J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)
32-3 (1992) 485-514

Sur des conditions nécessaires pour les équations en évolution pour que les problèmes de Cauchy soient uniformément bien posés dans les classes de fonctions C^∞ [III]

Par

Keiichiro KITAGAWA

§ 1. Introduction

Il s'agit des problèmes de Cauchy homogènes $(\mathrm{PCH})_\tau (0 < \tau < T_0)$:

$$(\mathrm{PCH})_\tau \quad \begin{cases} L(t, x; \partial_t, \partial_x)u(t, x) = 0 & (t, x) \in [\tau, T_0] \times \Omega_0 \qquad (\Omega_0 \subset \mathbf{R}^d) \\ \partial_t^{j-1}u(\tau, x) = \varphi_j(x) & j = 1, \ldots, m^0 \quad x \in \Omega_0, \end{cases}$$

à données initiales $\varphi_j(x)$ $(j = 1, ., m^0)$ arbitrairement données, pour une équation différentielle linéaire aux dérivées partielles à coefficients C^∞ (de la classe de Gevrey) par rapport à x:

$$L(t, x; \partial_t, \partial_x)u(t, x) \equiv \left[t^k \partial_t^{m^0} - \sum_{j=1}^{m^0} a_j(t, x; \partial_x)\partial_t^{m^0-j}\right]u(t, x) = 0 \qquad (k \geq 0)$$

Nous considérons *des conditions à* $t = 0$ *nécessaires* pour que ces $(\mathrm{PCH})_\tau (0 < \tau < T_0)$ soient uniformément solubles [8].

Aux mémoires précédents [7], [8], nous avons traité *le problème de Cauchy homogène* $(\mathrm{PCH})_0$ au cas où $k = 0$. Nous y avons considéré des conditions nécéssaires pour que le $(\mathrm{PCH})_0$ ait une solution C^∞ (non nécessairement unique) et cells qu'il y ait l'unicité locale de solution: Comme des conditions nécessaires pour que le $(\mathrm{PCH})_0$ ait une solution C^∞, par exemple, nous y avons énoncé en un théorème, à l'aide du polygône de Newton, divers conditions énoncées séparément: Des conditions nécéssaires au cas où L est non kowalevskien [12], [24]; celles d'hyperbolicité [13], [22] et de Levi [17], [19] au cas où L est kowalevskien. Nous y avons aussi amélioré des résultats obtenus comme les conditions nécessaires pour que les *problèmes de Cauchy non homogènes* $(\mathrm{PC})_\tau (0 \leq \tau \leq T_0)$:

$$(\mathrm{PC})_\tau \quad \begin{cases} L(t, x; \partial_t, \partial_x)u(t, x) = f(t, x) & (t, x) \in [\tau, T_0] \times \Omega_0 \qquad (\Omega_0 \subset \mathbf{R}^d) \\ \partial_t^{j-1}u(\tau, x) = \varphi_j(x) & j = 1, \ldots, m^0 \qquad x \in \Omega_0, \end{cases}$$

Communicated by Prof. N. Iwasaki, October 1, 1990

à données $f(t, x)$ et $\varphi_j(x)$ $(j = 1, ., m^0)$ arbitrairement données, *soient bien posés* [2], [3], [10], [11].

C'était grâce à la méthode améliorée [16], [17], [18], [19], [27] de l'énergie micro-locale de S. Mizohata. Mais nous y étions contraints à une restriction. C'est à cause de la difficulté causée par le fait que nous ne disposions que du $(\mathrm{PCH})_0$ dont le plan initilal est fixé à $t = 0$ et que le deuxième membre est aussi fixé à $f = 0$. Or dans cette note, nous disposons des $(\mathrm{PCH})_\tau(0 < \tau < T_0)$ bien posés avec une uniformité au sens de Petrowsky. Alors cette restriction est enlevée et nous améliorons sensiblement des conditions surtout au cas où L est non kowalevskien.

Faisons ici deux remarques: Premièrement on n'a pas besoin non plus d'unicité de solution comme aux mémoires précédents [7], [8]; On est ainsi amené à la notion "uniformément solubles". Deuxièmement, grâce à l'uniformité, on n'a plus besoin de $(\mathrm{PCH})_0$ pour analyser les conditions nécessaires à $t = 0$; Contrairement à l'analyse aux mémoires précédents [7], [8] qui considère le point $t = 0$ comme un point régulier, l'analyse dans cette note à l'aide de $(\mathrm{PCH})_\tau(0 < \tau < T_0)$ uniformément solubles, c'est celle qui considère le point $t = 0$ comme un point singulier. Ceci nous permet à considérer aussi les opérateurs dont les coefficients ont effectivement la singularité polaire à $t = 0$: cas où $k > 0$.

Au cas où $k = 0$, on considère habituellement les problèmes de Cauchy *non homogènes* $(\mathrm{PC})_\tau(0 \leq \tau < T_0)$ [2], [3], [4], [5]; V. Ya. Ivrii [11] a considéré un seul $(\mathrm{PC})_0$ avec une unicité forte mais naturelle comme l'unicité de solution de l'équation en évolution [9]. (voire la section 4) Au cas où $k > 0$, on considère un seul $(\mathrm{PC})_0$ à $m^0 - k$ données initiales [26] ou le $(\mathrm{PC})_0$ *plat* [10] avec cette unicité forte. Or si le $(\mathrm{PC})_0$ est bien posé avec cette unicité forte, alors les $(\mathrm{PC})_\tau(0 \leq \tau < T_0)$ sont aussi bien posés. On voit [9] que si les $(\mathrm{PC})_\tau(0 \leq \tau < T_0)$ sont bien posés, alors les $(\mathrm{PCH})_\tau(0 < \tau < T_0)$ sont uniformément solubles.

Ainsi par considérer les conditions nécessaires à $t = 0$ pour que les $(\mathrm{PCH})_\tau(0 < \tau < T_0)$ soient uniformément solubles, nous obtenons en même temps les conditions nécessaires à $t = 0$ pour que les $(\mathrm{PC})_\tau(0 \leq \tau < T_0)$ soient bien posés ou que le $(\mathrm{PC})_0$ soit bien posé avec cette unicité forte.

A la section 2, nous expliquons le polygône de Newton qui joue le rôle clef dans cette note. A la section 3, nous traitons les $(\mathrm{PCH})_\tau(0 < \tau < T_0)$ et nous énonçons nos théorèmes principaux: Nous énonçons, au théorème 1, des conditions nécessaires pour que les $(\mathrm{PCH})_\tau(0 < \tau < T_0)$ soient uniformément solubles, et, au théorème 2, celles nécéssaires pour que les $(\mathrm{PCH})_\tau(0 < \tau < T_0)$ uniformément $\langle\infty\rangle$-solubles aient "l'unicité locale à jauge". Nous donnons des corollaires du théorème 1 aux théorèmes 3 et 4. Et comme un corollaire des théorèmes 1 et 2, nous énonçons, au théorème 5, une condition nécéssaire pour que les $(\mathrm{PCH})_\tau(0 < \tau < T_0)$ uniformément $\langle\infty\rangle$-solubles aient l'unicité locale, soit par exemple, la propagation à vitesse finie. A la section 4, nous considérons le $(\mathrm{PC})_0$. Aux résultats à la section 3, on remplace "les $(\mathrm{PCH})_\tau(0 < \tau < T_0)$ uniformément solubles" par "le $(\mathrm{PC})_0$ bien posé". A la section 5 nous énonçons et démontrons, par la méthode de l'énergie micro-locale de S. Mizohata, la proposition fondamentale qui est le noyau de la démonstration des théorèmes 1 et 2. Nous démontrons les théorèmes à la section 6.

La démonstration de ces théorèmes est faite tout pareillement qu'aux mémoires précédents [7], [8]: Le raisonnement est, grâce à l'uniformité, plus simple et aisé qu'aux mémoires précédents. Il n'y faut pas, en effet, la méthode améliorée de l'énergie micro-locale, mais la méthode de l'énergie micro-locale de S. Mizohata [13], [20], [21] y suffit. Nous prions aux lecteurs de consulter aux mémoires précédents sur les calculs détaillés.

§ 2. Notations et Polygône de Newton

Reprenons les écritures aux mémoires précédents [7], [8]: Nous considérons en vecteur dans $\mathbf{R}^d$, mais nous l'écrivons comme un scalaire. Pour deux vecteurs $a \equiv (a_1, \cdots, a_d)$, $b \equiv (b_1, \cdots, b_d)$, nous écrivons:

$$a = b \quad \text{si } a_j = b_j \ (j = 1, \cdot, d)\,; \qquad a < b \quad \text{si } a_j < b_j \ (j = 1, \cdot, d)$$

$$a \leq b \quad \text{si } a_j \leq b_j \ (j = 1, \cdot, d)\,; \qquad a + b \equiv (a_1 + b_1, \cdots, a_d + b_d)$$

$$ab \equiv (a_1 b_1, \cdots, a_d b_d)\,; \qquad a^b \equiv (a_1^{b_1}, \cdots, a_d^{b_d})\,; \qquad a! \equiv (a_1!, \cdots, a_d!)$$

$$|a| \equiv (|a_1|, \cdots, |a_d|)\,; \qquad \mathscr{s}(a) \equiv a_1 + \cdots + a_d \equiv \sum_{j=1}^{d} a_j$$

$$\mathscr{p}(a) \equiv a_1 \cdots a_d \equiv \prod_{j=1}^{d} a_j\,; \qquad \mathscr{v}(a) \equiv (a, \cdots, a) \qquad \text{pour un scalaire } a \in \mathbf{R}\,.$$

Pour la simplicité de l'écriture, nous abrègerons $\mathscr{v}(a)$ et $\mathscr{p}(a)$ par a avec la confiance qu'il n'y ait pas de confusion grave: Ainsi on écrit par exemple:

$$a^\alpha = \mathscr{p}(a^\alpha) \equiv a_1^{\alpha_1} \ldots a_d^{\alpha_d} \qquad \text{pour } a \equiv (a_1, \cdot, a_d) \text{ et } \alpha \equiv (\alpha_1, \cdot, \alpha_d)$$

$$a^\alpha = \mathscr{p}(\mathscr{v}(a)^\alpha) = a^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_d} \qquad \text{pour } a \in \mathbf{R} \text{ et } \alpha \equiv (\alpha_1, \cdot, \alpha_d)\,.$$

De même nous écrivons:

$$\partial_x^\alpha \equiv \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_d}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_d}^{\alpha_d}}\,; \qquad D_x^\alpha = \left(\frac{1}{\sqrt{-1}} \partial_x\right)^\alpha; \qquad f_{(\beta)}^{(\alpha)}(x; \xi) = \partial_\xi^\alpha D_x^\beta f(x; \xi)\,.$$

Soient: $\|f\| \equiv \|f\|_{L^2(\mathbf{R}^d)}$ pour une fonction f; $|||f||| \equiv \sum_{j=1}^{m^0} \|f_j\|$ pour un vecteur $f \equiv (f_1, \cdot, f_{m^0})$; $\|a(\circ, D)\| \equiv \|a(\circ, D)\|_{L^2(\mathbf{R}^d) \to L^2(\mathbf{R}^d)}$ pour un opérateur pseudo-différentiel borné $a(x; D)$.

Expliquons les espaces fonctionnels que nous utiliserons: les classes de Gevrey. Soient $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ un domaine, $s \equiv (s_1, \cdot, s_d)$ $(1 \leq s \leq \infty)$ et $R \equiv (R_1, \cdot, R_d)$ $(0 < R < \infty)$; Soit, pour fixer les idées, $s \equiv (s', s'') \equiv (s_1, \cdot, s_\ell, \infty, \cdot, \infty)$; $1 \leq s_j <$

∞ $(j = 1, \cdot, \ell)$. Ecrivons $\alpha \equiv (\alpha', \alpha'') \equiv (\alpha_1, \cdot, \alpha_\ell, \alpha_{\ell+1}, \cdot, \alpha_d)$.

$$\gamma_R^s(\Omega) \equiv \left\{ f(x) \in C^\infty(\Omega);\ {}^\forall K \text{ compact} \subset \Omega,\ {}^\forall \alpha'';\ \sup_{x \in K, \alpha'} |\partial_x^\alpha f(x)|/\alpha'!^{s'} R^{\prime\alpha'} < \infty \right\}$$

$$\gamma^{(s)}(\Omega) \equiv \bigcup_{R>0} \gamma_R^s(\Omega), \qquad \gamma^{\langle s \rangle}(\Omega) \equiv \bigcap_{R>0} \gamma_R^s(\Omega)$$

$$H_R^s(\Omega) \equiv \left\{ f(x) \in H^\infty(\Omega);\ {}^\forall \alpha'';\ \sup_{\alpha'} \|\partial_x^\alpha f\|_{L^2(\Omega)}/\alpha'!^{s'} R^{\prime\alpha'} < \infty \right\}$$

$$H^{(s)}(\Omega) \equiv \bigcup_{R>0} H_R^s(\Omega), \qquad H^{\langle s \rangle}(\Omega) \equiv \bigcap_{R>0} H_R^s(\Omega)$$

où $H^\infty(\Omega) \equiv \{f(x) \in C^\infty(\Omega);\ \|\partial_x^\alpha f\|_{L^2(\Omega)} < \infty\, {}^\forall \alpha\}$. Ainsi on a $\gamma^{(\infty)}(\Omega) = \gamma^{\langle \infty \rangle}(\Omega) = C^\infty(\Omega)$ et $H^{(\infty)}(\Omega) = H^{\langle \infty \rangle}(\Omega) = H^\infty(\Omega)$.

Soit, pour deux espaces vectoriels topologiques E et F, $C^m(E, F)$ l'espace de fonctions, définies dans E, à valeur dans F et m-fois continuellement différentiables.

