J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)
31-3 (1991), 807–812

Sur une question de compacité linéaire

By

Mohamed TABAÂ

§ 1. Introduction

Etant donnés un anneau noethérien intègre A et K son corps des fractions. Dans [1], Ballet a montré que K est A-linéairement compact pour la topologie discrète si et seulement si A est local complet de dimension 1. La compacité linéaire pour la topologie discrète est équivalente à la compacité linéaire pour la topologie d'anneau, localement bornée T_A, où T_A est la topologie A-linéaire sur K qui admet pour système fondamental de voisinages de 0 les idéaux non nuls de A. Dans le paragraphe 3, nous montrons que si $\mathscr{T}$ est une topologie d'anneau A-linéaire non discrète séparée sur K, alors $\mathscr{T}$ est linéairement compacte et localement bornée si et seulement si A est de dimension 1 et K est complet pour $\mathscr{T}$; dans ce cas la clôture intégrale A' de A est un anneau de valuation discrète et $\mathscr{T}$ est égale à $T_{A'}$. Ce théorème généralise le résultat de Ballet et donne une réponse à la question posée par Jebli dans [7].

§ 2. Rappels

Soient A un anneau et E un A-module. On dit qu'une topologie linéaire sur E est linéairement compacte si elle est séparée et si toute base de filtre sur E formée de variétés linéaires affines admet au moins un point adhérent.

Rappelons les résultats sur les modules linéairement compacts que nous allons utiliser dans la suite ([3], chap. 3, § 2, exercices).

Proposition A. *Si E est un module linéairement compact, F un sous-module fermé de E, alors F et E/F sont linéairement compacts.*

Proposition B. *Si E est un module linéairement compact, alors pour toute topologie linéaire sur E moins fine que la topologie donnée, E est complet.*

Proposition C. *Si E est un module muni d'une topologie linéaire séparée et si M est un sous-module linéairement compact de E, alors pour tout sous-module fermé F de E, $M + F$ est fermé dans E.*

Proposition D. *Si E est un module linéairement compact, M un sous-module fermé de E, $\mathscr{B}$ une base de filtre formée de sous-modules fermés N, alors:*

$$\bigcap_{N\in\mathscr{B}} (M + N) = M + \bigcap_{N\in\mathscr{B}} N$$

Received 25 October 1989

Proposition E. *Tout espace vectoriel linéairement compact pour la topologie discrète est de dimension finie.*

Proposition F. *Un anneau intègre linéairement compact est local.*

Proposition G. *Si E est un module complet pour une topologie linéaire séparée et s'il y a un système fondamental (E_λ) de voisinages de 0 formé de sous-modules tels que E/E_λ soient artiniens, alors E est linéairement compact.*

Proposition H. *Soit A un anneau noethérien intègre. Alors A est linéairement compact pour une topologie linéaire $\mathscr{T}$ si et seulement si A est local, complet et $\mathscr{T}$ est plus fine que la topologie préadique.*

§3. Résultat principal

Lemme 1. *Soient A un anneau intègre et K son corps des fractions. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:*

1) *A est un anneau de valuation.*
2) *A est intégralement clos et tout sur-ordre de A est local.*

Preuve. 1) $\Rightarrow$ 2) La première assertion est le corollaire 1 du théorème 3 de ([3], chap. 6, §1, n°3). La deuxième assertion découle de ([3], chap. 6, §4, n°1, prop. 1).

2) $\Rightarrow$ 1) C'est une conséquence du lemme de Seidenberg ([6], chap. 3, §4, prop. 2).

On en déduit le:

Corollaire 1 ([5]). *Soient A un anneau intègre et K son corps des fractions. Si K est A-linéairement compact pour la topologie discrète, alors la clôture intégrale A' de A, est un anneau de valuation.*

Preuve. Pour montrer que A' est un anneau de valuation il suffit, en vertu du lemme précédent, de montrer que tout sur-ordre de A' est local. En effet, soit B un sur-ordre de A', l'hypothèse entraîne que B est B-linéairement compact pour la topologie discrète, donc d'après la proposition F, il est local. D'où A' est un anneau de valuation.

Suivant [11], un anneau intègre est dit archimédien si, $\cap Ax^n = (0)$, pour tout élément x de A non inversible.

Le lemme suivant généralise la proposition B. 1.6 de [7].

