de E^Ω sur le plan $\boldsymbol{C}^1\{x\}$ est identique à γ, car E^Ω étant contenu dans Δ'. D'après le lemme 12, on peut déterminer un ensemble e' de capacité nulle dans γ de façon que l'on ait l'identité $E^{\Omega,x}=E^{x,\Omega}$ pour tout $x\in\gamma-e'$. $e-e'$ est un ensemble de capacité non nulle. Prenons un point quelconque $x'\in e-e'$. L'identité $E^{\Omega,x'}=E^{x',\Omega}$ est impossible, car le membre à gauche est non vide, cel à droite étant vide. D'où E^Ω doit être vide.

2°) E étant dégénératif dans Δ, E est une surface caractéristique dans Δ, ce qui se résulte d'après le lemme 10.

3°) D'après l'hypothèse et d'après 2°), E ne contient aucune composante irréductible contenue dans un plan caractéristique L_x, $x\in\gamma$. Donc, d'après la démonstration du lemme 13, pour tout point $x\in\gamma$ sans exception, on a l'inclusion

$$E^{\Omega,x}\supseteqq E^{x,\Omega}.$$

Le membre à gauche étant vide, cel à droite doit aussi être vide. Cela signifie que

E^x doit être dégénératif dans Δ^x. *C. Q. F. D.*

Théorème C_2. *Soient E_1 et E_2 des ensembles pseudoconcaves dégénératifs dans Δ et tous les deux contenus dans Δ'. Supposons qu'il existe un ensemble $e \subseteqq \gamma$ de capacité non nulle tel que pour tout point $x \in e$, on ait l'égalité $E_1^x = E_2^x$. Alors, pour tout point $x \in \gamma$ sans exception, on a l'égalité $E_1^x = E_2^x$.*

En effet, 1°) remarquons d'abord un fait suivant: Soit E un ensemble pseudoconcave dégénératif dans Δ. Soit Γ une composante irréductible de E. Alors on peut déterminer un ensemble e' de capacité nulle dans γ de façon que l'on ait l'identité

$$\Gamma^{a,x} = \Gamma^{x,a}$$

pour tout $x \in \gamma - e'$. Puisque, d'un côté on a les identités $E_\Gamma^{\Omega,x} = E^{\Omega,x} \cup \Gamma^{a,x}$, $E_\Gamma^{x,\Omega} = E^{x,\Omega} \cup \Gamma^{x,a}$ pour tout $x \in \gamma$, $E^{\Omega,x}$ étant vide pour tout $x \in \gamma$. D'autre côté, d'après le lemme 12, on peut déterminer un ensemble e' de capacité nulle dans γ de façon que l'on ait les identités $E^{\Omega,x} = E^{x,\Omega}$, $E_\Gamma^{\Omega,x} = E_\Gamma^{x,\Omega}$ pour tout $x \in \gamma - e'$. Donc pour tout $x \in \gamma - e'$, on a une suite des identités: $\Gamma^{a,x} = E^{\Omega,x} \cup \Gamma^{a,x} = E_\Gamma^{\Omega,x} = E_\Gamma^{x,\Omega} = E^{x,\Omega} \cup \Gamma^{x,a} = E^{\Omega,x} \cup \Gamma^{x,a} = \Gamma^{x,a}$.

2°) Cela étant, envisageons les ensembles dégénératifs donnés E_1 et E_2. D'après l'hypothèse, ils ne contiennent aucune composante irréductible contenue dans un plan caractéristique L_x, $x \in \gamma$. Prenons une composante irréductible Γ_1 quelconque de E_1. Alors, d'après 1°) il existe un ensemble e' de capacité nulle dans γ tel que Γ_1^x ne soit vide pour aucun $x \in \gamma - e'$. Supposons par l'absurde que Γ_1 ne soit pas contenue dans E_2. Alors $\Gamma_1 \cap E_2$ ne contient qu'un nombre infini dénombrable au plus de points. Soit e'' projection de $\Gamma_1 \cap E_2$ sur le plan $\boldsymbol{C}^1\{x\}$. Alors $e - \{e' \cup e''\}$ est un ensemble de capacité non nulle. Prenons un point $x' \in e - \{e' \cup e''\}$. Prenons un point p' sur le plan caractéristique $L_{x'}$ tel qu'il soit contenu dans Γ_1. Or le point p' n'est pas contenu dans E_2. Ce qui contredit à l'hypothèse. Donc $\Gamma_1 \subseteqq E_2$. D'où l'inclusion $E_1 \subseteqq E_2$. En échangeans les rôles de E_1 et de E_2, on a l'inclusion $E_2 \subseteqq E_1$. Donc $E_1 = E_2$: $E_1^x = E_2^x$ pour tout point $x \in \gamma$. *C. Q. F. D.*

§ 4. Propriétés d'une société de surfaces caractéristiques à singularité essentielle dégénérative

32. Théorème 1: *Soient $\tilde{D}$ un domaine dans l'espace $\boldsymbol{C}^2$ et E un ensemble dégénératif dans $\tilde{D}$. Posons $D = \tilde{D} - E$. Soit S une société de surfaces caractéristiques dans D, qui est globalement analytique. Supposons que S a au moins un point de E comme un de ses points singuliers essentiels. Alors l'ensemble $E^* \subseteqq E$ des points singuliers essentiels de S est un ensemble dégénératif dans $\tilde{D}$.*

On a de plus les énoncés suivants:

I. *La projection analytique de S doit être analytiquement équivalente à une des surfaces de Riemann $\boldsymbol{P}^1$, $\boldsymbol{C}^1$, $\boldsymbol{C}^*$ ou $\boldsymbol{T}_\lambda^1$.*

II. *Si de plus S ne contient que des surfaces irrégulières de type (A), alors:*

1° *La famille S^* des surfaces caractéristiques de S qui s'accumulent à E^* est de* *seconde catégorie au sens de R. Baire; et*

2° *Chaque surface caractéristique $\Sigma\in S^*$ s'accumule à E^* d'une manière stricte. Précisément:*

Pour tout point $p\in E^*$, prenons un système de coordonnées locales ξ et η au voisinage $v_p\subseteqq\tilde{D}$ de p tel que: a) $p=(\xi=0,\ \eta=0)$ *et* $v_p=\{|\xi|<r,\ |\eta|<r_1\}$, *$r$ et r_1 étant des nombres positifs; et* b) $E^*\cap\{|\xi|<r,\ |\eta|=r_1\}=\emptyset$. *Alors l'ensemble de points $\Sigma\cap v_p\cap M_\xi$, M_ξ étant une surface caractéristique $(\xi=\xi,\ |\eta|<r_1)$, contient une infinité de points qui s'accumulent à tout point de $E^*\cap v_p\cap M_\xi$, pour tout ξ dans $|\xi|<r$ sauf des ξ de capacité null.*

33. *Démonstration du théorème* 1. Soit E^1 le dérivé spatial d'ordre 1 de E. Posons $K_1=E-E^1$ et $D_1=\tilde{D}-E^1$. K_1 est une surface caractéristique de première espèce dans D_1. Posons $K^{(1)}$ l'ensemble des composantes irréductibles de K_1 singulières essentielles pour S, d'après le lemme 3 b) (§ 1). Soit $E^{(1)}$ l'ensemble $K^{(1)}$-dérivé de E. $E^{(1)}$ est un ensemble dégénératif dans $\tilde{D}$. On répète pour $E^{(1)}$ la même procédé d'opération faite pour E et obtient un ensemble dégénératif $E^{(2)}$, et ainsi de suite. Cette procédé d'opération est définie, d'une manière usuelle, relativement à tout nombre ordinal des classes I et II. Il existe un nombre α des classes I ou II tel que pour tout nombre $\beta\geqq\alpha$ on a l'identité $E^{(\alpha)}=E^{(\beta)}$. C'est-à-dire que tout point de $E^{(\alpha)}$ est un point singulier essentiel de S. D'où $E^*=E^{(\alpha)}$ et E^* est un ensemble dégénératif dans $\tilde{D}$. E^* n'est pas vide, d'après l'hypothèse.

Etablissons maintenant les énoncés I et II:

I. Soit $E^{*,1}$ le dérivé spatial d'ordre 1 de E^*. Posons $K^*=E^*-E^{*,1}$. Alors toute composante irréductible de K^* est une composante singulière essentielle pour S. D'après le théorème A (§ 1), la projection analytique de S doit être $\boldsymbol{P}^1$, $\boldsymbol{C}^1$, $\boldsymbol{C}^*$ ou $\boldsymbol{T}^1_\lambda$.

II. 1° Quand S ne contient que des surfaces irrégulières de type (A), il y a une procédé concrète pour la formation de la projection analytique de S (T. Nishino [11] pp. 259-263). Soit F: $D\to R$ la projection analytique de S. Alors, d'après le théorème B (§ 2), il y a un ensemble $R'\subseteqq R$ de seconde catégorie au sens de R. Baire tel que pour toute valeur $c\in R'$, la surface caractéristique $F^{-1}(c)$ soit irréductible dans D. Soit Σ une composante irréductible de K^*. Alors $F^{-1}(c)$ s'accumule à tout point de Σ, pour toute valeur $c\in R'$ sauf deux valeurs exceptionnelles au plus, d'après le lemme a (§ 1) et un théorème de P. Thullen [17]. K^* ne contenant des composantes qu'en nombre infini dénombrable au plus, l'ensemble des valeurs exceptionnelles dans R' est dénombrable au plus. Soit $R''\subseteqq R'$ l'ensemble des valeurs différentes des valeurs exceptionnelles. R'' est un ensemble de seconde catégorie. Tout point de E^* est un point d'accumulation des points de K^*. Donc toute surface caractéristique $F^{-1}(c)$, $c\in R''$, s'accumule à E^*. D'où la famille S^* des surfaces caractéristiques s'accumulant à E^* contient toutes les surfaces $F^{-1}(c)$, $c\in R''$. Donc S^* est de seconde catégorie.

2° Dans cette configuration, posons $\Sigma_p=\Sigma\cap v_p$. D'après la démonstration 1°) du théorème C_2 (§ 3), on a alors l'identité $\Sigma_p^{a,\xi}=\Sigma_p^{\xi,a}$ pour tout ξ dans $|\xi|<r$ sauf des ξ de capacité nulle. Elle signifie que tout point de $E^*\cap v_p\cap M_\xi$ est un point d'accumulation de l'ensemble de points $\Sigma\cap v_p\cap M_\xi$.

On a achevé la démonstration du théorème 1.

34. On construit ici des exemples tout simples qui illustrent les énoncés I et II établis dans le théorème 1.

Exemple 1. Soient $\tilde{D}=\boldsymbol{C}^2\{x, y\}$ l'espace entier et $E^*=(x=0, y\in\boldsymbol{C}^1)$ un plan caractéristique dans $\tilde{D}$. Ecrivons $D=\tilde{D}-E^*$. Soit $S=\{(-x+(1/y))e^{-1/x}=c\,|\,c\in\boldsymbol{P}^1\}$ une société de surfaces caractéristiques dans D, qui est globalement analytique. S a tout point de E^* comme un de ses points singuliers essentiels. La projection analytique de S est $\boldsymbol{P}^1$. S ne contient aucune surface irrégulière, car toute surface de S est irréductible dans D. Toute surface de S, sauf deux seules $(-x+(1/y)=0, y\in\boldsymbol{C}^*)$ et $(x\in\boldsymbol{C}^*, y=0)$, s'accumule à E^*.

Exemple 2[4]**.** Soient $\tilde{D}=\boldsymbol{C}^2\{x, y\}$ l'espace entier et $E^*=(x=0, y\in\boldsymbol{C}^1)\cup(x\in\boldsymbol{C}^1, y=0)$ une surface caractéristique dans $\tilde{D}$. Ecrivons $D=\tilde{D}-E^*$. Soit $S=\{xy^{\lambda/i}=c\,|\,1\leqq|c|<|d_\lambda|\}$, $d_\lambda=e^{2\pi\lambda}$, une société de surfaces caractéristiques dans D, qui est globalement analytique. S a tout point de E^* comme un de ses points singuliers essentiels. La projection analytique de S est $\boldsymbol{T}^1_\lambda$. S ne contient aucune surface irrégulière, car toute surface de S est irréductible dans D. Toute surface de S, sans exception, s'accumule à E^*.

Remarque. Dans le théorème 1 II, si l'on admet l'existence des surfaces irrégulières de type (B), on peut dire qu'ils existent diverses sortes de sociétés de surfaces caractéristiques qui ne contiennent aucune surface s'accumulant aux ensembles E^* de leurs points singuliers essentiels. Ce que l'on montrera dans les §§5 et 6 suivants.

35. Maintenant à l'aide du théorème 1, on peut répondre partiellement à la question posée concernant l'analycité globale des sociétés de surfaces caractéristiques (*V.* [8] p. 57):

Soit D un domaine dans l'espace $\boldsymbol{C}^2$. Soit S une société de surfaces caractéristiques de première espèce dans D. Supposons que S soit localement analytique dans D, globalement continue dans D et de plus que S ne contienne que des surfaces irrégulières de type (A) formant une famille de mesure linéaire finie ou infinie dénombrable au plus. Alors S est globalement analytique dans D.