Considérons le polygône de Newton $(\Delta)_{\rho\delta}(\hat{t}, \hat{x})$ attaché au point $(\hat{t}, \hat{x})$ pour le poids (ρ, δ) qui est introduit dans [16]: Prenons un poids (ρ, δ); $\rho \equiv (\rho_1, \cdot, \rho_d)$, $\delta \equiv (\delta_1, \cdot, \delta_d)$ que nous supposons:

$$0 \leq \delta < \rho < \infty .$$

Soient

$$t^{-k} L(t, x; \partial_t, \partial_x) \equiv \partial_t^{m^0} - \sum_{j=1}^{m^0} t^{-k} a_j(t, x; \partial_x) \partial_t^{m^0 - j}$$

où $a_j(t, x; \xi) \equiv \sum_{\alpha:\text{fini}} a_{j\alpha}(t, x) \xi^\alpha$

(2-1) $$t^{-k} a_{j\alpha}(t, x) \xi^\alpha \equiv \sum_{h:\text{fini}} (t - \hat{t})^{\sigma(j\alpha h)} (x - \hat{x})^{\nu(j\alpha h)} a_{j\alpha h}(t, x) \xi^\alpha .$$

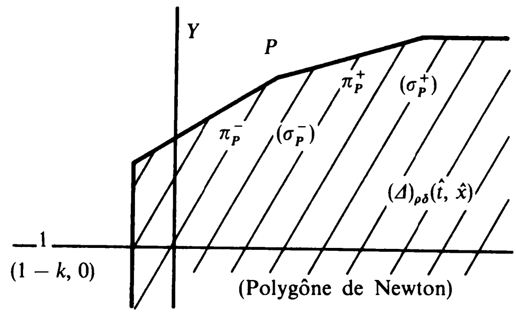
avec $-k \leq \sigma(j\alpha h) < +\infty$, $0 \leq \nu(j\alpha h) < +\infty$, $a_{j\alpha h}(t, x)$ régulières.

Remarque. Il vaudrait mieux de supposer $a_{j\alpha}(\hat{t}, \hat{x}) \neq 0$ pour que le polygône de Newton soit bien déterminé par L. Mais nous ne le faisons pas malgrès que le polygône de Newton dépende de l'expression (2-1): Nous considérons l'expression (2-1) fixée une fois donnée.

Nous faisons correspondre à $(j\alpha h)$ le point

$$\left(1 + \frac{\sigma(j\alpha h)}{j}, \frac{\partial(\rho\alpha - \delta\nu(j\alpha h))}{j} \right) \quad \text{au } XY\text{-plan} .$$

Nous appelons le *polygône de Newton attaché au point* $(\hat{t}, \hat{x})$ *pour le poids* (ρ, δ), noté par $(\Delta)_{\rho\delta}(\hat{t}, \hat{x})$, le plus petit polygône à côtés de pente *non négative* ayant tous ces points à son bas. On abrège par $(\Delta)_{\rho\delta}(\hat{x})$ le $(\Delta)_{\rho\delta}(0, \hat{x})$.



Pour un sommet P sur le côté du $(\Delta)_{\rho\delta}(\hat{t}, \hat{x})$, soient respectivement Π_P^-, Π_P^+ les côtés du $(\Delta)_{\rho\delta}(\hat{t}, \hat{x})$ juste à la gauche et à la droite de P, et σ_P^-, σ_P^+ leurs pentes. Pour des nombres $c \geq 0$, $\sigma \geq 0$ donnés, soit $\mathring{\Lambda}_c^\sigma$ l'ensemble des sommets P du $(\Delta)_{\rho\delta}(\hat{t}, \hat{x})$ tels qu'il existe au moins une ligne passant par P, tenant le $(\Delta)_{\rho\delta}(\hat{t}, \hat{x})$ à son bas, dont la pente est inférieure à σ_P^- et supérieure ou égale à σ, et telle que l'abcisse de son point d'intersection avec l'axe Y soit supérieur ou égale à c. Soient $\mathring{\Lambda}_c^{\sigma+} \equiv \bigcup_{\tau > \sigma} \mathring{\Lambda}_c^\tau$ et $\mathring{\Lambda}_{c+}^\sigma \equiv \bigcup_{a > c} \mathring{\Lambda}_a^\sigma$. Soient $\Lambda_c^\sigma \equiv \bigcup_{P \in \mathring{\Lambda}_c^\sigma} \Pi_P^+$, $\Lambda_c^{\sigma+} \equiv \bigcup_{P \in \mathring{\Lambda}_c^{\sigma+}} \Pi_P^+$, $\Lambda_{c+}^\sigma \equiv \bigcup_{P \in \mathring{\Lambda}_{c+}^\sigma} \Pi_P^+$.

Pour un sommet $P \equiv (1 + q, p) \in (\Delta)_{\rho\delta}(\hat{t}, \hat{x})$, nous disons le polynôme caractéristique attaché à P le polynôme:

$$\rho p_P^\delta(\lambda)(t, x; \xi; \hat{t}, \hat{x}) \equiv \lambda^{m^0} - \sum_{(j\alpha h) \in \Gamma_P^+} t^{\sigma(j\alpha h) - qj} x^{\nu(j\alpha h)} a_{j\alpha h}(\hat{t}, \hat{x} + x_\delta) \xi^\alpha \lambda^{m^0 - j}$$

où $\Gamma_P^+ \equiv \left\{ (j\alpha h); \left(1 + \dfrac{\sigma(j\alpha h)}{j}, \dfrac{\mathscr{o}(\rho\alpha - \delta\nu(j\alpha h))}{j} \right) \in \Pi_P^+ \right\}$ et que $x_\delta \equiv (x_{\delta 1}, \cdot, x_{\delta d})$ est défini pour $x \equiv (x_1, \cdot, x_d)$ par;

$$x_{\delta j} \equiv 0 \quad \text{si } \delta_j \neq 0, \qquad x_{\delta j} \equiv x_j \quad \text{si } \delta_j = 0 \ (j = 1, \cdot, d).$$

Nous abrègeons par $\rho p_P^\delta(\lambda)(t, x; \xi; \hat{x})$ le $\rho p_P^\delta(\lambda)(t, x; \xi; 0, \hat{x})$.

Remarquons que le polynôme caractéristique attaché à P contient non seulement des renseignements sur P mais aussi ceux sur des points sur Π_P^+.

§ 3. Les problèmes de Cauchy homogènes

Considérons les problèmes de Cauchy homogènes $(\text{PCH})_\tau (0 < \tau < T_0)$ au voisinage de l'origine $[0, T_0] \times \Omega_0$. Nous fixons $T_0 > 0$ et $0 \in \Omega_0 \subset \mathbf{R}^d$. Remarquons que cette expression "voisinage de l'origine" ne nous empêche pas de considérer le cas où $\Omega_0 \equiv \mathbf{R}^d$. Nous fixons aussi des $s \equiv (s_1, \cdot, s_d)$, $s^\sim \equiv (s_1^\sim, \cdot, s_d^\sim)$ $(1 \leq s^\sim \leq s \leq +\infty)$.

Pour un poids $(\rho . \delta)$: $\rho \equiv (\rho_1, \cdot, \rho_d)$, $\delta \equiv (\delta_1, \cdot, \delta_d)$ $(0 \leq \delta < \rho < +\infty)$ donné, soient:

$$a_{\rho\delta} \equiv \max_j \frac{\rho_j}{s_j} \quad \text{et} \quad b_{\rho\delta} \equiv \operatorname{Min}_j \frac{\rho_j - \delta_j}{s_j^\sim}.$$

Les coefficients de L soient de $C^0([0 . T_0], \gamma^{(s^\sim)}(\Omega_0))$; Puisque nous faisons l'analyse locale, nous supposons pour la simplicité qu'ils soient de $C^0([0 . T_0], \gamma^{(s^\sim)}(\mathbf{R}^d))$.

Définissons la notion "uniformément solubles" [8]. Puisque nous ne considérons que les conditions nécessaires pour que les problèmes de Cauchy soient solubles, nous la définissons plus faiblement qu'à [9].

Soit $N^0 \equiv \underset{\partial_x}{\text{ordre}}\, L$.

Définition 1 (uniformément (s)-solubles). Les $(\mathrm{PCH})_\tau (0 < \tau < T_0)$ sont dits *localement uniformément* (s)-*solubles*, s'il existe un nombre M^0 ($M^0 \geq 0$) tel que, pour tout $R > 0$ donné, il existe un voisinage de l'origine $\Omega \subset \Omega_0$ et un nombre T $(0 < T \leq T_0)$ tels que, pour toutes $\varphi_j(x) \in H^s_R(\mathbf{R}^d)$ $(j = 1, \cdot, m^0)$, il existe une solution $u(t, x; \tau) \in C^{m^0}([\tau, T], C^{N^0}(\Omega))$ de $(\mathrm{PCH})_\tau (0 < \tau < T)$ satisfaisant pour tout compact $K \subset \Omega$, à

$$\sum_{j=0}^{m^0} \sup_{\substack{0<\tau\leq t\leq T \\ x\in K,\, \jmath(\alpha)\leq N^0}} |\tau^{M^0} \partial_t^j \partial_x^\alpha u(t, x; \tau)| < \infty$$

Nous disons que les $(\mathrm{PCH})_\tau (0 < \tau < T_0)$ sont *t-localement uniformément* (s)-*solubles*, si Ω est indépendant du choix de R, soit $\Omega \equiv \Omega_1$. Nous disons qu'ils sont *uniformément* (s)-*solubles*, si, en plus, T est indépendant de R, soit $T \equiv T_1$. Nous disons qu'ils sont *uniformément* $\langle s \rangle$-*solubles* par remplacer (s) par $\langle s \rangle$; A ce dernier, nous y supposons que les coefficients soient de $C^0([0. T_0], \gamma^{\langle s^- \rangle}(\mathbf{R}^d))$ au cas où $s < \infty$.

Dans la suite nous entendons par Ω_1, T_1 ceux à cette définition-ci.

Nous envisageons les conditions suivantes pour un sommet P du polygône de Newton $(\Delta)_{\rho\delta}(\hat{x})$ attaché au point $(0, \hat{x})$ pour un poids $(\rho . \delta)$: $\rho \equiv (\rho_1, \cdot, \rho_d)$, $\delta \equiv (\delta_1, \cdot, \delta_d)$ $(0 \leq \delta < \rho < +\infty)$.

(3-1) La partie rélle de la racine de $\rho^{\rho\delta}_P(\lambda)(t, x; i\xi; \hat{x}) = 0$ est non positive pour tous $0 \leq t$, $(x, \xi) \in \mathbf{R}^{2d}$ $(\hat{x} + x_\delta \in \Omega_1)$; Pour le sommet P dont $\sigma_P^+ = 0$, on remplace $0 \leq t$ par $0 \leq t < T_1$.

(3-2) La partie rélle de la racine de $\rho^{\rho\delta}_P(\lambda)(t, x; i\xi; 0) = 0$ est non positive pour tous $0 \leq t$, $(x, \xi) \in \mathbf{R}^{2d}$ $(x_\delta = 0)$; Pour le sommet P dont $\sigma_P^+ = 0$, on remplace $0 \leq t$ par $0 \leq t < T_1$.

(3-3) La partie rélle de la racine de $\rho^{\rho\delta}_P(\lambda)(0, x; i\xi; \hat{x}) = 0$ est non positive pour tous $(x, \xi) \in \mathbf{R}^{2d}$ $(\hat{x} + x_\delta \in \Omega_1)$.

(3-4) La partie rélle de la racine de $\rho^{\rho\delta}_P(\lambda)(0, x; i\xi; 0) = 0$ est non positive pour tous $(x, \xi) \in \mathbf{R}^{2d}$ $(x_\delta = 0)$.

(3-5) $a_{\rho\delta} = b_{\rho\delta} = \rho_j - \delta_j$ avec un j.

Nous avons le théorème principal.

Théorème 1. *On a les énoncés suivants pour tout* (ρ, δ) $(0 \leq \delta < \rho < \infty$, $a_{\rho\delta} \leq b_{\rho\delta})$.

[1] *Soit* $s \neq \infty$. *Pour que les* $(\mathrm{PCH})_\tau (0 < \tau < T_0)$ *soient uniformément* (s)-*solubles, il faut que l'on ait* (3-1) *pour tous* $P \in \mathring{\Lambda}^0_{a_{\rho\delta}} \subset (\Delta)_{\rho\delta}(\hat{x})$ *et* $\hat{x} \in \Omega_1$.

[2] *Soit* $s \neq \infty$. *Pour que les* $(\mathrm{PCH})_\tau (0 < \tau < T_0)$ *soient t-localement uni-*

formément (s)-solubles, il faut que l'on ait (3-1) *pour tous* $P \in \mathring{\Lambda}^{0^+}_{a_{\rho\delta}} \subset (\Delta)_{\rho\delta}(\hat{x})$ $(\sigma_P^+ > 0)$ *et* $\hat{x} \in \Omega_1$ *et* (3-3) *pour* $P \in \mathring{\Lambda}^{0}_{a_{\rho\delta}} \subset (\Delta)_{\rho\delta}(\hat{x})$ $(\sigma_P^+ = 0)$ *et tout* $\hat{x} \in \Omega_1$.

[3] *Soit* $s \neq \infty$. *Pour que les* $(\mathrm{PCH})_\tau(0 < \tau < T_0)$ *soient localement uniformément (s)-solubles, il faut, à l'exception du cas* (3-5), *que l'on ait* (3-2) *pour tout* $P \in \mathring{\Lambda}^{0^+}_{a_{\rho\delta}} \subset (\Delta)_{\rho\delta}(0)$ $(\sigma_P^+ > 0)$ *et* (3-4) *pour* $P \in \mathring{\Lambda}^{0^+}_{a_{\rho\delta}} \subset (\Delta)_{\rho\delta}(0)$ $(\sigma_P^+ = 0)$.

[4] *Supposons que les coefficients soient de* $C^0([0, T_0], \gamma^{\langle s^- \rangle}(\mathbf{R}^d))$ *au cas où* $s < +\infty$. *Pour que les* $(\mathrm{PCH})_\tau(0 < \tau < T_0)$ *soient uniformément* $\langle s \rangle$*-solubles, il faut, à l'exception du cas* (3-5), *que l'on ait* (3-1) *pour tous* $P \in \mathring{\Lambda}^{0}_{a_{\rho\delta^+}} \subset (\Delta)_{\rho\delta}(\hat{x})$ *et* $\hat{x} \in \Omega_0$.

Considérons les conditions pour l'unicité locale de solution. En envisageant les problèmes de Cauchy uniformément $\langle \infty \rangle$-solubles, nous introduisons la notion de *l'unicité à jauge* pour les $(\mathrm{PCH})_\tau$:

Définition 2. Nous disons *le jauge à* $\hat{x}$ la fonction vectorielle $g(t, x) \equiv (g_1(t, x), \cdot, g_d(t, x))$ définie à un voisinage $[0, {}^\exists T] \times {}^\exists\Omega$ de $(0, \hat{x})$ telle que $g_j(t, x)$ y sont continues et croissantes en t et $g_j(0, x) \equiv 0$ $(j = 1, \cdot, d)$: Nous écrivons, pour des fonctions vectorielles non négatives $g(t, x)$, $h(t, x)$ définies à un voisinage de $(0, \hat{x})$, $g(t, x) \equiv o(h(t, x))$ ($g(t, x) \equiv O(h(t, x))$ resp.), s'il existe un jauge $k(t, x)$ à $\hat{x}$ (une constante positive C resp.) tel que l'on a: $g(t, x) \leq h(t, x)k(t, x)$ ($g(t, x) \leq Ch(t, x)$ resp.).

