J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)
31-3 (1991) 875–880

Conditions suffisantes pour la compacité de la résolvante d'un opérateur de Schrödinger avec un champ magnétique

Par

Mokhtar MEFTAH

§ 0. Introduction

On considère sur $L^2(\mathbf{R}^n)$, l'opérateur de Schrödinger avec un champ magnétique $H(\vec{a}) + V$ où:

$$H(\vec{a}) = \sum_{j=1}^{n} (D_j - a_j)^2 \qquad \text{où } D_j = i^{-1}\partial_{x_j}. \tag{0.1}$$

Le potentiel magnétique $\vec{a}(x)$ est défini par:

$$\vec{a}(x) = (a_1(x), \dots, a_n(x)), \tag{0.2}$$

est supposé réel et de classe C^∞.
Le potentiel électrique $V(x)$ est supposé réel, semi-borné inférieurement et de la forme:

$$V(x) = \sum_{j=1}^{p} V_j(x)^2 \qquad \text{où } V_j \in C^\infty(\mathbf{R}^n). \tag{0.3}$$

Le champ magnétique est identifié à la matrice réelle et antisymétrique d'ordre n:

$$B(x) = (b_{jk})_{1 \leqslant j,k \leqslant n} = (\partial_{x_j} a_k(x) - \partial_{x_k} a_j(x))_{1 \leqslant j \leqslant k \leqslant n}. \tag{0.4}$$

Avec ces hypothèses, $H(\vec{a}) + V$ admet une unique réalisation auto-adjointe sur $L^2(\mathbf{R}^n)$ (Cf. [SCH], [AV-HE-SI] ou [RE-SI]).
On définit la forme quadratique $q_V(\vec{a})$ par:

$$q_V(\vec{a})(u) = \langle (H(\vec{a}) + V)u, u \rangle. \tag{0.5}$$

On note $D(q_V(\vec{a}))$ le domaine de $q_V(\vec{a})$ et par $D(H(\vec{a}) + V)$ le domaine de $H(\vec{a}) + V$:

$$\begin{aligned} D(H(\vec{a}) + V) = \{ & u \in L^2(\mathbf{R}^n),\ (D_j - a_j(x))u \in L^2(\mathbf{R}^n), \\ & (V+1)^{(1/2)} u \in L^2(\mathbf{R}^n),\ (H(\vec{a}) + V)u \in L^2(\mathbf{R}^n)\}. \end{aligned} \tag{0.6}$$

Communicated by T. Ikebe 1, December 1989

Alors $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ est dense dans $D(H(\vec{a})+V)$ et dans $D(q_V(\vec{a}))$. Dans [AV-HE-SI], [DUF], [HE], [HE-MO] sont données des hypothèses suffisantes pour que l'opérateur $H(\vec{a})+V$ soit à résolvante compacte. Par contre, on trouve dans [DUF] et [IWA] des exemples où résolvante n'est plus compacte (voir aussi, la remarque 5 dans $[\mathrm{MO}]_2$). On donne ici une extension des résultats de [HE-MO] qui permettra de restreindre le trou entre les conditions nécessaires et suffisantes de compacité de la résolvante. Pour cela, il nous suffira de prouver (cf. [AV-HE-SI] ou [IWA]) que $D(H(\vec{a})+V)$ s'injecte continûment dans L_ϕ^2 où $L_\phi^2=\{u$ mesurables telles que $\int|u(x)|^2\phi(x)^2\,dx<\infty\}$ et ϕ est une fonction continue telle que $\phi(x)\to\infty$ lorsque $|x|\to\infty$.

On sait que $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ est dense dans $D(H(\vec{a})+V)$ et il suffit donc de montrer:

$$\forall u\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n);\ \|\phi u\|^2\leqslant C(\langle(H(\vec{a})+V)u,u\rangle+\|u\|^2). \tag{0.7}$$

§ 1. Enoncé des résultats

Pour tout r, $r\in\mathbf{N}$, on pose:

$$m_r(x)=1+\textstyle\sum_{j=1}^p\sum_{|\alpha|=0}^r|\partial_x^\alpha V_j(x)|+\sum_{i,j=1}^n\sum_{|\alpha|=0}^{r-1}|\partial_x^\alpha b_{ij}|. \tag{1.1}$$

Et on considère une fonction continue φ sur $\mathbf{R}^n$ telle que:

$$\begin{aligned}&\forall x\in\mathbf{R}^n,\ \varphi(x)\geqslant 1\\ &\text{et, il existe } \tau,\ \tau>0, \text{ et } c>0 \text{ tels que:}\\ &|x-y|<\tau\varphi^{-1}(x)\Longrightarrow c^{-1}\varphi(y)\leqslant\varphi(x)\leqslant c\varphi(y).\end{aligned} \tag{1.2}$$