Lemme 2. *Soient A un anneau intègre archimédien et K son corps des fractions. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:*

1) *T_A est la seule topologie d'anneau A-linéaire non discrète et séparée sur K.*
2) *A est de dimension 1, sa quasi-clôture intégrale A^* est un anneau de valuation de hauteur 1, et $A^* \in I(A)$.*

Preuve. 1) $\Rightarrow$ 2) Supposons 1) vérifiée. Si B est un anneau tel que $A \subseteq B \subset K$, on a $B \in I(A)$, d'où $B \subseteq A^*$, et puisque A est archimédien on a $A^* \neq K$; donc A^* est un anneau de valuation de hauteur 1 ([3], chap. 6, §4, prop. 6) et $A^* \in I(A)$. Enfin, pour montrer que A est de dimension 1, on utilise le théorème 2.2 de [2].

2) $\Rightarrow$ 1) Supposons 2) vérifiée. Soit T une topologie d'anneau A-linéaire non discrète et séparée sur K. T est moins fine que $T_{A'}$ et comme $T_A = T_{A^*}$, T est donc moins fine que T_{A^*}. Mais A^* est un anneau de valuation, donc la topologie T_{A^*} est minimale dans l'ensemble des topologies d'anneau non discrètes et séparées sur K ([14], chap. 5, §3, th. 8). D'où T est égale à T_A.

Suivant ([3], chap. 3, §2, exer. 24), on désigne par $\mathscr{C}_u(A)$ la topologie linéaire sur A qui admet pour système fondamental de voisinages de 0 les idéaux non nuls de A.

Proposition 1. *Soient A un anneau noethérien intègre et K son corps des fractions. Les propriétés suivantes sont équivalentes*:

1) *K est A-linéairement compact pour la topologie discrète.*

2) *A' est une A-algèbre finie et A' est un anneau de valuation discrète complet.*

3) *T_A est la seule topologie d'anneau A-linéaire non discrète séparée sur K et A' est complet pour la topologie $\mathscr{C}_u(A')$.*

4) *A est local complet de dimension* 1.

Preuve. 1) $\Rightarrow$ 2) Supposons que K est A-linéairement compact pour la topologie discrète. A est alors local, et d'après la proposition B, il est complet. Il résulte du théorème de Nagata, que A' est une A-algèbre finie, par suite est un anneau noethérien. En utilisant le corollaire 1, on en déduit donc que A' est un anneau de valuation discrète. Enfin, l'anneau A' est A-linéairement compact pour la topologie discrète, donc il est complet pour $\mathscr{C}_u(A')$.

2) $\Leftrightarrow$ 3) Puisque A est un anneau noethérien, $A' \in I(A)$ équivaut à A' est une A-algèbre finie, donc l'équivalence résulte du lemme précédent.

2) $\Rightarrow$ 4) Comme A' est un anneau de valuation discrète, A est alors un anneau local de dimension 1, donc la topologie induite sur A par T_A est la topologie préadique. Comme A' est une A-algèbre finie, T_A est égale à $T_{A'}$. Donc la topologie $\mathscr{C}_u(A')$ induit sur A la topologie préadique et A est fermé pour $\mathscr{C}_u(A')$. On en déduit, puisque A' est complet, que A est aussi complet.

4) $\Rightarrow$ 1) Voir le corollaire 1 de [1] pour une démonstration qui utilise un des théorèmes de structure de Cohen, et le théorème (3.7) de [13] pour une autre démonstration.

Proposition 2. *Soient A un anneau intègre et K son corps des fractions. Les propriétés suivantes sont équivalentes*:

1) *K est A-linéairement compact pour la topologie discrète.*

2) *K est A-linéairement compact pour la topologie T_A.*

Preuve. 2) $\Rightarrow$ 1) résulte du fait que tout sous-A-module de K est fermé pour T_A.

Lemme 3. *Soient B un anneau, $\mathscr{T}$ une topologie linéaire sur B, A un sous-anneau de B et $\bar{A}$ son adhérence pour $\mathscr{T}$. On suppose que A est local, et que B est séparé pour la topologie m-adique T_m, où m désigne l'idéal maximal de A. Si B est A-linéairement compact pour $\mathscr{T}$ et $\mathscr{T}$ est plus fine que T_m, alors $\bar{A}$ est un anneau noethérien et B est un $\bar{A}$-module de type fini.*

