J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)
31-1 (1991) 1-32

Sur des conditions nécessaires pour les équations en évolution pour que le problème de Cauchy soit bien posé dans les classes de fonctions C^∞ II

Par

Keiichiro KITAGAWA

§10. Introduction à la deuxième partie

Cette note constitue la deuxième partie de notre mémoire [9]. Nous redonnons brièvement l'introduction pour les lecteurs qui n'ont pas la première partie de ce mémoire sous la main.

Il s'agit du problème de Cauchy *homogène*:

$$\text{(PC)} \qquad \begin{cases} L(t, x; \partial_t, \partial_x)u(t, x) = 0 & (t, x) \in [0, T_0] \times \mathbf{R}^d \\ \partial_t^{j-1} u(0, x) = \varphi_j(x) \quad j = 1, \ldots, m \end{cases}$$

pour une équation différentielle linéaire aux dérivées partielles à coefficients de la classe de Gevrey:

$$L(t, x; \partial_t, \partial_x)u(t, x) \equiv [\partial_t^m - \sum_{j=1}^{m} a_j(t, x; \partial_x)\partial_t^{m-j}]u(t, x) = 0$$

Comme nous avons dit à la première partie, notre intérêt principale est de donner des conditions nécéssaires pour que le problème de Cauchy *homogène* (PC) dont *le plan initial est fixé à* $t = 0$ soit (uniquement) soluble dans la catégorie de fonctions C^∞ (Gevrey).

Par l'introduction de la notion du *polygône de Newton*, nous *réunifions en un théorème* (théorème 1) quelques unes des conditions recherchées: *la condition pour la parabolicité* dans la catégorie de fonctions C^∞ [1], [14], [26]; *la condition pour l'hyperbolicité*, soit sur la partie principale (*théorème de Lax-Mizohata*) dans la catégorie de fonctions analytiques ou de Gevrey [3], [4], [10], [11], [15], [18], [25], soit sur la partie inférieure (*condition de Levi*) dans la catégorie de fonctions de Gevrey ou de C^∞ [3], [4], [5], [12], [19], [20], [21]. [23], [24]. Nous l'énonçons, au théorème 1, comme *la condition nécessaire pour l'existence* (non nécessairement unique) de solution C^∞ par l'introductin d'une notion "(s)-soluble". Et comme *la condition nécessaire pour l'unicité locale* de solution [6], [8], [16] nous énonçons le théorème 2.

Comme des corollaires directes de ces deux théorèmes, nous énonçons trois

Communicated by Professor T. Ikebe, January 10, 1989

théorèmes: Le théorème 3 donne un raffinement d'un théorème de S. Mizohata [16] sur la proprieté de la propagation à vitesse finie et un raffinement aussi d'un théorème de K. Kajitani [6]: Le théorème 4 donne un raffinement du théorème de Lax-Mizohata; Le théorème 5 donne un raffinement des théorèmes de V. Ya. Ivrii.

Dans la première partie [9] de notre mémoire, mettant l'accent sur l'explication de l'idée de la méthode améliorée de l'énergie micro-locale de S. Mizohata [8], [15], [17], [19], [20], [21], [22], [23], [24], [27], nous nous sommes limités à énoncer un cas spécial du théorème 1, mais nous avons donné sa démonstration détaillée. Dans cette note, nous donnons nos résultats en pleine forme, mais, leur démonstration étant toute pareille à celle à la note précédente, nous ne le répétons plus et nous nous contentons de remarquer seulement les points à modifier à cette démonstration. Nous prions au lecteur de conférer la démonstration à la note précédente.

Nous énonçons nos résultats à la section 11 suivante: A la section 12 nous énonçons la proposition fondamentale sous la pleine forme avec la remarque sur les points à modifier à sa démonstration à la note précédente: Nous faisons une modification de la proposition fondamentale à la section 13: Nous donnons les démonstrations de nos théorèmes à la section 14.

§ 11. Enoncé des théorèmes

Nous répétons l'explicatin de notre écriture pour qu'on puisse lire les théorèmes sans se référer à la première note.

Pour deux vecteurs $a \equiv (a_1, \dots, a_d)$, $b \equiv (b_1, \dots, b_d)$, nous écrivons:

$$a = b \quad \textit{si } a_j = b_j; j = 1, \dots, d \qquad\qquad a < b \quad \textit{si } a_j < b_j; j = 1, \dots, d$$

$$a + b \equiv (a_1 + b_1, \dots, a_d + b_d) \qquad\qquad ab \equiv (a_1 b_1, \dots, a_d b_d)$$

$$a^b \equiv (a_1^{b_1}, \dots, a_d^{b_d}) \qquad\qquad a! \equiv (a_1!, \dots, a_d!)$$

$$|a| \equiv (|a_1|, \dots, |a_d|)$$

$$\mathscr{s}(a) \equiv a_1 + \cdots + a_d \equiv \sum_{j=1}^{d} a_j \qquad\qquad \mathscr{p}(a) \equiv a_1 \dots a_d \equiv \prod_{j=1}^{d} a_j$$

Pour un scalaire $a \in \mathbf{R}$, nous considérons un vecteur de $\mathbf{R}^d$: $\mathscr{v}(a) \equiv (a, \dots, a)$

Pour la simplicité de l'écriture, nous abrègerons $\mathscr{v}(a)$ par a et aussi $\mathscr{p}(a)$ par a. Ainsi on écrit par exemple:

$$a^\alpha = \mathscr{p}(a^\alpha) = a_1^{\alpha_1} \dots a_d^{\alpha_d} \quad \text{pour } a \equiv (a_1, \dots, a_d) \text{ et } \alpha \equiv (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$$

$$a^\alpha = \mathscr{p}(\mathscr{v}(a)^\alpha) = a^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_d} \text{ pour } a \in \mathbf{R} \text{ et } \alpha \equiv (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$$

De même nous écrivons:

$$\partial_x^\alpha \equiv \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_d}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_d}^{\alpha_d}}; \; D^\alpha \equiv \left(\frac{1}{i}\partial_x\right)^\alpha, \; (i \equiv \sqrt{-1}); f_{(\beta)}^{(\alpha)}(x; \xi) \equiv \partial_\xi^\alpha D_x^\beta f(x; \xi).$$

Soient: $\|f\| \equiv \|f\|_{L^2(\mathbf{R}^d)}$ pour une fonction f; $|||f||| \equiv \sum_{j=1}^{m} \|f_j\|$ pour un vecteur $f \equiv (f_1, \dots, f_m)$; $\|a(\circ, D)\| \equiv \|a(\circ, D)\|_{L^2(\mathbf{R}^d) \to L^2(\mathbf{R}^d)}$ pour un opérateur pseudo-différentiel borné $a(x; D)$.

Ensuite nous expliquons les espaces fonctionnels que nous utiliserons: les classes de Gevrey. Soient Ω un domaine de $\mathbf{R}^d$ et $s \equiv (s_1, \dots, s_d)$ et $R \equiv (R_1, \dots, R_d)$ des vecteurs. Quelques-uns des s_j peuvent eventuellement être infinis: soit par exemple, pour la simplicité de l'écriture, $s \equiv (s', s'')$ avec $s' \equiv (s_1,., s_\ell)$, $s'' \equiv (\infty,., \infty)$; $1 \le s_j < \infty$ $(j = 1,., \ell)$. Nous écrivons $\alpha \equiv (\alpha', \alpha'') \equiv (\alpha_1,., \alpha_\ell, \alpha_{\ell+1},., \alpha_d)$.

$$\gamma_R^s(\Omega) \equiv \{f(x) \in C^\infty(\Omega);\ {}^\forall K \text{ compact} \subset \Omega,\ {}^\forall\alpha'';\ \sup_{x \in K, \alpha'} |\partial_x^\alpha f(x)|/\alpha'!^{s'} R'^{\alpha'} < \infty\}$$

$$\gamma^{(s)}(\Omega) \equiv \bigcup_{R>0} \gamma_R^s(\Omega), \quad \gamma^{\langle s \rangle}(\Omega) \equiv \bigcap_{R>0} \gamma_R^s(\Omega)$$

$$H_R^s(\Omega) \equiv \{f(x) \in H^\infty(\Omega);\ {}^\forall\alpha'';\ \operatorname{Sup}_{\alpha'} \|\partial_x^\alpha f\|_{L^2(\Omega)}/\alpha'!^{s'} R'^{\alpha'} < \infty\}$$

$$H^{(s)}(\Omega) \equiv \bigcup_{R>0} H_R^s(\Omega), \quad H^{\langle s \rangle}(\Omega) \equiv \bigcap_{R>0} H_R^s(\Omega)$$

où $H^\infty(\Omega) \equiv \{f(x) \in C^\infty(\Omega);\ \|\partial_x^\alpha f\|_{L^2(\Omega)} < \infty\ {}^\forall\alpha\}$.
Ainsi on a $\gamma^{(\infty)}(\Omega) = \gamma^{\langle\infty\rangle}(\Omega) = C^\infty(\Omega)$ et $H^{(\infty)}(\Omega) = H^{\langle\infty\rangle}(\Omega) = H^\infty(\Omega)$. Nous disons qu'une fonction de $\gamma^{(s)}(\Omega)$ ou de $H^{(s)}(\Omega)$ ($\gamma^{\langle s \rangle}(\Omega)$ ou de $H^{\langle s \rangle}(\Omega)$ respectivement) est d'indice (s) ($\langle s \rangle$ respectiement).

Soit, pour deux espaces vectoriels topologiques E et F, $C^m(E, F)$ l'espace de fonctions m-fois continuellement différentiables, définies dans E et à valeur dans F.

Nous supposons que les coefficients soient des fonctions de la classe de Gevrey d'indice $(s^\sim)$ ou $\langle s^\sim \rangle$ et nous considérons le problème de Cauchy dans la classe de Gevrey d'indice (s) ou $\langle s \rangle$; Sur ces indices nous supposons:

$$1 \le s^\sim \le s \le \infty\ ;\ s^\sim < \infty.$$

Nous expliquons ensuite le polygône de Newton $(\Delta)_{\rho\delta}(\hat{t}, \hat{x})$ pour le poids (ρ, δ) attaché au point $(\hat{t}, \hat{x})$ qui est introduit dans [19].

Nous considérons le poids (ρ, δ); $\rho \equiv (\rho_1,., \rho_d)$, $\delta \equiv (\delta_1,., \delta_d)$ que nous supposons:

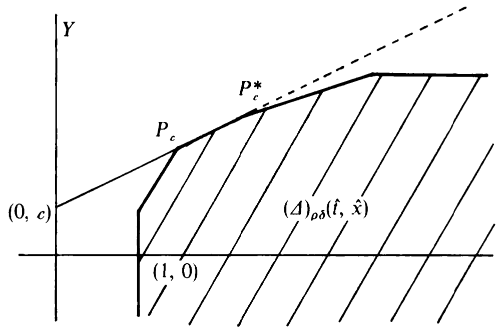
$$0 \le \delta < \rho < \infty.$$

Soient

$$L(t, x; \partial_t, \partial_x)u(t, x) \equiv [\partial_t^m - \sum_{j=1}^{m} a_j(t, x; \partial_x)\partial_t^{m-j}]u(t, x) = 0$$

où $a_j(t, x; \xi) \equiv \sum_\alpha a_{j\alpha}(t, x)\xi^\alpha \equiv \sum_\alpha \sum_k (t - \hat{t})^{\sigma(j\alpha k)}(x - \hat{x})^{\nu(j\alpha k)} a_{j\alpha k}(t, x)\xi^\alpha$.

Nous faisons correspondre à $(j\alpha k)$ le point $\left(1+\frac{\sigma(j\alpha k)}{j}, \frac{\jmath(\rho\alpha-\delta\nu(j\alpha k))}{j}\right)$ au plan XY. Nous y ajoutons un point $(1,0)$ exprès. Nous appelons le *polygône de Newton pour le poids* (ρ, δ) *attaché au point* $(\hat{t}, \hat{x})$, noté par $(\Delta)_{\rho\delta}(\hat{t}, \hat{x})$, le plus petit polygône à côtés de pente *non négative* contenant tous ces points.



(Polygône de Newton)

Pour un nombre $c \geq 0$ donné, soient P_c, P_c^* le point de contact de la tangente au $(\Delta)_{\rho\delta}(\hat{t}, \hat{x})$, *à pente non négative*, tirée du point $(0, c)$ et σ_c la pente de cette tangente: Quand cette tangente n'a qu'un point de contact, $P_c = P_c^*$ est ce point de contact: et quand elle a un côté commun avec le $(\Delta)_{\rho\delta}(\hat{t}, \hat{x})$, P_c est le sommet à l'extrémité *gauche* de ce côté et P_c^* est celui à l'extrémité *droite* de ce côté. Quand il n'y a pas de telle tangente, P_c et P_c^* sont convenus d'être respectivement le sommet P_m à *l'extrême droite* du $(\Delta)_{\rho\delta}(\hat{t}, \hat{x})$ et le point à l'infini, et σ_c est convenue $\sigma_c \equiv -\infty$.

Pour un point P du $(\Delta)_{\rho\delta}(\hat{t}, \hat{x})$, soient $\prod_P^-$ et $\prod_P^+$ les côtés du $(\Delta)_{\rho\delta}(\hat{t}, \hat{x})$ juste à la gauche et à la droite respectivement de P et σ_P^- et σ_P^+ les pentes de $\prod_P^-$ et $\prod_P^+$ respectivement. Ainsi $\sigma_{P_m}^+ = 0$.

Pour deux sommets P et Q du $(\Delta)_{\rho\delta}(\hat{t}, \hat{x})$ donnés dont Q est à la droite de P, que nous écrivons $P < Q$, soit $[P, Q]$ ($[P, Q)$ resp.) l'ensemble de tous les sommets du $(\Delta)_{\rho\delta}(\hat{t}, \hat{x})$ entre ces deux sommets, P, Q tous les deux inclus (P inclus et Q exclu resp.): et soit $\{P, Q\}$ l'ensemble de tous les points sur les côtés du $(\Delta)_{\rho\delta}(\hat{t}, \hat{x})$ entre ces deux sommets P, Q tous les deux inclus. Nous convenons $[P, P] = \{P\}$ et $[Q, P] = \phi$ pour $P < Q$.

Soit, pour un sommet $P \equiv (1+q, p)$ du $(\Delta)_{\rho\delta}(\hat{t}, \hat{x})$ donné, le polynôme caractéristique attaché à P:

$$p_P^{\rho\delta}(\lambda)(t, x; \xi; \hat{t}, \hat{x})$$

$$\equiv \lambda^m - \sum_{(j\alpha k) \in \Gamma_P^+} (t-\hat{t})^{\sigma(j\alpha k)-qj} x^{\nu(j\alpha k)} a_{j\alpha k}(\hat{t}, \hat{x}+x_\delta) \xi^\alpha \lambda^{m-j}$$

où $\Gamma_P^+ \equiv \left\{(j\alpha k); \left(1+\frac{\sigma(j\sigma k)}{j}, \frac{\jmath(\rho\alpha-\delta\nu(j\alpha k))}{j}\right) \in \prod_P^+\right\}$

et $x_\delta \equiv (x_{\delta^1}, \ldots, x_{\delta^d})$: $x_{\delta^j} \equiv 0$ si $\delta_j \neq 0$, $x_{\delta^j} \equiv x_j$ si $\delta_j = 0$ $(j = 1, \ldots, d)$

Remarquons que l'on a

$$p_P^{\rho\delta}(\lambda)(\hat{t}, x; \xi; \hat{t}, \hat{x}) \equiv \lambda^m - \sum_{(j\alpha k)\in \mathring{\Gamma}_P} x^{\nu(j\alpha k)} a_{j\alpha k}(\hat{t}, \hat{x} + x_\delta)\xi^\alpha \lambda^{m-j}.$$

où $\mathring{\Gamma}_P \equiv \left\{(j\alpha k); \left(1 + \dfrac{\sigma(j\alpha k)}{j}, \dfrac{\mathscr{A}(\rho\alpha - \delta\nu(j\alpha k))}{j}\right) = P\right\}$

Soient enfin:

$$\mathscr{a}_{\rho\delta} \equiv \max_i \frac{\rho_j}{s_j}, \text{ et } \mathscr{b}_{\rho\delta} \equiv \operatorname{Min}_j \frac{\rho_j - \delta_j}{s_j^{\sim}}.$$

Remarquons que, $s^{\sim}$ étant supposé $s^{\sim} < +\infty$, l'on a: $\mathscr{b}_{\rho\delta} > 0$

Ayant ainsi expliqué notre écriture, nous envisageons le problème de Cauchy (PC).