36. En effet, 1° soit $G: D\to R$ une application intérieure qui définit S dans D. Remarquons qu'il suffit de démontrer cet énoncé sous l'hypothèse que S ne contient ni de points d'indétermination, ni de composantes multiples par rapport à G. Car des points d'indétermination n'apportent aucun obstacle pour l'analycité globale. Et quant à une composante multiple, elle deviendra composante singulière artificielle, d'après le théorème 1 II. On va donc démontrer cet énoncé sous cette hypothèse.

2° On définit une relation d'équivalence entre les surfaces de S dans le domaine D telle qu'une classe d'équivalence est formée par toutes les surfaces de S qui sont conjuguées l'une à l'autre. Dans l'espace quotient R_1 de D par rapport à cette relation d'équivalence, on définit d'abord une structure topologique telle que R_1 soit une variété topologique hausdorffienne à 2 dimensions réelles de façon que la projection

4) Je remercie M. T. Ueda de ce qu'il m'a remarqué cet exemple. *Cf.* aussi P. Boutroux [3] p. 12.

naturelle $G_1: D \to R_1$ soit continue. Ce que l'on achève d'une manière concrète. Envisageons les coordonnées locales topologiques sur R_1: Soit c un point de R_1. Soit Σ_c une composante irréductible de la surface caractéristique $G_1^{-1}(c)$. Prenons un point p simple de Σ_c et un plan caractéristique L_p passant par p, transversalement par rapport à Σ_c. Prenons un voisinage σ_p de p suffisamment petit sur L_p. Prenons un voisinage τ_c de c sur R_1 convenable par rapport à σ_p. Alors pour tout point $c' \in \tau_c$ la surface caractéristique $G_1^{-1}(c')$ passe par un et un seul point dans σ_p. Ce qui se résulte, d'après l'hypothèse que S ne contienne aucune composante multiple par rapport à G. Soit $\varphi(c') \in \sigma_p$ le point par lequel passe la surface caractéristique $G_1^{-1}(c')$, $c' \in \tau_c$. Désignons par

$$\varphi : \tau_c \longrightarrow \sigma_p$$

l'application ainsi définie. φ est une application topologique. C'est cette φ que l'on attache à τ_c comme coordonnée locale topologique sur R_1.

3° On démontre ensuite que φ est aussi qualifiée pour une coordonnée locale analytique sur R_1 telle que $G_1: D \to R_1$ soit une application analytique: Soient c_j $(j=1, 2)$ deux points sur R_1. Soit Σ_j une composante irréductible de $G_1^{-1}(c_j)$. Prenons un point simple $p_j \in \Sigma_j$ et le plan caractéristique L_j passant par p_j, transversalement par rapport à Σ_j. Prenons un voisinage σ_j de p_j suffisamment petit sur L_j. Soit τ_j un voisinage convenable de c_j sur R_1. Soit $\varphi_j: \tau_j \to \sigma_j$ la coordonnée locale topologique attachée à τ_j. Supposons que $\tau_1 \cap \tau_2$ soit non vide. Posons $\sigma_j' = \varphi_j(\tau_1 \cap \tau_2)$. Soit

$$\psi : \sigma_1' \longrightarrow \sigma_2'$$

l'application de $\sigma_1' \subseteqq L_1$ sur $\sigma_2' \subseteqq L_2$ définie de la manière que pour tout $\varphi_1(c') \in \sigma_1'$, $c' \in \tau_1 \cap \tau_2$, on pose $\psi(\varphi_1(c')) = \varphi_2(c') \in \sigma_2'$. Alors ψ est une application analytique. Puisque, d'abord ψ est une application topologique de σ_1' sur σ_2'. Ensuite, dans chacune des σ_1' et σ_2', ψ et ψ^{-1} sont analytiques respectivement en dehors des ensembles fermés e_1 et e_2 de mesure linéaire finie ou infinie dénombrable au plus. Car par deux points dans σ_1' et σ_2' qui correspondent par ψ passe une et une même surface caractéristique irréductible de S en dehors des ensembles de points de nature citée. D'où, d'après un théorème d'A. S. Besicovitch [2], les ensembles e_1 et e_2 sont singularités artificielles pour ψ et pour ψ^{-1} respectivement. ψ est une application analytique de σ_1' sur σ_2'. Cela signifie que l'on a bien défini une structure analytique sur R_1 satisfaisant aux conditions citées plus haut. *C.Q.F.D.*

§ 5. Sociétés de surfaces caractéristiques construites à l'aide des fonctions entières ou méromorphes d'une variable

Dans le paragraphe actuel, on construit des sociétés de première espèce qui réalisent dans leurs intérieurs les singularités essentielles dégénératives: Cas où les projections analytiques sont $\boldsymbol{P}^1$.

37. Soit $x=f(y)$ une fonction méromorphe (transcendante) définie sur $\boldsymbol{C}^1\{y\}$ satisfaisant aux trois conditions suivantes:

1° *La surface de Riemann de sa fonction inverse possède seulement un nombre fini de points fondamentaux de ramification sur* $P^1\{x\}: 0, a_1, a_2, \cdots, a_h, \infty$, *où* $a_j \neq a_k$ $(j\neq k)$ *et* $a_j \neq 0, \infty$, *de façon que tous les points de ramification logarithmique se projètent sur les points* $x=0$ *ou* ∞, *et tous les points de ramification algébrique sur les points* $x=a_j$, *étant supposée l'existence d'au moins un point de ramification algébrique, mais non pas nécessairement supposée l'existence des points de ramification logarithmique*;

2° $f(y)$ *est de la forme* $f(y)=yg(y)$, $g(y)$ *étant une fonction méromorphe telle que* $g(0)\neq 0, \infty$ *et* $f(y)$ *prend toutes les valeurs finies et infinie sans exception*;

3° *La fonction d'automorphie* $y_1=\theta(y)$ *de la fonction* $f(y)$ *est irréductible*: *en d'autres mots, la surface caractéristique définie par l'équation*

$$\frac{f(y)-f(y_1)}{y-y_1}=0$$

est irréductible dans l'espace entier $C^2\{y, y_1\}$.

Une fonction méromorphe $f(y)$ satisfaisant à ces trois conditions 1°, 2° et 3° est dite *d'appartenir à la classe I*.

38. Soit $f: \delta \rightarrow R$ une application analytique, δ étant un domaine de P^1 et R une surface de Riemann. Appelons e l'ensemble de tous les points de ramification algébrique de son application inverse. Considérons les trois sortes de conditions suivantes:

1° *e ne contient qu'un nombre fini de points*;

2° *e contient une infinité de points, mais leurs ordres de ramification sont bornés*;

3° *e contient une infinité de points, et leurs ordres de ramification ne sont pas bornés*.

L'application f est dite *de rang* 1, 2 *ou* 3 suivant qu'elle satisfait à la condition 1°, 2°, ou 3°.

Cela étant, on démontrera plus loin l'existence de fonctions méromorphes appartenant à la classe I et de rangs 1, 2 et 3.

39. *Points multiples, points d'indéterminatin et normalités locales.* 1° Soit $f(y)$ une fonction méromorphe définie sur $C^1\{y\}$ et appartenant à la classe I et de rangs 1, 2 ou 3. Soit $\varphi(y)=f(y^{-1})=y^{-1}g(y^{-1})$ une fonction analytique définie sur $P^*\{y\}$ qui a un zéro à $y=\infty$, et qui a un point singulier essentiel à $y=0$. Soit $\Phi(x, y)=\varphi(y)/x$ une fonction analytique définie dans l'espace $\{P^1\{x\}, P^*\{y\}\}$. Considérons la société S_Φ de surfaces caractéristiques définie par $\Phi(x, y)$ dans l'espace $\{P^1\{x\}, P^*\{y\}\}$, qui y est globalement analytique:

$$S_\Phi=\{\Phi(x, y)=c \mid c\in P^1\}.$$

Chaque surface $\Phi(x, y)=c$, $c\in C^*$, est irréductible dans l'espace $\{P^1\{x\}, P^*\{y\}\}$. D'où il résulte que la projection analytique de S_Φ est P^1.

2° Faisons une transformation de l'espace $P^2\{x, y\}$ sur l'espace $P^2\{\xi, \eta\}$ de la forme suivante:

$$\begin{cases} x=\xi+\xi_0 \\ y=\eta \end{cases}; \quad \begin{cases} \xi=x-\xi_0 \\ \eta=y \end{cases}$$

où ξ_0 ($\neq 0$) est un nombre complexe. Désignons par L_0 la surface caractéristique ($\xi\in \boldsymbol{P}^1$, $\eta=0$). Désignons par $\Psi(\xi, \eta)$ la fonction analytique définie dans l'espace $\boldsymbol{P}^2\{\xi, \eta\}-|L_0|$ qui correspond à $\Phi(x, y)$: $\Psi(\xi, \eta)=\eta^{-1}g(\eta^{-1})/\xi+\xi_0$. Désignons par S_Ψ la société de surfaces caractéristiques dans l'espace $\boldsymbol{P}^2\{\xi, \eta\}-|L_0|$ qui correspond à S_Φ:

$$S_\Psi=\{\Psi(\xi, \eta)=c \mid c\in \boldsymbol{P}^1\}.$$

Chaque surface $\Psi(\xi, \eta)=c$, $c\in \boldsymbol{C}^*$, s'accumule à tout point de la surface caractéristique L_0. Donc tout point de L_0 est un point singulier essentiel de S_Ψ. Cela étant, complétons S_Ψ à une société $\bar{S}_\Psi$ de seconde espèce dans l'espace $\boldsymbol{P}^2\{\xi, \eta\}$ en y fournissant la surface caractéristique L_0. C'est possible, d'après la propriété 1° de la fonction $f(y)$.

3° Envisageons les points multiples et les points d'indétermination de $\bar{S}_\Psi$. Si η' est un zéro de $\varphi(\eta)$, ($\xi=\infty$, $\eta=\eta'$) est un point multiple de $\bar{S}_\Psi$ et ($\xi=-\xi_0$, $\eta=\eta'$) est un point d'indétermination de première espèce de $\bar{S}_\Psi$. Si η' est un pôle de $\varphi(\eta)$, ($\xi=-\xi_0$, $\eta=\eta'$) est un point multiple de $\bar{S}_\Psi$ et ($\xi=\infty$, $\eta=\eta'$) est un point d'indétermination de première espèce de $\bar{S}_\Psi$. Les deux points ($\xi=-\xi_0$, $\eta=0$) et ($\xi=\infty$, $\eta=0$) sont des points d'indétermination de seconde espèce de $\bar{S}_\Psi$. Tous les points multiples et tous les points d'indétermination sont ainsi énumérés, d'après la propriété 1° de la fonction $f(y)$.

Examinons les normalités locales de $\bar{S}_\Psi$ au voisinage de chaque point $p\in L_0$ qui est différent de point d'indétermination:

a) Si $f(y)$ est une fonction de rang 1, le point p est un point (α) de $\bar{S}_\Psi$;

b) Si $f(y)$ est une fonction de rang 2, le point p n'est pas un point (β) de $\bar{S}_\Psi$, mais un point (ν) de $\bar{S}_\Psi$;

c) Si $f(y)$ est une fonction de rang 3, le point p n'est pas un point (ν) de $\bar{S}_\Psi$.

La vérification de ces énoncés est facile, d'après les lemmes 6 et 7 précédents (§ 2).

40. *Projection analytique* 1°. a) Soit $\gamma=\{\xi\mid |\xi|<\rho\}$, ρ étant un nombre positif suffisamment petit. Soient $\tilde{\delta}_\infty=\{\eta\mid \varepsilon<|\eta-\eta_0|\leqq+\infty\}$ et $\delta_\infty=\tilde{\delta}_\infty-\{0\}$, $\eta_0(\neq 0)$ étant un nombre complexe et ε un nombre positif suffisamment petit. Soit $\tilde{\varDelta}_0=\{\gamma, \tilde{\delta}_\infty\}$ un dicylindre dans l'espace $\boldsymbol{P}^2\{\xi, \eta\}$. Désignons par M_0 la restriction de L_0 dans $\tilde{\varDelta}_0$. Soit $\varDelta_0=\tilde{\varDelta}_0-|M_0|$ un domaine. Désignons par $\tilde{S}_0$ la restriction de $\bar{S}_\Psi$ à $\tilde{\varDelta}_0$ et par S_0 la restriction de S_Ψ à $\varDelta_0$. On a la relation $\tilde{S}_0=S_0\cup\{M_0\}$. $\tilde{S}_0$ est une société de première espèce dans $\tilde{\varDelta}_0$ sans points multiples et sans points d'indétermination, ce qui se vérifie d'après la propriété 1° de la fonction $f(y)$ et à l'aide du résultat dans le N°39, 3° précédent.