Preuve. Soit I un idéal de B fermé pour $\mathscr{T}$ tel que mI soit ouvert dans I. D'après la proposition A, I est A-linéairement compact pour la topologie induite par $\mathscr{T}$, et comme mI est ouvert dans I, I/mI est A/m-linéairement compact pour la topologie discrète, est donc un A/m-espace vectoriel de dimension finie (proposition E). Il en résulte que B/mB est un anneau noethérien et que mB/m^2B est un module de type fini sur B/mB; mais B est séparé pour T_m, et d'après la proposition B il est complet; donc B est un anneau noethérien ([3], chap. 3, § 2, cor. 5). Montrons que B est un module de type fini sur $\bar{A}$. En effet, puisque B/mB est un A/m-espace vectoriel de dimension finie, il existe des éléments $x_1, \dots, x_r$ de B tels que: $B = mB + Ax_1 + \cdots + Ax_r$. Comme T est une topologie d'anneau A-linéairement compacte, il en résulte que l'adhérence de $Ax_1 + \cdots + Ax_r$ est égale à $\bar{A}x_1 + \cdots + \bar{A}x_r$ (proposition C); d'où $B = mB + \bar{A}x_1 + \cdots + \bar{A}x_r$. Par récurrence sur n on en déduit que $B = m^nB + \bar{A}x_1 + \cdots + \bar{A}x_r$ pour tout $n \geqslant 1$; d'où $B = \cap(m^nB + \bar{A}x_1 + \cdots + \bar{A}x_r)$ et d'après la proposition D, on a $B = (\cap m^nB) + \bar{A}x_1 + \cdots + \bar{A}x_r$. Comme B est séparé pour la topologie m-adique, on a $\cap m^nB = 0$ donc $B = \bar{A}x_1 + \cdots + \bar{A}x_r$. D'où B est un $\bar{A}$-module de type fini; on en déduit, compte tenu du théorème de Eakin ([8], Appendix), que $\bar{A}$ est un anneau noethérien.

Lemme 4. *Soient A un anneau intègre et K son corps des fractions. Alors toute topologie d'anneau $\mathscr{T}$, A-linéaire non discrète séparée et localement bornée sur K est de la forme T_B, où B est un sur-ordre de A.*

Preuve. Soit B l'ensemble des $x \in K$ tels que $xM \subseteq M$, où M est un sous-A-module de K, ouvert pour $\mathscr{T}$; B est un sur-ordre de A borné pour $\mathscr{T}$; donc $\mathscr{T} = T_B$, car $(xB)_{x \in K-(0)}$ est un système fondamental de voisinages de 0 pour $\mathscr{T}$ ([14] chap. 1, § 5, th. 5).

Théorème. *Soient A un anneau intègre noethérien et K son corps des fractions. Soit T une topologie d'anneau A-linéaire non discrète et séparée. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:*

1) *La topologie T est A-linéairement compacte et localement bornée.*

2) *La clôture intégrale A' de A est un anneau de valuation discrète complet et T est égale à $T_{A'}$.*

3) *A est de dimension 1 et K est complet pour T.*

Preuve. 1) $\Rightarrow$ 2) D'aprés le lemme 4, T est de la forme T_R, où $A \subseteq R \subset K$; et comme A est un anneau noethérien, sa dimension valuative est finie ([6], chap. 4, § 2, cor. 2); on en déduit qu'il existe un anneau de valuation V de hauteur 1 tel que $R \subseteq V \subset K$. La topologie T_V est moins fine que T donc, d'après la proposition B,

K est complet pour T_V, et puisque A' est un anneau de Krull, il résulte d'un théorème de Schmidt [10], que A' est un anneau de valuation discrète complet égal à V; en particulier R est local et A' est séparé pour la topologie m-adique, où m est l'idéal maximal de R; et d'après la proposition 2, A' est R-linéairement compact pour la topologie discrète; il résulte donc du lemme 3, que A' est une R-algèbre finie; d'où $T = T_{A'}$.

2) $\Rightarrow$ 3) A' étant un anneau de valuation discrète complet, donc A est de dimension 1 et K est complet pour la topologie $T_{A'}$ ([4], chap. 3, § 3, $n°$ 3, prop. 4).

3) $\Rightarrow$ 1) Soit $\bar{A}$ l'adhérence de A pour la topologie T. Puisque T est une topologie d'anneau A-linéaire et séparée on a $\bar{A} \neq K$, il résulte du théorème de Krull-Akizuki, que $\bar{A}$ est un anneau noethérien de dimension 1, donc pour tout idéal non nul I de $\bar{A}$, le $\bar{A}$-module $\bar{A}/I$ est artinien, et comme $\bar{A}$ est complet et séparé pour la topologie induite, d'après la proposition G il est linéairement compact; par suite d'après la proposition H, il est local et complet, et comme sa dimension est égale à 1, il résulte de la proposition 1, que T est égale à $T_{\bar{A}}$ et que K est A-linéairement compact pour T.

Le théorème précédent généralise le résultat de Ballet comme le montrent l'exemple de Nagata ([9], appendix E3.3) et la proposition 1.