Definition 1. (1) Disons que le problème de Cauchy (PC) est (s)-*soluble* s'il existe un domaine Ω_0 et un nombre positif T_0 tels que les coefficients sont de $C^0([0, T_0], \gamma^{(s^{\sim})}(\Omega_0))$ et que, pour toutes les données $\varphi_j(x) \in H^{(s)}(\mathbf{R}^d)(j = 1,., m)$, il existe une solution $u(t, x) \in C^m([0, T_0], C^\infty(\Omega_0))$ du (PC), au sens que l'on ait:

$$\begin{cases} L(t, x; \partial_t, \partial_x)u(t, x) = 0 & (t, x) \in [0, T_0] \times \Omega_0 \\ \partial_t^{j-1} u(0, x) = \varphi_j(x) & x \in \Omega_0, \quad j = 1,., m. \end{cases}$$

(2) Le problème de Cauchy (PC) est dit *t-localement* (s)-*soluble* s'il existe un domaine Ω_0 et un nombre positif T_0 tels que les coefficients sont de $C^0([0, T_0], \gamma^{(s^{\sim})}(\Omega_0))$ et que, pour toutes les données $\varphi_j(x) \in H^{(s)}(\mathbf{R}^d)(j = 1,., m)$, il existe un nombre positif $T(T \leq T_0)$ et une solution $u(t, x) \in C^m([0, T], C^\infty(\Omega_0))$ du (PC).
(3) Le problème de Cauchy (PC) est dit *localement* (s)-*soluble à un point* $x = \hat{x}$ s'il existe un voisinage Ω_0 du point $x = \hat{x}$ et un nombre positif T_0 tels que les coefficients sont de $C^0([0, T_0], \gamma^{(s^{\sim})}(\Omega_0))$ et que, pour toutes les données $\varphi_j(x) \in H^{(s)}(\mathbf{R}^d)(j = 1,., m)$ il existe un nombre positif $T(T \leq T_0)$, un voisinage Ω $(\Omega \subset \Omega_0)$ de $x = \hat{x}$ et une solution $u(t, x) \in C^m([0, T], C^\infty(\Omega))$ du (PC).
(4) Le problème de Cauchy (PC) est dit $\langle s\rangle$-*soluble* s'il existe un domaine Ω_0 et un nombre positif T_0 tels que les coefficients sont de $C^0([0, T_0], \gamma^{\langle s^{\sim}\rangle}(\Omega_0))$ et que, pour toutes les données $\varphi_j(x) \in H^{\langle s\rangle}(\mathbf{R}^d)$ $(j = 1,., m)$, il existe une solution $u(t, x) \in C^m([0, T_0], C^\infty(\Omega_0))$ du (PC).

Remarque. $H^{\langle s\rangle}(\mathbf{R}^d)$ étant un espace de Frechet, compte tenu du théorème de Baire, ce n'est pas la peine de définir ni t-localement $\langle s\rangle$-soluble ni localement $\langle s\rangle$-soluble à un point. (voire la proposition 11)

Notre définition est dans le courant de la notion "weakly correct" de V. Ya Ivrii [5] plus faible que celle "correct" que l'on retrouve aux recherches sur la condition suffisante [2], [28], [29].

Remarquons aussi que la définition "weakly locally correct" de V. Ya. Ivrii [5] est de type "t-localement soluble".

Nous considérons les conditions suivantes:

(11–1) La partie réelle de la racine de $p_P^{\rho\delta}(\lambda)(t, x - x_\delta; i\xi; 0, \hat{x}) = 0$ soit non positive pour tous ${}^\forall t \geq 0$, ${}^\forall(x, \xi) \in \mathbf{R}^{2d}$.

(11–2) La partie réelle de la racine de $p_P^{\rho\delta}(\lambda)$ $(0, x - x_\delta; i\xi; 0, \hat{x}) = 0$ soit non positive pour tous ${}^\forall(x, \xi) \in \mathbf{R}^{2d}$.

Alors on a le théorème:

Théorème 1. *On a les énoncés suivants pour tout* ${}^\forall(\rho, \delta)$; $0 \leq \delta < \rho < \infty$, $a_{\rho\delta} \leq b_{\rho\delta}$, $\sigma_{a_{\rho\delta}} \geq 0$.

[1] *Soit* $s \neq \infty$. *Pour que le problème de Cauchy* (PC) *soit* (s)*-soluble, il faut que, pour tout* $\hat{x} \in \Omega_0$, *l'on ait* (11–1) *pour tout* ${}^\forall P \in [P_{a_{\rho\delta}}, P_{b_{\rho\delta}})$ *et* (11–2) *pout* $P = P_{b_{\rho\delta}}$.

[2] *Soit* $s \neq \infty$. *Pour que le probléme de Cauchy* (PC) *soit t-localement* (s)*-soluble, il faut que, pour tout* $\hat{x} \in \Omega_0$, *l'on ait* (11–1) *pour tout* ${}^\forall P \in [P_{a_{\rho\delta}}, P_{b_{\rho\delta}})$ et (11–2) *pour* $P = P_{b_{\rho\delta}}$ *á l'exception du cas:* $\sigma_{a_{\rho\delta}} = 0$.

[3] *Soit* $s \neq \infty$. *Pout que le probléme de Cauchy* (PC) *soit localement* (s)*-soluble à* $x = \hat{x}$, *il faut qu'on ait* (11–1) *pour tout* ${}^\forall P \in [P_{a_{\rho\delta}}, P_{b_{\rho\delta}})$ *et* (11–2) *pour* $P = P_{b_{\rho\delta}}$ *à l'exception des cas:* $\sigma_{a_{\rho\delta}} = 0$: $a_{\rho\delta} = b_{\rho\delta} = \rho_j - \delta_j$ *avec un j.*

[4] *Pour que le problème de Cauchy* (PC) *soit* $\langle s \rangle$*-soluble, il faut que, pour tout* $\hat{x} \in \Omega_0$, *l'on ait* (11–1) *pour tout* ${}^\forall P \in [P^*_{a_{\rho\delta}}, P_{b_{\rho\delta}})$ *et* (11–2) *pour* $P = P_{b_{\rho\delta}}$ *au cas où* $P^*_{a_{\rho\delta}} \leq P_{b_{\rho\delta}}$ *à l'exception du cas* $a_{\rho_\delta} = b_{\rho\delta} = \rho_j - \delta_j$ avec un j.

Maintenant nous envisageons l'unicité locale de solution.

Définition 2. Nous disons le jauge à $(0, \hat{x})$ la fonction vectorielle $g(t, x) \equiv (g_1(t, x), \ldots, g_d(t, x))$ définie à un voisinage $[0, T] \times \Omega$ de $(0, \hat{x})$ telle que $g_j(t, x)$ y sont non négatives continues et $g_j(0, x) = 0$ $(j = 1, \ldots, d)$: Nous disons que le problème de Cauchy (PC) a *la propriété de l'unicité au jauge* $g(t, x)$ *à* $(0, \hat{x})$ si toute la solution C^∞ du (PC) s'annule au point $(t, x) \in [0, T] \times \Omega$ tant que des données initiales s'annulent dans l'ensemble $\{y; |y - x| \leq g(t, x)\}$.

Nous envisageons le polygône de Newton $(\Delta)_{\rho\delta}(0, \hat{x})$, attaché à $(0, \hat{x})$, pour le poids (ρ, δ). Soient, pour des vecteurs v^j $(j = 1, \ldots, d)$ et un point $P \in (\Delta)_{\rho\delta}(0, \hat{x})$ donnés, $\tau_{vjP}^{\rho\delta}(\hat{x})$ des nombres définis par:

$$\tau_{vjP}^{\rho\delta}(\hat{x}) = \begin{cases} \mathrm{Max}\{0, X; \rho_j - a(v^j\delta) = \mathring{\sigma}(X - (1 + q)) + p\} & \text{si } \mathring{\sigma} \equiv \mathrm{Max}\{\sigma_P^+, \sigma_b\} > 0 \\ 0 & \text{si } \mathring{\sigma} \equiv \mathrm{Max}\{\sigma_P^+, \sigma_b\} = 0 \quad \text{et } \rho_j - a(v^j\delta) < p \\ 1 + q & \text{si } \mathring{\sigma} = \mathrm{Max}\{\sigma_P^+, \sigma_b\} = 0 \quad \text{et } \rho_j - a(v^j\delta) = p \\ \infty & \text{si } \mathring{\sigma} \equiv \mathrm{Max}\{\sigma_P^+, \sigma_b\} = 0 \quad \text{et } \rho_j - a(v^j\delta) > p \end{cases}$$

On a le théorème suivant:

Théorème 2. *Supposons que le* (PC) *soit* $\langle\infty\rangle$*-soluble. Alors le* (PC) *n'a pas la propriété de l'unicité au jauge* $g(t, x)t^\tau(x - \hat{x})^\nu \equiv (g_1(t, x)t^{\tau_1}(x - \hat{x})^{\nu^1}, \ldots, g_d(t, x)$ $t^{\tau_d}(x - \hat{x})^{\nu_d})$ *à* $(0, \hat{x})$ *où* $g_j(t, x)$ *sont non négatives, continues et* $g_j(0, x) = 0$

$(j = 1,.., d)$ *et que* $(\tau^{\rho\delta}_{\nu^1 P}(\hat{x}),.., \tau^{\rho\delta}_{\nu^d P}(\hat{x})) \leqq \tau \equiv (\tau_1,.., \tau_d) < \infty$ pour un $P \in \{P; P \in [P_0^*, P_{\ell_{\rho\delta}}] \subset (\Delta)_{\rho\delta}(0, \hat{x}), p_P^{\rho\delta}(\lambda)(0, x; \zeta; 0, \hat{x}) \not\equiv \lambda^m\}$ et ceci pour tous ${}^\forall\hat{x}(\hat{x} \in \Omega_0)$, ${}^\forall\nu^j(j = 1,.., d)$ et ${}^\forall(\rho, \delta)$.

Remarque. Dans [16], S. Mizohata a raisonné que, tant qu'on considère les problèmes de Cauchy uniformément bien posés, s'il y a la propriété de la propagation à vitesse finie, il y a la propriété de l'unicité au jauge ${}^\exists g(x)t$ avec une certaine fonction $g(x)$ continue. Mais à notre situation où le plan initial du problème de Cauchy est fixé à $t = 0$. ce n'est plus raisonnable: S'il y a la propriété de la propagation à *vitesse bornée* c'est-à-dire que la vitesse de propagation est bornée, alors il y a la propriété de l'unicité à jauge ${}^\exists Ct$.

Exemple. (6) $L_6(t, x; \partial_t, \partial_x) \equiv \partial_t^2 - t^{2k}x^{2\ell}\partial_x^2$

Le (PC) n'a, à l'origine, ni l'unicité à jauge $x^m t^{k+1} g(t, x)$ $(m \leq \ell)$, ni l'unicité à jauge $x^m g(t, x)$ $(m > \ell)$ où $g(t, x)$ est non négative continue telle que $g(0, x) = 0$.

(7) $L_7(t, x; \partial_t, \partial_x) \equiv \partial_t^2 - (t^{2k} + x^{2\ell})\partial_x^2$ $(k > 0)$

Le (PC) n'a, à l'origine, ni l'unicité à jauge $x^m t^{1-k(m/\ell-1)} g(t, x)$ $\left(m \leq \frac{\ell}{k}(k+1)\right)$, ni l'unicité à jauge $x^m g(t, x)$, $\left(m > \frac{\ell}{k}(k+1)\right)$ où $g(t, x)$ est non négative continue telle que $g(0, x) = 0$.

A interpréter ces théorèmes-ci, nous remarquons tout d'abord un corollaire de ce théorème 2.

Théorème 3 (*cf* [6], [8], [16]). *Supposons que les coefficients soient analytiques par rapport à* (t, x). *Pour que le problème de Cauchy* (*PC*) *soit* $\langle\infty\rangle$*-soluble et qu'il ait la propreiété de l'unicité à un jauge* $g(t, x)$ *à un point* $(0, \hat{x})$; $\hat{x} \in \Omega_0$, *il faut que* $L(t, x; \partial_t, \partial_x)$ *soit kowalevskien.*

Ramarque. Nous soulignons que nous ne considérons que le problème de Cauchy homogène dont le plan initial est fixé à $t = 0$. Ce théorème est ainsi un raffinement des théorèmes de S. Mizohata [16] ou de K. Kajitani [6]. Nous en discuterons à la note ultérieure.

Interprètons le théorème 1: Nous distinguons, comme S. Mizohata [15] a fait, le cas où $L(t, x; \partial_t, \partial_x)$ est kowalevskien du cas où $L(t, x; \partial_t, \partial_x)$ n'est pas kowalevskien.

Au cas où $L(t, x; \partial_t, \partial_x)$ est non kowalevskien, ce théorème 1 donne un raffinement du théorème cité ci-haut de S. Mizohata [15] et une extension à la catégorie de fonctions de Gevrey et amélioration dans la catégorie de fonctions C^∞ des résultats de M. Miyake [14], ou de T. Sadamatsu [26] au cas où les coefficients sont de la classe de Gevrey.

Example. Reprenons l'exemple (1):

(1) $L_1(t, \partial_t, \partial_x) \equiv \partial_t + t^k a(t, x)\partial_x^4 + t^\ell b(t, x)\partial_x^2 + c(t, x)\partial_x$

où $a(t, x)$, $b(t, x)$, $c(t, x)$ sont analytiques en t et telles qu'on ait $a(0, x) = b(0, x) = 1$, $c(0, x) \neq 0$.
D'après M. Miyake [14] ou T. Sadamatsu [26], pour que le (PC) soit (∞)-soluble, il faut que $\ell \geq 1$ pour $k = 2, 3$, et $\ell \geq 2$ pour $k \geq 4$. D'après notre théorème à la note précédente cette condition a été améliorée par $3\ell \geq k$ pour $k \geq 4$. Le théorème 1 l'améliore encore par $3\ell > k$.

Et au cas où $L(t, x; \partial_t, \partial_x)$ est kowalevskien ils donnent d'une part des conditions sur la partie principale du $L(t, x; \partial_t, \partial_x)$ comme un raffinement des théorèmes de S. Mizohata [11], [15], [18] ou de N. Nishitani [25], (cf. [3], [4], [10]) et d'autre part des conditions de Levi de type de V. Ya. Ivrii [5] (cf. [12]) sur les parties d'ordre inférieure du $L(t, x; \partial_t, \partial_x)$. Nous l'expliquons dans la suite.

Supposons que $L(t, x; \partial_t, \partial_x)$ soit kowalevskien et que l'on ait:

(11–3) $a_{j\alpha}(t, x) \equiv t^{\sigma j} \mathring{a}_{j\alpha}(t, x)$ pour $j, \alpha; \jmath(\alpha) = j$ $({}^\exists \mathring{a}_{j\alpha}(0, x) \not\equiv 0)$

Nous envisageons pour $\rho \equiv (\rho_1, \ldots, \rho_d)$, $\delta \equiv 0 \equiv (0, \ldots, 0)$.

Soient $a_\rho \equiv a_{\rho 0}$, $\ell_\rho \equiv \ell_{\rho 0}$ et $c_\rho \equiv \underset{\alpha; \jmath(\alpha) = k, k = 1, .., m}{\mathrm{Max}} \left(\frac{1}{k} \jmath(\rho\alpha)\right)$.

Soient $h_j(t, x; \xi)$, $\mathring{h}_j^\rho(t, x; \xi)$ les parties de $a_j(t, x; \xi)$ définies respectivement par:

$$h_j(t, x; \xi) \equiv \sum_{\jmath(\alpha) = j} a_{j\alpha}(t, x)\xi^\alpha \quad \text{et} \quad \mathring{h}_j^\rho(t, x; \xi) = \sum_{\jmath(\rho\alpha) = jc_\rho} \mathring{a}_{j\alpha}(t, x)\xi^\alpha$$

Au lieu du polynôme caractéristique défini par

$$p(\lambda)(t, x; \xi) \equiv \lambda^m - \sum_{j=1}^m h_j(t, x; \xi)\lambda^{m-j},$$

nous considérons le polynôme défini par

$$\mathring{p}^\rho(\lambda)(t, x; \xi) \equiv \lambda^m - \sum_{j=1}^m \mathring{h}_j^\rho(t, x; \xi)\lambda^{m-j}$$

Nous envisageons la condition suivante:

(11–4) La racine de $\mathring{p}^\rho(\lambda)(0, \hat{x}; i\xi) = 0$ est purement imaginaire pour tout ${}^\forall\xi \in \mathbf{R}^d$.

