J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)
30-4 (1990) 637-649

Domaines pseudoconvexes d'ordre général et fonctions pseudoconvexes d'ordre général

Par

Osamu FUJITA

Introduction

Un ouvert D de C^n est dit pseudoconvexe d'ordre k si le complément $C^n - D$ a la continuite comme un ensemble analytique de dimension k, k étant un entier tel que $0 \leqq k \leqq n-1$. (Précisément voir le n°3.) Un domaine pseudoconvexe ordinaire dans C^n est celui d'ordre $n-1$. Soit $d(x)$ la distance euclidienne de x $(\in D)$ à la frontière ∂D. Alors, d'après Oka[1], D est pseudoconvexe d'ordre $n-1$ si et seulement si $-\log d(x)$ est une fonction plurisousharmonique dans D (c'est-à-dire une fonction pseudoconvexe au sense d'Oka). Dans le présent mémoire, nous introduirons la notion de fonction pseudoconvexe d'ordre k en généralisant celle de fonction plurisousharmonique, et nous montrerons que un ouvert D $(\subset C^n)$ est pseudoconvexe d'ordre k si et seulement si $-\log d(x)$ est une fonction pseudoconvexe d'ordre k dans D. C'est une part du Théorème 2 (au n°6) qui caractérise des domaines pseudoconvexes d'ordre général.

Au n°1 de ce mémoire, en généralisant la notion de fonction sousharmonique de deux variables, nous introduirons la notion de fonction souspluriharmonique de $2n$ variables. D'après Z. Slodkowski, cette notion est équivalent à celle de '$(n-1)$-plurisubharmonic function' au sens de Hunt-Murray [5]. (Voir la note 2) an n°1.)

Soit $R(x)$ le rayon de Hartogs d'un ouvert D $(\subset C^n)$ au point $x=(x_1, \cdots, x_n)$ $(\in D)$ par rapport à x_n. Alors, $-\log R(x)$ est une fonction pseudoconvexe d'ordre k si D est pseudoconvexe d'ordre k (Théorème 1 au n°4). C'est un résultat fondamental dans nos recherches, et dont la démonstration se fond sur un théorème dû à T. Ueda. (Voir le n°3.)

Un ouvert D $(\subset C^n)$ est pseudocovexe d'ordre $n-q$ s'il est q-convexe $(1 \leqq q \leqq n)$. Mais, l'inverse n'est pas nécessairement vraie. (Voir les Examples 3 et 4 au n°7.) D $(\subset C^n)$ est aussi pseudoconvexe d'ordre $n-q$ s'il est 'q-convexe with conrners' au sens de Diederich-Fornaess [2]. Dans la direction inverse, K. Matsumoto a indiqué que un ouvert D $(\subset C^n)$ est 'q-complete with corners' au sens de [2] si D est pseudoconvexe d'ordre $n-q$ et si la frontière ∂D est 'pieceweise smooth' au sens de [6]. (Voir l'Exemple 5 au n°7.)

Communiqué par Prof. Y. Kusunoki, le 20 Décembre, 1988

1) Voir Oka [7], Memoires VI et IX (en particulier, p. 81 et p. 186).

1. Fonctions souspluriharmoniques

Soit D un ouvert de l'espace C^n et soit φ une fonction réelle (qui peut prendre la valeur $-\infty$) définie dans D. Nous appellerons φ *fonction souspluriharmonique dans D* si cette fonction satisfait aux conditions suivantes:

1° φ est semicontinue supérieurement.

2° Soit Δ ($\Subset D$) un domaine quelconque à l'intérieur complet et soit u une fonction pluriharmonique (c'est-á-dire que u est locallement la partie réelle d'une fonction holomorphe) dans un voisinage de $\bar{\Delta}$ (la fermeture de Δ. Alors, si $\varphi(x)\leqq u(x)$ pour tout $x\in\partial\Delta$ (la frontière de Δ), il faut que $\varphi(x)\leqq u(x)$ pour tout $x\in\Delta$[2].

Proposition 1 (Principe de maximum au sens large). *Soit φ une fonction souspluriharmonique dans un ouvert D de C^n et soit Δ ($\Subset D$) un domaine quelconque. Alors, $\varphi(x^\circ)\leqq\sup\{\varphi(x)\mid x\in\partial\Delta\}$ pour tout $x^0\in\Delta$.*

En effet, on peut prendre la constante $\sup\{\varphi(x)\mid x\in\partial\Delta\}$ comme fonction u à la condition 2° ci-dessus.

On peut verifier facilement la

Proposition 2 (Invariance par rapport à l'application biholomorphe). *Soient D_1, D_2 deux ouverts de C^n et soit f une application biholomorphe de D_1 sur D_2. Alors, pour qu'une fonction réelle φ soit souspluriharmonique dans D_2, il faut et il suffit que la fonction composé $\varphi\circ f$ soit souspluriharmonique dans D_1.*

La proposition suivante montre que la propriété qu'une fonction est souspluriharmonique est une propriété locale.

Proposition 3. *Soit φ une fonction réelle définie dans un ouvert D de C^n. Pour que φ soit souspluriharmonique dans D, il faut et il suffit que φ satisfasse aux conditions suivantes:*

1° *φ est semicontinue supérieurement.*

2° *La hypersphère fermée dans C^n ayant pour centre a et pour rayon r (<0) sera désigné par $H_r(a)$. Alors, pour tout point $a\in D$, il existe une hypersphère $H_{r_0}(a)$ contenue dans D, de façon que*

$$\varphi(a)\leqq\sup\{\varphi(x)\mid x\in\partial H_r(a)\} \qquad si\ 0<r\leqq r_0. \tag{2}$$

3° *Soit u une fonction pluriharmonique quelconque dans un voisinage de $H_{r_0}(a)$ à la condition 2° ci-dessus. Alors la formule (1) subsiste si l'on prend $\varphi+u$ à la place de φ.*

En effet, la nécessité des conditions étant évidente, nous allons montrer qu'une

2) Dans les conditions ci-dessus, si l'on remplace u par une fonction plurisurharmonique dans un voisinage de $\bar{\Delta}$, φ est appelé *fonction '$(n-1)$-plurisubharmonic' dans D*. (Voir Hunt-Murray [5], Definition 2.3 et Lemma 2.7.) Il est évident que *une fonction réelle φ dans un ouvert D ($\subset C^n$) est souspluriharmonique s'il est '$(n-1)$-plurisubharmonic' dans D.* Le Lemma 4.4 de Slodkowski [8] montre que *l'inverse est aussi vraie.*

fonction réelle φ satisfaisant aux conditions 1°, 2°, 3° ci-dessus est souspluriharmonique dans D.