L'équivalence 1) $\Leftrightarrow$ 2) est démontrée directement dans [12].

Comme corollaire on obtient le théorème 4.4 de [7].

Corollaire 2. *Soient A un anneau noethérien intègre de dimension* 1 *dont la clôture intégrale A' est une A-algèbre finie, et K son corps des fractions. Les propriétés suivantes sont équivalentes*:

1) *K est A-linéairement compact pour une topologie de corps A-linéaire non discrète et séparée.*

2) *A est local complet.*

Preuve. Compte tenu des hypothèses et de la proposition 1, la propriété 2) est équivalente au fait que K est A-linéairement compact pour la topologie discrète; donc 2) $\Rightarrow$ 1). Montrons que 1) $\Rightarrow$ 2). $\mathscr{T}$ étant A-linéairement compacte, elle est donc complète et comme A est de dimension 1, d'après le théorème précédent, A' est un anneau de valuation discrète et $\mathscr{T} = T_{A'}$, mais A' est une A-algèbre finie, donc d'après la proposition 1, K est A-linéairement compact pour la topologie discrète.

Nous donnons une réponse à la question posée par Jebli dans le chapitre 4 de [7].

Corollaire 3. *Soient A un anneau intègre noethérien, K son corps des fractions et T une topologie d'anneau sur K, A-linéairement compacte non discrète séparée. Alors T est localement bornée si et seulement si A est de dimension* 1; *A' est donc un anneau de valuation discrète et T est égale à $T_{A'}$.*

Preuve. Cela résulte du théorème précédent.

La proposition suivante montre que l'hypothèse, $\bar{A}$ est un anneau noethérien, est essentielle dans l'implication 3) $\Rightarrow$ 1) du théorème.

Proposition 3. *Soient A un anneau intègre et K son corps des fractions. On suppose que A' est un anneau de valuation discrète, alors les propriétés suivantes sont équivalentes:*

1) *K est A-linéairement compact pour la topologie $T_{A'}$.*
2) *$\bar{A}$ est un anneau noethérien et A' est complet.*

Preuve.

1) $\Rightarrow$ 2) l'anneau A' est un anneau de valuation discrète, donc A est un anneau local et $\mathscr{C}_u(A') = T_m$, où m désigne l'idéal maximal de A. L'implication résulte donc du lemme 3, puisque A' est A-linéairement compact pour $\mathscr{C}_u(A')$.

2) $\Rightarrow$ 1) On a $\bar{A} \subseteq A'$, donc la clôture intégrale de $\bar{A}$ est égale à A'. Par hypothèse, $\bar{A}$ est un anneau noethérien et A' est un anneau de valuation discrète complet, donc d'après le théorème précédent, K est $\bar{A}$-linéairement compact pour la topologie $T_{A'}$; et par suite, il est A-linéairement compact pour cette topologie.

FACULTE DES SCIENCES
DÉPARTMENT DE MATHEMATIQUES
ET INFORMATIQUE
UNIVERSITE MOHAMMED V
B.P. 1014, RABAT, MAROC

Références

[1] B. Ballet, Sur les modules linéairement compacts, Bull, Soc. Math. France, **100** (1972), 345–351.
[2] V. Barucci and D. E. Dobbs, On chains conditions in integral domains, Canad. Math. Bull., **27** (1984), 351–358.
[3] B. Bourbaki, Algèbre commutative, Hermann, Paris, 1964.
[4] N. Bourbaki, Topologie générale, Hermann, Paris, 1964.
[5] R. Goblot, Sur les anneaux linéairement compacts, C.R.Acad. Sci. Paris. Ser. A, **270** (1970), 1212–1215.
[6] P. Jaffard, Théorie de la dimension dans les anneaux de polynômes, Gauthier Villars, Paris, 1960.
[7] A. Jebli, Corps des fractions et topologies linéaires, Thèse d'état de l'université de Rennes, 1975.
[8] H. Matsumura, Commutative Algebra, Benjamin, 1980.
[9] M. Nagata, Local Rings, John Wiley, 1962.
[10] F. K. Schmidt, Mehrfach perfekte Korper, Math. Ann., **108** (1933), 1–25.
[11] P. Sheldon, How Changing $D[[x]]$ changes its quotient field, Trans. Amer. Math. Soc., **199** (1971), 233–244.
[12] M. Tabaâ, Corps linéairement compacts, C.R.Acad. Sci. Paris Ser. A, **290** (1980), 531–532.
[13] P. Vámos, Rings with duality, Proc. Lond. Math. Soc., **35** (1977) 275–289.
[14] W. Wieslaw, Topological fields, Wroclaw, 1982.