Définition 3. Nous disons, pour un S $(0 \leq S < T_1)$ fixés, que les $(\mathrm{PCH})_\tau(S < \tau < T_0)$ ont *l'unicité à jauge* $g(t, x)$ *à* $\hat{x}$, s'il existe un T $(S < T \leq T_0)$ et un voisinage Ω de $\hat{x}$ $(\hat{x} \in \Omega \subset \Omega_1)$ tels qu'au point $(t, x) \in [S, T] \times \Omega$ fixé arbitrairement, la valeur $u(t, x)$ de toute la solution de $C^{m^0}([\tau, T_1], C^{N^0}(\Omega_1))$ du $(\mathrm{PCH})_\tau(S < \tau \leq t)$ s'annule quand les données initiales s'annulent dans l'ensemble $\{y; |y - x| \leq g(t - S, x)\}$.

Nous disons que les $(\mathrm{PCH})_\tau(S < \tau < T_0)$ ont l'unicité à jauge $o(1)$ ($O(t^h)$ resp.) s'ils ont, pour tout $\hat{x} \in \Omega_1$, l'unicité à un jauge $o(1)$ ($O(t^h)$ resp.) à $\hat{x}$.

Nous considérons la condition pour un sommet $P \in (\Delta)_{\rho\delta}(\hat{x})$:

$$(3\text{-}6) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe au moins un } (j\alpha h) \text{ tel que} \\ \left(1 + \dfrac{\sigma(j\alpha h)}{j}, \dfrac{\jmath(\rho\alpha - \delta v(j\alpha h))}{j}\right) = P,\ a_{j\alpha h}(0, \hat{x}) \neq 0. \end{array} \right.$$

Soit, pour un $\theta > 0$ donné, $P_\theta \equiv (1 + q_\theta, p_\theta)$ le sommet de $(\Delta)_{\rho\delta}(\hat{x})$ tel que l'on ait $\sigma^+_{P_\theta} \leq \theta < \sigma^-_{P_\theta}$. Soient, pour des vecteurs v^j $(j = 1, \cdot, d)$ et $\theta > 0$ $(p_\theta - \theta(1 + q_\theta) > 0)$ donnés,

$$\kappa^\theta_{vj} \equiv (\rho_j - \jmath(v^j\delta) - \mathrm{Min}\,\{p_\theta - \theta(1 + q_\theta), \ell_{\rho\delta}\})/\theta \qquad (j = 1, \cdot, d)\,.$$

On a le théorème suivant parallèlement au théorème 2 à [8].

Théorème 2. *Supposons que les* $(\mathrm{PCH})_\tau(0 < \tau < T_0)$ *soient uniformément* $\langle \infty \rangle$*-solubles. Alors, pour tous* (ρ, δ) $(0 \leq \delta < \rho)$, $\hat{x}$ $(\hat{x} \in \Omega_1)$, $v \equiv (v^1, \cdot, v^d)$, θ

($\theta > 0, p_\theta - \theta(1+q_\theta) > 0$ *où* $P_\theta \equiv (1+q_\theta, p_\theta)$ *satisfait* (3-6)), *et* $\kappa \equiv (\kappa_1, \cdot, \kappa_d)$ ($\kappa_j \geq \kappa^\theta_{\nu j}$: $j = 1, \cdot, d$) *donnés, les* $(\mathrm{PCH})_\tau (0 < \tau < T_0)$ *n'ont pas l'unicité à jauge* $o(t^\kappa (x-\hat{x})^\nu)$ *à* $\hat{x}$.

Envisageons des corollaries de ces théorémes.

Définition 4 [1], [25]. Considérons les conditions sur L: Soient $0 \leq T \leq T_0$; $0 \in \Omega \subset \Omega_0$.

(1) $\operatorname{ordre}_{\xi} a_j(t, x; \xi) \leq j \quad ((t, x) \in [0, T] \times \Omega)$. Soit $\mathring{a}_j(t, x; \xi)$ la partie homogène d'ordre j de $a_j(t, x; \xi)$.

(2) $a_j(t, x; \xi) = t^{k - \min\{k, j\}} a_j^{\sim}(t, x; \xi) \quad ((t, x) \in [0, T] \times \Omega)$.

(3) $\operatorname{ordre}_{\xi} a_j^{\sim}(0, x; \xi) \leq 0 \ (j = 1, \cdot, k) \quad ((t, x) \in [0, T] \times \Omega)$.

(4) $\mathring{a}_j(t, x; \xi) = t^{k + \mu j - j} \mathring{a}_j^{\sim}(t, x; \xi) \quad ((t, x) \in [0, T] \times \Omega)$ avec un μ $(0 < \mu)$.

(5) Soit $\not{p}(t, x; \lambda, \xi) \equiv \lambda^{m^0} - \sum_{j=1}^{m^0} \mathring{a}_j^{\sim}(t, x; \xi) \lambda^{m^0 - j}$. La racine $\lambda \equiv \lambda(t, x; \xi)$ de $\not{p}(t, x; \lambda, i\xi) = 0$ est imaginaire pour tous $(t, x; \xi) \in [0, T] \times \Omega \times \mathbf{R}^d$.

L'opérateur L satisfaisant (1) est dit kowalevskien dans $[0, T] \times \Omega$: L'opérateur L satisfaisant (1), (2), (3) est dit fuchsien dans $[0, T] \times \Omega$: L'opérateur L satisfaisant (1), (2), (3), (4), (5) est dit fuchsien hyperbolique dans $[0, T] \times \Omega$.

Remarque. Remarquons que nous adoptons la définition plus faible que celle définie par H. Tahara au [26].

Nous considérons la condition pour un $P \in (\Delta)_{\rho\delta}(\hat{x})$:

$$\text{(3-7)} \quad \left[\begin{array}{l} \text{l'ensemble } \left\{(j\alpha h); \left(1 + \dfrac{\sigma(j\alpha h)}{j}, \dfrac{\sigma\!\!\!/(\rho\alpha - \delta\nu(j\alpha h))}{j}\right) = P,\ a_{j\alpha h}(0, \hat{x}) \neq 0\right\} \\ \text{soit composé uniquement des } (j\alpha h) \text{ tels que } |\alpha| = j\,. \end{array}\right.$$

Parallèlement au théorème 5 à [8], on a:

Théorème 3. *Soit L kowalevskien et que $L(t, x; \partial_t, 0)$ soit fuchsien pour tout x fixé. On a les énoncés suivants pour tout (ρ, δ) $(0 \leq \delta < \rho < \infty, a_{\rho\delta} \leq \ell_{\rho\delta})$.*

[1] *Soit $s \neq \infty$. Pour que les $(\mathrm{PCH})_\tau (0 < \tau < T_0)$ soient uniformément (s)-solubles, il faut que l'on ait (3-7) pour tous $P \in \Lambda^0_{a_{\rho\delta}} \subset (\Delta)_{\rho\delta}(\hat{x})$ et $\hat{x} \in \Omega_1$.*

[2] *Soit $s \neq \infty$. Pour que les $(\mathrm{PCH})_\tau (0 < \tau < T_0)$ soient t-localement uniformément (s)-solubles, il faut que l'on ait (3-7) pour tous $P \in \Lambda^{0^+}_{a_{\rho\delta}} \subset (\Delta)_{\rho\delta}(\hat{x})$ et $\hat{x} \in \Omega_1$.*

[3] *Soit $s \neq \infty$. Pour que les $(\mathrm{PCH})_\tau (0 < \tau < T_0)$ soient localement uniformément (s)-solubles, il faut, à l'exception du cas (3-5), que l'on ait (3-7) avec $\hat{x} = 0$ pour tout $P \in \Lambda^{0^+}_{a_{\rho\delta}} \subset (\Delta)_{\rho\delta}(0)$.*

[4] *Supposons que les coefficients sont de $C^0([0, T_0], \gamma^{\langle s^- \rangle}(\mathbf{R}^d))$ au cas où $s < +\infty$. Pour que les $(\mathrm{PCH})_\tau (0 < \tau < T_0)$ soient uniformément $\langle s \rangle$-solubles, il faut, à l'exception du cas (3-5), que l'on ait (3-7) pour tous $P \in \Lambda^0_{a_{\rho\delta^+}} \subset (\Delta)_{\rho\delta}(\hat{x})$ et $\hat{x} \in \Omega_1$.*

Ce théorème 3 pour $k=0$, $s>1$ scalaire et $s^{\sim}=1$ donne un équivalent d'un cas ($r=m^0$) du théorème 1 de V. Ya. Ivrii [3]:

Expliquons les conditions (N_s) et (N_s') de V. Ya. Ivrii [3] que nous étendons au cas fuchsien.

Soit L fuchsien. Soient

$$L(t, x; \lambda, \xi) \equiv t^k\lambda^{m^0} - \sum_{\substack{\mathscr{s}(\alpha)\leq j\\ j=1,\cdot,m^0}} a_{j\alpha}(t, x)\xi^\alpha\lambda^{m^0-j} \equiv \sum_{\ell=0}^{m^0} L_\ell(t, x; \lambda, \xi)$$

où $L_{m^0}(t, x; \lambda, \xi) \equiv t^k\lambda^{m^0} - \sum\limits_{\substack{\mathscr{s}(\alpha)=j\\ j=1,\cdot,m^0}} a_{j\alpha}(t, x)\xi^\alpha\lambda^{m^0-j}$

$$L_\ell(t, x; \lambda, \xi) \equiv -\sum_{\substack{\mathscr{s}(\alpha)=j-m^0+\ell\\ j=1,\cdot,m^0}} a_{j\alpha}(t, x)\xi^\alpha\lambda^{m^0-j} \qquad (\ell = 0, \cdot, m^0-1)$$

Soient, suivant V. Ya Ivrii,

$$p_j\,; \qquad 0\leq p_j<1 \qquad (j=0, 1, \cdot, d)\,.$$

Nous écrivons:

$$\mathring{p} \equiv (p_0, p) \equiv (p_0, (p', p_d))\,; \qquad \mathring{x} \equiv (t, x) \equiv (x_0, x) \qquad \mathring{\xi} \equiv (\lambda, \xi) \equiv (\xi_0, \xi)\,.$$

Soient

$$\mathring{x}^0 \equiv (0, \hat{x})\,; \qquad \mathring{\xi}^0 \equiv (0, (0, \cdot, 0, 1))\,.$$

Alors la condition (N_s) qui correspond, au cas où $k=0$, à la condition (N_s) de V. Ya Ivrii au cas où $r=m^0$ est la suivante:

$$(N_s)\quad \begin{cases} L^{(\mathring{\gamma})}_{m^0(\mathring{\delta})}(\mathring{x}^0, \mathring{\xi}^0) = 0 \text{ pour } \mathring{\gamma}, \mathring{\delta} \text{ tels que } \mathscr{s}(\mathring{\gamma} + (\mathring{\delta}-\mathring{\gamma})\mathring{p}) < m^0 - p_0(m^0-k)\\ \text{entraine } L^{(\mathring{\gamma})}_{j(\mathring{\delta})}(\mathring{x}^0, \mathring{\xi}^0) = 0 \text{ pour } \mathring{\gamma}, \mathring{\delta} \text{ tels que}\\ \mathscr{s}(\mathring{\gamma} + (\mathring{\delta}-\mathring{\gamma})\mathring{p}) \leq m^0 - p_0(m^0-k) - \dfrac{s}{s-1}(m^0-j) \qquad j=1, \cdot, m^0-1. \end{cases}$$

Et la condition (N_s') est la suivante

$$(N_s')\quad \begin{cases} L^{(\mathring{\gamma})}_{m^0(\mathring{\delta})}(\mathring{x}^0, \mathring{\xi}^0) = 0 \text{ pour } \mathring{\gamma}, \mathring{\delta} \text{ tels que } \mathscr{s}(\mathring{\gamma} + (\mathring{\delta}-\mathring{\gamma})\mathring{p}) < m^0 - p_0(m^0-k)\\ \text{entraine } L^{(\mathring{\gamma})}_{j(\mathring{\delta})}(\mathring{x}^0, \mathring{\xi}^0) = 0 \text{ pour } \mathring{\gamma}, \mathring{\delta} \text{ tels que}\\ \mathscr{s}(\mathring{\gamma} + (\mathring{\delta}-\mathring{\gamma})\mathring{p}) < m^0 - p_0(m^0-k) - \dfrac{s}{s-1}(m^0-j) \qquad j=1, \cdot, m^0-1. \end{cases}$$

Sur ces conditions (N_s) et (N_s'), on a la proposition suivante analogue à la proposition 15 au mémoire précédent [8]:

Souvenons nous que nous avons au cas où $\hat{t}=0$;

$$t^{-k}a_{j\alpha}(t, x)\xi^\alpha \equiv \sum_{h:\text{fini}} t^{\sigma(j\alpha h)}(x-\hat{x})^{\nu(j\alpha h)}a_{j\alpha h}(t, x)\xi^\alpha\,.$$

Proposition 1. *Soient* $\rho_j \equiv \dfrac{1}{s-1} + p_j$ $(j = 1, \cdot, d-1)$, $\rho_d \equiv \dfrac{s}{s-1}$; $\delta_j \equiv p_j$ $(j = 1, \cdot, d)$.

Alors on a $\dfrac{1}{s-1} = a_{\rho\delta} < b_{\rho\delta}$ *pour* $d = 1$ *et* $\dfrac{1}{s-1} = a_{\rho\delta} = b_{\rho\delta}$ *pour* $d > 1$ *et la condition* (N_s) *est équivalente à*

$$(M_s)\quad \begin{cases} \dfrac{\mathscr{s}(\rho\alpha - \delta v(j\alpha h))}{j} \le p_0\left(1 + \dfrac{\sigma(j\alpha h)}{j}\right) + \dfrac{1}{s-1} & ({}^\forall\alpha, j;\ \mathscr{s}(\alpha) = j) \\ \text{entraine} & \\ \dfrac{\mathscr{s}(\rho\alpha - \delta v(j\alpha h))}{j} < p_0\left(1 + \dfrac{\sigma(j\alpha h)}{j}\right) + \dfrac{1}{s-1} & ({}^\forall\alpha, j;\ \mathscr{s}(\alpha) < j). \end{cases}$$

Et la condition (N'_s) *est équivalente à*

$$(M'_s)\quad \begin{cases} \dfrac{\mathscr{s}(\rho\alpha - \delta v(j\alpha h))}{j} \le p_0\left(1 + \dfrac{\sigma(j\alpha h)}{j}\right) + \dfrac{1}{s-1} & ({}^\forall\alpha, j;\ \mathscr{s}(\alpha) = j) \\ \text{entraine} & \\ \dfrac{\mathscr{s}(\rho\alpha - \delta v(j\alpha h))}{j} \le p_0\left(1 + \dfrac{\sigma(j\alpha h)}{j}\right) + \dfrac{1}{s-1} & ({}^\forall\alpha, j;\ \mathscr{s}(\alpha) < j). \end{cases}$$

Grâce à cette proposition 1 on a le théorème suivant.