Cela étant, cherchons la projection analytique R_0 de S_0.

b) Prenons un point $\eta_0'\in\delta_\infty$ tel que la surface caractéristique de S_0 passant par le point ($\xi=0$, $\eta=\eta_0'$) ait une tangente à ce point parallèle à l'axe des η. On suppose ici l'existence d'un tel point η_0', ce que l'on peut réaliser en prenant η_0 convenable avec ε suffisamment petit. Et on définit un élément $\eta_1=\psi_1(\eta)$ de la fonction d'automorphie $\eta_1=\psi(\eta)$ de la fonction $\Psi(0, \eta)=\varphi(\eta)/\xi_0$ de la manière suivante: Soit l une courbe de

Jordan fermée convenable sur le plan $C^1\{\xi\}$ contenue dans γ, partant de $\xi=0$ et y revenant. Soit $\eta=\phi(\xi, \eta')$, $\xi\in\gamma$, une représentation d'une surface caractéristique de S_0 qui passe par le point $(\xi=0, \eta=\eta')$ au voisinage de $(\xi=0, \eta=\eta'_0)$. Prolongeons analytiquement la fonction $\eta=\phi(\xi, \eta')$ de la variable ξ, à partir de $\xi=0$ avec la valeur première η' $(=\phi(0, \eta'))$ suivant la courbe l. On obtient une valeur finale η'_1 $(=\phi(0, \eta'))$ en revenant à $\xi=0$. Maintenant on considère η' comme variable. Alors on obtient un élément $\eta_1=\phi_1(\eta)$ d'une fonction définie au voisinage de $\eta=\eta'_0$. Cette fonction satisfait évidemment à l'équation d'automorphie:

$$\Psi(0, \eta_1)=\Psi(0, \eta),$$

et d'ailleurs est différente d'élément trivial $\eta_1\equiv\eta$.

c) Une fois obtenu l'élément $\eta_1=\phi_1(\eta)$, prolongeons-le analytiquement dans toute sphère $P^1\{\eta\}$, la variable η et la valeur η_1 étant toutes les deux restreintes dans δ_∞. De cette manière, on obtient tous les éléments de la fonction $\eta_1=\phi(\eta)$ au voisinage de $\eta=\eta'_0$. C'est possible d'après la propriété 3° de la fonction $f(y)$, car les points critiques algébriques et transcendents de la fonction inverse de la fonction $c=\Psi(0, \eta)$ étant distribués sur un nombre fini de points de la sphère $P^1\{c\}$, et ε étant suffisamment petit. D'où il résulte que toute fonction méromorphe $G(\xi, \eta)$ de deux variables ξ et η dans Δ_0 et définissant S_0, prend une et une même valeur sur toutes les composantes irréductibles dans Δ_0 d'une surface caractéristique $\Psi(\xi, \eta)=c$, la surface $\Psi(\xi, \eta)=c$ passant par un point $(\xi=0, \eta=\eta')$ au voisinage de $(\xi=0, \eta=\eta'_0)$. C'est-à-dire qu'elles forment une et une seule classe d'équivalence $\zeta\in R_0$ dans la définition de la projection analytique de S_0. Tout point de M_0 est un point singulier essentiel de S_0, car toutes les composantes irréductibles appartenant à ζ s'accumulent à tout point de M_0. Donc, d'après le théorème A (§ 1), R_0 doit être analytiquement équivalente à une des P^1, C^1, C^* ou T^1_μ. D'où, d'après le lemme 1 (§ 1), on peut dire que toutes les composantes irréductibles dans Δ_0 de chaque surface caractéristique $\Psi(\xi, \eta)=c$, $c\in P^1$, qui contient des points dans Δ_0, forment une et une même classe d'équivalence dans R_0.

D'où R_0 doit être analytiquement équivalente à P^1 ou à C^1, C^* étant exclue ici, car $\eta=\infty$ $(\in\delta_\infty)$ est un zéro de $\varphi(\eta)$. R_0 est équivalente à P^1 ou à C^1 suivant que dans δ_∞ il y a des pôles de $\varphi(\eta)$ ou il n'y en a rien.

41. *Projection analytique* 2°. a) Dans ce qui suit on suppose que $R_0=P^1$. Soit $\gamma'=\{\xi\mid|\xi|<\rho'\}$, ρ' étant un nombre positif suffisamment approché de ρ et $\rho<\rho'$. Soit $\delta'_0=\{\eta\mid|\eta-\eta_0|<\varepsilon'\}$, ε' étant un nombre positif suffisamment approché de ε et $\varepsilon<\varepsilon'$. Soient $\tilde{\Delta}'_0=\{\gamma', P^1\}$ et $\tilde{\Delta}'_1=\{P^1, \delta'_0\}$ des dicylindres dans l'espace $P^2\{\xi, \eta\}$. Soit M'_0 la restriction de L_0 dans $\tilde{\Delta}'_0$. Posons $\tilde{D}'=\tilde{\Delta}'_0\cup\tilde{\Delta}'_1$ et $D'=\tilde{D}'-|M'_0|$. Appelons $\tilde{S}'$ la restriction de $\bar{S}_\Psi$ à $\tilde{D}'$ et S' la restriction de S_Ψ à D'. On a la relation $\tilde{S}'=S'\cup\{M'_0\}$. On suppose que $\tilde{S}'$ soit une société de première espèce dans $\tilde{D}'$, et sans points multiples et sans points d'indétermination, ce que l'on peut réaliser en prenant η_0 convenable avec ρ' et ε' suffisamment petits.

Prenons des domaines $\tilde{\mathfrak{D}}$ et $\mathfrak{D}$ tels que: $\tilde{\Delta}_0\subseteqq\tilde{\mathfrak{D}}\subseteqq\tilde{D}'$; et $\mathfrak{D}=\tilde{\mathfrak{D}}-\{|M'_0|\cap\tilde{\mathfrak{D}}\}$. Appelons $\tilde{\mathcal{S}}$ la restriction de $\tilde{S}'$ à $\tilde{\mathfrak{D}}$ et $\mathcal{S}$ la restriction de S' à $\mathfrak{D}$.

b) Cela étant, envisageons d'abord la projection analytique $\mathfrak{R}$ de $\mathcal{S}$. Toutes les composantes irréductibles dans $\mathfrak{D}$ d'une surface caractéristique quelconque $\Psi(\xi, \eta)=c$, $c\in \boldsymbol{P}^1$, forment une et une même classe d'équivalence dans $\mathfrak{R}$. Ce qui se résulte d'après le résultat du N°40 précédent et à l'aide du lemme 2 (§1). Par suite $\mathfrak{R}$ doit être $\boldsymbol{P}^1$. Et tout point de $|M_0'|\cap\tilde{\mathfrak{D}}$ est un point singulier essentiel de $\mathcal{S}$.

Envisageons ensuite les propriétés de $\tilde{\mathcal{S}}$. Si la fonction $x=f(y)$ est de rang 1, alors $\tilde{\mathcal{S}}$ est localement analytique aussi en tout point de $|M_0'|\cap\tilde{\mathfrak{D}}$. Ce qui se réduit d'après le résultat du N°39, 3°. De plus, $\tilde{\mathcal{S}}$ est globalement continue dans $\tilde{\mathfrak{D}}$. Ce qui se résulte du lemme 5 (§2). Si la fonction $x=f(y)$ est de rang 2, alors $\tilde{\mathcal{S}}$ est globalement normale dans $\tilde{\mathfrak{D}}$. C'est facile de le voir.

42. *Un domaine quelconque $\tilde{D}$ dans l'espace $\boldsymbol{C}^2\{x, y\}$, et en particulier $\boldsymbol{C}^2\{x, y\}$ lui-même, est analytiquement équivalent à un domaine $\tilde{\mathfrak{D}}$ pris plus haut.*

En effet, c'est une conséquence d'un fait dû à P. Fatou et à L. Bieberbach. (*V.* T. Nishino [10] pp. 96-100.): D'abord d'après eux, il y a une transformation analytique et biunivoque de $\tilde{D}$ sur un domaine $D^{(1)}$ dans l'espace $\boldsymbol{C}^2\{x_1, y_1\}$, $D^{(1)}$ ayant un point extérieur dans l'espace $\boldsymbol{C}^2\{x_1, y_1\}$. Ensuite prenons deux points $p_0^{(1)}$ et $p_1^{(1)}$ à l'intérieur de $D^{(1)}$ et un point $p_\infty^{(1)}$ à l'extérieur de $D^{(1)}$ tels que les trois points $p_0^{(1)}$, $p_1^{(1)}$ et $p_\infty^{(1)}$ ne soient pas situés sur un plan caractéristique. On fait une transformation linéaire de deux variables non dégénérée de l'espace $\boldsymbol{C}^2\{x_1, y_1\}$ sur l'espace $\boldsymbol{C}^2\{x_2, y_2\}$ en envoyant $D^{(1)}$ en $D^{(2)}$, et les $p_0^{(1)}$, $p_1^{(1)}$ et $p_\infty^{(1)}$ en positions respectivement suivantes:

$$\begin{cases} p_0^{(2)}=(x_2=0, \ y_2=1) \\ p_1^{(2)}=(x_2=1, \ y_2=0). \\ p_\infty^{(2)}=(x_2=1, \ y_2=1) \end{cases}$$

Et puis, en faisant deux transformations linéaires d'une variable, l'une de $\boldsymbol{P}^1\{x_2\}$ sur $\boldsymbol{P}^1\{x_3\}$ et l'autre de $\boldsymbol{P}^1\{y_2\}$ sur $\boldsymbol{P}^1\{y_3\}$, on envoye $D^{(2)}$ en $D^{(3)}$, et les $p_0^{(2)}$, $p_1^{(2)}$ et $p_\infty^{(2)}$ en positions respectivement suivantes:

$$\begin{cases} p_0^{(3)}=(x_3=0, \ y_3=\infty) \\ p_1^{(3)}=(x_3=\infty, \ y_3=0). \\ p_\infty^{(3)}=(x_3=\infty, \ y_3=\infty) \end{cases}$$

En ce moment, il y a des nombres positifs r_0 suffisamment petit et r_1 suffisamment grand tels que:

$$\begin{cases} \Delta_0^{(3)}=\{|x_3|<r_0, \quad r_1<|y_3|\leqq+\infty\}\subseteqq D^{(3)}; \\ \Delta_1^{(3)}=\{r_1<|x_3|\leqq+\infty, \ |y_3|<r_0\}\subseteqq D^{(3)}; \\ \Delta_\infty^{(3)}=\{r_1<|x_3|\leqq+\infty, \ r_1<|y_3|\leqq+\infty\}\cap D^{(3)}=\emptyset. \end{cases}$$

Enfin, on fait une transformation de l'espace $\boldsymbol{P}^2\{x_3, y_3\}$ sur l'espace $\boldsymbol{P}^2\{\xi, \eta\}$ de la forme

$$\begin{cases} \xi = r x_3 \\ \eta = r y_3 + \eta_0 \end{cases},$$

r étant un nombre positif suffisamment petit et η_0 un nombre complexe. Alors on obtient un domaine $\tilde{\mathfrak{D}}$ transformé de $D^{(3)}$. Or $\tilde{\mathfrak{D}}$ est analytiquement équivalent à $\tilde{D}$ et satisfait aux conditions citées dans le N°41, a) précédent. *C. Q. F. D.*

43. Cela étant, appelons M la surface caractéristique dans $\tilde{D}$ qui correspond à $M_0' \cap \tilde{\mathfrak{D}}$ dans $\tilde{\mathfrak{D}}$. M peut être décomposée en nombre infini dénombrable au plus de composantes irréductibles dans $\tilde{D}$. Appelons $\tilde{S}$ et S les sociétés de première espèce qui correspondent à $\tilde{\mathcal{S}}$ et à $\mathcal{S}$ respectivement. Alors $\tilde{S}$ et S jouissent de toutes les propriétés étudiées plus haut. Or l'existence de fonctions appartenant à la classe I et de rangs 1, 2 et 3 étant démontrée tout de suite, on est maintenant parvenu au

Théorème 2: I. *Ils existent dans $\tilde{D}$ des sociétés $\tilde{S}_j$ ($j=1, 2, 3$) de surfaces caractéristiques de première espèce, sans points multiples et sans points d'indétermination satisfaisant aux conditions suivantes:*

Désignons par M une famille partielle convenable de $\tilde{S}_j$, contenant des surfaces caractéristiques en nombre infini dénombrable au plus et ne s'accumulant pas à l'intérieur de $\tilde{D}$. Posons $D=\tilde{D}-|M|$. Appelons S_j la restriction de $\tilde{S}_j$ à D. Alors S_j est globalement analytique dans D, sa projection analytique étant analytiquement équivalente à $\boldsymbol{P}^1$. De plus S_j a tout point de $|M|$ comme un de ses points singuliers essentiels de façon que l'allure de $\tilde{S}_j$ au voisinage de chaque point de $|M|$ soit respectivement d'espèce suivante:

1° $\tilde{S}_1$ *reste localement analytique en chaque point de $|M|$, et d'ailleurs reste globalement continue dans $\tilde{D}$;*

2° $\tilde{S}_2$ *cesse d'être localement continue en chaque point de $|M|$, mais reste globalement normale dans $\tilde{D}$;*

3° $\tilde{S}_3$ *cesse d'être localement normale en chaque point de $|M|$.*

44. 1° Il ne reste qu'à démontrer l'existence des fonctions méromorphes appartenant à la classe I et de rangs 1, 2 et 3. Pour cela, il suffit de démontrer l'existence des surfaces de Riemann correspondant à ces fonctions méromorphes. Soit R une surface de Riemann simplement connexe étalée sur $\boldsymbol{P}^1$. Supposons que R ne possède qu'un nombre fini ou infini dénombrable au plus de points fondamentaux de ramification, ayant au plus un nombre fini de points d'accumulation sur $\boldsymbol{P}^1$. Alors il existe une courbe de Jordan fermée sur $\boldsymbol{P}^1$ qui passe par tous points fondamentaux de ramification de R et par tous leurs points d'accumulation. Cela étant, on peut représenter R par un arbre topologique de la manière usuelle. On trouve dans un mémoire de G. Elfving ([4] pp. 7-17) une explication systématique d'arbres topologiques correspondant aux surfaces de Riemann ayant un nombre fini de points fondamentaux de ramification. A une surface ayant un nombre infini dénombrable de points fondamentaux s'applique aussi une explication analogue avec les modifications évidentes. Par suite il suffit, pour le but actuel, de démontrer l'existence des arbres topologiques correspondants.