On a alors le:

Théorème 1.1. *Supposons que l'on ait* (0.3) *et qu'il existe un entier* $r\in\mathbf{N}$, $\delta\in\mathbf{R}^+$ *et des constantes* c_1, c_2 *tels que*:

$$\forall x\in\mathbf{R}^n;\ \varphi(x)\leqslant c_1(m_r(x))^\delta \tag{1.3}$$

$$\textstyle\sum_{j=1}^p\sum_{|\alpha|=r+1}|\partial_x^\alpha V_j(x)|+\sum_{i,j=1}^n\sum_{|\alpha|=r}|\partial_x^\alpha b_{ij}|\leqslant c_2 m_r(x)\varphi(x). \tag{1.4}$$

Alors il existe une constante c_3 *telle que*:

$$\|(m_r(x))^k u\|^2\leqslant c_3[q_V(\vec{a})(u)+\|u\|^2];\ \forall u\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n) \tag{1.5}$$

où $k=(1-\delta(2^{r+1}-3))/2^r$.

Corollaire 1.2. *Supposons que l'on ait* (0.3) *et qu'il existe un entier* $r\in\mathbf{N}$, $\delta\in\mathbf{R}^+$ *tel que* $0\leqslant\delta<1$, $c_4>0$ *de sorte que la fonction* m_r *soit continue et vérifie*:

$$\textstyle\sum_{j=1}^p\sum_{|\alpha|=r+1}|\partial_x^\alpha V_j(x)|+\sum_{i,j=1}^n\sum_{|\alpha|=r}|\partial_x^\alpha b_{ij}|\leqslant c_4 m_r(x)^{1+\delta}. \tag{1.6}$$

Alors il existe une constante $c_5>0$ *telle que*:

(1.7) $$\|(m_r(x))^k u\|^2 \leqslant c_5[q_V(\vec{a})(u) + \|u\|^2];\ \forall u \in D(q_V(\vec{a}))$$

où $k = (1 - \delta(2^{r+1} - 3))/2^r$.

Corollaire 1.3. *Sous les hypothèses du théorème* 1.1 *ou du corollaire* 1.2, *et si on a de plus*:

(1.8) $$m_r(x) \to +\infty \text{ quand } |x| \to \infty \text{ et}$$

(1.9) $$\delta < 1/(2^{r+1} - 3)$$

alors $H(\vec{a}) + V$ *est à résolvante compacte.*

Remarque 1.4. Dans le cas où $\varphi = 1$ dans le théorème 1.1, on retrouve des résultats de [HE-MO]. La remarque de $[\mathrm{MO}]_2$ (remarque 5) correspond à $V = 0$ et $r = 1$ dans le corollaire 1.2. Lorsque $r = 1$, $V_j = 0$, $n = 2$, le corollaire 1.3 dit que si $|b_{12}(x)| \to \infty$ lorsque $|x| \to \infty$ et s'il existe $C > 0$ et $\delta < 1$ tel que:

$$|\nabla b_{12}| \leqslant C(|b_{12}|^{1+\delta} + 1)$$

alors $H(\vec{a}) + V$ est à résolvante compacte. Les contre-exemples de Iwatsuka [IWA] et Dufresnoy [DUF] correspondent au cas où $|\nabla b_{12}|$ est de l'ordre de $|b_{12}|^2$.

§2. Démonstration des résultats

Démonstration du théorème 1.1. La démonstration s'inspire de celle donnée par [HE-MO] (cf. aussi [HE] pour une présentation de cette démonstration). On considère la métrique Riemannienne définie par:

(2.1) $$g_x(y) = |y|^2 \varphi^2(x).$$

Cette métrique est, vu les hypothèses (1.2), à variation lente au sens de Hörmander [HO]. On utilise alors le lemme:

Lemme 2.1. *Soit* $0 < \varepsilon < \tau$ (*où* τ *est inférieur ou égal à celui introduit en* (1.2)); *il existe une suite* x_ν *de points de* $\mathbf{R}^n$ *telle que les boules*:

(2.2) $$B_\nu^{\tau'} = \{x \in \mathbf{R}^n;\ |x - x_\nu|\,\varphi(x_\nu) < \tau'\}$$

recouvrent $\mathbf{R}^n$ *si* $\tau' > \varepsilon$ *et telles que, de plus, il existe un nombre maximal fixe* (*indépendant du choix de* $\tau' < \tau$) *de boules* $B_\nu^{\tau'}$ *à intersection non vide.*

En utilisant (1.4), on montre alors, grâce au théorème des accroissements finis et quitte à diminuer un peu τ, que:

(2.3) $$\exists c'_1, c'_2 > 0 \text{ t.q. } \forall \tau' \text{ avec } \varepsilon < \tau' < \tau,\ \forall x \in B_\nu^{\tau'}, \text{ on ait:}$$

$$c'_1\, m_r(x) \leqslant m_r(x_\nu) \leqslant c'_2\, m_r(x).$$

On considère alors, ayant choisi un triplet $\tau' < \tau'' < \tau$ vérifiant les propriètés précédentes, une fonction $\chi \in C^\infty(\mathbf{R})$ telle que:

$$\left\{\begin{array}{ll} \chi(t) = 1 & \text{si } t < \tau' \\ \chi(t) = 0 & \text{si } t > \tau'' \\ \chi(t) \in [0, 1] & \forall t. \end{array}\right. \tag{2.4}$$

On définit alors χ_ν par:

$$\chi_\nu(x) = \chi(|x - x_\nu| \varphi(x_\nu)). \tag{2.5}$$

On définit alors la "régularisée" de $m_r(x)\psi$ par:

$$\psi(x) = \textstyle\sum_\nu m_r(x_\nu)\chi_\nu(x), \tag{2.6}$$

ψ est C^∞ et vérifie:

$$\forall \alpha \in \mathbf{N}^n,\ \exists C_\alpha > 0 \text{ tel que } |\partial_x^\alpha \psi(x)| \leqslant C_\alpha \psi(x)\varphi(x)^{|\alpha|}. \tag{2.7}$$

Pour établir l'inégalité (2.7), il suffit de remarquer que:

$$\forall \alpha \in \mathbf{N}^n,\ \exists C_\alpha > 0 \text{ tel que } |\partial_x^\alpha \chi_\nu(x)| \leqslant C_\alpha \psi(x)\varphi(x)^{|\alpha|} \tag{2.8}$$

et de se rappeler la propriète du recouvrement localement fini par les supports des χ_ν.
Compte-tenu de l'inégalité (2.3), on a aussi:

$$\exists c_1, c_2 > 0 \text{ tels que } c_1 m_r(x) \leqslant \psi(x) \leqslant c_2 m_r(x). \tag{2.9}$$

Pour tout s, $s \geqslant 0$, on définit M^s comme l'ensemble des fonctions C^∞ T vérifiant:

$$\exists C_s > 0 \text{ tel que } \|\psi^{-1+s} T u\|^2 \leqslant C_s[q_V(\vec{a})(u) + \|u\|^2],\ \forall u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n).$$

On a bien entendu:

$$M^{s_1} \subset M^{s_2} \qquad \text{si } s_2 \leqslant s_1. \tag{2.10}$$

Pour tout $j = 1, \ldots, n + p$, on note L_j l'opérateur défini par:

$$\left\{\begin{array}{ll} L_j = D_j - a_j(x) & 1 \leqslant j \leqslant n \\ L_j = V_j & n < j \leqslant n + p. \end{array}\right. \tag{2.11}$$

On rappelle que:

$$\|L_j u\|^2 \leqslant q_V(\vec{a})(u),\ \forall u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n). \tag{2.12}$$

Cette estimation permet de déduire en particulier:

$$V_j \in M^1. \tag{2.13}$$

On va établir les propriétés suivantes:

$$[L_k, L_j] \in M^{(1-\delta)/2} \qquad k, j \leqslant n + p. \tag{2.14}$$

$$(2.15)\qquad \begin{cases} \text{Si } T\in M^s \text{ et s'il existe une constante } C_T \text{ telle que:} \\ |\partial_x^\alpha T(x)| \leqslant C_T\varphi(x)^{|\alpha|},\ \forall\alpha\in\mathbf{N}^n,\ 1\leqslant|\alpha|\leqslant 2,\ \forall x\in\mathbf{R}^n \\ \text{alors on a: } [L_k, T]\in M^{(s/2)-\delta}. \end{cases}$$

On en déduit alors aisément que:

$$(2.16)\qquad \begin{cases} \partial_x^\alpha b_{ij}\in M^{k_1} & \text{où } k_1 = (1-\delta(2^{|\alpha|+2}-3))/2^{|\alpha|+1} \\ \partial_x^\alpha V_j\in M^{k_2} & \text{où } k_2 = (1-2\delta(2^{|\alpha|}-1))/2^{|\alpha|}. \end{cases}$$

On en déduit en utilisant (2.9), (2.10) et (2.16) que:

$$(2.17)\qquad \psi(x)\in M^k \qquad \text{où } k = (1-\delta(2^{r+1}-3))/2^r.$$

Ceci signifie qu'il existe une constante C telle que:

$$(2.18)\qquad \|\psi^k u\|^2 \leqslant C[q_V(\vec{a})(u) + \|u\|^2];\ \forall u\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n).$$

On en déduit alors (1.5) en utilisant (2.9).