Théorème 4. *Soit L kowalevskien et que* $L(t, x; \partial_t, 0)$ *soit fuchsien pour tout x fixé. Soient* $s > 1$ *scalaire et* $s^\sim = 1$.

[1] *Soit* $s \neq \infty$. *Pour que les* $(\mathrm{PCH})_\tau(0 < \tau < T_0)$ *soient uniformément (s)-solubles, il faut qu'on ait* (N_s) *pour tous* p_j $(0 \le p_j < 1)$ $(j = 0, 1, \cdot, d)$ *et* $\hat{x} \in \Omega_1$.

[2] *Soit* $s \neq \infty$. *Pour que les* $(\mathrm{PCH})_\tau(0 < \tau < T_0)$ *soient uniformément t-localement (s)-solubles, il faut qu'on ait* (N_s) *au cas* $p_0 > 0$ *et* (N'_s) *au cas* $p_0 = 0$ *pour tous* p_j $(0 \le p_j < 1)$ $(j = 0, 1, \cdot, d)$ *et* $\hat{x} \in \Omega_1$.

[3] *Supposons que les coefficients sont de* $C^0([0, T_0], \gamma^{\langle s^\sim \rangle}(\mathbf{R}^d))$ *au cas où* $s < +\infty$. *Pour que les* $(\mathrm{PCH})_\tau(0 < \tau < T_0)$ *soient uniformément* $\langle s \rangle$*-solubles, il faut qu'on ait* (N'_s) *pour tous* p_j $(0 \le p_j < 1)$ $(j = 0, 1, \cdot, d)$ *et* $\hat{x} \in \Omega_1$.

Passons au corollaire du théorème 2. Remarquons alors que nous avons montré au mémoire précédent [8], le théorème suivant qui est un raffinement du résultat de S. Mizohata [15] et de K. Kajitani [5]:

Théorème. *Soit* $k = 0$. *L'opérateur L dont les coefficients sont analytiques en* (t, x), *et pour lequel le* $(\mathrm{PCH})_0$ *est* $\mathscr{E}$*-bien posé est kowalevskien.*

Or nous avons:

Théorème 5. [1] *Supposons*:

(1) *Les coefficients de L soient analytiques en* (t, x).

(2) $L(t, x; \partial_t, 0)$ *soit fuchsien pour tout x fixé*:

(3) *Les* $(\mathrm{PCH})_\tau(0 < \tau < T_0)$ *soient uniformément* $\langle\infty\rangle$*-solubles*:
(4) *Les* $(\mathrm{PCH})_\tau(0 < \tau < T_0)$ *aient l'unicité au jauge* $o(1)$.
Alors L *est fuchsien hyperbolique dans* $[0, T_0] \times \Omega_0$.
[2] *Supposons*:
(1) $L(t, x; \partial_t, 0)$ *soit fuchsien pour tout* x *fixé*:
(2) *Les* $(\mathrm{PCH})_\tau(0 < \tau < T_0)$ *soient uniformément* $\langle\infty\rangle$*-solubles*:
(3) *Les* $(\mathrm{PCH})_\tau(0 < \tau < T_0)$ *aient l'unicité au jauge* $O(t^\mu)$ *avec un* μ *positif.*
(4) *Pour tout* S $(0 < S \leq T_0)$, *les* $(\mathrm{PCH})_\tau(S < \tau < T_0)$ *aient l'unicité au jauge* $O(t)$.
Alors L *est fuchsien hyperbolique dans* $[0, T_0] \times \Omega_0$.

§4. Problèmes de Cauchy non homogènes

Considérons le problème de Cauchy non homogène $(\mathrm{PC})_0$. Au cas où $k \leq m^0$, on considère le $(\mathrm{PC})_0$ à $m^0 - k$ données initiales [26]. On considère aussi le $(\mathrm{PC})_0$ plat.

Nous fixons des m^1 $(0 \leq m^1 \leq \infty)$, N^1 $(N^0 \leq N^1 \leq \infty)$. Supposons que les coefficients de L soient de $C^{m^1}([0, T_0], \gamma^{(s^\sim)}(\mathbf{R}^d))$.

Nous disons $f(t, x) \in C^m((0, T_0], C^N(\Omega_0))$ est plate à $t = 0$ (dans $\Omega \subset \Omega_0$ resp.) s'il existe un T tel que $f(t, x) \in C^\infty((0, T], C^\infty(\Omega_0))$ et que tout $\partial_t^n f(t, x)$ $(n \geq 0)$ tend vers zéro dans $C^\infty(\Omega_0)$ $(C^\infty(\Omega)$ resp.) quand t tend vers zéro. Nous entendons par le $(\mathrm{PC})_0$ plat le problème qui cherche la solution plate à $t = 0$ du $(\mathrm{PC})_0$ pour la donnée plate à $t = 0$.

Nous en considérons les deux parallèlement. Quand nous considérons le $(\mathrm{PC})_0$ plat, nous convenons de dire, par abus de language, la solution à données initiales nulles, la solution plate du $(\mathrm{PC})_0$ ou du $(\mathrm{PCH})_0$.

Différemment de la section précédente, dans cette section, nous avons besoin de l'unicité de solution du $(\mathrm{PC})_0$.

Au mémoire précédent [9], nous avons envisagé deux sortes de l'unicité $(*)$ et $(**)$:

Soit, pour $0 < T^\sim \leq T$ et $0 \in \Omega \subset \Omega^\sim$,

$$(U_{\Omega\Omega^\sim}^{TT^\sim}) \quad \begin{cases} \text{La solution } u(t, x) \in C^{m^0+m^1}([0, T], C^{N^1}(\Omega)) \text{ du } (\mathrm{PCH})_0 \text{ à} \\ \text{données initiales nulles dans } \Omega \text{ est nécessairement nulle} \\ \text{dans } C^{m^0+m^1}([0, T^\sim], C^{N^1}(\Omega^\sim)). \end{cases}$$

$(*)$ Imposer un seul $(U_{\Omega\Omega^\sim}^{TT^\sim})$.
$(**)$ Imposer $(U_{\Omega\Omega^\sim}^{SS})$ pour tout S $(0 < S \leq T^\sim)$.

Dans cette note, nous considérons, comme l'unicité au $(\mathrm{PC})_0$, *la deuxième unicité* $(**)$ qui est citée comme l'unicité forte à l'introduction. Nous précisions la notion "bien posé" du $(\mathrm{PC})_0$.

Définition 5. Le $(\mathrm{PC})_0$ est dit *localement* (s)*-bien posé*, si, pour tout $R > 0$ donné, il existe un $T > 0$, un Ω $(0 \in \Omega \subset \Omega_0)$ tels que, pour toute donnée $f(t, x) \in$

$C^{m^1}([0, T_0], H_R^s(\mathbf{R}^d))$ (plate au $(\mathrm{PC})_0$ plat), il existe une solution $u(t, x) \in C^{m^0+m^1}([0, T], C^{N^1}(\Omega))$ du $(\mathrm{PC})_0$ à données initiales nulles, et qu'il existe des $T^\sim$ $(0 < T^\sim \leq T)$, $\Omega^\sim$ $(0 \in \Omega^\sim \subset \Omega)$ tels que l'on a $(U_{\Omega\Omega^\sim}^{SS})$ pour tout S $(0 < S \leq T^\sim)$.

Nous disons que le $(\mathrm{PC})_0$ est *t-localement* (*s*)-*bien posé* si Ω et $\Omega^\sim$ sont indépendants du choix de R, soit $\Omega \equiv \Omega_1$, $\Omega^\sim \equiv \Omega_2$. Nous disons qu'il est (*s*)-*bien posé* si, en plus, T, $T^\sim$ sont indépendants de R, soit $T \equiv T_1$, $T^\sim \equiv T_2$. Nous disons qu'il est $\langle s \rangle$-*bien posé* par remplacer (s) par $\langle s \rangle$; A ce dernier, nous y supposons que les coefficients soient de $C^{m^1}([0. T_0], \gamma^{\langle s^- \rangle}(\mathbf{R}^d))$ au cas où $s < \infty$.

Dans la suite nous entendons par Ω_1, Ω_2, T_1, T_2 ceux à cette définitions-ci.

Nous avons la proposition suivante [9].

Proposition 2. *Si le* $(\mathrm{PC})_0$ *est localement* (*s*)-*bien posé* (*t-localement* (*s*)-*bien posé*, (*s*)-*bien posé*, $\langle s \rangle$-*bien posé resp.*), *alors les* $(\mathrm{PCH})_\tau (0 < \tau < T_0)$ *sont localement uniformément* (*s*)-*solubles* (*t-localement uniformément* (*s*)-*solubles, uniformément* (*s*)-*solubles, uniformément* $\langle s \rangle$-*solubles resp.*).

Précisons les notions sur l'unicité locale. Quant à l'unicité au jauge au $(\mathrm{PC})_0$, nous choisissons une plutôt globale [26].

Définition 6. (1) Soit $g(t, x)$ la jauge définie dans $[0, T_1] \times \Omega_1$. Le $(\mathrm{PC})_0$ $\langle \infty \rangle$-bien posé est dit avoir *l'unicité à jauge* $g(t, x)$, si, au point $(t_0, x_0) \in [0, T_2] \times \Omega_2$ fixé arbitrairement, la valeur $u(t_0, x_0)$ de toute la solution de $C^{m^0+m^1}([0, T_2], C^{N^1}(\Omega_2))$ du $(\mathrm{PC})_0$ s'annule tant que les données initiales sont nulles dans $\{(x; |x - x_0| \leq g(t_0, x_0)\}$ et que le deuxième membre s'annule dans $\{(t, x); 0 \leq t \leq t_0, |x - x_0| \leq g(t_0, x_0) - g(t, x_0)\}$.

(2) Le $(\mathrm{PC})_0$ $\langle \infty \rangle$-bien posé est dit $\mathscr{E}$-*bien posé*, si l'on a l'unicité locale:

(UL) $\left\{\begin{array}{l} \text{Pour tous } \hat{x} \in \Omega_1 \text{ et } \varepsilon > 0, \text{ il existe un } \eta > 0 \text{ tel que toute la} \\ \text{solution de } C^{m^0+m^1}([0, T_2], C^{N^1}(\Omega_2)) \text{ du } (\mathrm{PCH})_0 \text{ à données} \\ \text{initiales nulles dans } B(\hat{x}, \varepsilon) \text{ s'annule dans } [0, \eta] \times B(\hat{x}, \eta). \end{array}\right.$

On voit aisément la suivante.

Proposition 3. *Si le* $(\mathrm{PC})_0$ *a l'unicité à jauge* $O(t^\mu)$ *pour un* μ $(0 < \mu)$, *alors les* $(\mathrm{PCH})_\tau (0 < \tau < T_2)$ *ont l'unicité â jauge* $O(t^\mu)$ *et pour tout* S $(0 < S \leq T_2)$ *fixé, les* $(\mathrm{PCH})_\tau (S < \tau < T_2)$ *ont l'unicité à jauge* $O(t)$. *Et si le* $(\mathrm{PC})_0$ *est* $\mathscr{E}$-*bien posé, alors les* $(\mathrm{PCH})_\tau (0 < \tau < T_2)$ *ont l'unicité à jauge* $o(1)$.

On a le théorème.

Théorème 6. Au théorème 1, 2, 3 et 4, on peut remplacer "les $(\mathrm{PCH})_\tau (0 < \tau < T_0)$ uniformément solubles" par "le $(\mathrm{PC})_0$ bien posé".

Remarque. Quand on n'impose que l'unicité $(*)$ au lieu de $(**)$, on considère les $(\mathrm{PC})_\tau (0 \leq \tau < T_0)$ au lieu du $(\mathrm{PC})_0$: Alors on peut raisonner tout pareillement. [9]

Comme un correspondant au théorème 5, nous énonçons le suivant.

Théorème 7. [1] *Supposons*:
(1) *Les coefficients de L soient analytiques en* (t, x);
(2) $L(t, x; \partial_t, 0)$ *soi fuchsien pout tout* x *fixé*;
(3) *Le* $(\mathrm{PC})_0$ *soit* $\mathscr{E}$*-bien posé.*
Alors L est fuchsian hyperbolique dans $[0, T_0] \times \Omega_0$.
[2] *Supposons*:
(1) $L(t, x; \partial_t, 0)$ *soit fuchsien pout tout* x *fixé*;
(2) *Le* $(\mathrm{PC})_0$ *soit* $\langle\infty\rangle$*-bien posé*;
(3) *Le* $(\mathrm{PC})_0$ *ait l'unicité à jauge* $O(t^\mu)$ *avec un* μ *positif.*
Alors L est fuchsian hyperbolique dans un $[0, {}^\exists T] \times {}^\exists\Omega$.

Exemple. Prenons un exemple de H. Tahara [26]. Supposons, outre les hypothèses au [2] au théorème 7, que
(4) $a_{j\alpha}(t, x) = t^{k+\mu j-j+\jmath(\kappa\alpha)} a^*_{j\alpha}(t, x) \quad |\alpha| = j$ avec un $\quad \kappa = (\kappa_1, \cdot, \kappa_d) \geq 0$;
(5) Les racines $\lambda_j(t, x)(j = 1, \cdot, m^0)$ de l'équation

$$\lambda^{m^0} - \sum_{j=1}^{m^0} \sum_{|\alpha|=j} a^*_{j\alpha}(t, x)\xi^\alpha \lambda^{m^0-j} = 0$$

satisfassent

$$|\lambda_j(t, x; \xi) - \lambda_k(t, x; \xi)| \geq {}^\exists c|\xi| \qquad (j \neq k).$$

Alors par l'application du théorème 6 (version correspondante au théorème 1 avec $(\rho, \delta) \equiv (\mu + \kappa, 0)$) et du théorème 7, on voit
(6) $a_{j\alpha}(t, x) = t^{k+\mu j-j+\jmath(\kappa\alpha)} a^*_{j\alpha}(t, x) \quad |\alpha| < j$,
et par conséquent L est fuchsien hyperbolique de la classe $(1, \mu)$ au sens de Tahara [26].