2° Considérons ici les trois points $x=0$, 1 et ∞ sur $\boldsymbol{P}^1\{x\}$. Soit l l'axe réel fermé passant par ces points, l'orientation de l étant définie par l'ordre 0, 1, ∞. Prenons un point ○ (appelé point intérieur) dans le demi-plan à gauche de l et un point × (appelé point extérieur) dans le demi-plan à droite de l. Relions les points intérieur et extérieur par les trois arcs de Jordan appelés 1, ∞ et 0, chacun croisant l une seule fois en un point dans les parties $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ et $(1, +\infty)$ respectivement, et de façon qu'ils n'ont aucun point commun sauf des points extrémités (*Figure* 1). Les correspondants des points intérieur et extérieur dans un arbre topologique sont aussi désignés par ○ et par ×, et appelés noeuds intérieur et extérieur respectivement. Les correspondants des arcs 1, ∞ et 0 dans un arbre topologique sont désignés par les mêmes signes et appelés côtés 1, ∞ et 0 respectivement. Cela étant, prenons un arbre topologique (T_I) de la forme suivante (*Figure* 2):

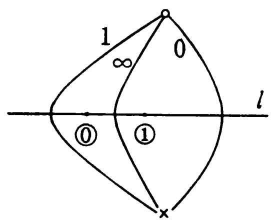


Figure 1.

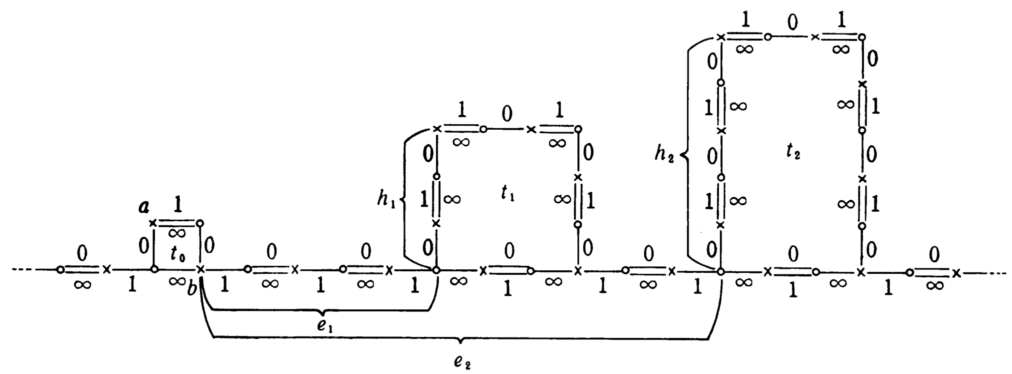


Figure 2. (T_I)

Envisageons tous les cycles d'ordre $\geqq 4$ sur l'arbre topologique (T_I). On les numérote de gauche à droite et les appelle les termes t_n ($n=0, 1, 2, \cdots$) respectivement. Seul le terme t_0 est le terme particulier et fixé pour toutes. Pour un terme général t_n ($n=1, 2, \cdots$), on définit son hauteur h_n et son écart e_n comme ce qui suit:

$$\begin{cases} h_n = \text{le nombre de côtés situés dans une ligne verticale attachée à } t_n\,; \\ e_n = \text{le nombre de côtés situés dans une ligne horizontale entre } t_0 \text{ et } t_n. \end{cases}$$

Sur la figure 2 actuelle, on a $h_1=3$, $h_2=5$ et $e_1=5$, $e_2=11$. Les h_n et e_n peuvent varier avec n et avec l'arbre topologique (T_I) que l'on adoptera dans la suite suivant les buts. Mais on les détermine toujours de façon que $h_n=0$ ou entier positif impair et que e_n=entier positif impair satisfaisant aux inégalités $e_n+4 \leqq e_{n+1}$ $(n=1, 2, \cdots)$.

45. 1° Soit R la surface de Riemann définie par l'arbre topologique $(\mathrm{T_I})$. R est étalée sur $\boldsymbol{P}^1\{x\}$ et ses points fondamentaux de ramification sont $x=0$, 1 et ∞. R est représentée conformément sur un cercle d'un rayon (fini ou infini suivant le type de R) de $\boldsymbol{C}^1\{y\}$ par une fonction génératrice $x=f(y)$. En ce moment, on a un énoncé qui concerne le type de R: Etant donnée une suite de hauteurs h_n $(n=1, 2, \cdots)$, on peut toujours déterminer une suite d'écarts e_n $(n=1, 2, \cdots)$ telle que la surface de Riemann définie par l'arbre topologique avec les termes t_n correspondants soit représentée conformément sur tout le plan $\boldsymbol{C}^1\{y\}$ par une fonction génératrice $x=f(y)$, $f(y)$ étant une fonction entière ou méromorphe.

En effet, d'après un critère pour le type parabolique dû à H. Wittich ([18] pp. 110-112), il suffit pour cela de montrer que l'on peut déterminer e_n $(n=1, 2, \cdots)$ de façon que la série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sigma_n$ devienne divergente, σ_n étant le nombre de noeuds de génération au plus égale à n, et génération étant comptée à partir d'un certain noeud fixé. C'est facile de montrer que si l'on prend la suite e_n $(n=1, 2, \cdots)$ divergente suffisamment vite par rapport à la suite donnée h_n $(n=1, 2, \cdots)$, on peut faire l'inégalité $\sigma_n/n<3$ à partir d'un certain terme. D'où $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sigma_n$ diverge avec la série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/3n$. *C. Q. F. D.*

2° Examinons maintenant les conditions 1°, 2° et 3° précédentes (N°37), relativement à la fonction $x=f(y)$: a) D'abord les deux points critiques logarithmiques de R se projètent sur les points $x=0$ et ∞ respectivement. Tous les points critiques algébriques se projètent sur le point $x=1$. Et ils existent certainement des points critiques algébriques correspondant aux termes t_n $(n=0, 1, 2, \cdots)$. b) Ensuite sur les deux points $x=0$ et ∞ il y a des points de R qui sont ses points réguliers, étant supposé $h_n>0$ pour au moins un terme général t_n $(n=1, 2, \cdots)$. Et on peut laisser la fonction $f(y)$ prendre la forme $f(y)=yg(y)$, $g(0)\neq 0$, ∞, avec une translation convenable du plan $\boldsymbol{C}^1\{y\}$. c) Enfin, la fonction d'automorphie $y_1=\theta(y)$ de la fonction $f(y)$ est irréductible.

En effet, pour le voir il suffit de montrer que pour une paire de noeuds fixés de même espèce sur $(\mathrm{T_I})$, par exemple cels désignés par a et par b dans le terme t_0, étant donné un noeud c de même espèce (mais différent de a), on peut trouver un parcours fermé convenable sur $(\mathrm{T_I})$ partant de a et y revenant tel qu'il correspond un parcours fermé ou non partant de b et arrivant à c. (*V.* G. af Hällström [5] pp. 8-9.) Or c'est possible. Puisque si l'on effectue des parcours fermés répétés d'origine a: $\infty, 1$; $\infty, 1$; $\cdots$, avec les parcours correspondants b arrive à tous les noeuds c situés à gauche de t_0, en roulant une fois sur chacun des noeuds intérieurs et extérieurs situés à gauche de t_0. Et si l'on effectue des parcours fermés répétés d'origine a: $1, 0, \infty, 0$; $1, 0, \infty, 0$; $\cdots$, avec les parcours correspondants b arrive à tous les noeuds c situés à droite de t_0, en roulant deux fois sur chacun des noeuds intérieurs et extérieurs situés à droite de t_0. *C. Q. F. D.*

46. A l'aide de l'arbre topologique $(\mathrm{T_I})$, on a ainsi démontré l'existence des fonctions méromorphes $x=f(y)$ appartenant à la classe I. Or si l'on spécialise la suite des hauteurs h_n $(n=1, 2, \cdots)$, le rang de la fonction $x=f(y)$ sera déterminé:

1° Si $h_n=0$ à partir d'un certain terme, $x=f(y)$ est de rang 1[5];

2° Si $h_n>0$ pour une infinité de n, et si les h_n sont bornés, $x=f(y)$ est de rang 2;

3° Si $h_n>0$ pour une infinité de n, et si les h_n ne sont pas bornés, $x=f(y)$ est de rang 3.

47. Remarque. Soit $\bar{S}_\Psi$ la société de seconde espèce dans l'espace $P^2\{\xi, \eta\}$ définie dans le N°39, 2° à l'aide d'une fonction méromorphe appartenant à la classe I et de rang 1. $\bar{S}_\Psi$ est aussi définie par une équation différentielle du premier ordre dont le coefficient est une fonction rationnelle de deux variables ξ et η. Faisons une transformation de l'espace $P^2\{\xi, \eta\}$ sur l'espace $P^2\{\xi_1, \eta_1\}$ de la forme suivante:

$$\begin{cases} \xi_1=\xi \\ \eta_1=\xi\eta \end{cases}; \qquad \begin{cases} \xi=\xi_1 \\ \eta=\dfrac{\eta_1}{\xi_1} \end{cases}.$$

Alors on obtient une société $\bar{S}_\Psi^1$ de seconde espèce dans l'espace $P^2\{\xi_1, \eta_1\}$, transformée de $\bar{S}_\Psi$. $\bar{S}_\Psi^1$ est aussi définie par une équation différentielle du premier ordre dont le coefficient est rationnel. Par suite $\bar{S}_\Psi^1$ jouit seulement d'un nombre fini de points multiples et d'un nombre fini de points d'indétermination dans l'espace $P^2\{\xi_1, \eta_1\}$. Tout autre point de $P^2\{\xi_1, \eta_1\}$ est un point (α) de $\bar{S}_\Psi^1$ et auquel $\bar{S}_\Psi^1$ est localement analytique. A l'origine se situe un point d'indétermination de première espèce auquel $\bar{S}_\Psi^1$ n'est pas localement analytique. Ce que l'on peut démontrer avec la même méthode de démonstration faite dans le N°40. A partir de cette société $\bar{S}_\Psi^1$, en suivant la même marche de raisonnement fait dans les N°s41-43, on parvient à l'énoncé suivant:

Soit $\tilde{D}$ un domaine donné à l'avance dans l'espace C^2. Alors il existe dans $\tilde{D}$ une société $\tilde{S}$ de surfaces caractéristiques de première espèce, sans points multiples et sans points d'indétermination sauf un seul point d'indétermination p de première espèce satisfaisant aux conditions suivantes:

1°) *Désignons par M une famille partielle convenable de $\tilde{S}$ contenant des surfaces caractéristiques en nombre infini dénombrable au plus et ne s'accumulant pas à l'intérieur de $\tilde{D}$. Il y a une seule surface caractéristique de M qui passe par p. Posons $D=\tilde{D}-|M|$. Appelons S la restriction de $\tilde{S}$ à D. Alors S est globalement analytique dans D, sa projection analytique étant analytiquement équivalente à P^1. De plus S a tout point de $|M|$ comme un de ses points siguliers essentiels.*

2°) *En chaque point de $\tilde{D}$, sauf le point p, $\tilde{S}$ est localement analytique. Au point p, $\tilde{S}$ n'est pas localement analytique.*

3°) *$\tilde{S}$ est globalement continue dans $\tilde{D}$.*

---

5) A l'arbre topologique avec $h_n=0$ pour tous les n $(n=1, 2, \cdots)$ correspond en essence la fonction entière $f(y)=ye^y$. La société de surfaces caractéristiques définie par la fonction méromorphe $\Phi(x,y)=ye^y/x$ a été étudiée en détaille par P.Painlevé ([14] pp. 143-145), naturellement en mots d'équations différentielles du premier ordre. Je dois l'idée à cette étude de P. Painlevé pour la construction faite dans les §§5 et 6 du mémoire actuel.