Théorème 4. *Supposons que $L(t, x; \partial_t, \partial_x)$ soit kowalevskien et que l'on ait* (11–3). *Alors on a les suivantes, pour tout ${}^\forall\rho$; $s^\sim \leq \rho \leq s$:*
(1) *Soit $s \neq \infty$. Pour que le (PC) soit* (s)*-soluble, il faut que, pour tout $\hat{x} \in \Omega_0$, l'on ait* (11–4).
(2) *Soit $s \neq \infty$. Pour que le (PC) soit t-localement* (s)*-soluble, il faut que, pour tout $\hat{x} \in \Omega_0$, l'on ait* (11–4) *à l'exception du cas: $a_\rho = \ell_\rho = c_\rho$.*
(3) *Soit $s \neq \infty$. Pour que le (PC) soit localement* (s)*-soluble au point $x = \hat{x}$, il faut que l'on ait* (11-4) *à l'exception d'un des cas:*

(i) $a_\rho = b_\rho = c_\rho$ ou (ii) $a_\rho = b_\rho = \rho_j$ *avec un* j.

(4) *Pour que le* (*PC*) *soit* $\langle s \rangle$*-soluble, il faut que, pour tout* $\hat{x} \in \Omega_0$, *l'on ait* (11–4) *à l'exception du cas*: $a_\rho = b_\rho = \rho_j$ *avec un* j.

Ramarque. S. Mizohata [15], [18] et N. Nishitani [25] ont donné l'information sur des racines de polynôme caractéristique et pour $s = (s, \dots, s)$. Notre résultat est ainsi un raffinement de ces théorèmes.

Exemple. (8) $L_8(t, x; \partial_t, \partial_x) \equiv \partial_t^2 - t^\ell (a(t, x)\partial_x^2 + b(t, x)\partial_y^2)$

Pour que le (PC) soit $(1, s)$-soluble $(1 < s)$, il faut que $a(0, 0) \geq 0$ et $b(0, 0) \geq 0$. Et pour qu'il soit t-localement $(1, s)$-soluble $(1 < s)$, il faut que $b(0, 0) \geq 0$.

D'autre part comme la condition sur la partie inférieure de $L(t, x; \partial_t, \partial_x)$, on a le théorème suivant:

Nous considérons la condition:

$$(11\text{–}5) \quad \begin{cases} \text{l'ensemble } \left\{(j\alpha k); \left(1 + \dfrac{\sigma(j\alpha k)}{j}, \dfrac{s(\rho\alpha - \delta\nu(j\alpha k))}{j}\right) = P, \ a_{j\alpha k}(0, \hat{x}) \neq 0\right\} \\ \text{soit composé uniquement des } (j\alpha k) \text{ tels que } |\alpha| = j. \end{cases}$$

Théorème 5. *Supposons que* $L(t, x; \partial_t, \partial_x)$ *soit kowalevskien. Alors on a les énoncés suivants pour tout* ${}^\forall(\rho, \delta)$; $0 \leq \delta < \rho < \infty$, $a_{\rho\delta} \leq b_{\rho\delta}$, $\sigma_{a_{\rho\delta}} \geq 0$.

[1] *Soit* $s \neq \infty$. *Pour que le* (*PC*) *soit* (s)*-soluble, il faut que, pour tout* $\hat{x} \in \Omega_0$, *l'on ait* (11–5) *pour tout* ${}^\forall P \in \{P_{a_{\rho\delta}}, P_{b_{\rho\delta}}\}$.

[2] *Soit* $s \neq \infty$. *Pour que le* (*PC*) *soit t-localement* (s)*-soluble, il faut que, pour tout* $\hat{x} \in \Omega_0$, *l'on ait* (11–5) *pour tous* ${}^\forall P \in \{P_{a_{\rho\delta}}, P_{b_{\rho\delta}}\}$ *à l'exception du cas où* $\sigma_{a_{\rho\delta}} = 0$.

[3] *Soit* $s \neq \infty$. *Pour que le* (*PC*) *soit localement* (s)*-soluble au point* $x = \hat{x}$, *il faut que l'on ait* (11–5) *pour tous* ${}^\forall P \in \{P_{a_{\rho\delta}}, P_{b_{\rho\delta}}\}$ *à l'exception des cas*: $\sigma_{a_{\rho\delta}} = 0$: $a_{\rho\delta} = b_{\rho\delta} = \rho_j - \delta_j$ *avec un* j.

[4] *Pour que le* (*PC*) *soit* $\langle s \rangle$*-soluble, il faut que, pour tout* $\hat{x} \in \Omega_0$, *l'on ait* (11–5) *pour tous* ${}^\forall P \in \{P^*_{a_{\rho\delta}}, P_{b_{\rho\delta}}\}$ *à l'exception du cas*: $a_{\rho\delta} = b_{\rho\delta} = \rho_j - \delta_j$ avec un j.

Remarque. Ce théorème 5 ne recoure pas bien le théorème 1 de V. Ya. Ivrii [5], au cas où $r = m$: Notre théorème assure bien la condition (N'_κ) au théorème 1 de V. Ya. Ivrii [5] et même (N_κ) au cas $d = 1$, (voire la Proposition 14 à l'appendice), mais pas toujours la condition (N_κ). Ainsi notre théorème recouvre bien le théorème 1 de V. Ya. Ivrii au cas de $d = 1$, et il recouvre aussi la condition (ii) et (iv) mais ni (i) ni (iii) du théorème 1 au cas de dimension générale. Il recouvre désormais le théorème 3 de V. Ya Ivrii [5].

La difficulté à montrer la condition (N_κ) à notre situation provient du fait que nous ne considérons que le (PC) à données au plan initial fixé à $t = 0$. Si l'on considère les problèmes de Cauchy "uniformes" dont le plan initial n'est plus fixé, on se passe de cette difficulté. Nous le verrons dans une note ultérieure.

§ 12. Proposition fondamentale

Nous rendons le problème (PC) à celui pour un système d'ordre 1 en ∂_t. Soient

$$U(t, x) \equiv {}^t(u_1(t, x), \ldots, u_m(t, x)); \; u_j(t, x) \equiv \partial_t^{j-1} u(t, x): j = 1,., m$$

$$\Phi(x) \equiv {}^t(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)).$$

Le problème de Cauchy (PC) est équivalent au suivant.

$$\text{(PCS)} \qquad \begin{cases} [\partial_t I - \mathscr{A}(t, x; \partial_x)] \; U(t, x) = 0 \\ U(0, x) = \Phi(x) \end{cases}$$

$$\text{où } \mathscr{A}(t, x; \partial_x) \equiv \begin{pmatrix} 0 \cdots 1 \cdots\cdots 0 \\ 0 \cdots 0 \cdots 1 \\ a_m(t, x; \partial_x), \ldots, a_1(t, x; \partial_x) \end{pmatrix}$$

Nous envisageons, avec un $\xi^0 \in \mathbf{R}^d$ et un paramètre n de localisation:

$$(\text{PCS})_{\xi^0 n} \qquad \begin{cases} [\partial_t I - \mathscr{A}(t, x; n^\rho \xi^0 + \partial_x)] \; U_n^0(t, x) = 0 \\ U_n^0(0, x) = \Phi_n(x). \end{cases}$$

Le $(\text{PCS})_{\xi^0 n}$ est lié au (PCS) par $U_n^0(t, x) = \exp(-n^\rho \xi^0 x) U(t, x)$.

Nous considérons au voisinage d'un point quelconque $x = \hat{x}$, mais pour la simplicité de l'écriture, nous supposons $\hat{x} = 0$:

Soient Ω_0 un voisinage de l'origine et T_0 un nombre positif.

Nous fixons des indices de Gevrey $s^\sim$, s: $1 \leq s^\sim \leq s \leq \infty$, $s^\sim < \infty$ que nous supposons, pour la simplicité:

$$s \equiv (s', s'') \equiv (s_1,., s_\ell, \infty,., \infty).$$

Nous écrivons de même $\alpha \equiv (\alpha', \alpha'') \equiv (\alpha_1,., \alpha_\ell, \alpha_{\ell+1},., \alpha_d)$.

Nous fixons aussi un poids (ρ, δ): $0 \leq \delta \leq \rho < \infty$.

Nous envisageons le polygône de Newton $(\Delta)_{\rho\delta} \equiv (\Delta)_{\rho\delta}(0, 0)$, et fixons un sommet $P \equiv (1 + q, p)$ du $(\Delta)_{\rho\delta}$.

Nous fixons des nombres a, σ^0, σ et A^0 en sorte qu'on ait:

$$\text{(H)} \qquad 0 \leq a \leq b \equiv b_{\rho\delta}; \; 0 \leq \sigma^0 \leq \sigma_a; \; 0 \leq \sigma \leq \delta; \; 0 < A^0.$$

Nous arrangeons des conditions à supposer:

$$\text{(H-0)} \qquad 0 < a \; ; \; P \in [P_a, P_b] \; ; \; \sigma^0 < \sigma_P^-.$$

⟨H-0⟩ $a < b$ au cas où il existe un j tel que $b = \rho_j - \delta_j$; $P \in [P_a^*, P_b]$; $\sigma^0 < \sigma_P^-$.

(H-1) Il existe un nombre $\rho_0 > 0$ et pour tout compact K de Ω_0, il existe une constante C telle qu'on a:

$$|\partial_x^\nu a_{j\alpha k}(t, x)| \leq {}^\exists C \nu!^{s^\sim} \rho_0^\nu \quad {}^\forall(t, x) \in [0, T_0] \times K, \; {}^\forall j, {}^\forall \alpha, {}^\forall k$$

$$\langle\text{H-1}\rangle \begin{cases} \text{Pour tout } \rho_0 > 0, \text{ et pour tout compact } K \text{ de } \Omega_0, \text{ il existe une constante } C \text{ telle qu'on a:} \\ |\partial_x^\nu a_{j\alpha k}(t, x)| \leq {}^{\exists}C\nu!^{s^\sim}\rho_0^\nu \quad {}^\forall(t, x)\in[0, T_0] \times K \ , {}^\forall j, {}^\forall\alpha, {}^\forall k \end{cases}$$

(H-2) Pour tout $A > 0$, il existe un voisinage de l'origine $\Omega_A \subset \Omega_0$ tel que, pour toute suite des données initiales $\Phi \equiv \{\Phi_n(x)\}$; $\Phi_n(x) \equiv (\varphi_{n1}(x), \dots, \varphi_{nd}(x))$ où $\varphi_{nj} \in H^{\langle 1 \rangle}(\mathbf{R}^d)$, satisfaisant, pour tous j, α'', à

$$\|\partial_x^\alpha \varphi_{nj}\| \leq {}^\exists C\, \Theta_\Phi(n)(c_\Phi n)^{\rho'\alpha'} \quad ({}^\forall n, \alpha')$$

avec une certaine constante c_Φ et une certaine fonction en n $\Theta_\Phi(n)$, il existe un polynôme $C_{A\Phi}(n)$ et au moins une solution $U_n^0(t, x)$ du $(\text{PCS})_{\xi^0 n}$ ayant une estimation à priori:

$$\sum_{j=1}^{m} \sup_{\substack{n^\sigma x \in \Omega_A \\ t\in[0, A^0 n^{-\sigma^0}]}} |U_{nj}^0(t, x)| \leq C_{A\Phi}(n)\Theta_\Phi(n)\exp(An^a) \qquad {}^\forall n \gg 1.$$

Et au cas exceptionnel (12–1), Ω_A peut être choisi $\Omega_A \equiv \Omega_0$ indépendamment de A

$$(12\text{–}1) \quad a = \ell = \rho_j - \delta_j \quad ({}^\exists j)$$

$\langle$H-2$\rangle$ Pour toute suite des données initiales $\Phi \equiv \{\Phi_n(x)\}$; $\Phi_n(x) \equiv (\varphi_{n1}(x), \dots, \varphi_{nd}(x))$ où $\varphi_{nj} \in H^{\langle 1 \rangle}(\mathbf{R}^d)$, satisfaisant, pour tous j, α'', à

$$\|\partial_x^\alpha \varphi_{nj}\| \leq {}^\exists C\, \Theta_\Phi(n)(c_\Phi n)^{\rho'\alpha'} \quad ({}^\forall n, \alpha')$$

avec une certaine constante c_Φ et une certaine fonction en n $\Theta_\Phi(n)$, il existe un nombre A_Φ, un polynôme $C_\Phi(n)$ et au moins une solution $U_n^0(t, x)$ du $(\text{PCS})_{\xi^0 n}$ ayant une estimation à priori

$$\sum_{j=1}^{m} \sup_{\substack{n^\sigma x \in \Omega_0 \\ t\in[0, A^0 n^{-\sigma^0}]}} |U_{nj}^0(t, x)| \leq C_\Phi(n)\Theta_\Phi(n)\exp(A_\Phi n^a) \qquad {}^\forall n \gg 1.$$

On a la proposition fondamentale dont la première partie est déjà énoncée sous la forme simplifiée et démontrée à la note précédente.

Proposition fondamentale. (1) *Sous les hypothèses* (H), (H-0), (H-1), (H-2), *la partie réelle de la racine de* $p_P^{\rho\delta}(\lambda)(0, x - x_{\delta-\sigma}; \xi^0 + i\eta; 0, 0) = 0$ *est non positive pour tous* ${}^\forall(x, \eta)\in\mathbf{R}^{2d}$, *et, au cas où l'on peut choisir* $\Omega_A = \Omega_0$ *pour tout* $A > 0$ *dans* (*H*-2), *la partie réelle de la racine de* $p_P^{\rho\delta}(\lambda)(0, x; \xi^0 + i\eta; 0, 0) = 0$ *est non positive pour tous* ${}^\forall(x, \eta)$; $(x_{\delta-\sigma}, \eta)\in\Omega_0 \times \mathbf{R}^d$.
(2) *Sous les hypothèses* (H), $\langle$*H*-0$\rangle$, $\langle$*H*-1$\rangle$, $\langle$*H*-2$\rangle$, *la partie réelle de la racine de* $p_P^{\rho\delta}(\lambda)(0, x; \xi^0 + i\eta; 0, 0) = 0$ *est non positive pour tous* ${}^\forall(x, \eta)$; $(x_{\delta-\sigma}, \eta)\in\Omega_0 \times \mathbf{R}^d$.

Démonstration. Nous nous référons à la démonstration du théorème 1 à la première partie de cette note. La démonstration se fait par absurde.˙ Par nier le résultat à (1), on peut bien supposer:

$$(\text{H-3})\quad\left\{\begin{array}{l}\text{Il existe des } x^0(x^0_{\delta-\sigma}\in\bigcap_A \Omega_A),\ \zeta^0\equiv\xi^0+i\eta^0(\eta^0\neq 0),\ \delta_0(0<\delta_0),\\ m_0(1\le m_0) \text{ tels que les racines } \lambda_j(0,x^0;\zeta^0)\equiv\lambda^{\rho\delta}_{Pj}(0,x^0;\zeta^0;0,0) \text{ de}\\ p^{\rho\delta}_P(\lambda)(0,x^0;\zeta^0;0,0)=0 \text{ satisfont}\\ \operatorname{Re}\lambda_j(0,x^0;\zeta^0)\ge 4\delta_0 \qquad j=1,.,m_0\\ \operatorname{Re}\lambda_j(0,x^0;\zeta^0)\le 0 \qquad j=m_0+1,.,m.\end{array}\right.$$

Par l'hypothèse (H-0) on a:

$$(\text{H-4})\qquad \mathscr{a}\le\mathscr{b}$$

et il existe des nombres non négatifs γ_1, γ_2 tels qu'en posant, pour la simplicité de l'écriture,

$$p_1=p-\gamma_1 q,$$

l'on a:

$$(\text{H-5})\qquad 0\le p_1-\gamma_1\,(\equiv p-\gamma_1(q+1))$$

$$(\text{H-6})\qquad \operatorname{Max}\{\sigma_P^+,\sigma^0\}\le\gamma_2<\gamma_1<\sigma_P^-$$

$$(\text{H-7})\qquad p_1-\gamma_1<\mathscr{b}\equiv\operatorname*{Min}_j\frac{\rho_j-\delta_j}{s_j^{\sim}}$$

$$(\text{H-8})\qquad \mathscr{a}\le p-\gamma_2(q+1)$$

Nous suivons la démonstration à la première partie: Nous considérons le $(\text{PCS})_{\zeta^0 n}$ au lieu du (PCS): Le seul point à modifier à la première partie c'est le choix de A, r et $\hat{r}$: Le voici

Choix de A, r et $\hat{r}$.

Au cas où $\mathscr{a}<\mathscr{b}_{\rho\delta}$, nous choisissons A tel que $A<\dfrac{\delta_0}{q+1}B_2^{q+1}$. Soient r et $\hat{r}$ des nombres quelconques tels que l'on a:

$$\{x;|x-x^0|\le 2r\}\subset\Omega_A,\ 0<2r<r_0,\ 0<2\hat{r}<\hat{r}_0.$$

Au cas où $\mathscr{a}=\mathscr{b}_{\rho\delta}$ à l'exception du cas (12–1), nous choisissons $\hat{r}$ en sorte que l'on a $0<2\hat{r}<\hat{r}_0$, et nous choisissons A tel que l'on a $A<\operatorname{Min}\left\{C(s^{\sim}),\ \dfrac{\delta_0}{q+1}B_2^{q+1}\right\}$. Soit r un nombre quelconque tel que l'on a: $\{x;|x-x^0|\le 2r\}\subset\Omega_A$, $0<2r<r_0$. Ce qui est faisable car $C(s^{\sim})$ est alors indépendant de r.