§5. Proposition fondamentale

Dans cette section nous énonçons et démontrons la proposition fondamentale, noyau de la démonstration des théorèmes 1 et 2 principaux. Nous rendons le $(\mathrm{PCH})_\tau$ à celui pour un système d'ordre 1 par rapport à ∂_t.

Les $(\mathrm{PCH})_\tau (0 < \tau < T_0)$ sont équivalents aux suivants.

$$(\mathrm{PCHS})_\tau \quad \begin{cases} [\partial_t I - A(t, x; \partial_x)]U(t, x) = 0 \\ U(\tau, x) = \Phi(x) \end{cases}$$

$$\text{où } A(t, x; \partial_x) = \begin{bmatrix} 0 \cdots & 1 \cdots & 0 \\ 0 & \cdots 0 & \cdots 1 \\ a_{m^0}(t, x; \partial_x), & \cdots, & a_1(t, x; \partial_x) \end{bmatrix}.$$

Nous envisageons, avec un $\xi^0 \in \mathbf{R}^d$ que nous fixons une fois choisi et un paramètre n de localisation:

$$(\mathrm{PCHS})_{\tau\xi^0 n} \quad \begin{cases} [\partial_t \mathrm{I} - A(t, x; n^\rho\xi^0 + \partial_x)]U^0_n(t, x) = 0 \\ U^0_n(\tau, x) = \Phi_n(x). \end{cases}$$

Les $(\mathrm{PCHS})_{\tau\xi^0 n}$ sont liés aux $(\mathrm{PCHS})_\tau$ par $U_n^0(t, x) = \exp(-n^\rho \xi^0 x) U(t, x)$.

Nous énonçons les hypothèses à supposer.

Nous fixons un $\hat{x}$ que nous supposons $\hat{x} \equiv 0$, un poids (ρ, δ); $0 \le \delta_j < \rho_j < \infty$ $(j = 1, \cdot, d)$, et des indices de Gevrey s, $s^\sim$; $1 \le s^\sim \le s \le \infty$, que nous supposons $s \equiv (s', s'') \equiv (s_1, \cdot, s_\ell, \infty, \cdot, \infty)$. Nous écriverons de même $\alpha \equiv (\alpha', \alpha'') \equiv (\alpha_1, \cdot, \alpha_\ell, \alpha_{\ell+1}, \cdot, \alpha_d)$. Nous considérons donnés, les nombres $a \ge 0$, $\sigma^0 \ge 0$, $0 \le \sigma^1 \le \delta$, $\gamma \ge 0$, et un point $P \equiv (1 + q, p)$ sur le polygône de Newton $(\Delta)_{\rho\delta}(0)$.

(H-1) $\left\{\begin{array}{l} \text{Il existe un nombre } \rho_0 > 0 \text{ et pour tout compact } K \text{ de } \Omega_0, \text{ il} \\ \text{existe une constante } C \text{ telle qu'on ait:} \\ |\partial_x^\nu a_{j\alpha k}(t, x)| \le {}^\exists C(\nu!)^{s^\sim} \rho_0^\nu \qquad {}^\forall(t, x) \in [0, T_0] \times K, {}^\forall j, {}^\forall \alpha, {}^\forall k. \end{array}\right.$

⟨H-1⟩ $\left\{\begin{array}{l} \text{Pour tout } \rho_0 > 0 \text{ et tout compact } K \text{ de } \Omega_0, \text{ il existe une} \\ \text{constante } C \text{ telle qu'on ait:} \\ |\partial_x^\nu a_{j\alpha k}(t, x)| \le {}^\exists C(\nu!)^{s^\sim} \rho_0^\nu \qquad {}^\forall(t, x) \in [0, T_0] \times K, {}^\forall j, {}^\forall \alpha, {}^\forall k. \end{array}\right.$

Remarque. Au cas où $s_j^\sim = \infty$, on convient que $(\nu_j!)^{s_j^\sim} \rho_0^\nu$ est une constante dépendante de ν_j.

(H-2) $\left(\begin{array}{l} 1 \le s^\sim < +\infty;\ a \le \ell_{\rho\delta};\ P \equiv (1 + q, p) \in (\Delta)_{\rho\delta}(0);\ \sigma_P^+ \le \gamma < \sigma_P^-; \\ a \le p - \gamma(q + 1),\ 0 < p - \gamma(q + 1). \end{array}\right.$

⟨H-2⟩ $\left(\begin{array}{l} 1 \le s^\sim \le +\infty;\ a \le \ell_{\rho\delta};\ P \equiv (1 + q, p) \in (\Delta)_{\rho\delta}(0);\ \sigma_P^+ \le \gamma < \sigma_P^-; \\ a < p - \gamma(q + 1);\ a < \ell_{\rho\delta} \text{ au cas exceptionnel (5-1).} \end{array}\right.$

(5-1) $$\ell_{\rho\delta} = \rho_j - \delta_j \text{ avec un } j.$$

Nous considérons la condition $E(A)$ suivante:

$E(A)$ $\left\{\begin{array}{l} A \text{ étant donné, il existe un voisinage de l'origine } \Omega_A \subset \Omega_0 \text{ tel} \\ \text{que, pour toute suite des données initiales } \Phi \equiv \{\Phi_n(x)\}; \\ \Phi_n(x) \equiv (\varphi_{n1}(x), \ldots, \varphi_{nm^0}(x)) \text{ où } \varphi_{nj} \in H^{\langle 1 \rangle}(\mathbf{R}^d), \text{ satisfaisant, pour tous} \\ j, \alpha'', \text{ à} \\ \|\partial_x^\alpha \varphi_{nj}\| \le {}^\exists C_{\Phi\alpha''}(c_\Phi n)^{\rho'\alpha'} \ ({}^\forall n, \alpha') \\ \text{avec de certaines constantes } C_{\Phi\alpha''}, c_\Phi \text{ et pour tout } \sigma\ (\sigma^0 < \sigma), \text{ il} \\ \text{existe, } \tau_n \text{ étant } \tau_n \equiv {}^\exists C n^{-\sigma}, \text{ un polynôme } P_{A\Phi}(n) \text{ et au moins une} \\ \text{solution } U_n^0(t, x; \tau_n) \text{ du } (\mathrm{PCHS})_{\tau_n \xi^0 n} \text{ ayant une estimation à priori:} \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{m^0} \sup_{\substack{x \in n^{-\sigma^1}\Omega_{A_0} \\ t \in [\tau_n, T_0 n^{-\sigma^0}]}} |U_{nj}^0(t, x : \tau_n)| \le P_{A\Phi}(n) \exp(An^a) \qquad {}^\forall n \gg 1 \end{array}\right.$

(H-3) $\left(\begin{array}{l} \text{Pour tout } A > 0 \text{ donné on a } E(A). \text{ Au cas exceptionnel} \\ \text{(5-2), } \Omega_A \text{ peut être choisi } \Omega_A \equiv \Omega_2 \subset \Omega_0 \text{ indépendamment de } A. \end{array}\right.$

(5-2) $$\alpha = \ell_{\rho\delta} = \rho_j - \delta_j \text{ avec un } j.$$

⟨H-3⟩ (Il existe un $A^1 > 0$ tel qu'on ait $E(A^1)$).

Nous envisageons, pour un sommet $P \equiv (1+q, p)$ du polygône de Newton $(\Delta)_{\rho\delta}(\hat{x})$ et un σ $(\sigma_P^+ \leq \sigma < \sigma_P^-)$ donnés, le polynôme:

$$\rho_{P\sigma}^{\rho\delta}(\lambda)(t, x; \xi; \hat{x}) \equiv \lambda^{m^0} - \sum_{(j\alpha h) \in \Gamma_P^\sigma} t^{\sigma(j\alpha h) - qj} x^{\nu(j\alpha h)} a_{j\alpha h}(0, \hat{x} + x_\delta) \xi^\alpha \lambda^{m^0 - j}$$

où $\Gamma_P^\sigma \equiv \left\{ (j\alpha h); \left(1 + \dfrac{\sigma(j\alpha h)}{j}, \dfrac{\alpha(\rho\alpha - \delta\nu(j\alpha h))}{j}\right) \text{ soit sur la ligne passant par } P \text{ à pente } \sigma \right\}$. Remarquons que l'on a:

(5-3) $$\begin{cases} \rho_{P\sigma}^{\rho\delta}(\lambda)(t, x; \xi; \hat{x}) \equiv \rho_P^{\rho\delta}(\lambda)(t, x; \xi; \hat{x}) & (\sigma = \sigma_P^+) \\ \rho_{P\sigma}^{\rho\delta}(\lambda)(t, x; \xi; \hat{x}) \equiv \rho_P^{\rho\delta}(\lambda)(0, x; \xi; \hat{x}) & (\sigma \neq \sigma_P^+). \end{cases}$$

Alors la proposition fondamentale s'énonce:

Proposition fondamentale. [1] *Sous les hypothèses* (H-1), (H-2) *et* (H-3), *la partie réelle de la racine de* $\rho_{P\gamma}^{\rho\delta}(\lambda)(t, x; \xi^0 + i\eta; 0) = 0$ *est non positive pour tous* ${}^\forall t$; $0 \leq t$ $(t \leq T_1$ *au cas* $\gamma = 0)$ *et* ${}^\forall(x, \eta)$ $\left(x_{\delta-\sigma^1} \in \bigcap_{A>0} \Omega_A\right)$.

[2] *Sous les hypothèses* ⟨H-1⟩, ⟨H-2⟩ *et* ⟨H-3⟩, *la partie réelle de la racine de* $\rho_{P\gamma}^{\rho\delta}(\lambda)(t, x; \xi^0 + i\eta; 0) = 0$ *est non positive pour tous* ${}^\forall t$; $0 \leq t$ $(t \leq T_1$ *au cas* $\gamma = 0)$ *et* ${}^\forall(x, \eta)$ $(x_{\delta-\sigma^1} \in \Omega_{A^1})$.

Démonstration. [1] Nous démontrons [1] par absurde. Nous nions le résultat: Nous pouvons alors supposer:

(H-4) $$\begin{cases} \text{Il existe des } t^0 (0 < t^0 < T_1), x^0 \left(x_{\delta-\sigma^1}^0 \in \bigcap_{A>0} \Omega_A\right), \zeta^0 = \xi^0 + i\eta^0 \\ (\eta^0 \neq 0), \delta_0 (0 < \delta_0), m^2 \ (1 \leq m^2 \leq m^0) \text{ tels que les racines} \\ \lambda_j(t^0, x^0; \zeta^0) \text{ de } \rho_{P\gamma}^{\rho\delta}(\lambda)(t^0, x^0; \zeta^0; 0) = 0 \text{ satisfassent:} \\ \operatorname{Re} \lambda_j(t^0, x^0; \zeta^0) \geq 4\delta_0 \qquad j = 1, \cdot, m^2 \\ \operatorname{Re} \lambda_j(t^0, x^0; \zeta^0) \leq 0 \qquad j = m^2 + 1, \cdot, m^0. \end{cases}$$

⟨H-4⟩ (H-4) où on remplace $x_{\delta-\sigma^1}^0 \in \bigcap_{A>0} \Omega_A$ par $x_{\delta-\sigma^1}^0 \in \Omega_{A^1}$.

Choix de $[t_n^0, t_n^1]$.

$$t_n^0 \equiv t^0 n^{-\gamma}, \qquad t_n^1 \equiv t^1 n^{-\gamma}$$

avec un paramètre n de localisation. t^1 $(t^0 < t^1)$ sera déterminé ultérieurement. Nous considérons dans $t \in [t_n^0, t_n^1]$. Nous localisons l'opérateur: $\partial_t I - A(t, x; n^\rho \xi^0 + iD)$ à la direction de (x^0, ζ^0).

CHOIX DE s^*. Soit $1 < s^*$ un vecteur quelconque tel que $s_j^* \equiv s_j^{\sim}$ si $s_j^{\sim} > 1$.

CHOIX DE ρ_0 ET $\hat{\rho}_0$. Soit ρ_0 celui défini à (H-1). Soit $\hat{\rho}_0$ arbitrairement fixé.

Soient $0 < 2r < r_0$, $0 < 2\hat{r} < \hat{r}_0$, $0 < \rho_0^{\sim} < \rho_0$, $0 < \hat{\rho}_0^{\sim} < \hat{\rho}_0$ des nombres tels qu'on ait $\{x; |x - x^0_{\delta-\sigma^1}| \leq 6\nu(r_0)\} \subset \Omega_0$, qui seront déterminés ultérieurement mais qui sont d'ailleurs arbitraires pour le moment.

DÉFINITION DE $\chi_n(x)$. Soient $\chi^j(x)$ $(j = 1, \cdot, d)$ des fonctions d'une variable de la classe de Gevrey d'indice (s_j^*) satisfaisant à

$$\begin{pmatrix} |\partial_x^\alpha(\chi^j(x) - x_j^0)| \leq 5r_0\alpha!^{s_j^*}\rho_0^{\sim\alpha} & (^\forall\alpha, {}^\forall x) & & \\ \chi^j(x) = x_j & |x - x_j^0| \leq 4r_0\,, & \chi^j(x) = x_j^0 & |x - x_j^0| \geq 5r_0 \end{pmatrix}$$

et
$$\chi_n(x) = (n^{-\delta_1}\chi^1(n^{\delta_1}x_1), \cdots, n^{-\delta_d}\chi^d(n^{\delta_d}x_d))\,.$$

DÉFINITION DE $\Xi_n(\eta)$. Soient $\Xi^j(\eta)$ $(j = 1, \cdot, d)$ des fonctions d'une variable de classe de Gevrey d'indice (s_j^*) satisfaisant à

$$\begin{pmatrix} |\partial_\xi^\alpha(\Xi^j(\eta) - \eta_j^0)| \leq 5\hat{r}_0\alpha!^{s_j^*}\hat{\rho}_0^{\sim\alpha} & (^\forall\alpha, {}^\forall\eta) & & \\ \Xi^j(\eta) = \eta_j & |\eta - \eta_j^0| \leq 4\hat{r}_0\,, & \Xi^j(\eta) = \eta_j^0 & |\eta - \eta_j^0| \geq 5\hat{r}_0 \end{pmatrix}$$

et
$$\Xi_n(\eta) = (n^{\rho_1}\Xi^1(n^{-\rho_1}\eta_1), \cdots, n^{\rho_d}\Xi^d(n^{-\rho_d}\eta_d))\,.$$

MICRO-LOCALISÉ DE L'OPÉRATEUR. *Le micro-localisé* de l'opérateur différentiel $a(x; D)$ à symbole $a(x, \eta)$ est, par définition, l'opérateur $a_{n\,\mathrm{loc}}(x; D)$ à symbole

$$a_{n\,\mathrm{loc}}(x; \eta) = a(\chi_n(x); \Xi_n(\eta))$$

Remarquons que l'on a, pour $a(x; \eta) = x^\beta a^{\sim}(x)\eta^\alpha$

$$|n^{-\rho\alpha+\delta\beta}a_{n\,\mathrm{loc}}(x; \eta) - x^{0\beta}a^{\sim}(n^{-\delta}x^0)\eta^{0\alpha}| \to 0 \qquad (r_0 \to 0)\,.$$

A cette analyse, ce qui est fondamental, c'est la microlocalisation de l'operateur, mais pour la faire fonctionner il faut micro-localiser la solution.