§ 6. Sociétés de surfaces caractéristiques construites à l'aide des fonctions entières ou méromorphes d'une variable (*bis*)

Dans le paragraphe actuel, on construit des sociétés de première espèce qui réalisent dans leurs intérieurs les singularités essentielles dégénératives: Cas où les projections analytiques sont $\boldsymbol{T}_\lambda^1$.

48. Soit $x=f(y)$ une fonction entière (rationnelle ou transcendante) définie sur $\boldsymbol{C}^1\{y\}$ satisfaisant aux trois conditions suivantes:

1° *La surface de Riemann de sa fonction inverse possède seulement un nombre fini de points fondamentaux de ramification sur* $\boldsymbol{P}^1\{x\}$: $0, a_1, a_2, \cdots, a_h, \infty$, *où* $a_j \neq a_k$ $(j\neq k)$ *et* $a_j \neq 0, \infty$, *de façon que tous les points de ramification logarithmique se projètent sur les points* $x=0$ *ou* ∞ *et tous les points de ramification algébrique sur les points* $x=a_j$, *n'étant pas supposée nécessairement l'existence des points de ramification logarithmique ou algébrique*;

2° $f(y)$ *est de la forme* $f(y)=ye^{g(y)}$, $g(y)$ *étant une fonction entière et pouvant se réduire à une constante*;

3° *Appelons* $F_\lambda(z)=(c_\lambda-e^{iz})e^{\lambda z-(\lambda/i)g(e^{-iz})}$, *où* λ *est un nombre complexe dont la partie réelle est* >0 *et* c_λ $(\neq 0)$ *un nombre complexe convenable dépendant de* λ, *une fonction entière de la variable* z *qui est obtenue de la fonction originale* $f(y)=ye^{g(y)}$ *par une certaine transformation dépendant du paramètre* λ. *Alors la fonction d'automorphie* $z_1=\Theta_\lambda(z)$ *de la fonction* $F_\lambda(z)$ *est irréductible: en d'autres mots, la surface caractéristique définie par l'équation*

$$\frac{F_\lambda(z)-F_\lambda(z_1)}{z-z_1}=0$$

est irréductible dans l'espace entier $\boldsymbol{C}^2\{z, z_1\}$.

Une fonction entière $f(y)$ satisfaisant à ces trois conditions 1°, 2° et 3° est dite *d'appartenir à la classe II*.

Cela étant, je ne suis pas encore réussi à démontrer l'existence de fonctions entières appartenant à la classe II et de rangs 2 ou 3. Quant à l'existence de fonctions entières appartenant à cette classe et de rang 1, elle sera démontrée plus loin. Dans ce qui suit, on suit la même marche de raisonnement que l'on a suivie dans le § 5 précédent avec les fonctions appartenant à la classe II et de rang 1.

49. *Points multiples, points d'indétermination et normalités locales.* 1° Soit $f(y)$ une fonction entière définie sur $\boldsymbol{C}^1\{y\}$ et appartenant à la classe II et de rang 1. Soit $\varphi_\lambda(y)=f(y^{-1})^{\lambda/i}=y^{-\lambda/i}e^{(\lambda/i)g(y^{-1})}$ une fonction analytique multiforme définie sur $\boldsymbol{C}^*\{y\}$ qui a des points singuliers transcendants à $y=0$ et ∞, et qui a une infinité de branches telles qu'une branche quelconque $\varphi_{\lambda,n}(y)$ soit de la forme $\varphi_{\lambda,n}(y)=d_\lambda^n\varphi_{\lambda,0}(y)$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ où $\varphi_{\lambda,0}(y)$ est une branche déterminée et $d_\lambda=e^{2\pi\lambda}$. Soit $\tau_\lambda=\{c \mid 1\leqq |c| < |d_\lambda|\}$. Soit $\Phi_\lambda(x, y)=\varphi_\lambda(y)/x$ une fonction analytique multiforme définie dans l'espace $\{\boldsymbol{C}^*\{x\}, \boldsymbol{C}^*\{y\}\}$. Considérons la société S_{Φ_λ} de surfaces caractéristiques définie par $\Phi_\lambda(x, y)$ dans l'espace $\{\boldsymbol{C}^*\{x\}, \boldsymbol{C}^*\{y\}\}$, qui y est globalement analytique:

$$S_{\Phi_\lambda}=\{\Phi_\lambda(x,\ y)=c\,|\,c\in\tau_\lambda\}.$$

Chaque surface $\Phi_\lambda(x,\ y)=c,\ c\in\tau_\lambda$, est irréductible dans l'espace $\{\boldsymbol{C}^*\{x\},\ \boldsymbol{C}^*\{y\}\}$. Et pour un nombre complexe quelconque $c\in\boldsymbol{C}^*$, la surface caractéristique $\Phi_\lambda(x,\ y)=c$ est identique à la surface caractéristique $\Phi_\lambda(x,\ y)=c_0$, où $c_0\in\tau_\lambda$ et $c=c_0d_\lambda^n$, n étant un entier. D'où il résulte que la projection analytique de S_{Φ_λ} est $\boldsymbol{T}_\lambda^1$.

2° Faisons une transformation de l'espace $\boldsymbol{P}^2\{x,\ y\}$ sur l'espace $\boldsymbol{P}^2\{\xi,\ \eta\}$ de la forme suivante:

$$\begin{cases} x=\xi-\eta+c_\lambda \\ y=\eta \end{cases};\qquad \begin{cases} \xi=x+y-c_\lambda \\ \eta=y \end{cases}$$

où c_λ $(\neq 0)$ est un nombre complexe convenable. Désignons par L_1 et par L_2 les surfaces caractéristiques qui correspondent aux surfaces caractéristiques $(x=0,\ y\in\boldsymbol{P}^1)$ et $(x\in\boldsymbol{P}^1,\ y=0)$ respectivement: $L_1=(\xi-\eta+c_\lambda=0,\ \eta\in\boldsymbol{P}^1)$ et $L_2=(\xi\in\boldsymbol{P}^1,\ \eta=0)$. Posons de plus $L_3=(\xi\in\boldsymbol{P}^1,\ \eta=\infty)$ et $L_4=(\xi=\infty,\ \eta\in\boldsymbol{P}^1)$. Désignons par $\Psi_\lambda(\xi,\ \eta)$ la fonction analytique multiforme définie dans l'espace $\boldsymbol{P}^2\{\xi,\ \eta\}-\bigcup_{j=1}^4|L_j|$, qui correspond à $\Phi_\lambda(x,\ y)$: $\Psi_\lambda(\xi,\ \eta)=\eta^{-\lambda/i}e^{(\lambda/i)g(\eta^{-1})}/\xi-\eta+c_\lambda$. Désignons par S_{Ψ_λ} la société de surfaces caractéristiques dans l'espace $\boldsymbol{P}^2\{\xi,\ \eta\}-\bigcup_{j=1}^4|L_j|$ qui correspond à S_{Φ_λ}:

$$S_{\Psi_\lambda}=\{\Psi_\lambda(\xi,\ \eta)=c\,|\,c\in\tau_\lambda\}.$$

Chaque surface $\Psi_\lambda(\xi,\ \eta)=c,\ c\in\tau_\lambda$, s'accumule à tout point des surfaces caractéristiques L_j $(j=1,\ 2,\ 3,\ 4)$. Donc tout point des L_j $(j=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ est un point singulier essentiel de S_{Ψ_λ}. Cela étant, complétons S_{Ψ_λ} à une société $\bar{S}_{\Psi_\lambda}$ de seconde espèce dans l'espace $\boldsymbol{P}^2\{\xi,\ \eta\}$ en y fournissant les surfaces caractéristiques L_j $(j=1,\ 2,\ 3,\ 4)$. C'est possible, d'après les propriétés 1° et 2° de la fonction $f(y)$.

3° Envisageons les points multiples et les points d'indétermination de $\bar{S}_{\Psi_\lambda}$. Il n'y a pas de point multiple, non plus de point d'indétermination de première espèce de $\bar{S}_{\Psi_\lambda}$. Il y a trois points d'indétermination de seconde espèce de $\bar{S}_{\Psi_\lambda}$: $(\xi=-c_\lambda,\ \eta=0)$, $(\xi=\infty,\ \eta=0)$ et $(\xi=\infty,\ \eta=\infty)$. Tous les points d'indétermination sont ainsi énumérés, d'après les propriétés 1° et 2° de la fonction $f(y)$.

Quant aux normalités locales de $\bar{S}_{\Psi_\lambda}$, on peut dire que tout point $p\in L_j$ $(j=1,\ 2,\ 3,\ 4)$, qui est différent de point d'indétermination, est un point (α) de $\bar{S}_{\Psi_\lambda}$. La vérification de cet énoncé est immédiate pour un point $p\in L_j$ $(j=1,\ 3,\ 4)$. Pour un point $p\in L_2$, on peut la faire en calculant l'équation différentielle du premier ordre qui définit $\bar{S}_{\Psi_\lambda}$.

50. *Projection analytique* 1°. a) Soit $\gamma=\{\xi\,|\,|\xi|<\rho\}$, ρ étant un nombre positif suffisamment petit. Soient $\tilde{\delta}_\infty=\{\eta\,|\,\varepsilon<|\eta-\eta_0|\leqq+\infty\}$ et $\delta_\infty=\tilde{\delta}_\infty-\{0,\ c_\lambda,\ \infty\}$, η_0 $(\neq 0,\ c_\lambda)$ étant un nombre complexe et ε un nombre positif suffisamment petit. Soit $\tilde{\Delta}_0=\{\gamma,\ \tilde{\delta}_\infty\}$ un dicylindre dans l'espace $\boldsymbol{P}^2\{\xi,\ \eta\}$. Désignons par M_j la restriction de L_j $(j=1,2,3)$

dans $\tilde{\varDelta}_0$. Soit $\varDelta_0=\tilde{\varDelta}_0-\bigcup_{j=1}^{3}|M_j|$ un domaine. Désignons par $\tilde{S}_{\lambda,0}$ la restriction de $\bar{S}_{\Psi_\lambda}$ à $\tilde{\varDelta}_0$ et par $S_{\lambda,0}$ la restriction de S_{Ψ_λ} à $\varDelta_0$. On a la relation $\tilde{S}_{\lambda,0}=S_{\lambda,0}\cup\bigcup_{j=1}^{3}\{M_j\}$. $\tilde{S}_{\lambda,0}$ est une société de première espèce dans $\tilde{\varDelta}_0$ sans points multiples et sans points d'indétermination, ce qui se vérifie d'après les propriétés 1° et 2° de la fonction $f(y)$ et à l'aide du résultat dans le N°49, 3° précédent.