Démonstration de (2.14). C'est juste une adaptation de celle de [HE-MO]. On observe simplement que, pour tout u dans $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ et tout couple (k, j), on a:

$$\begin{aligned} \|\psi^{(-1-\delta)/2}[L_k, L_j]u\|^2 &= \langle L_j u, \psi^{-1-\delta}[L_k, L_j]L_k u\rangle \\ &- \langle L_k u, \psi^{-1-\delta}[L_k, L_j]L_j u\rangle + \langle L_j u, [L_k, \psi^{-1-\delta}[L_k, L_j]]u\rangle \\ &- \langle L_k u, [L_j, \psi^{-1-\delta}[L_k, L_j]]u\rangle. \end{aligned}$$

Compte-tenu de (1.2), (1.3), (1.4), (2.7) et (2.9), on observe que $\psi^{-1-\delta}[L_k, L_j]$ et $[L_k, \psi^{-1-\delta}[L_k, L_j]]$ sont bornés. On en déduit alors que:

$$\|\psi^{(1-\delta)/2}[L_k, L_j]u\|^2 \leqslant C(\|L_j u\|^2 + \|L_k u\|^2 + \|u\|^2).$$

Démonstration de (2.15). Soit T vérifiant les hypothèses de (2.15); pour tout indice k, on a:

$$\begin{aligned} \|\psi^{-1+(s/2)-\delta}[L_k, T]u\|^2 &= \langle\psi^{-1+s}Tu, \psi^{-1-2\delta}[L_k, T]\,L_k u\rangle \\ &- \langle L_k u, \psi^{-1-2\delta}[L_k, T]\psi^{-1+s}Tu\rangle \\ &+ \langle\psi^{-1+s}Tu, \psi^{1-s}[L_k, \psi^{-2+s-2\delta}[L_k, T]]u\rangle. \end{aligned}$$

Compte-tenu des hypothèses sur T, de (1.3), (2.7) et (2.9), on remarque que: $\psi^{-1-2\delta}[L_k, T]$ et $\psi^{1-s}[L_k, \psi^{-2+s-2\delta}[L_k, T]]$ sont bornés. On en déduit alors:

$$\|\psi^{-1+(s/2)-\delta}[L_k, T]u\|^2 \leqslant C(\|\psi^{-1+s}Tu\|^2 + \|L_k u\|^2 + \|u\|^2).$$

L'inégalité (2.15) s'en déduit en utilisant les hypothèses sur T et (2.12).

Démonstration du corollaire 1.2. Le corollaire 1.2 est une conséquence du théorème 1.1, en utilisant [DE] (exemple 3.5) et la densité de $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ dans

$D(q_V(\vec{a}))$.

Démonstration du corollaire 1.3. Le corollaire 1.3 résulte de (1.5) (ou (1.7) respectivement) et du fait que si: $\delta < 1:(2^{r+1}-3)$ et si $m_r(x) \to \infty$ lorsque $|x| \to \infty$, la relation (0.7) est satisfaite en considérant $\phi(x) = m_r(x)^k$.

UNIVERSITÉ D'ORAN ES-SENIA
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
31100 ORAN ALGÉRIE

Références

[AV-HE-SI] J. Avron-I. Herbst-B. Simon, Schrödinger operators with magnetic fields I General interactions, Duke Math. Journal, **45** (1978).

[DE] N. Dencker, The Weyl calculus with locally temperate metrics and weights, Ark. Mat., **24**-1 (1986), 59–79.

[DUF] A. Dufresnoy, Un exemple de champ magnétique dans $\mathbf{R}^n$, Duke Math. Journal, **53**-3 (1983) 729–734.

[HE] B. Helffer, Semi-classical analysis for the Schrödinger operator and applications, Lecture Notes in Mathematics n°1336, Springer Verlag, 1988.

[HE-MO] B. Helffer-A. Mohamed, Caractérisation du spectre essentiel de l'opérateur de Schrödinger avec un champ magnétique, Annales de l'Institut Fourier, Grenoble, **38**-2 (1988), 95–113.

[HO] L. Hörmander, The Weyl calculus of pseudo-differential operators, Comm. in Pure and Applied Mathematics, **32** (1979), 359–443.

[IWA] A. Iwatsuka, Magnetic Schrödinger operators with compact resolvent, J. Math. Kyoto University, **26**-3 (1986) 357–374.

$[MO]_1$ A. Mohamed, Quelques remarques sur le spectre de l'opérateur de Schrödinger avec un champ magnétique, Comm. in PDE, **13**-11, (1988), 1415–1430.

$[MO]_2$ A. Mohamed, Exposé IV Colloque de Saint Jean de Monts, 1987.

[RE-S] M. Reed-B. Simon, Methods of modern Mathematical Physics, Academic Press.

[SCH] M. Schechter, Spectra of differential operators, North Holland, Amsterdam, 1971.