DÉFINITION DE $\rho_0(r_0)$, $\hat{\rho}_0(\hat{r}_0)$.

$$\rho_0(r_0) \equiv (\rho_0(r_0)_1, \cdot, \rho_0(r_0)_d) \qquad \text{et } \hat{\rho}_0(\hat{r}_0) \in \mathbf{R} \text{ soient :}$$

$$\rho_0(r_0)_j \equiv \begin{pmatrix} 2\rho_0 & \text{si } s_j^{\sim} > 1 \\ \mathrm{Max}\,\{2\rho_0, r_0^{-1}\} & \text{si } s_j^{\sim} = 1 \end{pmatrix} \qquad (j = 1, \cdot, d)$$

$$\hat{\rho}_0(\hat{r}_0) \equiv \mathrm{Max}\,\{2\hat{\rho}_0, \hat{r}_0^{-1}\}\,.$$

CHOIX DE N_η, $\hat{N}_\eta$. Soient, pour r_0, $\hat{r}_0$, r, $\hat{r}$ et $\kappa > 1$ supposés donner qui seront déterminés ultérieurement;

$$N_\eta \equiv (R_0\hat{\rho}_0(\hat{r}_0)\kappa e)^{-1}n^{(\rho-\delta)} \qquad \text{et } \hat{N}_\eta \equiv (\hat{R}_0\rho_0(r_0)\kappa e)^{-1/s^{\sim}}n^{(\rho-\delta)/s^{\sim}}$$

où $R_0 \equiv C_0r^{-1}$ et $\hat{R}_0 = C_0\hat{r}^{-1}$ avec la constante absolue C_0 à la proposition 2 au mémoire précédent [7].

DÉFINITION DE $\alpha_n(\eta)$. Soient $\alpha_\eta^j(\eta)$ $(j = 1, \cdot, d)$ des fonctions d'une variable de la classe de Gevrey d'indice (s_j^*) telles que

$$\begin{cases} 0 \le \alpha_\eta^j(\eta) \le 1\,, \qquad \alpha_\eta^j(\eta) = 1 \qquad \text{sur } \{\eta; |\eta - \eta_j^0| \le \frac{1}{2}\hat{r}\} \\ \operatorname{Supp} \alpha_\eta^j \subset \{\eta; |\eta - \eta_j^0| \le \hat{r}\} \\ |\alpha_\eta^{j(p+\mu)}(\eta)| \le {}^{\exists}C(\hat{N}_{\eta_j}\hat{R}_0)^p \mu!^{s_j^*} \hat{\rho}_0^\mu \qquad ({}^{\forall}p \le \hat{N}_{\eta_j}, {}^{\forall}\mu) \end{cases}$$

et

$$\alpha_n(\eta) = \alpha_\eta^1(n^{-\rho_1}\eta_1)\cdots\alpha_\eta^d(n^{-\rho_d}\eta_d)\,.$$

DÉFINITION DE $\beta_n(x)$. Soient $\beta_\eta^j(x)$ $(j = 1, \cdot, d)$ des fonctions d'une variable de la classe de Gevrey d'indice (s_j^*) telles que

$$\begin{cases} 0 \le \beta_\eta^j(x) \le 1\,, \qquad \beta_\eta^j(x) = 1 \qquad \text{sur } \{x; |x - x_j^0| \le \frac{1}{2}r\} \\ \operatorname{Supp} \beta_\eta^j \subset \{x; |x - x_j^0| \le r\} \\ |\beta_{\eta(q+\nu)}^j(x)| \le {}^{\exists}C(N_{\eta_j}R_0)^q \nu!^{s_j^*} \rho_0^\nu \qquad ({}^{\forall}q \le N_{\eta_j}, {}^{\forall}\nu) \end{cases}$$

et

$$\beta_n(x) = \beta_\eta^1(n^{\delta_1}x_1)\cdots\beta_\eta^d(n^{\delta_d}x_d)\,.$$

DÉFINITION DU MICRO-LOCALISEUR DE SOLUTION: $V_n(x; D)$. Nous envisageons le localiseur $V_n(x; D) = \alpha_n(D)\beta_n(x)$. Alors on a d'une part:

$$V_{n(\nu)}^{(\mu)}(x, D) = \alpha_n^{(\mu)}(D)\beta_{n(\nu)}(x)\,.$$

et d'autre part:

$$|V_{n(q+\nu)}^{(p+\mu)}(x, \eta)| \le {}^{\exists}C_V(\hat{N}_n\hat{R}_0)^p(N_nR_0)^q\mu!^{s^*}\nu!^{s^*}\hat{\rho}_0^\mu\rho_0^\nu n^{-\rho(p+\mu)+\delta(q+\nu)}\,.$$

$$({}^{\forall}p \le \hat{N}_\eta, {}^{\forall}q \le N_\eta, {}^{\forall}\mu, \nu)$$

Nous opérons $V_{n(\nu)}^{(\mu)}(x; D)$ de la gauche à

$$[\partial_t I - A(t, x; n^\rho\xi^0 + iD)]U_n^0(t, x) = 0\,.$$

DÉFINITION DE $\theta_n(x)$. Soient $\theta^j(x)$ $(j = 1, \cdot, d)$ des fonctions d'une variable de la classe de Gevrey d'indice (s_j^*) telles que

$$\begin{cases} 0 \le \theta^j(x) \le 1\,, \qquad \theta^j(x) = 1 \qquad \text{sur } \{x; |x - x_j^0| \le r\} \\ \operatorname{Supp} \theta^j \subset \{x; |x - x_j^0| \le 2r\} \\ |\theta_{(\nu)}^j(x)| \le {}^{\exists}C\nu!^{s_j^*}\rho_0^\nu \qquad ({}^{\forall}\nu) \end{cases}$$

et

$$\theta_n(x) = \theta^1(n^{\delta_1}x_1)\cdots\theta^d(n^{\delta_d}x_d)\,.$$

Alors, $A(t, x; \partial_x)$ étant un opérateur differentiel, on a

$$\beta_n(x)A(t, x; n^\rho\xi^0 + iD) = \beta_n(x)A(t, x; n^\rho\xi^0 + iD)\theta_n(x)$$

Et l'équation:

$$[\partial_t I - A(t, x; n^\rho\xi^0 + iD)]U_n^0(t, x) = 0$$

s'écrit:

$$[0]\quad\begin{cases} [\partial_t I - A_{n\,\mathrm{loc}}(t, x; D)]\mathcal{V}_{n(\nu)}^{(\mu)}(x; D)\theta_n(x)U_n^0(t, x) = \mathfrak{F}^{\mu\nu}(t, x; D)\theta_n(x)U_n^0(t, x) \\ A_{n\,\mathrm{loc}}(t, x; \eta) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & & 0 & & 1 \\ a_{m^0 n\,\mathrm{loc}}(t, x; D), & \cdots, & & & a_{1n\,\mathrm{loc}}(t, x; D) \end{bmatrix} \\ a_{jn\,\mathrm{loc}}(t, x; D) = a_j(t, \chi_n(x); n^\rho \xi^0 + i\Xi_n(\eta))|_{\eta = D} \\ \mathfrak{F}^{\mu\nu}(t, x; D) = \begin{bmatrix} 0 \\ f_{m^0}^{\mu\nu}(t, x; D), \cdots, f_1^{\mu\nu}(t, x; D) \end{bmatrix} \\ f_j^{\mu\nu}(t, x; D) = \mathcal{V}_{n(\nu)}^{(\mu)}(x; D)a_j(t, x; n^\rho \xi^0 + iD) - a_{jn\,\mathrm{loc}}(t, x; D)\mathcal{V}_{n(\nu)}^{(\mu)}(x; D). \end{cases}$$

Revenons au $(\varDelta)_{\rho\delta}(0)$. D'après le choix de γ, nous avons:

$$\mathscr{d}(\rho\alpha - \delta\nu(j\alpha h)) - \gamma(\sigma(j\alpha h) - qj) \leq pj \qquad (^\forall j, \alpha, h)$$

avec l'égalité à $\left(1 + \dfrac{\sigma(j\alpha h)}{j}, \dfrac{\mathscr{d}(\rho\alpha - \delta\nu(j\alpha h))}{j}\right) \in \Gamma_P^+$ pour $\gamma = \sigma_P^+$, sinon à $\left(1 + \dfrac{\sigma(j\alpha h)}{j}, \dfrac{\mathscr{d}(\rho\alpha - \delta\nu(j\alpha h))}{j}\right) \equiv P$.

Donc

$$\begin{aligned} a_j^1(t, x; \eta; n) &\equiv (n^{pj} t^{qj})^{-1} a_{jn\,\mathrm{loc}}(t, x; \eta) \\ &\equiv \sum_{\alpha h} t^{\sigma(j\alpha h) - qj} n^{\mathscr{d}(\rho\alpha - \delta\nu(j\alpha h)) - pj} (x^{0\nu(j\alpha h)} a_{j\alpha h}(0, x_\delta^0)\zeta^{0\alpha} \\ &\quad + n^{-\mathscr{d}(\rho\alpha - \delta\nu(j\alpha h))}\{(X^{\nu(j\alpha h)} a_{j\alpha h}(t, X)(n^\rho \xi^0 + i\Xi)^\alpha)|_{X = \chi_n(x),\, \Xi = \Xi_n(\eta)} \\ &\quad - (n^{-\delta} x^0)^{\nu(j\alpha h)} a_{j\alpha h}(0, x_\delta^0)(n^\rho \zeta^0)^\alpha\}) \end{aligned}$$

satisfont à

$$\begin{cases} a_j^1(t, x; \eta; n) = \displaystyle\sum_{(j\alpha h) \in \Gamma_P^+} t^{0\sigma(j\alpha h) - qj} x^{0\nu(j\alpha h)} a_{j\alpha h}(0, x_\delta^0)\zeta^{0\alpha} + o_{r_0, \hat{r}_0, n, t^1}(1) \qquad (^\forall t \in [t_n^0, t_n^1]) \\ |a_{j(\nu)}^{1(\mu)}(t, x, \eta; n)| \leq {}^\exists C\mu!\nu!^{s^*} \hat{\rho}_0^\mu \rho_0^\nu n^{-\rho\mu + \delta\nu} \qquad (^\forall \mu, {}^\forall \nu) \qquad (^\forall t \in [t_n^0, t_n^1]) \\ \qquad\qquad (^\forall x; |x - x^0| \leq 4r_0, {}^\forall \eta; |\eta - \eta^0| \leq 4\hat{r}_0) \\ |a_{j(\nu)}^{1(\mu)}(t, x, \eta; n)| \leq {}^\exists C\mu!^{s^*}\nu!^{s^*} \hat{\rho}_0^\mu \rho_0^\nu n^{-\rho\mu + \delta\nu} \qquad (^\forall \mu, {}^\forall \nu, {}^\forall x, {}^\forall \eta) \qquad (^\forall t \in [t_n^0, t_n^1]) \end{cases}$$

où $o_{r_0, \hat{r}_0, n, t^1}(1)$ est la quantité tendant vers zéro quand on fait tendre r_0, $\hat{r}_0$ vers zéro, n vers ∞ et t^1 vers t^0.

Soit H une matrice telle que l'on ait

$$\begin{aligned} &H \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & & 0 & & 1 \\ \mathring{a}_{m^0} & & & & \mathring{a}_1 \end{bmatrix} H^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1(t^0, x^0; \zeta^0) & & 0 \\ & \ddots & \\ \mathring{\lambda}_{ij} & & \lambda_{m^0}(t^0, x^0; \zeta^0) \end{bmatrix} \qquad \text{avec } |\mathring{\lambda}_{ij}| \leq \frac{\delta_0}{2m^0}. \end{aligned}$$

où
$$\mathring{a}_j \equiv \sum_{(j\alpha h)\in \mathring{\Gamma}_P} t^{0\sigma(j\alpha h)-qj} x^{0\nu(j\alpha h)} a_{j\alpha h}(0, x^0_\delta)\xi^{0\alpha}$$

Posons

$$U^1_n(t, x) \equiv H \operatorname{diag}[1, (n^p t^q)^{-1}, \cdots, (n^p t^q)^{-(m^0-1)}]\theta_n(x) U^0_n(t, x)$$

Alors, l'effet de l'irrégularité à $t = 0$ de la transformation

$$\operatorname{diag}[1, (n^p t^q)^{-1}, \cdot, (n^p t^q)^{-(m^0-1)}]$$

est estimée, pour $t \in [t^0_n, t^1_n]$, par

$$^\exists C n^p t^q (n^{-(p-\gamma(q+1))} t^{0-(q+1)}) .$$

Or compte tenu de (H-2), $n^{-(p-\gamma(q+1))} t^{0-(q+1)}$ peut être minimisée autant qu'on veut par faire tendre n vers ∞.