Cela étant, cherchons la projection analytique $R_{\lambda,0}$ de $S_{\lambda,0}$.

b) Prenons un point $\eta_0'\in\delta_\infty$ tel que la surface caractéristique de $S_{\lambda,0}$ passant par le point $(\xi=0,\ \eta=\eta_0')$ ait une tangente à ce point parallèle à l'axe des η. On suppose ici l'existence d'un tel point η_0', ce que l'on peut réaliser en prenant η_0 convenable avec ε suffisamment petit. Et on définit un élément $\eta_1=\phi_{\lambda,1}(\eta)$ de la fonction d'automorphie $\eta_1=\phi_\lambda(\eta)$ de la fonction multiforme $\Psi_\lambda(0,\ \eta)=\eta^{-\lambda/i}e^{(\lambda/i)g(\eta^{-1})}/-\eta+c_\lambda$ de la manière suivante: Soit l une courbe de Jordan fermée convenable sur le plan $\boldsymbol{C}^1\{\xi\}$ contenue dans γ, partant de $\xi=0$ et y revenant. Soit $\eta=\phi_\lambda(\xi,\ \eta')$, $\xi\in\gamma$, une représentation d'une surface caractéristique de $S_{\lambda,0}$ qui passe par le point $(\xi=0,\ \eta=\eta')$ au voisinage de $(\xi=0,\ \eta=\eta_0')$. Prolongeons analytiquement la fonction $\eta=\phi_\lambda(\xi,\ \eta')$ de la variable ξ, à partir de $\xi=0$ avec la valeur première $\eta'(=\phi_\lambda(0,\ \eta'))$ suivant la courbe l. On obtient une valeur finale $\eta_1'\ (=\phi_\lambda(0,\ \eta'))$ en revenant à $\xi=0$. Maintenant on considère η' comme variable. Alors on obtient un élément $\eta_1=\phi_{\lambda,1}(\eta)$ d'une fonction définie au voisinage de $\eta=\eta_0'$. Cette fonction satisfait évidemment à l'équation d'automorphie:

$$\Psi_\lambda(0,\ \eta_1)=\Psi_\lambda(0,\ \eta),$$

et d'ailleurs est différente d'élément trivial $\eta_1\equiv\eta$.

c) Une fois obtenu l'élément $\eta_1=\phi_{\lambda,1}(\eta)$, prolongeons-le analytiquement dans toute sphère $\boldsymbol{P}^1\{\eta\}$, la variable η et la valeur η_1 étant toutes les deux restreintes dans δ_∞. On suppose ici que de cette manière on peut obtenir tous les éléments de la fonction $\eta_1=\phi_\lambda(\eta)$ au voisinage de $\eta=\eta_0'$. C'est le cas, d'après la propriété 3° de la fonction $f(y)$, si les points critiques algébriques et transcendants de la fonction inverse de la fonction multiforme $c=\Psi_\lambda(0,\ \eta)$ sont distribués d'une manière éparse sur la sphère $\boldsymbol{P}^1\{c\}$. Car la fonction $F_\lambda(z)=(c_\lambda-e^{iz})e^{\lambda z-(\lambda/i)g(e^{-iz})}$ est une fonction uniformisée de $1/\Psi_\lambda(0,\ \eta)$ par une transformation de la variable: $\eta=e^{iz}$. D'où il résulte que toute fonction méromorphe $G(\xi,\ \eta)$ de deux variables ξ et η dans $\varDelta_0$ et définissant $S_{\lambda,0}$ prend une et une même valeur sur toutes les composantes irréductibles dans $\varDelta_0$ d'une surface caractéristique $\Psi_\lambda(\xi,\ \eta)=c$, la surface $\Psi_\lambda(\xi,\ \eta)=c$ passant par un point $(\xi=0,\ \eta=\eta')$ au voisinage de $(\xi=0,\ \eta=\eta_0')$. C'est-à-dire qu'elles forment une et une seule classe d'équivalence $\boldsymbol{\zeta}\in R_{\lambda,0}$ dans la définition de la projection analytique de $S_{\lambda,0}$. Tout point de M_j $(j=1,\ 2,\ 3)$ est un point singulier essentiel de $S_{\lambda,0}$, car toutes les composantes irréductibles appartenant à $\boldsymbol{\zeta}$ s'accumulent à tout point de M_j $(j=1,\ 2,\ 3)$. Donc, d'après le théorème A (§1), $R_{\lambda,0}$ doit être analytiquement équivalente à une des $\boldsymbol{P}^1$, $\boldsymbol{C}^1$, $\boldsymbol{C}^*$ ou $\boldsymbol{T}^1_\mu$. D'où, d'après le lemme 1 (§1), on peut dire que toutes les composantes irréductibles dans $\varDelta_0$ de chaque surface caractéristique $\Psi_\lambda(\xi,\ \eta)=c$, $c\in\tau_\lambda$, qui contient des points dans $\varDelta_0$, forment une et une même classe d'équivalence dans $R_{\lambda,0}$. D'où $R_{\lambda,0}$ doit être analytiquement équivalente à $\boldsymbol{T}^1_\lambda$, car toute surface $\Psi_\lambda(\xi,\ \eta)=c$, $c\in\tau_\lambda$, contenant effectivement des points dans Δ_0.

51. *Projection analytique* 2°. a) Soit $\gamma'=\{\xi\,|\,|\xi|<\rho'\}$, ρ' étant un nombre positif suffisamment approché de ρ et $\rho<\rho'$. Soit $\delta_0'=\{\eta\,|\,|\eta-\eta_0|<\varepsilon'\}$, ε' étant un nombre positif suffisamment approché de ε et $\varepsilon<\varepsilon'$. Soient $\tilde{\Delta}_0'=\{\gamma', \boldsymbol{P}^1\}$ et $\tilde{\Delta}_1'=\{\boldsymbol{P}^1, \delta_0'\}$ des dicylindres dans l'espace $\boldsymbol{P}^2\{\xi, \eta\}$. Posons $\tilde{D}'=\tilde{\Delta}_0'\cup\tilde{\Delta}_1'$. Soient M_j' les restrictions de L_j $(j=1, 2, 3, 4)$ dans $\tilde{D}'$. Posons $D'=\tilde{D}'-\bigcup_{j=1}^{4}|M_j'|$. Appelons $\tilde{S}_\lambda'$ la restriction de $\bar{S}_{\Psi_\lambda}$ à $\tilde{D}'$ et S_λ' la restriction de S_{Ψ_λ} à D'. On a la relation $\tilde{S}_\lambda'=S_\lambda'\cup\bigcup_{j=1}^{4}\{M_j'\}$. On suppose que $\tilde{S}_\lambda'$ soit une société de première espèce dans $\tilde{D}'$, et sans points multiples et sans points d'indétermination, ce que l'on peut réaliser en prenant η_0 convenable avec ρ' et ε' suffisamment petits.

Prenons des domaines $\tilde{\mathfrak{D}}$ et $\mathfrak{D}$ tels que: $\tilde{\Delta}_0\subseteq\tilde{\mathfrak{D}}\subseteq\tilde{D}'$; et $\mathfrak{D}=\tilde{\mathfrak{D}}-\bigcup_{j=1}^{4}\{|M_j'|\cap\tilde{\mathfrak{D}}\}$. Appelons $\tilde{\mathcal{S}}_\lambda$ la restriction de $\tilde{S}_\lambda'$ à $\tilde{\mathfrak{D}}$ et $\mathcal{S}_\lambda$ la restriction de S_λ' à $\mathfrak{D}$.

b) Cela étant, envisageons d'abord la projection analytique $\mathcal{R}_\lambda$ de $\mathcal{S}_\lambda$. Toutes les composantes irréductibles dans $\mathfrak{D}$ d'une surface caractéristique quelconque $\Psi_\lambda(\xi, \eta)=c$, $c\in\tau_\lambda$, forment une et une même classe d'équivalence dans $\mathcal{R}_\lambda$. Ce qui se résulte d'après le résultat du N°50 précédent, et à l'aide du lemme 2 (§1). Par suite $\mathcal{R}_\lambda$ doit être $\boldsymbol{T}_\lambda^1$. Et tout point de $|M_j'|\cap\tilde{\mathfrak{D}}$ $(j=1, 2, 3, 4)$ est un point singulier essentiel de $\mathcal{S}_\lambda$.

Envisageons ensuite les propriétés de $\tilde{\mathcal{S}}_\lambda$. $\tilde{\mathcal{S}}_\lambda$ est localement analytique aussi en tout point de $|M_j'|\cap\tilde{\mathfrak{D}}$ $(j=1, 2, 3, 4)$. Ce qui se réduit d'après le résultat du N°49, 3°. De plus $\tilde{\mathcal{S}}_\lambda$ est globalement continue dans $\tilde{\mathfrak{D}}$. Ce qui se résulte du lemme 5 (§2).

52. Soit $\tilde{D}$ un domaine quelconque dans l'espace $\boldsymbol{C}^2\{x, y\}$, pouvant être en particulier $\boldsymbol{C}^2\{x, y\}$ lui-même. D'après le résultat du N°42, $\tilde{D}$ est analytiquement équivalent à un domaine $\tilde{\mathfrak{D}}$ pris plus haut. Appelons M_λ la surface caractéristique dans $\tilde{D}$ qui correspond à $\bigcup_{j=1}^{4}\{M_j'\cap\tilde{\mathfrak{D}}\}$ dans $\tilde{\mathfrak{D}}$. M_λ peut être décomposée en nombre infini dénombrable au plus de composantes irréductibles dans $\tilde{D}$. Appelons $\tilde{S}_\lambda$ et S_λ les sociétés de première espèce qui correspondent à $\tilde{\mathcal{S}}_\lambda$ et à $\mathcal{S}_\lambda$ respectivement. Alors $\tilde{S}_\lambda$ et S_λ jouissent de toutes les propriétés étudiées plus haut. Or l'existence de fonctions appartenant à la classe II et de rang 1 étant démontrée tout de suite, on est maintenant parvenu au

Théorème 2: II. *Ils existent dans $\tilde{D}$ des sociétés $\tilde{S}_\lambda$ (λ étant des nombres complexes dont les parties réelles sont >0) de surfaces caractéristiques de première espèce, sans points multiples et sans points d'indétermination satisfaisant aux conditions suivantes:*

Désignons par M_λ une famille partielle convenable de $\tilde{S}_\lambda$, contenant des surfaces caractéristiques en nombre infini dénombrable au plus et ne s'accumulant pas à l'intérieur de $\tilde{D}$. Ponsons $D_\lambda=\tilde{D}-|M_\lambda|$. Appelons S_λ la restriction de $\tilde{S}_\lambda$ à D_λ. Alors S_λ est globalement analytique dans D_λ, sa projection analytique étant analytiquement équivalente à $\boldsymbol{T}_\lambda^1$. De plus S_λ a tout point de $|M_\lambda|$ comme un de ses points singuliers essentiels de façon que l'allure de $\tilde{S}_\lambda$ au voisinage de chaque point de $|M_\lambda|$ soit d'espèce suivante:

$\tilde{S}_\lambda$ reste localement analytique en chaque point de $|M_\lambda|$, et d'ailleurs reste globale-

ment continue dans $\tilde{D}$.

53. Dans ce qui suit, on va démontrer que la fonction entière rationnelle $x=f(y) \equiv y$ est une fonction appartenant à la classe II et de rang 1 :

1° D'abord cette fonction satisfait évidemment aux conditions 1° et 2° précédentes (N°48) avec $g(y)\equiv 0$.

2° Ensuite envisageons la condition 3° (N°48). Appelons $F_\lambda(z)=(1+(i/\lambda)-e^{iz})e^{\lambda z}$, où λ est un nombre complexe dont la partie réelle est >0, une fonction entière qui est obtenue de la fonction originale $f(y)\equiv y$. On a pris ici $c_\lambda=1+(i/\lambda)$. Soient $z=\Phi_\lambda(w)$ la fonction inverse de la fonction $w=F_\lambda(z)$ et R_λ la surface de Riemann de la fonction $\Phi_\lambda(w)$ étalée sur $\boldsymbol{P}^1\{w\}$. Si l'on sait la structure de R_λ et en particulier son arbre topologique, c'est facile d'examiner la condition 3°. Or la fonction $F_\lambda(z)$ est identique en essence à une fonction considérée par P. Boutroux[6]. Un cas particulier où on a posé $\lambda=1$ a été étudié en détaille par F. Iversen ([6] pp. 60-67). Il a trouvé explicitement la structure de R_1. Dans le cas où λ est réel positif, on peut suivre la même marche du calcul que celle faite par F. Iversen pour rechercher la structure de R_λ. Dans le cas où λ est complexe, on peut constater avec une considération topologique que la structure de R_λ se modifie continûment avec le paramètre λ sans mutation. Et on trouve qu'elle est identique topologiquement pour tout λ considéré. En particulier, l'arbre topologique correspondant à R_λ est identique pour tout λ considéré. Ce que l'on va dans la suite décrire d'une manière concrète.

54. 3° a) Les points critiques transcendants de $\Phi_\lambda(w)$ sont situés tous sur les points $w=0$ et ∞. Les points critiques algébriques de $\Phi_\lambda(w)$ se projètent sur les $w=(i/\lambda)d_\lambda^n$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ où $d_\lambda=e^{2\pi\lambda}$, sur chacun desquels se situe un et un seul d'ordre 1. En effet, avec la propriété de la fonction entière $F_\lambda(z)$ qu'elle est d'ordre 1 et qu'elle satisfait à l'équation fonctionnelle $F_\lambda(z+2\pi n)=d_\lambda^n F_\lambda(z)$, n étant un entier quelconque, on peut démontrer que les valeurs asymptotiques de $F_\lambda(z)$ sont seulement $w=0$ et ∞. Ce qui est fait à l'aide d'un théorème bien connu de L. V. Ahlfors concernant le nombre des valeurs asymptotiques d'une fonction entière d'ordre fini. D'où la partie première d'assertion. Pour démontrer la partie seconde, il suffit de calculer les zéros simples $z_n=2\pi n$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ de $\mathrm{d}F_\lambda(z)/\mathrm{d}z$ et les valeurs en ces points de $F_\lambda(z)$: $w_n=F_\lambda(z_n)=(i/\lambda)d_\lambda^n$.