Au cas exceptionnel (12–1), nous choisissons r et $\hat{r}$ arbitrairement mais tels que l'on a: $\{x;|x-x^0|\le 2r\}\subset\Omega_0$, $0<2r<r_0$, $0<2\hat{r}<\hat{r}_0$. Et nous choisissons A en sorte que l'on a $A<\left\{C(s^{\sim}),\ \dfrac{\delta_0}{q+1}B_2^{q+1}\right\}$. Ce qui est faisable d'après l'hypothèse sur Ω_A au cas exceptionnel (12–1).

Ainsi on démontre (1) à la proposition fondamentale.

Nous passons maintenant à (2). Par nier le résultat à la deuxième partie on peut bien supposer:

$$\langle \text{H-3} \rangle \begin{cases} \text{Il existe des } x^0(x^0_{\delta-\sigma} \in \Omega_0),\ \zeta^0 \equiv \xi^0 + i\eta^0(\eta^0 \neq 0),\ \delta_0(0<\delta_0),\ m_0(1 \le m_0) \\ \text{tels que les racines } \lambda_j(0, x^0; \zeta^0) \equiv \lambda^{\rho\delta}_{Pj}(0, x^0; \zeta^0; 0, 0) \text{ de } p^{\rho\delta}_P(\lambda)(0, x^0; \zeta^0; \\ 0, 0) = 0 \text{ satisfont} \\ \operatorname{Re} \lambda_j(0, x^0; \zeta^0) \ge 4\delta_0 \qquad j = 1,., m_0 \\ \operatorname{Re} \lambda_j(0, x^0; \zeta^0) \le 0 \qquad j = m_0 + 1,., m. \end{cases}$$

Par l'hypothèse $\langle$H-0$\rangle$ on a:

$\langle$H-4$\rangle$ $a < b$ au cas où il existe un j tel que $b = \rho_j - \delta_j$; $a \le b$ ailleurs.

$\langle$H-5$\rangle$,., $\langle$H-7$\rangle$ sont les mêmes qu'à (H-5),., (H-7).

$\langle$H-8$\rangle$ $a < p - \gamma_2(q+1)$

Si nous suivons le raisonement de la démonstration à la note précédente, A à (H-2) n'est plus arbitraire ici à $\langle$H-2$\rangle$. Mais cette fixité de A à $\langle$H-2$\rangle$ est récompensée par $\langle$H-1$\rangle$, $\langle$H-4$\rangle$ et $\langle$H-8$\rangle$ si l'on fait attention au choix de $\rho_0(r_0)$ et à la proposition 4 à la première partie: Au cas où $a = b$, on choisit cette fois ρ_0 en sorte que l'on a $A < C(s^\sim)$ pour A donné. Et par la modification à ces points à la démonstration à la note précédente, on voit que (2) à la proposition fondamentale est démontrée. C.Q.F.D.

§ 13. Modification de la proposition fondamentale

On a une modification de la proposition fondamentale.

Au lieu de (H-0) ou $\langle$H-0$\rangle$ nous considérons des conditions:

[H-0] $0 < a < b$; $P \in [P_a, P_b)$; $\sigma^0 \le \sigma^+_P$.

{H-0} $a < b$; $P \in [P^*_a, P_b)$; $\sigma^0 \le \sigma^+_P$.

Proposition fondamentale-bis. (1) *Sous les hypothèses* (H), [H-0], (H-1), (H-2), *la partie réelle de la racine de* $p^{\rho\delta}_P(\lambda)(t, x - x_{\delta-\sigma}; \xi^0 + i\eta; 0, 0) = 0$ *est non positive pour tous* $^\forall t$; $0 \leqq t(\leqq A^0$ *si* $\sigma^0 = 0)$ *et* $^\forall(x, \eta) \in \mathbf{R}^{2d}$, *et, au cas où l'on peut choisir* $\Omega_A = \Omega_0$ *pour tout* $A > 0$ *dans* (H-2), *la partie réelle de la racine de* $p^{\rho\delta}_P(\lambda)(t, x; \xi^0 + i\eta; 0, 0) = 0$ *est non positive pour tous* $^\forall t$; $0 \leqq t(\leqq A^0$ si $\sigma^0 = 0)$ et $^\forall(x, \eta)$; $(x_{\delta-\sigma}, \eta) \in \Omega_0 \times \mathbf{R}^d$.

(2) *Sous les hypothèses* (H), {H-0}, $\langle$H-1$\rangle$, $\langle$H-2$\rangle$, *la partie réelle de la racine de* $p^{\rho\delta}_P(\lambda)(t, x; \xi^0 + i\eta; 0, 0) = 0$ *est non positive pour tous* $^\forall t$; $0 \le t(\le A^0$ *si* $\sigma^0 = 0)$ *et* $^\forall(x, \eta)$; $(x_{\delta-\sigma}, \eta) \in \Omega_0 \times \mathbf{R}^d$.

Démonstration. Nous montrons d'abord (1). Nous la montrons par absurde. La démonstration est pareille à celle de la proposition fondamentale. Par nier le résultat on peut bien suppoer:

$$
[\text{H-3}] \left\{
\begin{array}{l}
\text{Il existe des } x^0\,(x^0_{\delta-\sigma} \in \bigcap_A \Omega_A),\ \zeta^0 \equiv \xi^0 + i\eta^0\ (\eta^0 \neq 0),\ 0 \leq t_0 < t_1\,(\leq A^0 \text{ si} \\
\sigma^0 = 0),\ \ell > 0,\ \delta_0 > 0 \text{ et } m_0 \geq 1 \text{ tels que les racines } \lambda_j(t, x^0; \zeta^0) \equiv \lambda^{\rho\delta}_{Pj} \\
(t, x^0; \zeta^0; 0, 0) \text{ de } p^{\rho\delta}_P(\lambda)(t, x^0; \zeta^0; 0, 0) \text{ satisfont} \\
\operatorname{Re} \lambda_j(t, x^0; \zeta^0) \leq 0 \qquad (j = 1,., m) \text{ pour } t \leq t_0 \\
\operatorname{Re} \lambda_j(t, x^0; \zeta^0) \geq 4\delta_0(t - t_0)^\ell \quad j = 1,., m_0 \text{ pour } t_0 < t < t_1 \\
\operatorname{Re} \lambda_j(t, x^0; \zeta^0) \leq 0 \qquad j = m_0 + 1,., m \text{ pour } t_0 < t < t_1.
\end{array}
\right.
$$

Remarque. Les racines $\lambda_j(t, x^0; \xi^0)$ étant des fonctions algébriques en t, il n'y a qu'un nombre fini de points singuliers (points de ramification) sur $[0, t_1]$. Comme on voit dans la démonstration qui suit, on peut bien supposer, sans perdre la généralité, que $t = 0$ et $t = t_0$ soient les seules points singuliers sur $[0, t_1]$. Nous le supposons dans la suite.

Par [H-0] ou {H-0}, on a:

[H-4] $\alpha < \ell$

Nous choisissons ici $\gamma_2 \equiv \sigma^+_P$.

Les hypothèses [H-5] et [H-6] sont les mêmes que (H-5) et (H-6).

$$
[\text{H-7}] \left\{
\begin{array}{l}
\gamma_2 \equiv \sigma^+_P > 0 \\
p - \gamma_2(q + 1) < \ell \equiv \operatorname*{Min}_j \dfrac{\rho_j - \delta_j}{s_j^{\sim}}
\end{array}
\right.
$$

L'hypothèse [H-8] est la même que (H-8).

Choix de A à (H-2).

Nous choisissons A en sorte que l'on a: $A < \dfrac{\delta_0}{4(q + \ell + 1)}(t_1 - t_0)^{q+\ell+1}$.

Au lieu de deux systèmes [I] et [II] à démonstration de la proposition fondamentale, nus considérons ici quatre systèmes dont les premiers trois jouent le rôle du système [I] et le quatrième celui du système [II].

Le premier système est le même qu'au système [I] à la démonstration de la proposition fondamentale:

Nous déterminerons B_1 ultérieurement et nous considérons dans $[0, B_1 n^{-\gamma_1}]$. Nous posons:

$$U^1_n(t, x) \equiv \operatorname{diag}[1, n^{-p_1},., n^{-p_1(m-1)}]\theta_n(x)\, U^0_n(t, x)$$

Alors on a le premier système:

$$
[\mathrm{I}]\quad
\left(
\begin{aligned}
&\partial_t \nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(x\,;D)U_n^1(t,x) = n^{p_1}[A^1(t,x\,;D\,;n)\,\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(x\,;D)U_n^1(t,x) \\
&\qquad\qquad + F^1(\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}\,;U_n^1)(t,x)] \quad t\in[0, B_1 n^{-\gamma_1}] \\
&A^1(t,x\,;D\,;n) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_m^1(t,x\,;D\,;n), & \dots, & & a_1^1(t,x\,;D\,;n) \end{pmatrix} \equiv (A_{ij}^1(t,x\,;D\,;n)) \\
&F^1(\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}\,;U_n^1)(t,x)) \equiv \begin{pmatrix} & 0 & \\ n^{-p_1 m} f_m^{\mu\nu}(t,x\,;D), & .., & n^{-p_1} f_1^{\mu\nu}(t,x\,;D) \end{pmatrix} U_n^1(t,x)
\end{aligned}
\right.
$$

Remarquons que nous avons choisi $\gamma_2 = \sigma_P^+$ et considérons dans $[B_1 n^{-\gamma_1}, t_1 n^{-\gamma_2}]$.

D'après [H-6], nous avons, pour tout $\gamma \in [\gamma_2, \gamma_1]$,

$$\mathscr{s}(\rho\alpha - \delta\nu(j\alpha k)) - \gamma(\sigma(j\alpha k) - qj) \leq pj \qquad {}^\forall(j\alpha k)$$

avec l'égalité pour $(j\alpha k)\in\Gamma_P^+$ au cas où $\gamma = \gamma_2 = \sigma_P^+$ et pour $(j\alpha k)\in\mathring{\Gamma}_P$ aux autres cas.

Soit

$$\varepsilon_0 \equiv \operatorname{Inf}\{pj - [\mathscr{s}(\rho\alpha - \delta\nu(j\alpha k)) - \gamma(\sigma(j\alpha k) - qj)]\,;\ \gamma\in[\gamma_2,\gamma_1],\ (j\alpha k)\notin\Gamma_P^+\}.$$

Donc nous savons que, pour tout $t\in[B_1 n^{-\gamma_1}, t_1 n^{-\gamma_2}]$,

$$a_{jnloc}(t,x\,;D) = n^{pj} t^{qj}[a_j^*(t,x\,;D\,;n) + n^{-\varepsilon_0} a_j^{**}(t,x\,;D\,;n)]$$

où
$$
\begin{aligned}
a_j^*(t,x\,;\eta\,;n) \equiv \sum_{(j\alpha k)\in\Gamma_P^+} & t^{\sigma(j\alpha k)-qj} n^{\mathscr{s}(\rho\alpha-\delta\nu(j\alpha k))-pj}[x^{0\nu(j\alpha k)} a_{j\alpha k}(0, x_\delta^0)\zeta^{0\alpha} \\
& + n^{-\mathscr{s}(\rho\alpha-\delta\nu(j\alpha k))}\{(x^{\nu(j\alpha k)} a_{j\alpha k}(t,x)(n^\rho\xi^0 + i\eta)^\alpha)_{nloc} \\
& - (n^{-\delta}x^0)^{\nu(j\alpha k)} a_{j\alpha k}(0, x_\delta^0)(n^\rho\xi^0)^\alpha\}]
\end{aligned}
$$

en sorte que l'on a:

$$
\begin{aligned}
a_j^*(n^{-\gamma_2}t, x\,;\eta\,;n) = \sum_{(j\alpha k)\in\Gamma_P^+} & t^{\sigma(j\alpha k)-qj}[x^{0\nu(j\alpha k)} a_{j\alpha k}(0, x_\delta^0)\xi^{0\alpha} \\
& + n^{-\mathscr{s}(\rho\alpha-\delta\nu(j\alpha k))}\{(x^{\nu(j\alpha k)} a_{j\alpha k}(n^{-\gamma_2}t, x)(n^\rho\xi^0 + i\eta)^\alpha)_{nloc} \\
& - (n^{-\delta}x^0)^{\nu(j\alpha k)} a_{j\alpha k}(0, x_\delta^0)(n^\rho\zeta^0)^\alpha\}]
\end{aligned}
$$

et
$$
\begin{aligned}
a_j^{**}(t,x\,;\eta\,;n) \equiv \sum_{(j\alpha k)\notin\Gamma_P^+} & t^{\sigma(j\alpha k)-qj} n^{\mathscr{s}(\rho\alpha-\delta\nu(j\alpha k))-pj+\varepsilon_0} \\
& \times n^{-\mathscr{s}(\rho\alpha-\delta\nu(j\alpha k))}\{(x^{\nu(j\alpha k)} a_{j\alpha k}(t,x)(n^\rho\xi^0 + i\eta)^\alpha)_{nloc}
\end{aligned}
$$

qui satisfont à

$$\left\{\begin{aligned} &|a^{*(\mu)}_{j(\nu)}(t, x, \eta; n)|\ ,\ |a^{**(\mu)}_{j(\nu)}(t, x, \eta; n)| \leq {}^{\exists}C\mu!^{s^*}\nu!^{s^*}\hat{\rho}_0^{\mu}\rho_0^{\nu}n^{-\rho\mu+\delta\nu} \\ &\qquad\qquad ({}^{\forall}\mu, {}^{\forall}\nu, {}^{\forall}x, {}^{\forall}\eta\,;\ {}^{\forall}t\in[B_1 n^{-\gamma_1},\ t_1 n^{-\gamma_2}]) \\ &a^*_j(n^{-\gamma_2}t, x; \eta; n) = \sum_{(j\alpha k)\in\Gamma_P^+} t^{\sigma(j\alpha k)-qj}x^{0^{\nu(j\alpha k)}}a_{j\alpha k}(0, x^0_\delta)\zeta^{0^\alpha} \\ &\qquad\qquad + o_{r_0,\hat{r}_0,B_1,n}(1) \quad \text{uniformément en } t\in[0, t_1], \end{aligned}\right.$$

où $o_{r_0,\hat{r}_0,B_1,n}(1)$ est la quantité tendant vers zéro quand on fait tendre r_0, $\hat{r}_0$ vers zéro et B_1, n vers ∞.

Rappelons-nous que les racines $\lambda_j(t, x; \zeta) \equiv \lambda_j(t, x; \zeta; 0, 0)$ de $p_P^{\rho\delta}(t, x; \zeta; 0, 0) = 0$ sont des valeurs propres de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \ddots & 1 & \ddots & 0 \\ & & & & \\ 0 & & 0 & & 1 \\ a^{\sim}_m(t, x; \zeta), & \cdots & \cdots & \cdots & a^{\sim}_1(t, x; \zeta) \end{pmatrix}$$

où $a^{\sim}_j(t, x; \zeta) \equiv \sum_{(j\alpha k)\in\Gamma_P^+} t^{\sigma(j\alpha k)-qj}x^{\nu(j\alpha k)}a_{j\alpha k}(0, x_\delta)\zeta^\alpha$

Remarquons que les racines du polynôme $p_P^{\rho\delta}(\lambda)(t, x^0; \zeta^0 : 0, 0) = 0$ sont algébriques par rapport à t pour x^0, ζ^0 fixés. On a la proposition suivante.