Choix de r_0, $\hat{r}_0$, t^1. Nous choisissons r_0, $\hat{r}_0$, t^1 en sorte que l'on ait

$$\{x; |x - x^0_{\delta-\sigma}| \le 6r_0\} \subset \Omega_0 , \quad r_0 \le \operatorname{Min}\{\rho_0^{-1}, 1\} , \quad \hat{r}_0 \le \operatorname{Min}\{\hat{\rho}_0^{-1}, 1\} , \quad t^1 \le T_0 ,$$

et que, le system [0] s'écrivant:

$$[1] \quad \begin{cases} \partial_t V^{(\mu)}_{n(\nu)}(x; D) U^1_n(t, x) = n^p t^q [A^1(t, x; D; n) V^{(\mu)}_{n(\nu)}(x; D) U^1_n(t, x) \\ \qquad\qquad + F^1(V^{(\mu)}_{n(\nu)}; U^1_n)(t, x)] \\ A^1(t, x; D; n) = \begin{pmatrix} \lambda_1(t^0, x^0; \zeta^0) & \cdot & 0 \\ 0 & & \lambda_{m^0}(t^0, x^0; \zeta^0) \end{pmatrix} + (\lambda_{ij}(t, x; D; n)) \\ \qquad |\lambda^{(\mu)}_{ij(\nu)}(t, x; \eta; n)| \le {}^\exists C \mu!^{s^*} \nu!^{s^*} \hat{\rho}_0^\mu \rho_0^\nu n^{-\rho\mu+\delta\nu} \\ F^1(V^{(\mu)}_{n(\nu)}; U^1_n)(t, x) = H \begin{pmatrix} & 0 & \\ n^{-pm^0} t^{-qm^0} f^{\mu\nu}_{m^0}(t, x; D), & \cdot, & n^{-p} t^{-q} f^{\mu\nu}_1(t, x; D) \end{pmatrix} \\ \qquad \times H^{-1} U^1_n(t, x) . \end{cases}$$

l'on ait: $|\lambda_{ij}(t, x; \eta; n)| \le \dfrac{\delta_0}{m^0} \qquad {}^\forall t \in [t^0_n, t^1_n],\ {}^\forall x,\ {}^\forall \eta,\ {}^\forall n \gg 1 .$

Nous estimons d'abord

$$|||F^1(V^{(\mu)}_{n(\nu)}; U^1_n)(t, \circ)||| .$$

Définition de $M^{\mu\nu}_n(\kappa)$. Soit, pour $\kappa > 1$ donné que nous déterminerons ultérieurement:

$$M^{\mu\nu}_n(\kappa) \equiv \hat{N}^{(s^*-1)\mu}_\eta (\hat{\rho}_0(\hat{r}_0)\kappa)^\nu (\rho_0(r_0)\kappa)^\mu n^{-\rho\nu+\delta\mu}$$

DÉFINITION DE $C(s^{\sim})$. Soit:

$$C(s^{\sim}) \equiv \begin{cases} \underset{j;\, \ell_{\rho\delta}=(\rho_j-\delta_j)/s_j^{\sim}}{\operatorname{Min}} \left(\dfrac{\hat{r}}{C_0\rho_0(r_0)_j\kappa e}\right)^{1/s_j^{\sim}} \\ \text{au cas où il n'y a pas de } j \text{ tel que } \ell_{\rho\delta} = \rho_j - \delta_j \\ \operatorname{Min}\left\{ \underset{j;\, \ell_{\rho\delta}=(\rho_j-\delta_j)/s_j^{\sim}}{\operatorname{Min}} \left(\dfrac{\hat{r}}{C_0\rho_0(r_0)_j\kappa e}\right)^{1/s_j^{\sim}}, \left(\dfrac{r}{C_0\hat{\rho}_0(\hat{r}_0)\kappa e}\right)\right\} \\ \text{au cas où il } y \text{ a au moins un } j \text{ tel que } \ell_{\rho\delta} = \rho_j - \delta_j \end{cases}$$

où C_0 est la constante à la proposition 2 à [7].

On a la proposition suivante dûe à S. Mizohata [17], [18] dont on trouve la démonstration à [7].

Proposition 4. *Supposons que les coefficients satisfassent*:

$$|\partial_x^\nu a_{j\alpha k}(t, x)| \leq {}^\exists C_K \nu!^{s^{\sim}} \rho_0^\nu \qquad {}^\forall\nu,\ {}^\forall(t, x) \in [0, T] \times K,\ {}^\forall j,\ \alpha,\ K \text{ compact} \subset \Omega_0 .$$

Alors il existe une constante absolue C_2 et un polynôme absolu $P(n)$ tels que l'on ait:

$$\begin{aligned} &\sum_{\mu \leq \hat{N}_\eta,\, \nu \leq N_\eta} M_n^{\mu\nu}(\kappa) |||F^1(\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)};\, U_n^1)(t, \circ))||| \\ &\leq C_2\kappa^{-1} \sum_{\mu \leq \hat{N}_\eta,\, \nu \leq N_\eta} M_n^{\mu\nu}(\kappa) \|\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(\circ;\, D)U_n^1(t, \circ)\| \\ &\quad + {}^\exists P(n) \exp(-C(s^{\sim})n^{\ell}) \|U_n^1(t, \circ)\| \qquad (\ell \equiv \ell_{\rho\delta}) . \end{aligned}$$

Nous estimons $U_n^1(t, x)$ du système [I]:

On a, compte tenu de (H-4) et l'inégalité de Gårding:

$$\begin{aligned} &\partial_t \left[\sum_{j=1}^{m^2} \|\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(\circ;\, D)U_{nj}^1(t, \circ)\| - \sum_{j=m^2+1}^{m^0} \|\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(\circ;\, D)U_{nj}^1(t, \circ)\| \right. \\ &\geq n^p t^q \left(2\delta_0 \left(\sum_{j=1}^{m^2} \|\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(\circ;\, D)U_{nj}^1(t, \circ)\| - \sum_{j=m^2+1}^{m^0} \|\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(\circ;\, D)U_{nj}^1(t, \circ)\| \right) \right. \\ &\quad \left. + (\delta_0 |||\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(\circ;\, D)U_n^1(t, \circ)||| - |||F^1(\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)};\, U_n^1)(t, \circ))|||) \right) \end{aligned}$$

Soit:

$$\begin{aligned} E^1(U_n^1)(t) = \sum_{\mu \leq \hat{N}_\eta,\, \nu \leq N_\eta} M_n^{\mu\nu}(\kappa) &\left[\sum_{j=1}^{m^2} \|\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(\circ;\, D)U_{nj}^1(t, \circ)\| \right. \\ &\left. - \sum_{j=m^2+1}^{m^0} \|\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(\circ;\, D)U_{nj}^1(t, \circ)\| \right] . \end{aligned}$$

Alors on a, grâce à la proposition 4:

$$\partial_t E^1(U_n^1)(t)$$

$$\geq n^p t^q \left[2\delta_0 E^1(U_n^1)(t) + (\delta_0 - C_2\kappa^{-1}) \sum_{\mu \leq \hat{N}_n, \nu \leq N_n} M_n^{\mu\nu}(\kappa) ||| \Gamma_{n(\nu)}^{(\mu)}(\circ; D) U_n^1(t, \circ) ||| \right]$$

$$- {}^{\exists}P(n) \exp(-C(s^{\sim})n^{\ell}) ||| U_n^1(t, \circ) ||| \qquad (\ell \equiv \ell_{\rho\delta}).$$

Choix de κ. Nous choisissons ici κ en sorte que l'on ait: $\delta_0 - C_2\kappa^{-1} \geq 0$, $1 \leq \kappa$. Alors par les intégrer on a, tant que $E^1(U_n^1)(t^0 n^{-\gamma}) > 0$,

$$(5\text{-}4)\quad \begin{cases} E^1(U_n^1)(t_n^1) \geq \exp\left(\dfrac{2\delta_0}{q+1}(t^{1^{q+1}} - t^{0^{q+1}}) n^{p-\gamma(q+1)}\right) \\ \qquad \times \left(E^1(U_n^1)(t_n^0) - {}^{\exists}P(n) \exp(-C(s^{\sim})n^{\ell}) \right. \\ \qquad \left. \times \operatorname{Sup}_{t \in [t_n^0, t_n^1]} ||| U_n^1(t, \circ) ||| \right) \qquad (q \neq -1) \qquad (\ell \equiv \ell_{\rho\delta}) \\ E^1(U_n^1)(t_n^1) \geq \exp\left(2\delta_0 n^p \log\left(\dfrac{t^1}{t^0}\right)\right) \\ \qquad \times \left(E^1(U_n^1)(t_n^0) - {}^{\exists}P(n) \exp(-C(s^{\sim})n^{\ell}) \right. \\ \qquad \left. \times \operatorname{Sup}_{t \in [t_n^0, t_n^1]} ||| U_n^1(t, \circ) ||| \right) \qquad (q = -1) \qquad (\ell \equiv \ell_{\rho\delta}) \end{cases}$$

Soient $\hat{\varphi}^j(\xi)$ $(j = 1, \cdot, d)$ des fonctions d'une variable de la classe de Gevrey d'indice (s_j^*) telles que

$$\begin{cases} 0 \leq \tilde{\varphi}^j(\eta) \leq 1, \qquad \hat{\varphi}^j(\eta) = 1 \qquad \text{sur } \{\eta; |\eta - \eta_j^0| \leq \frac{1}{4}\hat{r}\}, \\ \operatorname{Supp} \varphi^j(\eta) \subset \{\eta; |\eta - \eta_j^0| \leq \frac{1}{2}\hat{r}\}, \\ |\hat{\varphi}^{j(\alpha)}(\eta)| \leq {}^{\exists}C\alpha!^{s_j^*}\hat{\rho}_0^{\alpha} \qquad ({}^{\forall}\alpha) \end{cases}$$

et
$$\hat{\varphi}_n(\eta) = \hat{\varphi}^1(n^{-\rho_1}\eta_1) \cdots \hat{\varphi}^d(n^{-\rho_d}\eta_d).$$

Et soit

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{i(x - n^{-\delta}x^0)\eta} \hat{\varphi}_n(\eta) d\eta.$$

Soit $U_n^0(t, x)$ la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} [\partial_t I - A(t, x; n^{\rho}\xi^0 + \partial_x)] U_n^0(t, x) = 0 \\ U_n^0(t_n^0, x) = H^{-1}\,{}^t(\varphi_n(x), 0, \ldots, 0) \end{cases}$$

C'est cette solution-ci qui nous mène à la contradiction. En effet on a d'une part:

$$\|\partial_x^\alpha U_{nj}^0(t_n^0, \circ)\| = \|\eta^\alpha \hat{U}_{nj}^0(\eta)\| \leq {}^\exists C({}^\exists cn)^{\rho\alpha} .$$

Donc grâce à (H-3), pour tout $A > 0$, tant que $|n^\delta x - x^0| \leq 2r$ entraine $n^{\sigma^1} x \in \Omega_A$, on a, avec un polynôme $P_A(n)$ en n:

$$\sum_{j=1}^{m^0} \sup_{\substack{|n^\delta x - x^0| \leq 2r \\ t \in [t_n^0, t_n^1]}} |U_{nj}^0(t, x)| \leq P_A(n) \exp(An^a) \qquad {}^\forall n \gg 1$$

et, compte tenu de la définition de $U_n^1(t, x)$, on a avec un polynôme absolu $P(n)$

$$\text{(5-5)} \quad \begin{cases} E^1(U_n^1)(t_n^1) \leq P(n) \|\!|U_n^1(t_n^1, \circ)\|\!| \leq P(n) \sup\limits_{t \in [t_n^0, t_n^1]} \|\!|U_n^1(t, \circ)\|\!| \\ \qquad \leq P(n) P_A(n) \exp(An^a) \qquad ({}^\forall n \gg 1) . \end{cases}$$

D'autre part on a, pour tout N:

$$\begin{aligned} E^1(U_n^1)(t_n^0) &\geq \|V_n(\circ, D)\varphi_n(\circ)\| \\ &\equiv \|\alpha_n(D)\beta_n(\circ)\varphi_n(\circ)\| \\ &\geq \|\beta_n(\circ)\alpha_n(D)\varphi_n(\circ)\| - \|J_N(\alpha_n, \beta_n)(\circ; D)\varphi_n(\circ)\| \end{aligned}$$

où
$$J_N(\alpha_n, \beta_n)(x; \xi) \equiv V_n(x; \xi) - \sum_{|\gamma| \leq N} \frac{1}{\gamma!} \alpha_n^{(\gamma)}(\xi) \beta_{n(\gamma)}(x)$$

Or on a la proposition dont on trouve la démonstration à [6], [7].

Proposition 5. *Par choisir N_η^* convenablement, on a avec une constante c et un polynôme absolu $P(n)$:*

$$\|J_{N_\eta^*}(\alpha_n, \beta_n)\| \leq {}^\exists P(n) \exp(-{}^\exists cn^{\ell^*}) \qquad \text{où } \ell^* \equiv \min_j \frac{\rho_j - \delta_j}{s_j^*} .$$

Grâce à cette proposition 5, on a:

$$E^1(U_n^1)(t_n^0) \geq \|\beta_n \varphi_n\| - {}^\exists C \exp(-{}^\exists cn^{\ell^*}) \|\varphi_n\| .$$

Or ayant:

$$|\varphi_n(n^{-\delta} x^0)| = \frac{1}{(2\pi)^d} \left| \int \hat{\varphi}_n(\eta) d\eta \right| \geq {}^\exists Cn^\rho$$

et
$$|\partial_x^\alpha \varphi_n(x)| = \frac{1}{(2\pi)^d} \left| \int e^{i(x - n^{-\delta}x^0)\eta} (i\eta)^\alpha \hat{\varphi}_n(\eta) d\eta \right| \leq {}^\exists Cn^{2\rho} \qquad (\mathscr{A}(\alpha) = 1)$$

on a, avec un ${}^\exists C > 0$ suffisamment petit:

$$|\varphi_n(x)| \geq {}^\exists Cn^\rho \qquad ({}^\forall x; |x - n^{-\delta} x^0| \leq {}^\exists Cn^{-\rho}) .$$

On a par conséquent:

$$\|\beta_n \varphi_n\| \geq \left(\int_{|x - n^{-\delta} x^0| \leq {}^3Cn^{-\rho}} |\varphi_n(x)|^2 dx \right)^{1/2} \geq {}^3Cn^{\rho/2} .$$

Ainsi on a:

$$E^1(U_n^1)(t_n^0) \geq {}^3Cn^{\rho/2} \qquad ({}^\forall n \gg 1) . \tag{5-6}$$

CHOIX DE A, r *et* $\hat{r}$. Au cas où $a < \ell_{\rho\delta}$, nous choisissons A tel que

$$\begin{cases} A < \dfrac{2\delta_0}{q+1}(t^{1^{q+1}} - t^{0^{q+1}}) & (q \neq -1) \\ \quad < 2\delta_0 \log\left(\dfrac{t^1}{t^0}\right) & (q = -1). \end{cases} \tag{5-7}$$

Soient r et $\hat{r}$ des nombres quelconques tel que l'on ait:

$$\{x; |x - x^0_{\delta - \sigma^1}| \leq 2r\} \subset \Omega_A , \qquad 0 < 2r < r_0 , \qquad 0 < 2\hat{r} < \hat{r}_0 .$$

Au cas où $a = \ell_{\rho\delta}$ à l'exception du cas (5-2), nous choisissons $\hat{r}$ en sorte que l'on ait $0 < 2\hat{r} < \hat{r}_0$, et nous choisissons A tel que l'on ait (5-7) et

$$A < C(s^\sim) \tag{5-8}$$

Soit r un nombre quelconque tel que l'on ait: $\{x; |x - x^0_{\delta-\sigma^1}| \leq 2r\} \subset \Omega_A$, $0 < 2r < r_0$. Ce qui est faisable car $x^0_{\delta - \sigma^1} \in \bigcap_{A>0} \Omega_A$ et que $C(s^\sim)$ est alors indépendant de r.