Les points $w_n=(i/\lambda)d_\lambda^n$ se situent tous sur une courbe de Jordan simple $l_+=\{w=(i/\lambda)e^{2\pi\lambda t} \mid -\infty<t<+\infty\}$. Posons $l_-=\{w=-(i/\lambda)e^{-2\pi\lambda t} \mid -\infty<t<+\infty\}$. C'est une courbe de Jordan simple symétrique à l_+ par rapport à l'origine. Posons

$$l=l_-\cup\{0\}\cup l_+\cup\{\infty\}\,.$$

Alors l est une courbe de Jordan fermée sur $\boldsymbol{P}^1\{w\}$, l'orientation de l étant définie par l'ordre $-i/\lambda$, 0, i/λ. Sur l se trouvent tous les points fondamentaux de ramification

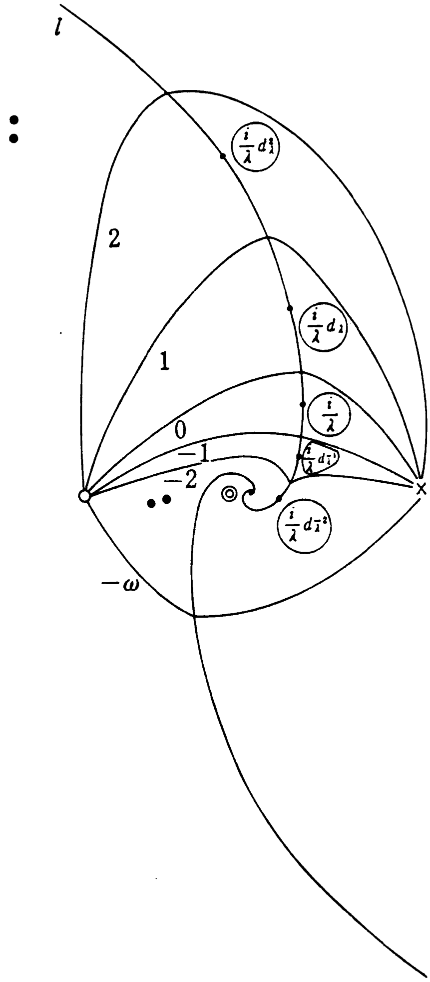
6) La fonction considérée par P. Boutroux est la suivante ([3] p. 77) :

$$\lambda_1 e^{(2+\lambda_1/\lambda_1)it}\cos t - i(2+\lambda_1)e^{(2+\lambda_1/\lambda_1)it}\sin t=(1+\lambda_1-e^{2it})e^{2it/\lambda_1}\,.$$

La fonction $F_\lambda(z)$ se déduit de cette fonction en y faisant $\lambda_1=i/\lambda$ et $2t=z$.

transcendante et cels de ramification algébrique dont les points d'accumulation sont deux points $w=0$ et ∞.

b) Prenons un point ○ (appelé point intérieur) dans le domaine à gauche de l et un point $\times$ (appelé point extérieur) dans le domaine à droite de l. Relions les points intérieur et extérieur par les arcs de Jordan appelés n ($n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$) et appelé $-\omega$, chacun croisant l une seule fois en un point dans les parties $((i/\lambda)d_\lambda^n, (i/\lambda)d_\lambda^{n+1})$ de l_+ et dans l_- respectivement, et de façon qu'ils n'ont aucun point commun sauf des points extrémités (*Figure* 3). Cela étant, la surface de Riemann R_λ est représentée par l'arbre topologique (T_{II}) de la forme suivante (*Figure* 4), où les nombres n ($n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$) et le nombre $-\omega$ signifient les côtés qui correspondent aux arcs n et au arc $-\omega$ respectivement, et les deux points noirs: une suite de côtés n dans une direction infinie positive ou infinie négative:



(Cas où la partie imaginaire de λ est >0.)

Figure 3.

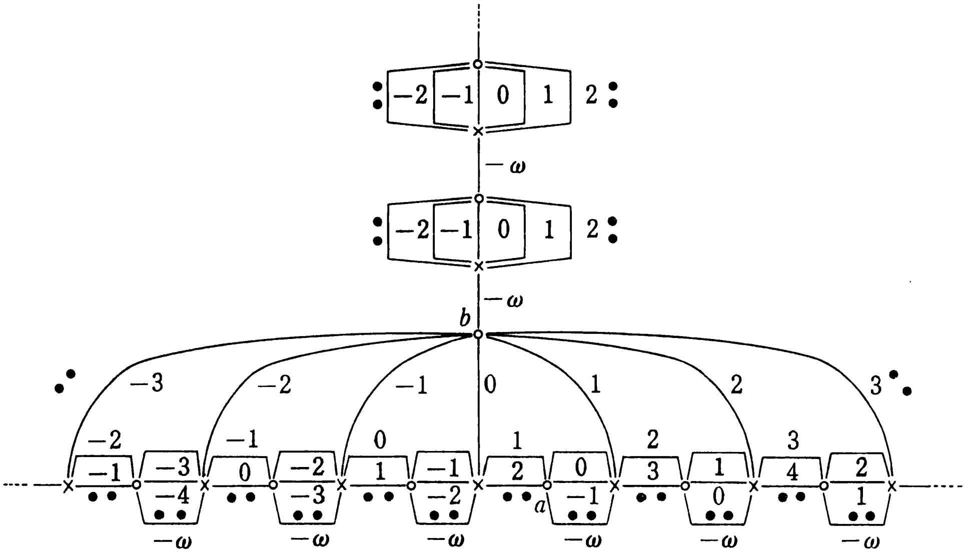


Figure 4. $(\mathrm{T}_{\mathrm{II}})$

55. 4° a) La fonction d'automorphie $z_1=\Theta_\lambda(z)$ de la fonction $F_\lambda(z)$ est irréductible. On le démontre à l'aide de l'arbre topologique $(\mathrm{T}_{\mathrm{II}})$. Pour cela, il suffit de montrer que pour une paire de noeuds fixés de même espèce sur $(\mathrm{T}_{\mathrm{II}})$, par exemple cels désignés par a et par b, étant donné un noeud c de même espèce (mais différent de a), on peut trouver un parcours fermé convenable sur $(\mathrm{T}_{\mathrm{II}})$ partant de a et y revenant, tel qu'il correspond un parcours fermé ou non partant de b et arrivant à c. (*V.* G. af Hällström [5] pp. 8-9.) Or c'est possible. Puisque si l'on effectue des parcours fermés d'origine a: n, $n+1$ ($n=\pm 1, \pm 2, \cdots$), avec les parcours correspondants, b arrive à tous les noeuds c situés sur la ligne horizontale. Et si l'on effectue des parcours fermés répétés d'origine a: $-\omega$, 0; $-\omega$, 0; $\cdots$, avec les parcours correspondants b arrive à tous les noeuds c situés sur la ligne verticale. *C. Q. F. D.*

b) La fonction d'automorphie $\eta_1=\phi_\lambda(\eta)$ de la fonction $\Psi_\lambda(0, \eta)$, $\Psi_\lambda(0, \eta)$ étant définie à partir de la fonction originale $f(y)\equiv y$, satisfait à la condition supposée dans le N°50, c) qui concerne la continuation analytique. Puisque cette condition résulte de celle qui correspond à la fonction d'automorphie $z_1=\Theta_\lambda(z)$ de la fonction $F_\lambda(z)$. Et cette dernière se vérifie facilement d'après les propriétés déjà citées de la fonction $F_\lambda(z)=(1+(i/\lambda)-e^{iz})e^{\lambda z}$. *C. Q. F. D.*

56. Remarque. Soit $\bar{S}_{\Psi_\lambda}$ la société de seconde espèce dans l'espace $\boldsymbol{P}^2\{\xi, \eta\}$ définie dans le N°49, 2° à l'aide d'une fonction entière appartenant à la classe II et de rang 1. $\bar{S}_{\Psi_\lambda}$ est aussi définie par une équation différentielle du premier ordre dont le coefficient est une fonction rationnelle de deux variables ξ et η. Faisons une transformation de l'espace $\boldsymbol{P}^2\{\xi, \eta\}$ sur l'espace $\boldsymbol{P}^2\{\xi_1, \eta_1\}$ de la forme suivante:

$$\begin{cases} \xi_1=\xi \\ \eta_1=\xi\eta \end{cases} ; \qquad \begin{cases} \xi=\xi_1 \\ \eta=\dfrac{\eta_1}{\xi_1}. \end{cases}$$

Alors on obtient une société $\bar{S}^{1}_{\Psi\lambda}$ de seconde espèce dans l'espace $\boldsymbol{P}^2\{\xi_1, \eta_1\}$, transformée de $\bar{S}_{\Psi\lambda}$. $\bar{S}^{1}_{\Psi\lambda}$ est aussi définie par une équation différentielle du premier ordre dont le coefficient est rationnel. Par suite $\bar{S}^{1}_{\Psi\lambda}$ jouit seulement d'un nombre fini de points multiples et d'un nombre fini de points d'indétermination dans l'espace $\boldsymbol{P}^2\{\xi_1, \eta_1\}$. Tout autre point de $\boldsymbol{P}^2\{\xi_1, \eta_1\}$ est un point (α) de $\bar{S}^{1}_{\Psi\lambda}$ et auquel $\bar{S}^{1}_{\Psi\lambda}$ est localement analytique. A l'origine se situe un point d'indétermination de première espèce auquel $\bar{S}^{1}_{\Psi\lambda}$ n'est pas localement analytique. Ce que l'on peut démontrer avec la même méthode de démonstration faite dans le N°50. A partir de cette société $\bar{S}^{1}_{\Psi\lambda}$, en suivant la même marche de raisonnement fait dans les N°s 51-52, on parvient à l'énoncé suivant:

Soit $\tilde{D}$ un domaine donné à l'avance dans l'espace $\boldsymbol{C}^2$. Alors ils existent dans $\tilde{D}$ des sociétés $\tilde{S}_\lambda$ de surfaces caractéristiques de première espèce, sans points multiples et sans points d'indétermination sauf un seul point d'indétermination p de première espèce satisfaisant aux conditions suivantes:

1°) *Désignons par M_λ une famille partielle convenable de $\tilde{S}_\lambda$ contenant des surfaces caractéristiques en nombre infini dénombrable au plus et ne s'accumulant pas à l'intérieur de $\tilde{D}$. Il y a trois surfaces caractéristiques de M_λ qui passent par p. Posons $D_\lambda = \tilde{D} - |M_\lambda|$. Appelons S_λ la restriction de $\tilde{S}_\lambda$ à D_λ. Alors S_λ est globalement analytique dans D_λ, sa projection analytique étant analytiquement équivalente à $\boldsymbol{T}^1_\lambda$. De plus S_λ a tout point de $|M_\lambda|$ comme un de ses points singuliers essentiels.*

2°) *En chaque point de $\tilde{D}$, sauf le point p, $\tilde{S}_\lambda$ est localement analytique. Au point p, $\tilde{S}_\lambda$ n'est pas localement analytique.*

3°) *$\tilde{S}_\lambda$ est globalement continue dans $\tilde{D}$.*

§ 7. Certaines applications analytiques de rang 1

On les étudie en construisant des sociétés de surfaces caractéristiques de la même manière que l'on a faite dans les §§ 5 et 6 précédents. On trouve par la suite les formes nécessaires des fonctions entières ou méromorphes appartenant aux classes I ou II et de rang 1.

57. Soit R une surface de Riemann étalée sur $\boldsymbol{P}^1\{x\}$. Supposons que R possède seulement un nombre fini de points fondamentaux de ramification: $0, a_1, a_2, \cdots, a_h, \infty$, où $a_j \neq a_k$ $(j \neq k)$ et $a_j \neq 0, \infty$, de façon que tous les points de ramification logarithmique se projètent sur les points $x=0$ ou ∞, et qu'ils n'existent qu'un nombre fini de points de ramification algébrique sur chacun des points $x=0, a_j, \infty$. Supposons de plus que R soit de genre 0. Soit $x=\varphi(y)$ une fonction génératrice de R définie dans un domaine δ de $\boldsymbol{P}^1\{y\}$.

Dans cette condition, on va chercher le type de R et la forme de $x=\varphi(y)$.

1° D'abord, on suppose sans perdre la généralité que $y=\infty$ est contenu dans $\boldsymbol{\delta}$. Soit S_φ la société de surfaces caractéristiques définie par la fonction méromorphe $\varphi(y)/x$ dans le domaine $\{\boldsymbol{C}^*\{x\}, \delta\}$, qui y est globalement analytique:

$$S_\varphi = \left\{\frac{\varphi(y)}{x} = c \,\middle|\, c \in \boldsymbol{C}^*\right\}.$$

Complétons S_φ à une société $\bar{S}_\varphi$ de première ou de seconde espèce dans l'espace $\{\boldsymbol{C}^*\{x\},\ \boldsymbol{P}^1\{y\}\}$, en y fournissant les surfaces caractéristiques $L_c=(x\in\boldsymbol{C}^*,\ y=c)$, $c\in\boldsymbol{P}^1-\delta$. C'est possible d'après la forme de la surface de Riemann R.