Supposons, pour reduire l'absurde, que $\varphi(x)>u(x)$ pour un point $x\in\Delta$, tandis que $\varphi(x)\leqq u(x)$ pour tout $x\in\partial\Delta$, où Δ ($\Subset D$) est un domaine et u est une fonction pluriharmonique dans un voisinage ouvert V ($\subset D$) de $\bar{\Delta}$. Considérons la fonction $\psi=\varphi-u$ dans V, qui aussi satisfait aux conditions 1°, 2°, 3° ci-dessus. Posons $M=\sup\{\psi(x)\,|\,x\in\Delta\}$. Alors M est positif et $\psi(x)\leqq 0$ pour tout $x\in\partial\Delta$. Donc, l'ensenble

$$E=\{x\in\Delta \mid \psi(x)=M\}$$

est un ensemble compact contenu dans Δ. Soit $R=\sup\{d(0,x) \mid x\in E\}$, où $d(0,x)$ est la distance euclidienne de x à l'origine 0. Prenons un point a de E satisfaisant à $R=d(0,a)$. En faisant une transformation unitaire de coordonnées de C^n, on peut supposer que $a=(R,0,\cdots,0)$. Alors l'ensemble E est contenu dans la partie $u_1<R$ sauf a, où u_1 est la partie réelle de x_1. Soit r_0 un nombre positif suffisamment petit tel que $H_{r_0}(a)\Subset\Delta$ et que $H_{r_0}(a)$ satisfait à la condition 2° pour ψ. Soit M' la borne supérieure de $\psi(x)$ pour $x\in\partial H_{r_0}(a)\cap\{u_1\geqq R\}$. On a alors $M'<M$. Posons $\psi_1(x)=\psi(x)+\varepsilon(u_1-R)$, où ε est un nombre positif. Si l'on prend ε suffisamment petit, on a

$$\sup\{\psi_1(x) \mid x\in\partial H_{r_0}(a)\}<M.$$

Puisque $\psi_1(a)=M$, c'est contradictoire à la condition 3° ci-dessus. C. Q. F. D.

Une somme de deux fonctions souspluriharmoniques n'est pas nécessairement souspluriharmonique. (Voir l'Exemple 1 ci-dessous.) D'autre part, on peut verifier facilement les propriétés suivantes qui sont pareilles à celles des fonctions sousharmoniques.

Proposition 4. *Soit D un ouvert de C^n.*

1) *Si φ et u sont des fonctions dans D souspluriharmonique et pluriharmonique respectivement, et si c est une constante positive, $\varphi+u$ et $c\varphi$ sont souspluriharmoniques dans D.*

2) *Si φ_1, φ_2 sont des fonctions souspluriharmoniques dans D,* $\max(\varphi_1,\varphi_2)$ *l'est aussi. De plus, si $\{\varphi_\lambda\,|\,\lambda\in\Lambda\}$ est une famille de fonctions souspluriharmoniques dans D et si $\varphi=\sup\{\varphi_\lambda\,|\,\lambda\in\Lambda\}$ est semicontinue supérieurement dans D, φ est aussi souspluriharmonique dans D.*

3) *Etant donnée une suite $\{\varphi_\nu\}$ de fonctions souspluriharmoniques dans D qui est décroissante ou qui converge uniformément à l'intérieur complet de D, la limite φ est aussi souspluriharmonique dans D.*

On a de plus

Proposition 5. *Soit D un ouvert de l'espace de n variables complexes $x_1,\cdots,x_n$ et soit φ une fonction réelle deux fois continûment différentiable par rapport aux parties réelles et imaginaires des variables x_i $(i=1,\cdots,n)$. Pour que φ soit souspluriharmonique dans D il faut et il suffit que la forme de Levi $L(\varphi)=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial\bar{x}_j}w_i\bar{w}_j$ ait au moins une valeur propre non negative en tout point de D.*

En effet, supposons que φ satisfasse aux conditions de la proposition. Posons $\varphi_\nu=\varphi+(1/\nu)(|x_1|^2+\cdots+|x_n|^2)$, où ν est un entier positif quelconque. Alors la forme de Levi $L(\varphi_\nu)$ a au moins une valeur propre positive en tout point a de D. Donc on peut trouver une droite complexe L contenant a de façon que la restriction $\varphi_\nu|L$ de φ_ν sur L est souharmonique dans un voisinage V de a. Soit $H_{r_0}(a)$ une hypersphère fermée dans D ayant pour centre a et pour rayon r_0 de façon que $H_{r_0}(a)\cap L\subset V$. On a alors

$$\varphi_\nu(a)\leqq\sup\{\varphi_\nu(x)\mid x\in\partial H_{r_0}(a)\cap L\}\leqq\sup\{\varphi_\nu(x)\mid x\in\partial H_{r_0}(a)\}.$$

Donc φ_ν satisfait à la condition 2° de la proposition 3. Il en est de même de la condition 3°. φ_ν étant continue dans D, d'après la Proposition 3, φ_ν est souspluriharmonique dans D. Puisque la suite $\{\varphi_\nu\}$ $(\nu=1, 2, \cdots)$ est décroissante et converge vers φ, d'après la Proposition 4, 3) φ est aussi souspluriharmonique dans D.