Proposition 9. [7] *Etant fixés x^0 et ζ^0, pour tout t^0 donné, il existe un voisinage $\{t; |t - t^0| < \varepsilon\}$ de $t = t^0$ et un entier positif k, tels que, pour tout $\eta\,(0 < \eta)$ donné, il existe des matrices $H(t) = (h_{ij}(t))_{ij=1,..,m}$ et $\Lambda(t) = (\lambda_{ij}(t))_{i,j=1,..,m}$ telles que $h_{ij}(t^0 + t^k)$, $\lambda_{ij}(t^0 + t^k)$ sont holomorphes dans $\{t; |t| < \varepsilon^{1/k}\}$, que det $H(t) \neq 0$ dans $\{t; |t - t^0| < \varepsilon\}$, que $\lambda_{ii}(t) = \lambda_i(t, x^0, \zeta^0)$, $\lambda_{ij}(t) \equiv 0$ $(i > j)$, $|\lambda_{ij}(t)| < \eta\,(i < j)$; i, $j = 1,.., m$, et que l'*on a:

$$H(t)\begin{pmatrix} & 0 & \ddots & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 & & 1 \\ a_m(t, x^0; \zeta^0), & \cdots & \cdots & \cdots & & a_1(t, x^0; \zeta^0) \end{pmatrix}H(t)^{-1} = \Lambda(t)$$

$$\left(\frac{d}{dH}H(t)\right)H(t)^{-1} \equiv (h^{\sim}_{ij}(t))_{i,j=1,..,m}$$

avec $|h^{\sim}_{ij}(t)| \leq |t - t^0|^{-\tau}$ $(0 \leq {}^{\exists}\tau < 1)$; $i, j = 1,.., m$.

Par l'applicatin de cette proposition 9, on peut bien supposer, sans perdre la généralité, que, pour η $(0 < \eta)$ donné, il existe des matrices $H^1(t)$ et $H^2(t)$ telles que l'on a:

$$H^1(t)\begin{pmatrix} & 0 & \ddots & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 & & 1 \\ a^{\sim}_m(t, x^0; \zeta^0), & \cdots & \cdots & \cdots & & a^{\sim}_1(t, x^0; \zeta^0) \end{pmatrix}H^1(t)^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1(t, x^0; \zeta^0) & & 0 \\ & \ddots & \\ \lambda_{ij}^1(t) & & \lambda_m(t, x^0; \zeta^0) \end{pmatrix} \qquad \text{avec } |\lambda_{ij}^1(t)| \leq \frac{\eta}{4m} \quad t \in [0, t_0]$$

$$H^2(t) \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 & \cdots & 1 \\ a_m^{\sim}(t, x^0; \zeta^0), & \cdots & \cdots & \cdots & , & a_1^{\sim}(t, x^0; \zeta^0) \end{pmatrix} H^2(t)^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1(t, x^0; \zeta^0) & & 0 \\ & \ddots & \\ \lambda_{ij}^2(t) & & \lambda_m(t, x^0; \zeta^0) \end{pmatrix} \qquad \text{avec } |\lambda_{ij}^2(t)| \leq \frac{\eta}{4m} \quad t \in [t_0, t_1]$$

Soient

$$\left\{ \begin{aligned} & H_n^1(t) \equiv H^1(n^{\gamma_2} t) \\ & U_n^2(t, x) \equiv H_n^1(t) \operatorname{diag}[1, (n^p t^q)^{-1}, \ldots, (n^p t^q)^{-(m-1)}] \theta_n(x) U_n^0(t, x) \\ & \qquad = H^1(n^{\gamma_2} t) \operatorname{diag}[1, (n^{p-p_1} t^q)^{-1}, \ldots, (n^{p-p_1} t^q)^{-(m-1)}] U_n^1(t, x). \end{aligned} \right.$$

Alors, l'influence d'irrégularité en t de la transformation

$$\operatorname{diag}[1, (n^p t^q)^{-1}, .., (n^p t^q)^{-(m-1)}]$$

étant estimée, pour $t \in [B_1 n^{-\gamma_1}, t_1 n^{-\gamma^2}]$, par

$$^{\exists} C n^p t^q (n^{-(p-\gamma_1(q+1))} B_1^{-(q+1)})$$

compte tenu de [H-5], en choisissant B_1 convenablement grand, elle peut être rendu autant petite qu'on veut.

Et l'influence d'irrégularité en t de la transformation $H_n^1(t)$ à $t = 0$ ainsi qu'à $t = n^{-\gamma_2} t_0$ est estimée par $n^{-(p-\gamma_1(\tau+q))}(n^p t^q)$ $(0 \leq {}^{\exists}\tau < 1)$ et $n^{-(p-\gamma_1(1+q))-\gamma_1} n^{(1-\tau)\gamma_2}$ $(n^{-\gamma_2} t_0 - t)^{-\tau}(n^p t^q)$ $(0 \leq {}^{\exists}\tau < 1)$ respectivement.

Ainsi par choisir r_0, $\hat{r}_0$ petits et B_1 grand pour $\eta > 0$ donné, on a comme le deuxième système:

$$\left| \begin{aligned} & \partial_t \nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(x; D) U_n^2(t, x) = n^p t^q [A^2(t, x; D; n) \nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(x; D) U_n^2(t, x) \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad + F^2(\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}; U_n^2)(t, x)] \\ & A^2(t, x; D; n) \equiv \begin{pmatrix} \lambda_1(n^{\gamma_2} t, x^0; \zeta^0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m(n^{\gamma_2} t, x^0; \zeta^0) \end{pmatrix} \\ & + (\lambda_{ij}(t, x; D; n)) + (\lambda_{ij}^{\sim}(t; n)(n^{-\gamma^2} t_0 - t)^{-\tau} \end{aligned} \right.$$

[II]

$$\left|\begin{array}{l}
\text{avec } |\lambda_{ij}(t, x; \eta; n)| \leq \dfrac{\eta}{4m} \\
\text{et } \quad |\lambda_{ij}^{\sim}(t; n)| \leq \dfrac{\eta}{4m} \qquad \begin{pmatrix} {}^{\exists}B_1, {}^{\exists}\tau \in [0, 1) \ {}^{\forall}t \in [B_1 n^{-\gamma_1}, t_0 n^{-\gamma_2}] \\ {}^{\forall}x, {}^{\forall}\eta, {}^{\forall}n \gg 1 \end{pmatrix} \\
\qquad |\lambda_{ij(\nu)}^{(\mu)}(t, x; \eta; n)| \leq {}^{\exists}C\mu!^{s^*}\nu!^{s^*}\hat{\rho}_0^{\mu}\rho_0^{\nu} n^{-\rho\mu+\delta\nu} \\
F^2(\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}; U_n^2)(t, x) \equiv H_n^1(t) \begin{pmatrix} 0 \\ n^{-pm}t^{-qm}f_m^{\mu\nu}(t, x; D), ., n^{-p}t^{-q}f_1^{\mu\nu}(t, x; D) \end{pmatrix} \\
\qquad \qquad \times H_n^1(t)^{-1} U_n^2(t, x).
\end{array}\right.$$

Soient

$$\left(\begin{array}{l}
H_n^2(t) \equiv H^2(n^{\gamma_2}t) \\
U_n^3(t, x) \equiv H_n^2(t)\operatorname{diag}[1, (n^p t^q)^{-1}, \dots, (n^p t^q)^{-(m-1)}]\theta_n(x) U_n^0(t, x) \\
\qquad = H^2(n^{\gamma_2}t)\operatorname{diag}[1, (n^{p-p_1}t^q)^{-1}, \dots, (n^{p-p_1}t^q)^{-(m-1)}] U_n^1(t, x).
\end{array}\right.$$

Remarquons que l'influence d'irrégularité en t de la transformation $H^2(t)$ à $t = t_0$ est estimée par $(t - t_0)^{-\tau}$ $(0 \leq \tau < 1)$.

Choix de η.

On choisit η en sorte que l'on a:

$$3\frac{(t_0 + t_1)^{q+1}}{q+1}\eta < \frac{\delta_0}{4(q + \ell + 1)}(t_1 - t_0)^{q+\ell+1}.$$

Choix de η_0.

Soit η_0 un nombre positif tel que l'on a:

$$\eta_0 : \eta_0 < \frac{1}{2}(t_1 - t_0), \ \operatorname{Re}\lambda_j(t, x^0; \xi^0) < \frac{\eta}{4} \text{ pour tout } {}^{\forall}t \ (t \in [t_0, t_0 + \eta_0]), \ j = 1, ., m.$$

Ainsi par choisir r_0, $\hat{r}_0$ petits et B_1 grand pour $\eta > 0$ et η_0 donnés, on a pareillement au précédent, le troisième système:

$$\left|\begin{array}{l}
\partial_t \nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(x; D) U_n^3(t, x) = n^p t^q [A^3(t, x; D; n) \nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(x; D) U_n^3(t, x) \\
\qquad \qquad \qquad + F^3(\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}; U_n^3)(t, x)] \\
A^3(t, x; D; n) \equiv \begin{pmatrix} \lambda_1(n^{\gamma_2}t, x^0; \zeta^0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m(n^{\gamma_2}t, x^0; \zeta^0) \end{pmatrix} \\
+ (\lambda_{ij}(t, x; D; n)) + (\lambda_{ij}^{\sim}(t; n)(t - n^{-\gamma^2} t_0)^{-\tau} \\
\text{avec } \operatorname{Re}\lambda_j(n^{\gamma_2}t, x^0; \xi^0) \leq \dfrac{\eta}{4}
\end{array}\right.$$

$$
[\mathrm{III}]\quad\left|\begin{array}{l}
|\lambda_{ij}(t, x; \eta; n)| \leq \dfrac{\eta}{4m} \\
\text{et} \quad |\lambda_{ij}^{\sim}(t; n)| \leq \dfrac{\eta}{4m} \qquad \begin{pmatrix} {}^{\exists}\tau \in [0, 1);\ {}^{\forall}t \in [t_0 n^{-\gamma_2}, (t_0 + \eta_0) n^{-\gamma_2}] \\ {}^{\forall}x,\ {}^{\forall}\eta,\ {}^{\forall}n \gg 1 \end{pmatrix} \\
|\lambda_{ij(\nu)}^{(\mu)}(t, x; \eta; n)| \leq {}^{3}C\mu!^{s^*}\nu!^{s^*}\hat{\rho}_0^{\mu}\rho_0^{\nu} n^{-\rho\mu+\delta\nu} \\
F^3(\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}; U_n^3)(t, x) \equiv H_n^2(t) \begin{pmatrix} 0 \\ n^{-pm}t^{-qm}f_m^{\mu\nu}(t, x; D), .., n^{-p}t^{-q}f_1^{\mu\nu}(t, x; D) \end{pmatrix} \\
\qquad \times H_n^2(t)^{-1} U_n^3(t, x).
\end{array}\right.
$$

Choix de $\eta^{\sim}$

Nous prenons un $\eta^{\sim} \leq \mathrm{Min}\{\eta, \delta_0 \eta_0^{\ell}\}$

Alors, pour $\eta^{\sim} > 0$ donné, on a, grâce à la proposition 9, une matrice $H^3(t)$ telle qu'en posant:

$$
\left(\begin{array}{l}
H_n^3(t) \equiv H^3(n^{\gamma_2}t) \\
U_n^4(t, x) \equiv H_n^3(t)\mathrm{diag}[1, (n^p t^q)^{-1}, \ldots, (n^p t^q)^{-(m-1)}]\theta_n(x) U_n^0(t, x) \\
\qquad = H^3(n^{\gamma_2}t)\mathrm{diag}[1, (n^{p-p_1}t^q)^{-1}, \ldots, (n^{p-p_1}t^q)^{-(m-1)}] U_n^1(t, x).
\end{array}\right.
$$

l'on a, en choisissant r_0 et $\hat{r}_0$ petits,

$$
[\mathrm{IV}]\quad\left|\begin{array}{l}
\partial_t \nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(x; D) U_n^4(t, x) = n^p t^q [A^4(t, x; D; n) \nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(x; D) U_n^4(t, x) \\
\qquad + F^4(\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}; U_n^4)(t, x)] \\
A^4(t, x; D; n) \equiv \begin{pmatrix} \lambda_1(n^{\gamma_2}t, x^0; \zeta^0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m(n^{\gamma_2}t, x^0; \zeta^0) \end{pmatrix} + (\lambda_{ij}(t, x; D; n)) \\
\text{avec } |\lambda_{ij}(t, x; \eta; n)| \leq \dfrac{\eta^{\sim}}{2m} \qquad \begin{pmatrix} {}^{\forall}t \in [(t_0 + \eta_0) n^{-\gamma_2}, t_1 n^{-\gamma_2}] \\ {}^{\forall}x,\ {}^{\forall}\eta,\ {}^{\forall}n \gg 1 \end{pmatrix} \\
|\lambda_{ij(\nu)}^{(\mu)}(t, x; \eta; n)| \leq {}^{3}C\mu!^{s^*}\nu!^{s^*}\hat{\rho}_0^{\mu}\rho_0^{\nu}\ n^{-\rho\mu+\delta\nu} \\
F^4(\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}; U_n^4)(t, x) \equiv H_n^3(t) \begin{pmatrix} 0 \\ n^{-pm}t^{-qm}f_m^{\mu\nu}(t, x; D), .., n^{-p}t^{-q}f_1^{\mu\nu}(t, x; D) \end{pmatrix} \\
\qquad \times H_n^3(t)^{-1} U_n^4(t, x).
\end{array}\right.
$$

Choix de r_0, $\hat{r}_0$, B_1.

Nous avons choisi r_0, $\hat{r}_0$, B_1 en sorte que l'on a

$$\{x; |x| \leq 4\nu(r_0)\} \subset \Omega_0,\ r_0 \leq \mathrm{Min}\{\rho_0^{-1}, 1\},\ \hat{r}_0 \leq \mathrm{Min}\{\hat{\rho}_0^{-1}, 1\}$$

et que l'on a tous ces quatre systèmes.

Nous allons faire les estimations d'énergie. Les estimations se font tout pareillement à la section 5 de la note précédente.

Estimons $U_n^i(t, x)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ aux système [I], [II], [III], [IV] respectivement.

Soit

$$E^i(U_n^i)(t) = \sum_{\mu \le \hat{N}_n, \nu \le N_n} M_n^{\mu\nu}(\kappa) ||| \nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(\circ; D) U_n^i(t, \circ) ||| \quad i = 1, 2, 3.$$

$$E^4(U_n^4)(t) = \sum_{\mu \le \hat{N}_n, \nu \le N_n} M_n^{\mu\nu}(\kappa) [\sum_{j=1}^{m_0} \| \nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(\circ; D) U_{nj}^4(t, \circ) \|$$
$$- \sum_{j=m_0+1}^{m} \| \nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(\circ; D) U_{nj}^4(t, \circ) \|].$$

Alors, grâce à la proposition 4 à la note pécédente, on a:

$$\partial_t E^1(U_n^1)(t) \le n^{p_1}(C_1 + C_2\kappa^{-1}) E^1(U_n^1)(t)$$
$$+ {}^{\exists}P(n) \exp(-C(s^{\sim})n^{\theta}) ||| U_n^1(t, \circ) |||$$

$$\partial_t E^2(U_n^2)(t) \le n^p t^q (\eta + \eta(n^{-\gamma_2} t_0 - t)^{-\tau} + C_3 \kappa^{-1}) E^2(U_n^2)(t)$$
$$+ {}^{\exists}P(n) \exp(-C(s^{\sim})n^{\theta}) ||| U_n^2(t, \circ) |||$$

$$\partial_t E^3(U_n^3)(t) \le n^p t^q (\eta + \eta(t - n^{-\gamma_2} t_0)^{-\tau} + C_3 \kappa^{-1}) E^3(U_n^3)(t)$$
$$+ {}^{\exists}P(n) \exp(-C(s^{\sim})n^{\theta}) ||| U_n^3(t, \circ) |||$$

$$\partial_t E^4(U_n^4)(t) \ge n^p t^q [2\delta_0(n^{\gamma_2} t - t_0)^{\ell} E^4(U_n^4)(t)$$
$$+ (\delta_0(n^{\gamma_2} t - t_0)^{\ell} - C_3 \kappa^{-1}) \sum_{\mu \le \hat{N}_n, \nu \le N_n} M_n^{\mu\nu}(\kappa) ||| \nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(\circ; D) U_n^4(t, \circ) |||]$$
$$- {}^{\exists}P(n) \exp(-C(s^{\sim})n^{\theta}) ||| U_n^4(t, \circ) ||| .$$

Choix de κ.