Prenons un point quelconque p' frontière du domaine $\{\boldsymbol{C}^*\{x\},\ \delta\}$ dans l'espace $\{\boldsymbol{C}^*\{x\},\ \boldsymbol{P}^1\{y\}\}$. Envisageons l'allure de $\bar{S}_\varphi$ au voisinage de p'. Le point p' est un point (α) de $\bar{S}_\varphi$, d'après la forme de R. Soient $x=x'$, $y=y'$ les coordonnées du point p', x' étant un point de $\boldsymbol{C}^*$ et y' étant un point frontière de δ. Prenons un système de coordonnées locales $\xi=x-x'$ et $\eta=y-y'$ au voisinage de p'. Une restriction de $\bar{S}_\varphi$ au voisinage de p' est représentée par une série de puissances de ξ convergeant dans un cercle $|\xi|<r$, de la forme suivante ([8] pp. 75-76 et 79-80):

$$\eta=\alpha+c_1(\alpha)\xi+c_2(\alpha)\xi^2+\cdots$$

où les coefficients $c_j(\alpha)$ sont des fonctions continues de la variable α dans un cercle $|\alpha|<\rho$. Or, d'après le mode de la construction de $\bar{S}_\varphi$, chaque $c_j(\alpha)$ est d'espèce suivante:

a) $c_j(\alpha)$ est holomorphe en tout point α, $|\alpha|<\rho$, tel que $\alpha+y'\in\delta$;

b) $c_j(\alpha)=0$ en tout point α, $|\alpha|<\rho$, tel que $\alpha+y'\in\boldsymbol{P}^1\{y\}-\delta$.

Donc, d'après un théorème de T. Radò, $c_j(\alpha)$ est une fonction holomorphe dans tout le cercle $|\alpha|<\rho$. Soit $c_{j_0}(\alpha)$ un coefficient de la série qui ne s'annule pas identiquement dans $|\alpha|<\rho$. Il existe au moins un tel $c_{j_0}(\alpha)$, d'après le mode de la construction de $\bar{S}_\varphi$. L'ensemble e de tous les points frontières de δ est contenu au voisinage de $y=y'$ dans l'ensemble de points $y=y'+\alpha'$, α' étant des zéros de $c_{j_0}(\alpha)$ dans $|\alpha|<\rho$. Par suite e ne contient qu'un nombre fini de points au voisinage de $y=y'$. Le point y' étant un point quelconque frontière de δ, e ne contient qu'un nombre fini de points dans $\boldsymbol{P}^1\{y\}: b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_k$. D'où $\delta=\boldsymbol{P}^1\{y\}-\{b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_k\}$.

2° Ensuite, envisageons la fonction génératrice $x=\varphi(y)$ elle-même. $\bar{S}_\varphi$ est localement analytique dans l'espace $\{\boldsymbol{C}^*\{x\},\ \boldsymbol{P}^1\{y\}\}$, ce que l'on voit d'après la considération faite plus haut. Donc $\bar{S}_\varphi$ est aussi définie par une équation différentielle du premier ordre dont le coefficient est une fonction rationnelle de y (et ainsi rationnelle de x comme on voit immédiatement):

$$\frac{dy}{dx}=\Phi(x,\ y). \tag{6}$$

Or la restriction de l'équation (6) dans le domaine $\{\boldsymbol{C}^*\{x\},\ \delta\}$ a une intégrale première $\varphi(y)/x$. D'où l'équation (6) s'écrit aussi

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\varphi(y)}{x\varphi'(y)}, \tag{7}$$

où $\varphi'(y)=d\varphi(y)/dy$. Le coefficient de l'équation (7) étant une fonction rationnelle de x et de y, il en résulte que

$$\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}=Q(y),$$

$Q(y)$ étant une fonction rationnelle de y. En intégrant cette équation de dérivé logarithmique, on trouve la forme de $\varphi(y)$.

En somme on conclure de la manière suivante:

i. *R est représentée conformément par $x=\varphi(y)$ sur un domaine $\delta=\boldsymbol{P}^1\{y\}-\{b_1, b_2, \cdots, b_k\}$.*

ii. *$\varphi(y)$ doit être de la forme*

$$\varphi(y)=Q_1(y)e^{Q_2(y)},$$

$Q_1(y)$ et $Q_2(y)$ étant des fonctions rationnelles, et l'ensemble de pôles de $Q_2(y)$ étant contenu dans l'ensemble de points $\{b_1, b_2, \cdots, b_k\}$. (*Cf.* G. Elfving [4] pp. 22-26.)

58. Soit R une surface de Riemann étalée sur $\boldsymbol{T}^1_\lambda\{\zeta\}$, où λ est un nombre complexe dont la partie réelle est >0. Supposons que R possède seulement un nombre fini de points fondamentaux de ramification: $a_1, a_2, \cdots, a_h$, où $a_j\neq a_k$ $(j\neq k)$ de façon que sur chacun desquels il n'existent qu'un nombre fini de points de ramification algébrique et il n'existe rien de point de ramification logarithmique. Supposons de plus que R soit de genre 0. Soit $\zeta=\phi_\lambda(y)$ une application génératrice de R définie dans un domaine δ de $\boldsymbol{P}^1\{y\}$. Soit $\kappa_\lambda: \boldsymbol{C}^*\{x\}\to\boldsymbol{T}^1_\lambda\{\zeta\}$ la projection canonique qui définit $\boldsymbol{T}^1_\lambda\{\zeta\}$ comme espace quotient de $\boldsymbol{C}^*\{x\}$ par un sous-groupe multiplicatif discret $\{x\,|\,x=d^j_\lambda,\ j=0, \pm1, \pm2, \cdots\}$ où $d_\lambda=e^{2\pi\lambda}$. Posons $x=\varphi_\lambda(y)=(\kappa_\lambda^{-1}\circ\phi_\lambda)(y)$ l'application composée de ϕ_λ et de κ_λ^{-1}. Appelons $x=\varphi_\lambda(y)$ une fonction génératrice multiforme de R. $x=\varphi_\lambda(y)$ est une fonction analytique multiforme ayant une infinité de branches dont une branche quelconque $\varphi_{\lambda,n}(y)$ est de la forme $\varphi_{\lambda,n}(y)=d^n_\lambda\varphi_{\lambda,0}(y)$ $(n=0, \pm1, \pm2, \cdots)$ où $\varphi_{\lambda,0}(y)$ est une branche déterminée. $x=\varphi_\lambda(y)$ n'est pas nécessairement irréductible et peut être décomposée en plusieurs fonctions analytiques uniformes ou multiformes.

Dans cette condition, on va chercher le type de R et la forme de $x=\varphi_\lambda(y)$.

1° D'abord, on suppose sans perdre la généralité que $y=\infty$ est contenu dans δ. Soit S_{φ_λ} la société de surfaces caractéristiques définie par la fonction analytique multiforme $\varphi_\lambda(y)/x$ dans le domaine $\{\boldsymbol{C}^*\{x\}, \delta\}$, qui y est globalement analytique:

$$S_{\varphi_\lambda}=\left\{\frac{\varphi_\lambda(y)}{x}=c\,\middle|\,1\leqq|c|<|d_\lambda|\right\}.$$

Complétons S_{φ_λ} à une société $\bar{S}_{\varphi_\lambda}$ de première ou de seconde espèce dans l'espace $\{\boldsymbol{C}^*\{x\}, \boldsymbol{P}^1\{y\}\}$, en y fournissant les surfaces caractéristiques $L_c=(x\in\boldsymbol{C}^*,\ y=c)$, $c\in\boldsymbol{P}^1-\delta$. C'est possible d'après la forme de la surface de Riemann R.

Prenons un point quelconque p' frontière du domaine $\{\boldsymbol{C}^*\{x\}, \delta\}$ dans l'espace $\{\boldsymbol{C}^*\{x\}, \boldsymbol{P}^1\{y\}\}$. Alors le point p' est un point (α) de $\bar{S}_{\varphi_\lambda}$, d'après la forme de R. D'où avec le même raisonnement que cel fait dans le N°57 précédent, on peut dire que l'ensemble de tous les points frontières de δ ne contient qu'un nombre fini de points dans $\boldsymbol{P}^1\{y\}: b_1, b_2, \cdots, b_k$. D'où $\delta=\boldsymbol{P}^1\{y\}-\{b_1, b_2, \cdots, b_k\}$.

2° Ensuite, envisageons la fonction génératrice multiforme $x=\varphi_\lambda(y)$ elle-même. $\bar{S}_{\varphi_\lambda}$ est localement analytique dans l'espace $\{\boldsymbol{C}^*\{x\}, \boldsymbol{P}^1\{y\}\}$, ce que l'on voit d'après la considération faite plus haut. Donc $\bar{S}_{\varphi_\lambda}$ est aussi définie par une équation différentielle du premier ordre dont le coefficient est une fonction rationnelle de y (et ainsi rationnelle de x comme on voit immédiatement):

$$\frac{dy}{dx}=\Phi_\lambda(x, y). \tag{8}$$

Or la restriction de l'équation (8) dans le domaine $\{C^*\{x\}, \delta\}$ a une intégrale première multiforme $\varphi_\lambda(y)/x$. D'où avec un raisonnement paréil à cel fait dans le N°57 précédent, on trouve la forme de $\varphi_\lambda(y)$.

En somme on conclure de la manière suivante:

i. *R est représentée conformément par $\zeta=\psi_\lambda(y)$ sur un domaine $\delta=\boldsymbol{P}^1\{y\}-\{b_1, b_2, \cdots, b_k\}$.*

ii. *$\varphi_\lambda(y)$ doit être de la forme*

$$\varphi_\lambda(y)=Q_1(y)Q_2(y)^{\lambda/t}e^{Q_3(y)},$$

$Q_1(y)$, $Q_2(y)$ et $Q_3(y)$ étant des fonctions rationnelles, et l'ensemble de zéros et de pôles de $Q_2(y)$, et l'ensemble de pôles de $Q_3(y)$ étant tous les deux contenus dans l'ensemble de points $\{b_1, b_2, \cdots, b_k\}$.

KYOTO PREFECTURAL UNIVERSITY

Références

[1] R. Baire, Leçons sur les fonctions discontinues, Collection de monographies sur la théorie des fonctions, Gauthier-Villars, Paris, 1905.

[2] A.S. Besicovitch, On sufficient conditions for a function to be analytic, and on behaviour of analytic functions in the neighbourhood of non-isolated singular points, Proc. London Math. Soc. (2), **32** (1931), 1-9.

[3] P. Boutroux, Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre, Collection de monographies sur la théorie des fonctions, Gauthier-Villars, Paris, 1908.

[4] G. Elfving, Über eine Klasse von Riemannschen Flächen und ihre Uniformisierung, Acta Soc. Sci. Fennicae (N.S.) A 2-3 (1934), 60pp.

[5] G. af Hällströn, Über die Automorphiefunktionen meromorpher Funktionen, Acta Acad. Aboensis, Math. et Phys. **16**-4 (1949), 28pp.

[6] F. Iversen, Recherches sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes, Thèse de l'Université de Helsingfors, Helsingfors, 1914, 67pp.

[7] K. Koch, Zur Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen Die analytische Projektion, Schriftenreihe Math. Inst. Univ. Münster, Heft 6, 1953, Inaugral-Dissertation der Westfälischen Wilhelms Universität zu Münster, 79pp.

[8] S. Kondo, Sur les sociétés de surfaces caractéristiques dans l'espace de deux variables complexes, J. Math. Soc. Japan, **23** (1971), 53-81.

[9] S. Kondo, Sur les sociétés de surfaces caractéristiques à singularité essentielle dégénérative, Sci. Rep. Kyoto Pref. Univ. (Nat. Sci. & Liv. Sci.), **38** (1987), A1-A3.

[10] T. Nishino, Nouvelles recherches sur les fonctions entières de plusieurs variables complexes (I), J. Math. Kyoto Univ., **8** (1968), 49-100.

[11] T. Nishino, Nouvelles recherches sur les fonctions entières de plusieurs variables complexes (II) Fonctions entières qui se réduisent à celles d'une variable, ibid., **9** (1969), 221-274.

[12] M. Ohtsuka, On the behavior of an analytic function about an isolated boundary point, Nagoya Math. J., **4** (1952), 103-108.

[13] K. Oka, Sur les ensembles de points à 4 dimensions engendrés analytiquement, Oeuvres posthumes, Vol. 7, 1983, 1-146.

[14] P. Painlevé, Sur les équations différentielles du premier ordre dont l'intégrale générale n'a qu'un nombre fini de branches, Note publiée dans le livre de P. Boutroux [3], 141-187.

[15] K. Stein, Analytische Projektion komplexer Mannigfaltigkeiten, Colloque sur les fonctions de plusieurs variables tenu à Bruxelles, 1953, 97-107, Centre Belge de Recherches Mathématiques.

[16] S. Stoïlow, Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques (Deuxième édition), Collection de monographies sur la théorie des fonctions, Gauthier-Villars, Paris, 1956.

[17] P. Thullen, Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Funktionen und Flächen im Raume von n komplexen Veränderlichen, Math. Annalen, **111** (1935), 137-157.

[18] H. Wittich, Neuere Untersuchungen über eindeutige analytische Funktionen, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, (N.F.) Heft 8, Springer, Berlin·Göttingen·Heidelberg, 1955.