Maintenant, supposons que φ soit souspluriharmonique dans D et que toute valeur propre de $L(\varphi)$ soit negative en un point $a=(a_1, \cdots, a_n)$ de D. Alors, dans un voisinage de a, on a

$$\begin{aligned}\varphi(x)=\varphi(a)&+\sum_{j=1}^{n}(\varphi_{x_j}(a)(x_j-a_j)+\varphi_{\bar{x}_j}(a)\overline{(x_j-a_j)})\\&+\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}(\varphi_{x_jx_k}(a)(x_j-a_j)(x_k-a_k)+\varphi_{\bar{x}_j\bar{x}_k}(a)\overline{(x_j-a_j)}\overline{(x_k-a_k)})\\&+\sum_{j,k=1}^{n}\varphi_{x_j\bar{x}_k}(a)(x_j-a_j)\overline{(x_k-a_k)}+\varepsilon\rho^2,\end{aligned}$$

où ε tend vers zero avec $\rho=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_j-a_j|^2}$. Par suite, en posant

$$u(x)=\mathrm{Re}(2\sum_{j=1}^{n}\varphi_{x_j}(a)(x_j-a_j)+\sum_{j,k=1}^{n}\varphi_{x_jx_k}(a)(x_j-a_j)(x_k-a_k)).$$

on a

$$\varphi(a)-u(a)>\varphi(x)-u(x)$$

dans un vaisinage de a sauf a. C'est une contradiction, car $\varphi(x)-u(x)$ est une fonction souspluriharmonique dans un voisinage de a. C. Q. F. D.

Example 1. D'après la Proposition 5, $\varphi_1(x)=|x_1|^2-2|x_2|^2$ et $\varphi_2(x)=|x_2|^2-2|x_1|^2$ sont souspluriharmoniques dans l'espace de deux variables complexes x_1, x_2. Mais la somme $\varphi_1(x)+\varphi_2(x)=-|x_1|^2-|x_2|^2$ n'est pas ainsi.

2. Fonctions pseudoconvexes d'ordre général

Soit D un ouvert de l'espace C^n et soit q un entier tel que $1\leqq q\leqq n$. Une fonction réelle φ (qui peut prendre la valeur $-\infty$) définie dans D sera dite *fonction pseudoconvexe d'ordre $n-q$ dans D* si elle satisfait aux conditions suivantes:

1° φ est semicontinue supérieurement.

2° Pour tout domaine G dans C^q et pour toute application holomorphe f de G

dans D, la fonction composé $\varphi\circ f$ est souspluriharmonique dans G[3].

Si φ est une fonction pseudoconvexe d'ordre k $(0\leqq k\leqq n-1)$ dans un ouvert D $(\subset C^n)$ et si k' est un entier tel que $0\leqq k'\leqq k$, φ est aussi celle d'ordre k' dans D. Une fonction réelle φ dans un ouvert D est pseudoconvexe d'ordre $n-1$ si et seulement s'il est plurisousharmonique.

On peut verifier facilement la

Proposition 6. *Soient D_1 et D_2 deux ouverts de C^n et C^m respectivement, et soit f une application holomorphe de D_1 dans D_2. Si φ est une fonction pseudoconvexe d'ordre $m-q$ $(1\leqq q\leqq \min(m, n))$ dans D_2, la fonction composé $\varphi\circ f$ est pseudoconvexe d'ordre $n-q$ dans D_1. En particulier, si $n=m$ et si f est une application biholomorphe de D_1 sur D_2, φ est pseudoconvexe d'ordren $n-q$ dans D_2 si et seulement si $\varphi\circ f$ est ainsi dans D_1.*

D'après la Proposition 4, on a immédiatement la

Proposition 7. *Soit D un ouvert de C^n et soit k un entier tel que $0\leqq k\leqq n-1$.*

1) *Si φ et u sont des fonctions dans D pseudoconvexe d'ordre k et pluriharmonique respectivement, et si c est une constante positive, $\varphi+u$ et $c\varphi$ sont pseudoconvexes d'ordre k dans D.*

2) *Si φ_1, φ_2 sont des fonctions pseudoconvexes d'ordre k dans D,* $\max(\varphi_1, \varphi_2)$ *l'est aussi. De plus, si $\{\varphi_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$ est une famille de fonctions pseudoconvexes d'ordre k dans D et si $\varphi=\sup\{\varphi_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$ est semicontinue supérieurement dans D, φ est aussi pseudoconvexe d'ordre k dans D.*

3) *Etant donnée une suite $\{\varphi_\nu\}$ de fonctions pseudoconvexes d'ordre k dans D qui est décroissante ou qui converge uniformément à l'intérieur comlet de D, la limite φ est aussi pseudoconvexe d'ordre k dans D.*

D'après la Proposition 5, on peut preuver facilement la

Proposition 8. *Soit D un ouvert de C^n et soit k un entier tel que $0\leqq k\leqq n-1$. Pour que une fonction réelle φ deux fois continûment différentiable dans D soit pseudoconvexe d'ordre k dans D, il faut et il suffit que la forme de Levi $L(\varphi)$ ait au moins $k+1$ valeurs propres non negatives en tout point de D.*

3. Domaines pseudoconvexes d'ordre général[4]

Soit D un ouvert de l'espace C^n des variables complexes $x_1, \cdots, x_n$, et soit q un entier tel que $1\leqq q\leqq n-1$. On dit que D est *pseudoconvexe d'ordre $n-q$* s'il satisfait aux conditions suivantes:

1° (Théorème de la continuité (A) d'ordre $n-q$.)

Soit E le complément C^n-D. Si $\xi=(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ est un point de E et si pour un

3) *Une fonction réelle φ qui est pseudoconvexe d'ordre $n-q$ dans D est nécessairement '$(q-1)$-plurisubharmonic' dans D* au sens de Hunt-Murray [5]. Mais, *dans le cas où $2\leqq q\leqq n$, il est un problème ouvert si l'inverse est vraie ou non.*

4) Voir Tadokoro [10], p. 281, note 2) et Fujita [4], p. 403, n°9.

nombre positif ρ l'ensemqle

$$0<|x_1-\xi_1|^2+\cdots+|x_q-\xi_q|^2<\rho^2, \quad x_{q+1}=\xi_{q+1}, \cdots, x_n=\xi_n$$

ne contient aucun point de E, on peut trouver un nombre positif r de façon qu'à tout point $(x'_{q+1}, \cdots, x'_n)$ dans

$$|x_{q+1}-\xi_{q+1}|<r, \cdots, |x_n-\xi_n|<r$$

corresponds au moins un point $(x'_1, \cdots, x'_q)$ dans

$$|x_1-\xi_1|^2+\cdots+|x_q-\xi_q|^2<\rho^2$$

tel que $x'=(x'_1, \cdots, x'_n)\in E$.