Nous choisissons ici κ en sorte que l'on a

$$\eta^{\sim} - C_3 \kappa^{-1} \ge 0, \quad \kappa \ge 1.$$

Alors on a, avec une constante C et un polynôme $P(n)$ en n,

$$\left\{\begin{aligned}
E^1(U_n^1)(B_1 n^{-\gamma_1}) &\le \exp({}^{\exists}C n^{p_1 - \gamma_1}) [E^1(U_n^1)(0) \\
&\quad + {}^{\exists}P(n) \exp(-C(s^{\sim})n^{\theta}) \sup_{t \in [0, B_1 n^{-\gamma_1}]} ||| U_n^1(t, \circ) |||] \\
E^2(U_n^2)(t_0 n^{-\gamma_2}) &\le \exp\left(3\eta \frac{t_0^{q+1}}{q+1} n^{p - \gamma_2(q+1)}\right) [E^2(U_n^2)(B_1 n^{-\gamma_1}) \\
&\quad + {}^{\exists}P(n) \exp(-C(s^{\sim})n^{\theta}) \sup_{t \in [B_1 n^{-\gamma_1}, t_0 n^{-\gamma_2}]} ||| U_n^2(t, \circ) |||] \\
E^3(U_n^3)((t_0 + \eta_0) n^{-\gamma_2}) &\le \exp\left(3\eta \frac{(t_0 + \eta_0)^{q+1}}{q+1} n^{p - \gamma_2(q+1)}\right) [E^3(U_n^3)(0) \\
&\quad + {}^{\exists}P(n) \exp(-C(s^{\sim})n^{\theta}) \sup_{t \in [t_0 n^{-\gamma_2}, (t_0 + \eta_0) n^{-\gamma_2}]} ||| U_n^1(t, \circ) |||]
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{et tant que } E^4(U_n^4)((t_0+\eta_0)n^{-\gamma_2}) > 0, \\ E^4(U_n^4)(t_1 n^{-\gamma_2}) \geq \exp\left(\dfrac{\delta_0}{q+\ell+1}(((t_1-t_0)^{q+\ell+1} - \eta_0^{q+\ell+1})n^{p-\gamma_2(q+1)})\right) \\ \times (E^4(U_n^4)((t_0+\eta_0)n^{-\gamma_2}) - {}^{\exists}P(n)\exp(-C(s^{\sim})n^{\mathscr{E}}) \\ \qquad\qquad \times \sup\limits_{t\in[(t_0+\eta_0)n^{-\gamma_2}, t_1 n^{-\gamma_2}]} ||| U_n^4(t,\circ) |||) \end{array}\right.$$

Remarquons que pour les solutions $W_n^i(t, x)$ $(i = 1, 2, 3)$ d'équations micro-localisées:

$$\partial_t W_n^1(t, x) = n^{p_1} A_1(t, x; D; n) W_n^1(t, x)$$

$$\partial_t W_n^i(t, x) = n^p t^q A^i(t, x; D; n) W_n^i(t, x) \quad (i = 2, 3)$$

on a, avec une certaine constante C,

$$\left\{\begin{array}{ll} ||| W_n^1(t,\circ) ||| \gtreqless \exp(\pm C n^{p_1} t) ||| W_n^1(0,\circ) |||. & t\in[0, B_1 n^{-\gamma_1}] \\ ||| W_n^2(t,\circ) ||| \gtreqless \exp\left(\pm\dfrac{\eta}{q+1} n^p t^{q+1}\right) ||| W_n^2(B_1 n^{-\gamma_1},\circ) |||. & t\in[B_1 n^{-\gamma_1}, t_0 n^{-\gamma_2}] \\ ||| W_n^3(t,\circ) ||| \gtreqless \exp\left(\pm\dfrac{\eta}{q+1} n^p t^{q+1}\right) ||| W_n^2(t_0 n^{-\gamma_2},\circ) ||| & t\in[t_0 n^{-\gamma_2}, (t_0+\eta_0)n^{-\gamma_2}] \end{array}\right.$$

Remarquons encore que l'on a

$$E^i(U_n^i) \leq {}^{\exists}P(n) ||| U_n^i ||| \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

Retraçons la démonstration de la proposition fondamentale à la note précédente. Tandisqu'à la note précédente on a donné les données provisoires à $t = B_1 n^{-\gamma_1}$ à (6–3), on les donne ici *à* $t = (t_0 + \eta_0)n^{-\gamma_2}$. On remarque que $p_1 - \gamma_1$ est remplacé par partie par $p - \gamma_2(q + 1)$ au calcul de l'estimation d'érreur. Remarquons que l'on a $p - \gamma_2(q+1) < \mathscr{E}_{p\delta}$ et que le coefficient de $n^{p-\gamma_2(q+1)}$ est estimé par η. On voit alors que le raisonnement de la proposition fondamentale est valable et on a

$$E^4(U_n^4)(t_1 n^{-\gamma_2}) \leq {}^{\exists}C(n)\exp\left(3\frac{((t_0+t_1)/2)^{q+1}}{q+1}\eta n^{p-\gamma_2(q+1)} + {}^{\exists}C n^{p_1-\gamma_1} + A n^{\alpha}\right)$$

$$E^4(U_n^4)(t_1 n^{-\gamma_2}) \geq {}^{\exists}C(n)\exp\left(\frac{\delta_0}{2(q+\ell+1)}(t_1 - t_0)^{q+\ell+1} n^{p-\gamma_2(q+1)}\right).$$

Ainsi on a la contradiction. C.Q.F.D.

Passons à (2). Par nier le résultat on peut bien supposer:

{H-3} $\left\{\begin{array}{ll} \text{Il existe des } x^0\,(x^0_{\delta-\sigma}\in\Omega_0),\ \zeta^0\equiv\xi^0+i\eta^0\ (\eta^0\neq 0),\ 0\le t_0<t_1\ (\le A^0 \text{ si} \\ \sigma^0=0),\ \ell>0,\ \delta_0>0 \text{ et } m_0\ge 1 \text{ tels que les racines } \lambda_j(t,x^0;\zeta^0)\equiv \\ \lambda^{\rho\delta}_{Pj}(t,x^0;\zeta^0;0,0) \text{ de } p^{\rho\delta}_P(\lambda)(t,x^0;\zeta^0;0,0)=0 \text{ satisfont} \\ \operatorname{Re}\lambda_j(t,x^0;\zeta^0)\le 0 & (j=1,.,m) \text{ pour } t\le t_0 \\ \operatorname{Re}\lambda_j(t,x^0;\zeta^0)\ge 4\delta_0(t-t_0)^\ell & j=1,.,m_0 \text{ pour } t_0<t<t_1 \\ \operatorname{Re}\lambda_j(t,x^0;\zeta^0)\le 0 & j=m_0+1,.,m \text{ pour } t_0<t<t_1. \end{array}\right.$

Les hypothèses {H-4},., {H-7} sont les mêmes que [H-4],., [H-7].

{H-8} $$\alpha < p-\gamma_2(q+1).$$

Sous ces remarques (2) est déjà claire. C.Q.F.D.

§ 14. Démonstrations des théorèmes

Soit $s\equiv(s',s'')\equiv(s_1,\dots,s_\ell,\infty,\dots,\infty);\ s_j<\infty,\ j=1,\dots,\ell.$

(1) *Démonstration du théorème* 1. Commençons par (1). Ceci est déjà démontré essentiellement à la note précédente: Redonnons la proposition 8 démontrée à la note précédente.

Proposition 8. [13] *Supposons que le* (PC) *soit* (*s*)*-soluble. Alors pour tous* $R>0$, N *et compact* $K\subset\Omega_0$, *il existe des constantes* C *et* M *telles que, pour toutes les données* $\{\varphi_j(x);\ \varphi_j\in H^{(s)}_R(\mathbf{R}^d)\ j=1,.,m\}$ *telles que*

$$\sum_{j=1}^m \sup_{\sigma(\alpha'')\le M,\alpha'} \|\partial_x^\alpha\varphi_j\|/\alpha'!^{s'}R^{|\alpha'|}\neq 0,$$

il existe au moins une solution $u(t,x)\in C^m([0,T_0],\ C^\infty(\Omega_0))$ *du* (PC) *ayant l'estimation suivante*:

$$\sum_{k=0}^{m-1}\sup_{\substack{\sigma(\alpha)\le N\\ x\in K}}|\partial_t^k\partial_x^\alpha u(t,x)|\le C\sum_{j=1}^m\sup_{\sigma(\alpha'')\le M,\alpha'}\|\partial_x^\alpha\varphi_j\|/\alpha'!^{s'}R^{|\alpha'|}$$

Comme on a vu à la note précédente, par son application, on a l'estimation à priori de la solution du (PCS):

Il existe, pour tous $R>0$, N et compact $K\subset\Omega_0$, des constantes C et M telles que pour les données telles que l'on a:

$$\|\partial_x^\alpha\Phi_{nj}\|\le {}^\exists C_{\alpha''}\,\Theta_\Phi(n)\,(cn)^{\rho'\alpha'}$$

avec une constante $C_{\alpha''}$ dépendants de α'' et une fonction $\Theta_\Phi(n)$ en n, il existe une solution $U^0_n(t,x)$ du (PCS) ayant l'estimation:

$$\sum_{k=1}^m\sup_{\substack{\sigma(\alpha)\le N\\ x\in K}}|\partial_x^\alpha U^0_{nj}(t,x)|\le {}^\exists P(n)\,\Theta_\Phi(n)\exp(An^\alpha)$$

avec $a \equiv a_{\rho\delta}$, un polynôme $P(n)$ en n et $A \equiv \operatorname{Max}\{es_j(c_j^{\rho_j}/R_j)^{1/s_j}; j = 1, \ldots, \ell\}$.

On a (1) par l'application de la première partie des proposition fondamentale et proposition fondamentale-bis, avec $\xi^0 = 0$, $a = a_{\rho\delta}$, $\sigma^0 = 0$, $\sigma = 0$, $A^0 = T_0$, $A = \operatorname{Max}\{es_j(c_j^{\rho_j}/R_j)^{1/s_j}; j = 1,., \ell\}$ avec $\ell \geq 1$, où R_j peuvent être choisis arbitraires.

Passons maintenant à (4).

Il suffirait de mentionner la différence de celle précédente: L'espace $H^{\langle s\rangle}(\mathbf{R}^d)$ étant déjà de Frechet, la proposition 8 est substituée par la proposition suivante.

Proposition 10. *Supposons que le (PC) soit $\langle s\rangle$-soluble. Alors il existe, pour tous N et compact $K \subset \Omega_0$, des constantes R, C et M telles que, pour toutes les données $\{\varphi_j(x); \varphi_j \in H^{\langle s\rangle}(\mathbf{R}^d)\ j = 1,., m\}$ telles que*

$$\sum_{j=1}^{m} \sup_{\partial(\alpha'') \leq M, \alpha'} \|\partial_x^\alpha \varphi_j\| / \alpha'!^{s'} R^{|\alpha'|} \neq 0$$

il existe au moins une solution $u(t, x) \in C^m([0, T_0], C^\infty(\Omega_0))$ ayant l'estimation suivante:

$$\sum_{k=0}^{m-1} \sup_{\substack{\partial(\alpha) \leq N \\ x \in K}} |\partial_t^k \partial_x^\alpha u(t, x)| \leq C \sum_{j=1}^{m} \sup_{\partial(\alpha'') \leq M, \alpha'} \|\partial_x^\alpha \varphi_j\| / \alpha'!^{s'} R^{|\alpha'|}$$

On procède pareillement au précédent: La seule différence est que R est fixé cette-fois. L'application de la deuxième partie de la proposition fondamentale et la proposition fondamentale-bis avec $\xi^0 = 0$, $a = a_{\rho\delta}$, $\sigma_0 = \sigma = 0$, et $A^0 = T_0$ montre (4).

Passons maintenant à (2) et (3).

Remarquons d'abord que l'on a la proposition suivante grâce au théorème de Baire.

Proposition 11. *Si le (PC) est localement (s)-soluble à l'origine, alors pour tous $R' > 0$ et $M_0 \geq \underset{\partial_x}{\text{ordre}}\, L(t, x; \partial_t, \partial_x)$ donnés, il existe un $T_1 (0 < T_1 \leq T_0)$ et un voisinage de l'origine Ω_1 $(\Omega_1 \subset \Omega_0)$ tels que, pour tout $R'' > 0$ et toutes les données $\varphi_j(x) \in H_R^s(\mathbf{R}^d)$ $(j = 1,., m)$, il existe une solution $u(t, x) \in C^{m-1}([0, T_1], C^{M_0}(\Omega_1)) \cap C^m((0, T_1], C^0(\Omega_1))$*

Preuve. Soit $M \equiv M_0 + \left[\dfrac{d}{2}\right] + 2$. Soit R celui à la proposition.

Prenons un système fondamentale de voisinages de l'origine $\{\Omega_k\}_{k\geq 2}$ tels que

$$\Omega_0 \Supset \Omega_2 \Supset, \ldots, \Supset \Omega_k \Supset, \ldots, \Supset \bigcap_{k=2}^{\infty} \Omega_k = \{0\}$$

Nous envisageons une suite d'ensembles

$$E_k \equiv \Big\{ \Phi \equiv (\varphi_j(x))_{j=1,.,m};\ \varphi_j(x) \in H_R^{(s)}(\mathbf{R}^d),\quad \exists u(t, x) \in$$

$$C^{m-1}\left(\left[0, \frac{1}{k}\right], H^M(\Omega_k)\right) \cap C^m\left(\left(0, \frac{1}{k}\right], C^0(\Omega_k)\right), \ \|\partial_t^{j-1} u(t, \circ)\|_M \leq k,$$

$$\|\partial_t^{j-1} u(t, \circ) - \partial_t^{j-1} u(s, \circ)\|_M \leq k|t-s|, \quad {}^\forall s, t \in [0, 1/k], \ j = 1, \ldots, m.$$

$$\left. L(t, x; \partial_t, \partial_x) u(t, x) = 0 \text{ dans } \left(0, \frac{1}{k}\right] \times \Omega_k, \ \partial_t^{j-1} u(0, x) = \varphi_j(x) \text{ dans } \Omega_k \right\}$$

où $\|\circ\|_M$ est la norme de $H^M(\Omega_k) \equiv \{f(x); \|(1-\Delta)^{M/2} f\|_{L^2(\Omega_k)} < \infty\}$

E_k sont evidemment des ensembles convexes cerclés. D'après l'hypothèse, pour toutes les données $\varphi_j(x) \in H_R^{(s)}(\mathbf{R}^d)$, il existe une solution $u(t, x) \in C^m([0, T], C^\infty(\Omega))$ pour un T et un Ω. Donc on a:

$$\bigcup_{k=2}^{\infty} E_k = H_R^{(s)}(\mathbf{R}^d)^m.$$

En plus, E_k sont fermés. Montrons-le.

Soit $\{\Phi_n\}_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de E_k qui tend à une limite $\Phi_0 \in H_R^{(s)}(\mathbf{R}^d)^m$. Soit $\{u_n\}_{n\geq 1}$ une suite de solutions du (PC) pour ces données $\{\Phi_n\}_{n\geq 1}$ dont l'existence est assurée par la définition de E_k. Soit $\{t_\nu\}$ une suite dense des points de $[0, 1/k]$.

Pour tous j $(j = 1, \ldots, m)$ et t_ν fixés, les $\partial_t^{j-1} u_n(t_\nu, \circ)$ sont bornées dans $H^M(\Omega_k)$. Ainsi par la méthode usuelle on a l'existence d'une sous-suite u_{n_ℓ} de u_n dont $\partial_t^{j-1} u_{n_\ell}(t_\nu, \circ)$ converge dans $H^{M-1}(\Omega_k)$ et faiblement dans $H^M(\Omega_k)$ à une $v_j(t_\nu, \circ) \in H^M(\Omega_k)$ pour tous j et ν. Compte tenu de la continuité uniforme des $\partial_t^{j-1} u_n(t, \circ)$, et du fait que $\partial_t^{j-1} u(t, x)$ sont uniformément bornées, on sait que les $\partial_t^{j-1} u_{n_\ell}(t, x)$ forme une suite de Cauchy pour la topologie faible de $H^M(\Omega_k)$ donc une suite convergente à $v_j(t, x) \in H^M(\Omega_k)$ pour la toplogie faible de $H^M(\Omega_k)$ pour tout j $(j = 1, \ldots, m)$. Cette convergence est aussi pour la topologie de H_{loc}^{M-1} (Ω_k). On remarque aussi $\|v_j(t, \circ)\|_M \leq k$ pour tout $t \in [0, 1/k]$.

Compte tenu aussi de l'inégalité:

$\|\partial_t^{j-1} u_n(t, \circ) - \partial_t^{j-1} u_n(s, \circ)\|_M \leq k|s-t|$ pour tous $t, s \in [0, 1/k]$ et n, on a l'inégalité:

$\|v_j(t, \circ) - v_j(s, \circ)\|_M \leq k|t-s|$ pour tous $t, s \in [0, 1/k]$ et n.

Ce qui montre, compte tenu du lemme de Sobolev, que $v_j(t, x) = \partial_t^{j-1} v_1(t, x)$ et $v_1(t, x) \in \left\{u(t, x) \in C^{m-1}\left(\left[0, \frac{1}{k}\right], H^M(\Omega_k)\right) \cap C^m\left(\left(0, \frac{1}{k}\right], C^0(\Omega_k)\right); \|\partial_t^{j-1} u(t, \circ)\|_M \leq k, \ \|\partial_t^{j-1} \mathrm{u}(t, \circ) - \partial_t^{j-1} u(s, \circ)\|_M \leq k|t-s|, \ s, \ t \in \left[0, \frac{1}{k}\right], \ j = 1, ., m\right\}$

D'autre part, on a $\partial_t^{j-1} v_1(0, x) = \Phi_{0_j}(x)$. Ce qui montre que $\Phi_0 = (\varphi_{0_j}) \in E_k$. Ainsi E_k sont fermés.