2° La propriété 1° de E reste invariante sous toute transformation biholomorphe des coordonnées au voisinage d'un point quelconque de E.

Pour des raisons de convenance, on dit que *tout ouvert* D $(\subset C^n)$ *est pseudoconvexe d'ordre* 0. Alors, *si* D *est pseudoconvexe d'ordre* k $(0\leqq k\leqq n-1)$ *et si* $0\leqq k'\leqq k$, D *est aussi pseudoconvexe d'ordre* k'. Un ouvert D $(\subset C^n)$ pseudoconvexe ordinaire est celui d'ordre $n-1$.

Il est facile à voir que *l'intersection de deux ouverts de* C^n *qui sont pseudoconvexes d'ordre* k *est aussi pseudoconvexe d'ordre* k. Donc, *si* D *et* D' *sont des ouverts de* C^n *qui sont pseudoconvexes d'ordre* k *et* k' *respectivement, l'intersection* $D\cap D'$ *est pseudoconvexe d'ordre* $\min(k, k')$.

Si un ouvert D $(\subset C^n)$ est pseudoconvexe d'ordre $n-q$ $(1\leqq q\leqq n-1)$, il satisfait au *théorème de la continuité* (*C*) *d'ordre* $n-q$ suivant[5]:

Soient Δ_1, Δ_2, Δ trois domaines dans C^n des formes

$$\Delta_1: \rho_1^2<|x_1-a_1|^2+\cdots+|x_q-a_q|^2<\rho_2^2, \ |x_j-a_j|<r_j \ (q+1\leqq j\leqq n),$$

$$\Delta_2: |x_1-a_1|^2+\cdots+|x_q-a_q|^2<\rho_2^2, \ |x_j-a_j|<r'_j \ (q+1\leqq j\leqq n),$$

$$\Delta: |x_1-a_1|^2+\cdots+|x_q-a_q|^2<\rho_2^2, \ |x_j-a_j|<r_j \ (q+1\leqq j\leqq n),$$

où $a=(a_1, \cdots, a_n)$ est un point quelconque C^n et ρ_1, ρ_2 $(\rho_1<\rho_2)$, r_j, r'_j $(r'_j\leqq r_j)$ sont des nombres positifs quelconques. Alors, si $\Delta_1\cup\Delta_2$ *est contenu dans* D, Δ *est nécessairement contenu dans* D.

Un ensemble fermé E dans C^n est dit *pseudoconcave d'ordre* k $(0\leqq k\leqq n-1)$ si le complément C^n-E est pseudoconvexe d'ordre k. Une fonction réelle φ deux fois continûment différentiable dans un ouvert U $(\subset C^n)$ est dite *fortement k-convexe* $(1\leqq k\leqq n)$ si la forme de Levi $L(\varphi)$ a au moins $n-k+1$ valeurs propres positives en tout point de U. Alors, d'après Ueda ([11], Théorème 1), on a

Lemme de Ueda. *Pour que un ensemble fermé* E *dans* C^n *soit pseudoconcave d'ordre* k $(1\leqq k\leqq n-1)$ *il faut et il suffit que pour tout ouvert* U *de* C^n *et pour toute fonction* φ *fortement k-convexe dans* U *la restriction* $\varphi|U\cap E$ *n'atteigne pas une valeur maximum.*

Au n° 4 nous aurons besoin de utilizer le théorème suivante:

5) Voir Tadokoro [10], p. 285, n°4. Pour la forme, ce théorème de la continuité (C) est légèrement différent de celui de Tadokoro. Mais on voit facilement que ils sont équivalents.

Théorème de Ueda. *Soient D et D' des ouverts de C^m et C^n respectivement. Si D et D' sont pseudoconvexes d'ordre $m-q$ $(1\leqq q\leqq m)$ et $n-r$ $(1\leqq r\leqq n)$ respectivement, le produit direct $D\times D'$ est pseudoconvexe d'ordre $m+n-\max(q, r)$ dans C^{m+n}.*

En effect, nous allons montrer d'abord que $D\times C^n$ est pseudoconvexe d'ordre $m+n-q$. En posant $E=C^n-D$, il suffit de montrer que $E\times C^n$ est pseudoconcave d'ordre $m+n-q$ dans C^{m+n}. Supposons, pour reduire l'absurde, que $E\times C^n$ ne soit pas ainsi. Alors, d'après le lemme ci-dessus, il existe un ouvert U et une fonction φ fortement $(m+n-q)$-convexe dans U de façon que la restriction $\phi=\varphi|U\cap(E\times C^n)$ atteigne une valeur maximum. Soit $\phi(x^0, y^0)$ la valeur maximum de ϕ où$x^0\in E$, $y^0\in C^n$ et $(x^0, y^0)\in U$. φ étant fortement $(m+n-q)$-convexe il existə une variété linéaire complexe L de dimension $q+1$ passant par (x^0, y^0) de façon que la restriction $\varphi|U\cap L$ soit plurisousharmonique dans un voisinage de (x^0, y^0). $\phi(x^0, y^0)$ étant la valeur maximum de ϕ il faut que L soit transversal à $\{x^0\}\times C^n$. C'est impossible si $q=m$. Dans le cas où $1\leqq q\leqq m-1$ on peut trouver une variété linéaire complexe M de dimension m contenant L qui est transversal à $\{x^0\}\times C^n$. Soit $\pi: M\to C^n$ la projection canonique. Puisque π est une application biholomorphe et que $\pi(M\cap(E\times C^n))=E$, $M\cap(E\times C^n)$ est pseudoconcave d'ordre $m-q$ dans M. D'autre part, L étant contenu dans M, la restriction $\varphi|U\cap M$ est fortement $(m-q)$-convexe dans un voisinage de (x^0, y^0). C'est contradictoire avec le lemme de Ueda, car $\varphi(x^0, y^0)$ est la valeur maximum de $\varphi|(U\cap M)\cap(M\cap(E\times C^n))$. Donc $D\times C^n$ est pseudoconvexe d'ordre $m+n-q$.

Puisque $D\times D'=(D\times C^n)\cap(C^m\times D')$, et que $D\times C^n$ et $C^m\times D'$ sont pseudoconvexes d'ordre $m+n-q$ et $m+n-r$ respectivement, $D\times D'$ est pseudoconvexe d'ordre $\min(m+n-q, m+n-r)=m+n-\max(q, r)$. C. Q. F. D.

4. Rayons de Hartogs

Soit D un ouvert de l'espace C^n des variables complexes $x_1, \cdots, x_n$, soit $x^0=(x_1^0, \cdots, x_n^0)$ un point de D, et soit

$$C_{r_1\cdots r_n}: |x_1-x_1^0|<r_1, \cdots, |x_n-x_n^0|<r_n$$

un polycylindre dans C^n. Nous dénoterons la borne supérieure de r_n pour tout $C_{r_1\cdots r_n}$ $(\subset D)$ par $R(x^0)$ et l'appellerons *rayon de Hartogs de D (au point x^0) par rapport à x_n*. Alors, $R(x)$ est une fonction réelle positif (qui peut prendre la valeur ∞) semi continue inférieurement dans D.

En généralisant le résulta d'Oka[6], on a

Théorème 1. *Soit D un ouvert de l'espace C^n des variables complexes $x_1, \cdots, x_n$ et soit $R(x)$ le rayon de Hartogs de D par rapport à x_n. Alors, si D est pseudoconvexe d'ordren $n-q$ $(1\leqq q\leqq n)$, $-\log R(x)$ est une fonction pseudoconvexe d'ordre $n-q$ dans D.*

En effet, si D n'est pas borné, on peut trouver une suite des ouverts $\{D_\nu\}$ $(\nu=1, 2, \cdots)$ croissante et tendante vers D, où chanque D_ν $(\subset C^n)$ est borné et pseudo-

6) Voir [7], p. 79-81 et p. 184-186.

convexe d'ordre $n-q$. Soient $R_\nu(x)$ les rayons de Hartogs de D_ν par rapport à x_n. Alors $\{-\log R_\nu(x)\}$ ($\nu=1, 2, \cdots$) est une suite décroissante tendante vers $-\log R(x)$. D'après la Proposition 7, 3), il suffit de montrer que chaque $-\log R_\nu(x)$ est pseudoconvexe d'ordre $n-q$.

Pour simplifier l'écriture, nous montrerons que $-\log R(x)$ est pseudoconvexe d'ordre $n-q$, en supposant que D soit borné. Soit G un domaine dans l'espace $\boldsymbol{C}^q$ et soit f une application holomorphe de G dans D. Posons $\varphi(t)=-\log R(f(t))$ pour $t\in G$. Il suffit de montrer que $\varphi(t)$ est souspluriharmonique dans G.

$\varphi(t)$ satisfait à la condition 1° de la Proposition 3 au n° 1. Quand à la condition 2° de la proposition, soit t^0 un point quelconque de G et soit $H_{r_0}(t^0)$ $(\subset G)$ une hypersphère fermée ayant pour centre t^0 est pour rayon r_0. Nous allons montrer que

$$\varphi(t^0)\leqq\sup\{\varphi(t) \mid t\in\partial H_r(t^0)\} \tag{1}$$

pour tout r tel que $0<r\leqq r_0$.

Soit Ω $(\subset G)$ une hypersphere ouvert ayant pour centre t^0 et pour rayon r_1 $(r_0<r_1)$. Alors, d'après le Théorème de Ueda au n° 3, le produit direct $\tilde{D}=\Omega\times D$ est pseudoconvexe d'ordre n $(=q+n-\max(1, q))$ dans $\boldsymbol{C}^{q+n}$. En désignant par $\tilde{R}(t, x)$ le rayon de Hartogs de $\tilde{D}$ (au point (t, x)) par rapport à x_n, on a $R(f(t))=\tilde{R}(t, f(t))$ pour tout $t\in H_{r_0}$.

Faisons au domaine $\Omega\times\boldsymbol{C}^n$ la transformation biholomorphe

$$t_i=t_i \ (i=1, \cdots, q), \quad X_j=x_j-f_j(t) \ (j=1, \cdots, n), \tag{2}$$

et désignons les images de $\tilde{D}$ et (t, x) par $\tilde{D}_*$ et (t, X) respectivement. (2) est la transformation conposée de deux transformations (3), (4) suivantes:

$$t_i=t_i \ (i=1, \cdots, q), \quad X_j=x_j-f_j(t) \ (j=1, \cdots, n-1), \quad x_n=x_n, \tag{3}$$

$$t_i=t_i \ (i=1, \cdots, q), \quad X_j=X_j \ (j=1, \cdots, n-1), \quad X_n=x_n-f_n(t). \tag{4}$$

Puisque x_n est invariant par (3) et que (4) est une translation du plan x_n quand on regards t comme déterminé, on a $\tilde{R}_*(t, X)=\tilde{R}(t, x)$ pour tout $(t, x)\in\tilde{D}$. Donc, $R(f(t))=\tilde{R}(t, f(t))=\tilde{R}_*(t, 0)$, et on a $\varphi(t)=-\log R(f(t))=-\log \tilde{R}_*(t, 0)$, 0 étant l'origine de $\boldsymbol{C}^n$.