Grâce au théorème de Baire, il existe un k tel que E_k a un point intérieur. Ce E_k contient donc un voisinage de l'origine de $H_R^s(\Omega_0)^m$. La proposition 11 est ainsi démontrée. C.Q.F.D.

Remarque. On a la proposition pareille pour le (PC) t-localement soluble.

La démonstration de (2) ou (3) se fait alors pareillement à celles précédentes, mais il faut remarquer que T_1 et Ω_1 sont dépendants du R: Le fait que T_1 dépend du R nous gêne à l'application de la première partie de la proposition fondamentale avec $\sigma^0 = 0$. Mais quand on exclue le cas où $\sigma_{a} = 0$. la première partie des proposition fondamentale et proposition fondamentale-bis est appliquable avec $\xi^0 = 0$, $a = a_{\rho\delta}$, σ^0 suffisamment petit, $\sigma = 0$ et $A^0 = T_0$ et on a (2). A (3), à cause du fait que Ω_1 dépend de R, on est obligé d'éxclure encore le cas où $a = \ell = \rho_j - \delta_j$ avec un j. C.Q.F.D.

(2) *Démonstration des théorèmes* 2 *et* 3. Nous montrons le théorème 2 par absurde. Et nous supposons d'une part que le (PC) soit $\langle\infty\rangle$-soluble et d'autre part que le (PC) ait, pour un $\hat{x}(\hat{x}\in\Omega_0)$, un $v = (v^1,., v^d)$ et un (ρ, δ), la propriété de l'unicité à jauge $g(t, x)t^\tau(x - \hat{x})^v$ à $(0, \hat{x})$ avec un $\tau \equiv (\tau_1,., \tau_d)$ tels que $(\tau^{\rho\delta}_{v_1P}(\hat{x}),., \tau^{\rho\delta}_{v_dP}(\hat{x})) \leqq \tau < \infty$ pour un $P\in[P^*_0, P_\ell] \subset (\Delta)_{\rho\delta}(0, \hat{x})$ avec $p^{\rho\delta}_P(\lambda)(0, x; \zeta; 0, \hat{x}) \not\equiv \lambda^m$. Alors on peut bien supposer qu'il existe un $\zeta^0 \equiv \xi^0 + i\eta^0$ $(\eta^0 \neq 0)$ et un $x^0(x^0 \neq 0)$ tels qu'il existe au moins une racine $\lambda(0, x^0; \zeta^0)$ de $p^{\rho\delta}_P(\lambda)(0, x^0; \zeta^0; 0, \hat{x}) = 0$ dont la partie réelle soit positive. Supposons pour la simplicité d'écriture que $\hat{x} = 0$. Soient $P \equiv (1 + q, p)$ et $\mathring{\sigma} \equiv \mathrm{Max}\{\sigma_\ell, \sigma_P^+\}$. Il existe alors un $\mathring{\sigma}^\sim$ tel que l'on a:

$$\mathring{\sigma} \leq \mathring{\sigma}^\sim\,;\, 0 < \mathring{\sigma}^\sim < \sigma_P^-\,;\, 0 < p - \mathring{\sigma}^\sim(1 + q) \leq \ell_{\rho\delta}\,;$$

$$\rho_j - \jmath(v^j\delta) - \mathring{\sigma}^\sim\tau_j \leq p - \mathring{\sigma}^\sim(1 + q),\ (j = 1,., d).$$

La proposition suivante due à S. Mizohata [16] est prépondérante.

Proposition 12 (S. Mizohata). *Supposons que le (PC) soit $\langle\infty\rangle$-soluble et que le (PC) ait la propriété de l'unicité à jauge $g(t, x)t^\tau x^v$ à l'origine.*

Pour un domaine relativement compact $\Omega \subset \Omega_0$ il existe des nombres M et $C > 0$, tels que la solution $U^0_n(t, x)$ du $(PCS)_{\xi^0 n}$ satisfait

$$\sum_{j=1}^m |U^0_{nj}(t, x)| \leq {}^3C(n)\exp({}^3Cn^\rho g(t, x)t^\tau x^v) \sum_{\substack{\jmath(\alpha)\leq M\\ j=1,.,m}} \|\partial^\alpha\Phi_j\| \quad t\in[0, T_0],\ x\in\Omega$$

Preuve. Sous l'hypothèse que le (PC) soit $\langle\infty\rangle$-soluble avec la propriété de l'unicité à jauge $g(t, x)t^\tau x^v$ à l'origine, l'application $\{\varphi_j\} \to u$, qui donne la solution $u(t, x)$ du (PC) aux données initiales $\varphi_j(x)$ $(j = 1,\dots, m)$, est, grâce au théorème du graphe fermé, continue de $H^\infty(\mathbf{R}^d)^m$ à $C^m([0, T_0], C^\infty(\Omega_0))$. Donc on a l'estimation suivante:

Pour tout domaine relativement compact $\Omega \subset \Omega_0$, il existe un entier M et une constante positive C tels que l'on a

$$\sum_{k=0}^{m-1} \mathrm{Sup}_{t\in[0,T_0]}\ \mathrm{Sup}_{x\in\Omega} |\partial_t^k u(t, x)| \leq C \sum_{k=1}^m \sum_{\jmath(\alpha)\leq M} \|\partial_x^\alpha\varphi_k\|$$

Grâce à l'hypothèse que le (PC) ait la propriété de l'unicité à jauge $g(t, x)t^\tau x^\nu$ à l'origine, le changement de valeur de $\varphi_j(x)$ $(j = 1,., m)$ au dehors d'un certain domaine $\Omega^\sim$ relativement compact de $\mathbf{R}^d$, ne change pas la valeur de $\partial_t^k u(t, x)$ dans $[0, T_0] \times \Omega$. Donc on a

$$\sum_{k=0}^{m-1} \operatorname*{Sup}_{t\in[0,T_0]} \operatorname*{Sup}_{x\in\Omega} |\partial_t^k u(t, x)| \leq {}^\exists C \sum_{k=1}^{m} \sum_{\jmath(\alpha)\leq M} \operatorname*{Sup}_{x\in\Omega^\sim} |\partial_x^\alpha \varphi_k(x)|.$$

Fixons j, k et (t, x) une fois pris $(j, k = 1,\dots, m)$, $t \leq T_0$, $x\in\Omega$ et nous envisageons l'application qui donne à une fonction $\varphi(x)$ la valeur $\partial_t^k(t, x)$ de la solution $u(t, x)$ du (PC) avec la donnée $(0,., 0, \overset{(j)}{\varphi}, 0,., 0)$. Celle-ci conne une distribution $T_y^{jk}(t, x)$: $\langle T_y^{jk}(t, x), \varphi\rangle = \partial_t^k u(t, x)$ telle que

$$|\langle T_y^{jk}(t, x), \varphi\rangle| \leq {}^\exists C \sum_{\jmath(\alpha)\leq M} \operatorname*{Sup}_{x\in\Omega^\sim} |\partial_x^\alpha \varphi(x)|.$$

D'après l'hypothèse que le (PC) ait la propriété de l'unicité à jauge $g(t, x)t^\tau x^\nu$ à l'origine, cette distribution a son support dans $\{y; |y-x| \leq g(t, x)t^\tau x^\nu\}$. Grâce alors au théorème de Whitney [16], on a

$$|\langle T_y^{jk}(t, x), \varphi\rangle| \leq C \sum_{\jmath(\alpha)\leq M} \operatorname*{Sup}_{|y-x|\leq g(t,x)t^\tau x^\nu} |\partial_y^\alpha \varphi(y)|.$$

Ainsi on a l'estimation suivante pour la solution du (PC),

$$|\partial_t^k u(t, x)| \leq {}^\exists C \sum_{j=1}^{m} \sum_{\jmath(\alpha)\leq M} \operatorname*{Sup}_{|y-x|\leq g(t,x)t^\tau x^\nu} |\partial_y^\alpha \varphi_j(y)| \quad \begin{pmatrix} k = 0, 1,\dots, m-1 \\ t\in[0, T_0], x\in\Omega \end{pmatrix}$$

Appliquons cette inégalité à la solution $u_n(t, x)$ du (PC) pour la donnée exp $(-n^\rho\xi^0 x)\varphi_j(x)$ $(j = 1,\dots, m)$. Alors on a

$$\begin{aligned} &\exp(n^\rho\xi^0 x)|\partial_t^k u_n(t, x)| \\ &\leq C\sum_{j=1}^{m} \sum_{\jmath(\alpha)\leq M} \operatorname*{Sup}_{|y-x|\leq g(t,x)t^\tau x^\nu} \exp(n^\rho\xi^0 x)|\partial_y^\alpha(\exp(-n^\rho\xi^0 y)\varphi_j(y))| \\ &\leq {}^\exists C n^M \exp(n^\rho|\xi^0|g(t, x)t^\tau x^\nu) \sum_{j=1}^{m} \sum_{\jmath(\alpha)\leq M} \operatorname*{Sup}_{|y-x|\leq g(t,x)t^\tau x^\nu} |\partial_y^\alpha \varphi_j(y)| \end{aligned}$$

La solution $U_n^0(t, x)$ du $(\text{PCS})_{\xi^0 n}$ pour la donnée Φ étant donnée par $U_n(t, x) \equiv \exp(-n^\rho\xi^0 x)U_n^0(t, x)$ avec la solution $U_n(t, x)$ du (PCS) pour la donnée $\exp(-n^\rho\xi^0 x)\Phi(x)$, compte tenu du lemme de Sobolev, par remplacer M par une valeur plus grande, on a l'estimation:

$$\sum_{j=1}^{m} |U_{nj}^0(t, x)| \leq {}^\exists C(n)\exp({}^\exists C n^\rho g(t, x)t^\tau x^\nu) \sum_{\substack{\jmath(\alpha)\leq M \\ j=1,.,m}} \|\partial^\alpha \Phi_j\| \quad t\in[0, T_0],\ x\in\Omega$$

C.Q.F.D.

Revenant à la démonstration du théorème 2, grâce à cette proposition 12, on a l'estimation à priori:

$$\sum_{j=1}^{m} \sup_{\substack{|x|\leq Bn^{-\delta} \\ t\in[0,T_0 n^{-\mathring{\sigma}^{\sim}}]}} |U_{nj}^0(t,x)|$$

$$\leq {}^{\exists}C(n)\exp({}^{\exists}C\sum_{k=1}^{d}(\sup_{\substack{|x|\leq Bn^{-\delta} \\ t\in[0,T_0 n^{-\mathring{\sigma}^{\sim}}]}} g_k(t,x))n^{\rho_k-\mathscr{s}(v^k\delta)-\mathring{\sigma}\tau_k)}) \sum_{\substack{\mathscr{s}(\alpha)\leq M \\ j=1,..,m}} \|\partial^\alpha\Phi_j\|$$

$$\leq {}^{\exists}C(n)\exp({}^{\exists}C \sup_{\substack{|x|\leq Bn^{-\delta} \\ t\in[0,T_0 n^{-\mathring{\sigma}^{\sim}}],k=1,..,d}} g_k(t,x)n^{\alpha}) \sum_{\substack{\mathscr{s}(\alpha)\leq M \\ j=1,..,m}} \|\partial^\alpha\Phi_j\|$$

où $\alpha = p - \mathring{\sigma}^{\sim}(1+q)$

Alors la première partie de la proposition fondamentale avec $\zeta^0 \equiv \xi^0 + i\eta^0$ choisi au dèbut, $\sigma^0 = \mathring{\sigma}^{\sim}$, $\sigma = \delta$, $A^0 = T_0$, $\alpha = p - \mathring{\sigma}^{\sim}(1+q)$, $\Omega_A \equiv (x; |x| \leq B\} \subset \Omega_0$ implique la contradiction, car on a, pour tout A donné,

$$\sup\{g_k(t,x);\, t\in[0,\, T_0 n^{-\mathring{\sigma}^{\sim}}],\ |x|\leq B_n{}^{-\delta},\ k=1,.,d\} < A \quad ({}^{\forall}n \gg 1)$$

et le théorème 2 est démontré. C.Q.F.D.

La démonstration du théoréme 3 est déja claire. En efiet, il suffit alors d'appliquer le théorème 2 avec $\rho = 1$, $\delta = 0$ et $v_j = 0$ $(j = 1,.,d)$.

(3) *Démonstration des théorèmes* 4 *et* 5. Envisageons d'abord $p_P^{\rho\delta}(\lambda)$ $(t, x; \xi; \hat{t}, \hat{x})$. Soit $P \equiv (1+q, p)$. Soit $\rho^{\sim}$, $\delta^{\sim}$ deux vecteurs réels tels que $\delta_j^{\sim} \geq 0$ si $\delta_j = 0$ d'ailleurs arbitraires. Soit r un nombre réel défini par

$$r \equiv \sup\left\{\frac{\mathscr{s}(\rho^{\sim}\alpha - \delta^{\sim}v(j\alpha k))}{j};\left(1+\frac{\sigma(j\alpha k)}{j},\frac{\mathscr{s}(\rho\alpha-\delta v(j\alpha k))}{j}\right)\in\Gamma_P^+\right\}$$

Soit

$$p_P^{\rho\delta\rho^{\sim}\delta^{\sim}}(\lambda)(t,x;\xi;\hat{t},\hat{x})$$

$$\equiv \lambda^m - \sum_{(j\alpha k)\in\Gamma_P^{\rho\delta\rho^{\sim}\delta^{\sim}}} (t-\hat{t})^{\sigma(j\alpha k)-qj} x^{v(j\alpha k)} a_{j\alpha k}(\hat{t}, \hat{x}+x_{\delta^{\sim}})\xi^\alpha\lambda^{m-j}$$

où $\Gamma_P^{\rho\delta\rho^{\sim}\delta^{\sim}} \equiv \left\{(j\alpha k);\left(1+\frac{\sigma(j\alpha k)}{j},\frac{\mathscr{s}(\rho\alpha-\delta v(j\alpha k))}{j}\right)\in\Gamma_P^+,\ \mathscr{s}(\rho^{\sim}\alpha-\delta^{\sim}v(j\alpha k))=jr\right\}$

et $x_{\delta^{\sim}j} \equiv x_j$ si $\delta_j = \delta_j^{\sim} = 0$, $x_{\delta^{\sim}j} \equiv 0$ ailleurs.

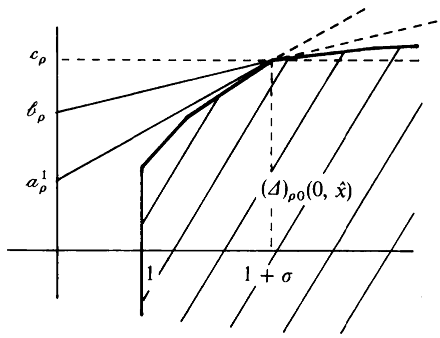
On a alors la proposition suivante:

Proposition 13. *Si les parties réelles des racines de* $p_P^{\rho\delta}(\lambda)(t, x - x_\delta, i\xi; 0, \hat{x}) = 0$ *sont non positives pour tous* $(x, \xi)\in\mathbf{R}^{2d}$, *alors les parties réelles des racines de* $p_P^{\rho\delta\rho^{\sim}\delta^{\sim}}(\lambda)(t, x - x_\delta, i\xi; 0, \hat{x}) = 0$ *sont non positives pour tous vecteurs réels* $\rho^{\sim}$ *et* $\delta^{\sim}$ *tels* $\delta_j^{\sim} \geq 0$ *si* $\delta_j = 0$, *et pour tous* $(x, \xi)\in\mathbf{R}^{2d}$.

Preuve. Il suffit de considérer les $x = k^{-\delta^{\sim}} x^0$ et $\xi = k^{\rho^{\sim}} \xi^0$ pour x^0 et ξ^0 fixés et un scalaire $k > 0$ suffisamment grand. C.Q.F.D.

Grâce à cette proposition 13, le théorème 5 est clair. En effet il suffit d'appliquer cette proposition pour $\rho^{\sim} \equiv (-1, \ldots, -1)$ et $\delta^{\sim} \equiv 0$ et de considérer $-\xi^0$ au lieu de ξ^0 si l'on a besoin.

Et compte tenu du théorème 5, le théorème 4 est alors clair. En effet grâce au théorème 5, tant que l'on considère le sommet $P \in [P_{a_{\rho 0}}, P_{\ell_{\rho 0}}]$ du polygône de Newton $(\Delta)_{\rho 0}(0, \hat{x})$, il suffit de considérer seulement les parties principales de $L(t, x; \partial_t, \partial_x)$. Le polygône de Newton $(\Delta)_{\rho 0}(0, \hat{x})$ est donc de la forme à la figure en bas. Compte tenu du fait $s^{\sim} \leq \rho \leq s$, on $a_\rho \leq 1 \leq \ell_\rho$ et $a_\rho \leq c_\rho$. Sous ces remarques le théorème 1 donne tout de suite le théorème 4. C.Q.F.D.



(4) *Sur la remarque juste après le théorème* 5. Nous expliquons les conditions (N_s) et (N_s') de V. Ya. .Ivrii [5].

Soient

$$L(t, x; \lambda, \xi) \equiv \lambda^m - \sum_{\substack{\mathfrak{d}(\alpha) \leq j \\ j=1,..,m}} a_{j\alpha}(t, x) \xi^\alpha \lambda^{m-j} = \sum_{\ell=0}^{m} L_\ell(t, x; \lambda, \xi)$$

où $$L_m(t, x; \lambda, \xi) \equiv \lambda^m - \sum_{\substack{\mathfrak{d}(\alpha) = j \\ j=1,..,m}} a_{j\alpha}(t, x) \xi^\alpha \lambda^{m-j}$$

$$L_\ell(t, x; \lambda, \xi) \equiv - \sum_{\substack{\mathfrak{d}(\alpha) = j-m+\ell \\ j=1,..,m}} a_{j\alpha}(t, x) \xi^\alpha \lambda^{m-j} \quad (\ell = 0, .., m-1)$$

Soient, suivant V. Ya Ivrii,

$p_k;\ 0 \leq p_k < 1 \ (k = 0, 1, .., d)$.

Nous écrivons:

$$\hat{p} = (p_0, p) \equiv (p_0, (p', p_d));\ \hat{x} \equiv (t, x) \equiv (x_0, x)\ \hat{\xi} = (\lambda, \xi) \equiv (\xi_0, \xi).$$

Soient

$$\hat{x}^0 \equiv (0, (0,., 0));\ \xi^0 \equiv (0, (0,., 0, 1))$$

Alors la condition (N_s) de V. Ya Ivrii (Nous considérons seulement le cas $r = m$.) est la suivante:

$$(N_s)\left(\begin{array}{l} L_{m\,(\hat\delta)}^{\;(\hat\gamma)}(\hat{x}, \xi^0) = 0 \text{ pour } \hat\gamma, \hat\delta \text{ tels que } \mathscr{d}(\hat\gamma + (\hat\delta - \hat\gamma)\hat{p}) < m(1 - p_0) \text{ entraine} \\ L_{\ell\,(\hat\delta)}^{\;(\hat\gamma)}(\hat{x}^0, \xi^0) = 0 \text{ pour } \hat\gamma, \hat\delta \text{ tels que } \mathscr{d}(\hat\gamma + (\hat\delta - \hat\gamma)\hat{p}) \leq m(1 - p_0) \\ \qquad\qquad - \dfrac{s}{s-1}(m - \ell)\ \ \ell = 1,., m - 1 \end{array}\right.$$

Et la condition (N'_s) est la suivante:

$$(N'_s)\left(\begin{array}{l} L_{m\,(\hat\delta)}^{\;(\hat\gamma)}(\hat{x}, \xi^0) = 0 \text{ pour } \hat\gamma, \hat\delta \text{ tels que } \mathscr{d}(\hat\gamma + (\hat\delta - \hat\gamma)\hat{p}) < m(1 - p_0) \text{ entraine} \\ L_{\ell\,(\hat\delta)}^{\;(\hat\gamma)}(\hat{x}^0, \xi^0) = 0 \text{ pour } \hat\gamma, \hat\delta \text{ tels que } \mathscr{d}(\hat\gamma + (\hat\delta - \hat\gamma)\hat{p}) < m(1 - p_0) \\ \qquad\qquad - \dfrac{s}{s-1}(m - \ell)\ \ \ell = 1,., m - 1 \end{array}\right.$$

Alors on a:

Propositon 14. *Soient* $\rho_j \equiv \dfrac{1}{s-1} + p_j\ (j = 1,., d - 1)$, $\rho_d \equiv \dfrac{s}{s-1}$; $\delta_j \equiv p_j$ $(j = 1,., d - 1)$, $\delta_d \equiv p_d$.

Alors on a $\dfrac{1}{s-1} = a_{\rho\delta} < \ell_{\rho\delta}$ *pour* $d = 1$ *et* $\dfrac{1}{s-1} = a_{\rho\delta} = \ell_{\rho\delta}$ *pour* $d > 1$ *et la condition* (N_s) *est équivalente à*

$$(M_s)\left(\begin{array}{ll} \dfrac{\mathscr{d}(\rho\alpha - \delta v(j\alpha k))}{j} \leq p_0\left(1 + \dfrac{\sigma(j\alpha k)}{j}\right) + \dfrac{1}{s-1} & \mathscr{d}(\alpha) = j \quad \textit{entraine} \\ \dfrac{\mathscr{d}(\rho\alpha - \delta v(j\alpha k))}{j} < p_0\left(1 + \dfrac{\sigma(j\alpha k)}{j}\right) + \dfrac{1}{s-1} & \mathscr{d}(\alpha) < j. \end{array}\right.$$

Et la condition (N'_s) *est équivalente à*

$$(M'_s)\left(\begin{array}{ll} \dfrac{\mathscr{d}(\rho\alpha - \delta v(j\alpha k))}{j} \leq p_0\left(1 + \dfrac{\sigma(j\alpha k)}{j}\right) + \dfrac{1}{s-1} & \mathscr{d}(\alpha) = j \quad \textit{entraine} \\ \dfrac{\mathscr{d}(\rho\alpha - \delta v(j\alpha k))}{j} \leqq p_0\left(1 + \dfrac{\sigma(j\alpha k)}{j}\right) + \dfrac{1}{s-1} & \mathscr{d}(\alpha) < j. \end{array}\right.$$

Preuve. Envisageons la condition pour ℓ fixé ($\ell = 1,., m$):

(1) $L_{\ell\,(\hat\delta)}^{\;(\hat\gamma)}(\hat{x}^0, \xi^0) = 0$ pour $\hat\gamma$, $\hat\delta$ tels que $\mathscr{d}(\hat\gamma + (\hat\delta - \hat\gamma)\hat{p}) < m(1 - p_0) - \dfrac{s}{s-1}$ $\times (m - \ell)$. Remarquons que l'on a:

$$L_{\ell\,(\hat\delta)}^{\;(\hat\gamma)}(\hat{x}, \xi^0) = - \sum_{\substack{\mathscr{d}(\mu) = k - m + \ell \\ k = 1,.,m}} a_{k\mu(\delta)}(\hat{x}^0) \frac{\mu!}{(\mu - \gamma)!} \frac{(m - j)!}{(m - j - \gamma_0)!} \xi^{\mu - \gamma} \lambda^{m - k - \gamma_0} |_{\xi = \xi^0}$$

$$= -\gamma_0!\gamma'!\frac{\mu_d!}{(\mu_d-\gamma_d)!}a_{k\mu(\hat\delta)}(0) \quad k=m-\gamma_0,\ \mu'=\gamma',\ \mu_d=\ell-\gamma_0-\mathscr{s}(\gamma')\geq\gamma_d$$

Fixons j α en sorte que l'on a $\mathscr{s}(\alpha)=j-m+\ell$. Appliquons (1) pour $\hat\gamma\equiv(m-j,\alpha',\gamma_d)$ et $\hat\delta$. Alors on a $a_{j\alpha(\hat\delta)}(0)=0$ tant que

$$(m-j)(1-p_0)+\mathscr{s}(\alpha'(1-p'))+\gamma_d(1-p_d)+\mathscr{s}(\hat p\hat\delta)<m(1-p_0)-\frac{s}{s-1}(m-\ell) \quad \text{et}$$

$\alpha_d\geq\gamma_d$, donc à posteriori:

$$(2) \qquad a_{j\alpha(\hat\delta)}(0)=0 \text{ tant que } (m-j)(1-p_0)$$
$$+\mathscr{s}(\alpha'(1-p')+\hat p\hat\delta)<m(1-p_0)-\frac{s}{s-1}(m-\ell).$$

Supposons en revanche (2). Fixons $(\hat\gamma,\hat\delta)$ tel que

$$\mathscr{s}(\hat\gamma+(\hat\delta-\hat\gamma)\hat p)<m(1-p_0)-\frac{s}{s-1}(m-\ell).$$

Soit

$$j\equiv m-\gamma_0,\ \alpha'\equiv\gamma',\ \alpha_d\equiv\ell-\gamma_0-\mathscr{s}(\gamma').$$

Alors on a

$$(m-j)(1-p_0)+\mathscr{s}(\alpha'(1-p'))+\alpha_d(1-p_d)+\mathscr{s}(\hat p\hat\delta)<m(1-p_0)-\frac{s}{s-1}(m-\ell)$$

Donc d'après (2) on a

$$P_{\ell\binom{(\hat\gamma)}{(\hat\delta)}}(\hat x^0,\hat\xi^0)=0.$$

Ce qui montre (1). Ainsi on a vu que (1) est équivalente à (2). Compte tenu de $\mathscr{s}(\alpha)=j-m+\ell$ au (2), (2) est équivalente à

$$(3) \qquad s_{j\alpha(\hat\beta)}(0)=0 \text{ tant que } \mathscr{s}(\hat\beta\hat p)<j(1-p_0)-\mathscr{s}(\alpha'(1-p'))$$
$$+\frac{s}{s-1}(\mathscr{s}(\alpha)-j), \text{ et } \mathscr{s}(\alpha)=j-m+\ell.$$

Grâce à l'expension de Taylor, on voit que (3) est équivalente à

$$(4) \qquad \sigma(j\alpha k)p_0+\mathscr{s}(v(j\alpha k)p)\geq -j\left(\frac{1}{s-1}+p_0\right)+$$
$$\mathscr{s}\left(\alpha'\left(\frac{1}{s-1}+p'\right)\right)+\frac{s}{s-1}\alpha_d \qquad \mathscr{s}(\alpha)=j-m+\ell.$$

Soient

$$\rho'\equiv\frac{1}{s-1}+p',\ \rho_d\equiv\frac{s}{s-1};\ \delta'\equiv p',\ \delta_d\equiv p_d.$$

Pour ce $(\rho.\delta)$, les coefficients étant supposés analytiques, on a:

$$\frac{1}{s-1}=a_{\rho\delta}<b_{\rho\delta} \text{ pour } d=1 \text{ et } \frac{1}{s-1}=a_{\rho\delta}=b_{\rho\delta} \text{ pour } d>1$$

et (4) est équivalente à

$$\text{(5)} \qquad \frac{\mathcal{A}(\rho\alpha-\delta v(j\alpha k))}{j}\leq p_0\left(1+\frac{\sigma(j\alpha k)}{j}\right)+\frac{1}{s-1} \qquad \mathcal{A}(\alpha)=j-m+\ell.$$

La proposition est alors claire. C.Q.F.D.

Grâce à cette proposition, il est alors clair que le théorème 5 montre la nécessité de la condition (N_s') pour que le (PC) soit $\langle s\rangle$-soluble, et, au cas de dimension $d=1$, la nécessité de la condition (N_s) pour que le (PC) soit (s)-soluble ou qu'il soit t-localement (s)-soluble au cas $p_0>0$. Il suffit en effet de considérer la perturbation de $(\rho.\delta)$.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
FACULTÉ DES SCIENCES
UNIVERSITÉ d'EHIMÉ

Bibliographie

[1] K. Igari, Well-Posedness of the Cauchy Problem for Some Evolution Equations, Publ. Res. Inst. Math. Sci., **9** (1974), 613–629.

[2] S. Itoh-H. Uryu, Conditions for Well-posedness in Gevrey Classes of ihe Cauchy Problems for Fuchsian Hyperbolic Operators II. Publ. Res. Inst. Math. Sci., **23**-2 (1987), 215–241.

[3] V. Ya. Ivrii-V. M. Petkov, Necessary conditions for the Cauchy problem for non-strictly hyperbolic equations to be well-posed, Uspehi Mat. Nauk, **29** (1974), 3–70. (Russian Math. Surveys, **29** (1974), 1–70)

[4] V. Ya. Ivrii, Conditions for correctness in Gervrey classes of the Cauchy problem for weakly hyperbolic equations, Sib. Math. J. **17** (1976), 422–435. (Sib. Mat. Z. **17**-3 (1976), 547–563)

[5] V. Ya. Ivrii, Cauchy problem conditions for hyperbolic operators with characteristics of variable multiplicity for Gevrey classes, Sib. Math. J. **17**-4-6 (1976), 921–931. (Sib. Math. Z. **17**-6 (1976), 1256–1270)

[6] K. Kajitani, On the ε-well posed evolution equations, Comm. Partial Differential Equations, **4**-6 (1979), 595–608.

[7] K. Kitagawa, Une remarque sur le problème de Cauchy analytique, J. Math. Kyoto Univ., **27**-2 (1987), 275–303.

[8] K. Kitagawa, Sur le théorème de Cauchy-Kowalevski — Une remarque sur le mémoire du même titre de S. Mizohata, J. Math. Kyoto Univ. 30–1 (1990), 1–32.

[9] K. Kitagawa, Sur des conditions nécessaires pour les équations en évolution pour que le problème de Cauchy soit bien posé dans les classes de fonctions C^∞ I, J. Math. Kyoto Univ. 30–4 (1990), 671–703.

[10] H. Komatu, Irregularity of characteristic elements and hyperbolicity, Publ. Res. Inst. Math. Sci., **12** (1977), 233–245.

[11] P. D. Lax, Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems, Duke Math. J., **24** (1957), 627–646.

[12] T. Mandai, Generalized Levi conditions for weakly hyperbolic equations-An attempt to treat the degeneracy with respect to the space variables, Publ. Res. Inst. Math. Sci., **22**-1 (1986), 1–23.

[13] W. Matsumoto, Problème de Cauchy pour des systèmes d'équations à retard croissant avec le temps — A la mémoire de C. Goulaouic. Comm. Partial Differential Equations, **10** (12) (1985), 1427–1450.

[14] M. Miyake, Degenerate parabolic differential equations — Necessity of the well-posedness of the Cauchy problem, J. Math. Kyoto Univ., **14** (1974), 461–476.

[15] S. Mizohata, Some remarks on the Cauchy problem, J. Math, Kyoto Univ., **1**–1 (1961), 109–127.

[16] S. Mizohata, On evolution equations with finite propagation speed, Israel J. Math., **13**–1–2 (1972), 173–187.

[17] S. Mizohata, On the Cauchy-Kowalevski theorem, Math. Anal. & Appl. part B Advances in Math. Suppl. Studies vol 7 B (1981) (Acad. Press) 617–652.

[18] S. Mizohata, On the hyperbolicity in the domain of real analytic functions and Gevrey classes, Hokkaido Math. J., **12**-3 (1983), 298–310.

[19] S. Mizohata, On analytic regularities, Séminaire sur Propagation des singularités et opérateurs différentiels (J. Vaillant), Hermann (1985), 82–105.

[20] S. Mizohata, Sur l'indice de Gevrey, Séminaire sur Propagation des singularités et opérateurs différentiels (J. Vaillant), Hermann (1985), 106–120.

[21] S. Mizohata, On the Cauchy problem for hyperbolic equations in C^∞ and Gevrey classes, Proc. of VIII Escola Latino-Americana de Mathmatica (1986), (Springer).

[22] S. Mizohata, On the Cauchy problem, (Lecture note at Wuhan) Acad. Press, (1986).

[23] S. Mizohata, On the Cauchy problem for hyperbolic equations and related problems (micro-local energy method) Taniguchi Symposium "Hyperbolic Equations and Related Topics" (1984), 193–233.

[24] S. Mizohata, On the Levi conditions, Séminaire sur les équations aux dérivées partielles hyperboliques et holomorphes (J. Vaillant) (1986).

[25] T. Nishitani, On the Lax-Mizohata Theorem in the Analytic and Gevrey Classes, Proc. Japan Acad., **53**-A-3 (1977), 88–90.

[26] T. Sadamatsu, On a necessary condition for the well-posedness of the Cauchy problem for evolution equations. J. Math. Kyoto Univ. 29–2 (1989), 221–231.

[27] Y. Takei, Mizohata's micro-localization, Master Theisi, Kyoto Univ. (1986).

[28] H. Tahara, Singular hyperbolic systems, VI. Asymptotic analysis for Fuchsian hyperbolic equations in Gevrey classes, J. Math. Soc. Japan, **39**–4 (1987), 551–580.

[29] H. Tahara, Singular hyperbolic systems, VII. Asymptotic analysis for Fuchsian hyperbolic equations in Gevrey classes (2). (manuscrit)