Supposons, pour reduire l'absurde, que

$$\varphi(t^0)>\sup\{\varphi(t) \mid t\in\partial H_r(t^0)\}$$

pour un nombre positif r $(\leqq r_0)$. Alors, en prenant un nombre positif ρ tel que $\tilde{R}_*(t^0, 0)<\rho<\inf\{\tilde{R}_*(t, 0) \mid t\in\partial H_r(t^0)\}$, on a

$$\{(t, X) \mid t\in\partial H_r(t^0), X_1=\cdots=X_{n-1}=0, |X_n|\leqq\rho\}\subset\tilde{D}_* \tag{5}$$

et

$$\{(t^0, X) \mid X_1=\cdots=X_{n-1}=0, |X_n|\leqq\rho\}\not\subset\tilde{D}_*. \tag{6}$$

D'autre part, on a

$$\{(t, 0) \mid t\in H_r(t^0)\}\subset\tilde{D}_*. \tag{7}$$

D'après (5) et (7), on peut trouver un nombre positif ε suffisament petit de façon que la somme de deux domaines suivantes

$$\Delta_1 : (r-\varepsilon)^2 < |t_1-t_1^0|^2 + \cdots + |t_q-t_q^0|^2 < (r+\varepsilon)^2,\ |X_1|<\varepsilon,\ \cdots,\ |X_{n-1}|<\varepsilon,\ |X_n|<\rho+\varepsilon,$$

$$\Delta_2 : |t_1-t_1^0|^2 + \cdots + |t_q-t_q^0|^2 < (r+\varepsilon)^2,\ |X_1|<\varepsilon,\ \cdots,\ |X_n|<\varepsilon\,,$$

soit contenue dans $\tilde{D}_*$. $\tilde{D}_*$ étant pseudoconvexe d'ordre n dans $\boldsymbol{C}^{q+n}$, il satisfait au théorème de la continuité ($\boldsymbol{C}$) d'ordre n dans $\boldsymbol{C}^{q+n}$. (Voir le n° 3.) Donc, le domain

$$\Delta : |t_1-t_1^0|^2 + \cdots + |t_q-t_q^0|^2 < (r+\varepsilon)^2,\ |X_1|<\varepsilon,\ \cdots,\ |X_{n-1}|<\varepsilon,\ |X_n|<\rho+\varepsilon$$

est nécessairement contenu dans $\tilde{D}_*$. C'est contradictoire avec (6). Donc, l'inégalité (1) est démontré.

Quand à la condition 3° de la Proposition 3, soit $u(t)$ une fonction pluriharmonique dans un voisinage U ($\subset \Omega$) de $H_{r_0}(t^0)$ ci-dessus. Prenons une hypersphère ouvert Ω' tel que $H_{r_0}(t^0) \subset \Omega' \subset U$. Alors $\tilde{D}'_* = \{(t, X) \in \tilde{D}_* \mid t \in \Omega'\}$ est aussi pseudoconvexe d'ordre n. En désignant par $\tilde{R}'_*(t, X)$ le rayon de Hartogs de D' par rapport à X_n, on a $\tilde{R}'_*(t, 0) = \tilde{R}_*(t, 0)$ pour tout $t \in \Omega'$. On peut trouver une fonction holomorphe $g(t)$ dans Ω' dont la partie réelle est $-u(t)$. Faisons au domaine $\Omega' \times \boldsymbol{C}^n$ la transformation biholomorphe

$$t_i = t_i\ (i=1, \cdots, q),\quad Y_j = X_j\ (j=1, \cdots, n-1),\quad Y_n = X_n e^{g(t)}\,,$$

et désignons les images de $\tilde{D}'_*$ et (t, X) par $\tilde{D}''_*$ et (t, Y) respectivement. Soit $\tilde{R}''_*(t, Y)$ le reyon de Hartogs de $\tilde{D}''_*$, on a alors $\tilde{R}''_*(t, 0) = \tilde{R}'_*(t, 0) e^{-u(t)}$ pour tout $t \in \Omega'$. Il suit de là que $-\log \tilde{R}''_*(t, 0) = -\log \tilde{R}'_*(t, 0) + u(t) = \varphi(t) + u(t)$ dans Ω'. Puisque $\tilde{D}''_*$ est pseudoconvexe d'ordre n, d'après ce que nous avons vu ci-dessus, la formule (1) est aussi valable pour $\varphi + u$. Donc, d'après la Proposition 3, φ est souspluriharmonique dans G.

C. Q. F. D.

Corollaire. *Soit D un ouvert de $\boldsymbol{C}^n$ et soit $d(x)$ la distance euclidienne d'un point $x \in D$ à la frontière de D. Si D est pseudoconvexe d'ordre $n-q$, $-\log d(x)$ est une fonction pseudoconvexe d'ordre $n-q$ dans D*[7].

En effet, on peut supposer que $D \neq \boldsymbol{C}^n$. Alors on sait que $-\log d(x)$ est une fonction réelle continue dans D. Soit T une transformation unitaire de $\boldsymbol{C}^n$ et soit $X = (X_1, \cdots, X_n)$ l'image de $x = (x_1, \cdots, x_n)$ par T. Désignons par $R_T(T(x))$ le rayon de Hartogs de $T(D)$ (au point $T(x)$) par rapport à X_n. Puisque la borne inférieure de $R_T(T(x))$ pour toute transformation unitaire T de $\boldsymbol{C}^n$ est $d(x)$, $-\log d(x)$ est la borne supérieure de toutes $-\log R_T(T(x))$. Donc, d'après le théorème ci-dessus et la Proposition 7, 2) au n° 2, $-\log d(x)$ est une fonction pseudoconvexe d'ordre $n-q$ dans D.

C. Q. F. D.

7) Dans les notations de ce corollaire, Slodkowski [8] dit que *D est '$(q-1)$-pseudoconvex'* si $-\log d(x)$ est une fonction '$(q-1)$-plurisubharmonic' dans D au sens de Hunt-Murray. D'après le corollaire ci-dessus et la note 3) au n°2, *D est '$(q-1)$-pseudoconvex' s'il est pseudoconvexe d'ordre $n-q$*. De plus, d'après le Théorème 4.3 de Slodkowski [8] et le Théorème 2 au n° 6 du présent mémoire, on vera que *D est '$(q-1)$-pseudocnvex' si et seulement s'il est pseudoconvexe d'ordre $n-q$.*

5. Théoreme de la continuité (D) d'ordre général

Soit D un ouvert de $\boldsymbol{C}^n$ et soit q un entier tel que $1 \leqq q \leqq n$. Désignons par H la hypersphère fermée dans $\boldsymbol{C}^q$ ayant pour centre l'origine et pour rayon 1. Une application f de H dans D est appelée *holomorphe* si f est une restriction d'une application holomorphe d'un voisinage ouvert de H dans D. Nous dirons *D satisfait au théorème de la continuité* (D) *d'ordre* $n-q$, si, pour toute suite $\{F_\nu\}$ $(\nu=1, 2, \cdots)$ d'applications holomorphes de H dans D telle que $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(\partial H) \Subset D$, on a toujours $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(H) \Subset D$[8].

Proposition 9. *Un ouvert D de $\boldsymbol{C}^n$ est pseudoconvexe d'ordre $n-q$ $(1 \leqq q \leqq n)$ si D satisfait au théorème de la continuité* (D) *d'ordre $n-q$.*

En effet, on peut supposer que $1 \leqq q \leqq n-1$. Soit ξ un point de $E = \boldsymbol{C}^n - D$. Supposons, pour reduire l'absurde, que un système de coordonnées locales $z_1, \cdots, z_n$ dans un voisinage U de ξ ne satisfasse pas à la condition 1° au n° 3. Alors, en supposant que ξ corresponde au $(z_1, \cdots, z_n) = (0, \cdots, 0)$, on peut trouver un nombre positif ρ et $n-q$ suites de nombres complexes $\{z_j^{(\nu)}\}$ $(\nu=1, 2, \cdots)$ $(q+1 \leqq j \leqq n)$ tendant vers zero tels que

$$(0 < |z_1|^2 + \cdots + |z_q|^2 \leqq \rho^2,\ z_{q+1} = \cdots = z_n = 0) \subset U \cap D\,,$$

et que

$$(|z_1|^2 + \cdots + |z_q|^2 \leqq \rho^2,\ z_j = z_j^{(\nu)}\ (q+1 \leqq j \leqq n)) \subset U \cap D\,.$$

En posant $F_\nu(t) = (\rho t_1, \cdots, \rho t_q, z_{q+1}^{(\nu)}, \cdots, z_n^{(\nu)})$, $\{F_\nu\}$ $(\nu=1, 2, \cdots)$ est une suite d'applications holomorphes de H dans D telle que $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(\partial H) \Subset D$. Mais $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(H) \not\Subset D$, car $(z_1, \cdots, z_n) = (0, \cdots, 0) \notin D$. C'est contradictoire avec l'hypothèse. Donc, D est pseudoconvexe d'ordre $n-q$. C. Q. F. D.

De plus, on a

Proposition 10. *Un ouvert D de $\boldsymbol{C}^n$ satisfait au théorème de la continuité* (D) *d'ordre $n-q$ $(1 \leqq q \leqq n)$, s'il existe une fonction pseudoconvexe φ d'ordre $n-q$ dans D telle que*

$$D_c = \{x \in D \mid \varphi(x) < c\} \Subset D$$

pour tout nombre réel c.

En effet, étant donnée une suite $\{F_\nu\}$ $(\nu=1, 2, \cdots)$ d'applications holomorphes de H dans D telle que $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(\partial H) \Subset D$, on peut trouver un nombre réel c_0 de façon que $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(\partial H) \subset D_{c_0}$. φ étant pseudoconvexe d'ordre $n-q$ dans D, pour chaque F_ν la fonction composé $\varphi \circ F_\nu$ est souspluriharmonique dans un voisinage de H. Alors, d'après la Proposition 1 au n° 1, il faut que $F_\nu(H) \subset D_{c_0}$ pour tout ν. Donc $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(H) \subset D_{c_0} \Subset D$.
C. Q. F. D.

8) Dans le cas où $q=1$, voir Docquier-Grauert [3], p. 105, Definition 12.

6. Caractérisation des domaines pseudoconvexes d'ordre général

Maintenant, nous pouvons caractériser des domaines pseudoconvexes d'ordre géneral de la façon suivante.

Théorème 2. *Etant donnés un ouvert D de C^n et un entier q tel que $1 \leqq q \leqq n$, les conditions suivantes sont équivalentes:*

1) *D est pseudoconvexe d'ordre $n-q$.*

2) *$d(x)$ étant la distance euclidienne de x $(\in D)$ à la frontière ∂D, $-\log d(x)$ est une fonction pseudoconvexe d'ordre $n-q$ dans D.*

3) *Il existe une fonction pseudoconvexe φ d'ordre $n-q$ dans D, telle que*

$$D_c = \{x \in D \mid \varphi(x) < c\} \Subset D$$

pour tout nombre réel c.

4) *D satisfait au théorème de la continuité (D) d'ordre $n-q$.*

En effet, on a 1)⇒2), d'après le Corollaire du Théorème 1 au n° 4. On a 2)⇒(3), car

$$\varphi(x) = \max(-\log d(x), |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2)$$

satisfait à la condiiion 3). Les Propositions 10 et 9 au n° 5 montrent respectivement que 3)⇒4) et que 4)⇒1). C. Q. F. D.

7. Examples

Exemple 2. Soit Σ $(\subsetneqq C^n)$ un ensemble analytique dans C^n, dont toute composante irréductible est au moins de dimension k $(0 \leqq k \leqq n-1)$. Alors, d'après Weierstrass, $D = C^n - \Sigma$ est pseudoconvexe d'ordre k.

Exemple 3. Soit D un ouvert de l'espace de n variables complexes $x_1, \cdots, x_n$. D'après la Proposition 8 au n° 2, une fonction fortement q-convexe dans D est pseudoconvexe d'ordre $n-q$ si $1 \leqq q \leqq n$.

Un ouvert D $(\subset C^n)$ est dit *q-convexe* s'il exist un ensemble compact K $(\subset D)$ et une fonction fortement q-convexe φ dans $D-K$, tels que $\{x \in (D-K) \mid \varphi(x) < c\} \Subset D$ pour tout nombre réel c. (D est dit *q-complet* si l'on peut prendre l'ensemble vide $\emptyset$ comme K ci-dessus.)

Dans le cas où D est q-convexe $(1 \leqq q \leqq n-1)$, étant donné un point quelconque ξ de la frontière ∂D, on peut trouver une hypersahère ouvert U ayant ξ pour centre telle que $U \cap K = \emptyset$. Soit $d(x)$ la distance euclidienne de $x \in U$ à la frontière ∂U et posons $\psi(x) = \max(\varphi(x), -\log d(x))$ pour $x \Cap D \cap U$. Alors, $\psi(x)$ satisfait à la condition 3) du Théorème 2 pour $D \cap U$. Donc $D \cap U$ est pseudoconvexe d'ordre $n-q$ et il en est de même de D. C'est-à-dire que un *ouvert D $(\subset C^n)$ est pseudoconvexe d'ordre $n-q$ s'il est q-convexe* $(1 \leqq q \leqq n-1)$. (Tout ouvert D de C^n est pseudoconvexe d'ordre 0, par définition.)

Exemple 4. Dans l'espace C^{2n} de $2n$ $(n \geqq 2)$ variables complexes $x_1, \cdots, x_{2n}$ considérons l'ensemble analytique

$$\Sigma: \{x_1 = \cdots = x_n = 0\} \cup \{x_{n+1} = \cdots = x_{2n} = 0\}.$$

Chaque composante de Σ étant de dimension n, $D = C^{2n} - \Sigma$ est pseudoconvexe d'ordre n.

Soit $\mathcal{O}$ le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur D. Alors, on a $\dim H^{2n-2}(D, \mathcal{O}) = \infty$. (Voir Sorani-Villani [9] p. 445-446) Donc, d'après Andreotti Grauert [1], D n'est pas $(2n-2)$-convexe. Puisque $n \geqq 2$, on a $2n-2 \geqq n$, et il suit que D n'est pas n-convexe. C'est-à-dire que *D est pseudoconvexe d'ordre n $(=2n-n)$ sans être n-convexe.*

Example 5. Soit D un ouvert de C^n et soit φ une fonction réelle continue dans D. Diederich-Fornaess [2] dit que φ est '*q-convex with corners*' si pour tout point $x^0 \in D$ on peut trouver un voisinge ouvert U de x^0 et un nombre fini de fonctions fortement q-convexes $\varphi_1, \cdots, \varphi_l$ dans U telles que $\varphi | U = \sup\{\varphi_i | 1 \leqq i \leqq l\}$. Ils disent que *un ouvert D $(\subset C^n)$ est 'q-convex with corners'* s'il existe une fonction réelle continue φ dans D et un ensemble compact K $(\subset D)$ tels que φ soit 'q-convexe with corners' dans $D-K$ et que $\{x \in D | \varphi(x) < c\} \Subset D$ pour tout nombre réel c. (D est dit '*q-complete with corners*' si l'on peut prendre $\emptyset$ comme K.)

D'après la Proposition 7, 2) au n° 2, *une fonction réelle dans un ouvert de C^n est pseudoconvexe d'ordre $n-q$ s'il est 'q-convex with corners'* $(1 \leqq q \leqq n)$. Donc, on voit que *un ouvert D $(\subset C^n)$ est psudoconvexe d'ordre $n-q$ s'il est 'q-convex with corners'* $(1 \leqq q \leqq n-1)$.

Diederich-Fornaess [2] a montré que *un ouvert $D(\subset C^n)$ est $\tilde{q}$-convexe (ou $\tilde{q}$-complet) s'il est 'q-convex (ou q-complet) with corners', où $\tilde{q} = n - [n/q] + 1$,* $[n/q]$ étant le plus grand entier plus petit que ou égal à n/q. On voit facilement que l'ouvert D $(\subset C^{2n})$ au Exemple 4 est 'n-complete with corners'. Donc, d'après [2], il est $2n - [2n/n] + 1 = 2n-1$ complet.

K. Matsumoto a indiqué que *un ouvert D $(\subset C^n)$ qui est pseudoconvexe d'ordre $n-q$ est 'q-complete with corners' ou q-complet si la frontière ∂D est respectivement 'pieceweise smooth' ou 'smooth'.* (Précisément voir [6].)

UNIVERSITÉ FÉMININE DE NARA

Bibliographie

[1] A. Andreotti et H. Grauert, Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes, Bull. Soc. Math. France, **90** (1962), 193-259.
[2] K. Diederich and J.E. Fornaess, Smoothing q-convex functions and vanishing theorems, Invent. Math., **82** (1985), 291-305.
[3] F. Docqier und H. Grauert, Levisches Problem und Rungescher Satz für Teilgebiete Steinscher Mannigfaltigkeiten, Math. Ann., **140** (1960), 94-123.
[4] O. Fujita, sur les familles d'ensembles analytiques, J. Math. Soc. Japan, **16** (1964), 379-405.
[5] L.R. Hunt and J.J. Murray, q-Plurisubharmonic functions and a generalized Dirichlet problem, Michigan Math. J., **25** (1978), 299-316.

[6] K. Matsumoto, Pseudoconvex domains of general order in Stein manifolds, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A, **43** (1989), 67-76.
[7] K. Oka, Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, Iwanami Shoten, Tokyo, 1961.
[8] Z. Slodkowski, Local maximum property and q-plurisubharmonic functions in uniform algebras, J. Math. Anal. Appl., **115** (1986), 105-130.
[9] G. Sorani and V. Villani, q-Complete spaces and cohomology, Trans. Amer. Math. Soc., **125** (1966), 432-448.
[10] M. Tadokoro, Sur les ensembles pseudoconcaves généraux, J. Math. Soc. Japan, **17** (1965), 281-290.
[11] T. Ueda, Pseudoconcave sets of general order and essential singularities of analytic sets, (à paraître).