Au cas exceptionnel (5-2), nous choisissons r et $\hat{r}$ arbitraires mais tels que l'on ait: $\{x; |x - x^0_{\delta-\sigma^1}| \leq 2r\} \subset \Omega_1$, $0 < 2r < r_0$, $0 < 2\hat{r}_0 < \hat{r}$. Et nous choisissons A en sorte que l'on ait (5-7) et (5-8). Ce qui est faisable d'après l'hypothèse sur Ω_A au cas exceptionnel (5-2).

Remarquons que, pour tout A fixé, x; $|n^\delta x - x^0| \leq 2r$ entraine x; $n^{\sigma^1} x \in \Omega_A$ pour tout n suffisdamment grand. Alors grâce à l'estimation d'énergie (5-4), (5-5), (5-6), (H-2) et le choix de A, on a:

$$\begin{cases} E^1(U_n^1)(t_n^1) \geq \exp\left(\dfrac{2\delta_0}{q+1}(t^{1^{q+1}} - t^{0^{q+1}}) n^{p - \gamma(q+1)}\right) & (q \neq -1) \\ \qquad \geq \exp\left(2\delta_0 \log\left(\dfrac{t^1}{t^0}\right) n^p\right) & (q = -1). \end{cases} \tag{5-9}$$

C'est contradictoire à (5-5) encore grâce au (H-2) et le choix de A. Ainsi [1] de la proposition fondamentale est démontrée.

[2] Nous montrons [2]: Au cas où $s^\sim < +\infty$, $A = A^1$ étant fixé cette fois, nous choisissons, excepté le cas exceptionnel (5-1), ρ_0 en sorte que l'on ait

$$A^1 < C(s^\sim) . \tag{5-8}$$

Le reste est tout pareil au précédent.

Au cas où un des $s_j^{\sim} = \infty$, $\mathscr{b}_{\rho\delta}$ étant alors nulle, $a = 0$ d'après (H-2). Alors considérant tous les $s_j^{\sim} = \infty$, on modifie et simplifie alors ce raisonnement comme le suit:

Il ne faut pas l'estimation de Gevrey. On n'a donc pas besoin de quantités: s^*, ρ_0, $\hat{\rho}_0$, $\rho_0(r_0)$, $\hat{\rho}_0(\hat{r}_0)$, N_n, $\hat{N}_n$, $C(s^{\sim})$. Au choix de r et $\hat{r}$, il suffit de choisir $r = r_0$ et $\hat{r} = \hat{r}_0$. Aux définitions des $\chi_n(x)$, $\Xi_n(\eta)$, $\alpha_n(\eta)$, $\beta_n(x)$, $\theta_n(x)$, $\varphi_n(\eta)$, il suffit de les choisir en fonctions C^∞ sans estimation de Gevrey. La définition de $M_n^{\mu\nu}(\kappa)$ est remplacée par la suivante.

DÉFINITION DE $\tilde{M}_n^{\mu\nu}(\kappa)$. Soit, pour $\kappa > 1$ donné,

$$\tilde{M}_n^{\mu\nu}(\kappa) \equiv \kappa^{\mu+\nu} n^{-\rho\nu+\delta\mu} .$$

La proposition 4 est remplacée par la suivante qui est démontrée pareillement ou même plus aisément qu'à la proposition 4.

DÉFINITION DE c.

$$c \equiv \mathrm{Min}\,\{(\rho_j - \delta_j); j = 1, \cdot, d\} .$$

Proposition 4 bis (cas où $s_j^{\sim} = \infty$ $(j = 1, \cdot, d)$). *On a, avec une constante absolue N^2 pour tout N;*

$$\sum_{\mu,\nu \le N} \tilde{M}_n^{\mu\nu}(\kappa) |||F^1(\mathscr{V}_{n(\nu)}^{(\mu)}; U_n^1)(t, \circ))|||$$

$$\le C_2 \kappa^{-1} \sum_{\mu,\nu \le N} \tilde{M}_n^{\mu\nu}(\kappa) \| \mathscr{V}_{n(\nu)}^{(\mu)}(\circ; D) U_n^1(t, \circ)\| + {}^3C n^{-cN+N^2} \| U_n^1(t, \circ)\|$$

La proposition 5 est remplacée par la suivante qui est démontrée pareillement ou même plus aisément que la proposition 5.

Proposition 5 bis (cas où $s_j^{\sim} = \infty$ $(j = 1, \cdot, d)$). *On a pour tout N*

$$\| J_N(\alpha_n, \beta_n) \| \le {}^3C n^{-cN+N^2} .$$

Au lieux de choisir N_n, nous choisissions ici N en sorte que l'on ait: $N^2 + M^1 < cN$ où $M^1 \equiv \underset{n}{\mathrm{ordre}}\, P_{A^1\Phi}(n)$.

Compte tenu de ces modifications, il suffit alors de suivre le raisonnement ci-haut. **C.Q.F.D.**

§6. Démonstration des théorèmes

(1) Démonstration du théorème 1. [1] Quant à l'estimation à priori, grâce au théorème du graphe fermé de Banach, on a la proposition suivante [8], [9].

Proposition 6. *Soit* $s \equiv (s', s'') \equiv (s_1, \cdot, s_\ell, \infty, \cdot, \infty)$; $s_j < \infty$ $(j = 1, \cdot, \ell)$. *Supposons que les* $(\mathrm{PCH})_\tau (0 < \tau < T_0)$ *soient uniformément* (s)*-solubles. Alors on a l'estimation suivante:*

Il existe, pour tous $R > 0$ et compact $K \subset \Omega_1$ donnés, des constantes C et M tels que pour toutes les données $\varphi_j(x) \in H^s_R(\mathbf{R}^d)$ $(j = 1, \cdot, m^0)$ telles que

$$\sum_{j=1}^{m^0} \operatorname*{Sup}_{\jmath(\alpha'') \le M, \alpha'} \|\partial_x^\alpha \varphi_j\| / \alpha'!^{s'} R'^{\alpha'} \neq 0\,,$$

il existe une solution $u(t, x; \tau) \in C^{m^0}([\tau, T_1], C^{N^0}(\Omega_1))$ du (PCH)$_\tau$ *ayant l'estimation suivante uniforme par rapport à $\tau \in [0, T_1)$*

$$\sum_{j=0}^{m0} \operatorname*{Sup}_{\substack{\jmath(\alpha) \le N^0 \\ x \in K}} |\tau^{M^0} \partial_t^j \partial_x^\alpha u(t, x; \tau)| \le C \sum_{j=1}^{m^0} \operatorname*{Sup}_{\jmath(\alpha'') \le M, \alpha'} \|\partial_x^\alpha \varphi_j\| / \alpha'!^{s'} R'^{\alpha'} \qquad t \in [\tau, T_1]$$

Par l'application de la proposition 6, on a l'estimation à priori de la solution du (PCHS)$_\tau$$(0 < \tau)$:

Il existe, pour tous $R > 0$ et compact $K \subset \Omega_1$ donnés, un polynôme $P(n)$ en n tel que pour la donnée $\Phi(x) \equiv (\varphi_{n1}, \cdot, \varphi_{nm^0})$ telle que l'on ait:

$$\|\partial_x^\alpha \varphi_{nj}\| \le {}^3C_{\Phi\alpha''}(c_\Phi n)^{\rho'\alpha'}$$

avec des constantes $C_{\Phi\alpha''}$ et c_Φ, il existe une solution $U_n^0(t, x; \tau)$ du (PCHS)$_\tau$$(0 < \tau)$ ayant l'estimation:

$$\sum_{j=1}^{m^0} \operatorname*{sup}_{\substack{\jmath(\alpha) \le N^0 \\ x \in K, 0 < \tau \le t \le T_1}} |\tau^{M^0} \partial_x^\alpha U_{nj}^0(t, x; \tau)| \le {}^3P(n) \exp(An^a)$$

où $\qquad a \equiv a_{\rho\delta} \qquad$ et $\qquad A \equiv \operatorname{Max}\{s_j(c_\Phi^{\rho_j}/R_j)^{1/s_j}; j = 1, \cdot, \ell\}$.

Etant $s \neq +\infty$, $a_{\rho\delta} > 0$. Etant $a_{\rho\delta} \le \ell_{\rho\delta}$, $s^\sim < +\infty$. On a [1] par l'application de [1] à la proposition fondamentale avec $\xi^0 = 0$, $a = a_{\rho\delta}$, $\sigma^0 = 0$, $\sigma^1 = 0$, $A = \operatorname{Max}\{s_j(c_\Phi^{\rho_j}/R_j)^{1/s_j}; j = 1, \cdot, \ell\}$ où R_j peuvent être choisis arbitraires et $\gamma = \operatorname{Max}\{\sigma^0, \sigma_P^+\}$.

[2] ([3] resp.) Par l'application du homologue de la proposition 6, on peut raisonner tout pareillement au précédent. Mais il faudrait remarquer quand même que T_1 (T_1 et Ω_1 resp.) dépend du choix de R. Donc à l'application de la proposition fondamentale, on choisit $\sigma^0 > 0$ convenablement. On y rend compte de (5-3).

[4] On peut aussi raisonner come au [1]. La seule différence à remarquer est que R n'est plus arbitrairement choisi mais qu'il est fixé. L'application de [2] à la proposition fondamentale avec $\xi^0 = 0$, $a = a_{\rho\delta}$ et $\sigma_0 = \sigma^1 = 0$ montre [4].

C.Q.F.D.

(2) Démonstration du théorème 2. Pareillement à la proposition 12 à [8], on a la suivante:

Proposition 8 (S. Mizohata). *Supposons que les* (PCH)$_\tau$$(0 < \tau < T_0)$ *soient uniformément* $\langle\infty\rangle$*-solubles et que les* (PCH)$_\tau$$(0 < \tau < T_0)$ *aient la propriété de l'unicité à jauge $g(t, x)t^\kappa x^\nu$ à l'origine.*

Pour un compact $K \subset \Omega_1$, il existe des nombres positif M, N, C et un polynôme $P(n)$ en n tels que la solution $U_n^0(t, x; \tau)$ du $(\text{PCHS})_{\tau\zeta^0 n}$ *satisfait*

$$\sum_{j=1}^{m^0} |\tau^{M^0} U_{nj}^0(t, x; \tau)| \le {}^\exists P(n) \exp({}^\exists C n^\rho g(t, x) t^\kappa x^\nu) \sum_{\substack{\jmath(\alpha) \le M \\ j=1,\cdot,m^0}} \|\partial^\alpha \varphi_j\| \qquad \begin{matrix} {}^\forall t \in [\tau, T_0] \\ {}^\forall x \in K \end{matrix}$$

Nous montrons le théorème 2 par absurde. Nous supposons d'une part que les $(\text{PCH})_\tau (0 < \tau < T_0)$ soient uniformément $\langle \infty \rangle$-solubles et que les $(\text{PCH})_\tau (0 < \tau < T_0)$ aient la propriété de l'unicité à jauge $o(t^\kappa (x - \hat{x})^\nu)$ à $\hat{x}$, soit

$$g(t, x) t^\kappa (x - \hat{x})^\nu \equiv (g_1(t, x) t^{\kappa_1} (x - \hat{x})^{\nu^1}, \cdots, g_d(t, x) t^{\kappa_d} (x - \hat{x})^{\nu^d})$$

avec $\lim_{t \to 0} g(t, x) = 0$ pour un $\hat{x}$ ($\hat{x} \in \Omega_0$), un $\nu = (\nu^1, \cdot\cdot, \nu^d)$ et un (ρ, δ) $(0 \le \delta < \rho)$ et un $\kappa \equiv (\kappa_1, \cdot, \kappa_d) \ge (\kappa_{\nu^1}^\theta, \cdot, \kappa_{\nu^d}^\theta)$ pour un θ tel que $\theta > 0$, $p_\theta - \theta(1 + q_\theta) > 0$ où $P_\theta \equiv (1 + q_\theta, p_\theta)$ satisfait (3-6).

Alors grâce à l'hypothèse (3-6), on peut bien supposer d'autre part qu'il existe un $\zeta^0 \equiv \xi^0 + i\eta^0$ $(\eta^0 \ne 0)$ et un x^0 tels qu'il existe au moins une racine $\lambda(0, x^0; \zeta^0)$ de $\rho_{P_\theta}^{\rho\delta}(\lambda)(0, x^0; \zeta^0; \hat{x}) = 0$ dont la partie réelle soit positive. Supposons pour la simplicité d'écriture que $\hat{x} = 0$. Alors on a:

$$0 < \theta\,; \qquad \sigma_{P_\theta}^+ \le \theta < \sigma_{P_\theta}^-\,; \qquad 0 < p_\theta - \theta(1 + q_\theta) \qquad \text{où } P_\theta \equiv (1 + q_\theta \cdot p_\theta)\,;$$

$$\rho_j - \jmath(\nu^j \delta) - \theta\kappa_j \le \operatorname{Min}\{p_\theta - \theta(1 + q_\theta), \ell_{\rho\delta}\} \qquad (j = 1, \cdot, d)\,.$$

Par l'application de la proposition 8, on a l'estimation à priori:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{m^0} \sup_{\substack{|x| \le Bn^{-\delta} \\ 0 < \tau \le t < T_0 n^{-\theta}}} |\tau^{M^0} U_{nj}^0(t, x; \tau)| \\ &\le {}^\exists P(n) \exp\left({}^\exists C \sum_{j=1}^{d} \sup_{\substack{|x| \le Bn^{-\delta} \\ t \in [0, T_0 n^{-\theta}]}} g_j(t, x)\right) n^{\rho_j - \jmath(\nu^j \delta) - \theta\kappa_j)} \sum_{\substack{\jmath(\alpha) \le M \\ j=1,\cdot,m^0}} \|\partial^\alpha \varphi_j\| \\ &\le {}^\exists P(n) \exp\left({}^\exists C \left(\sup_{\substack{|x| \le Bn^{-\delta} \\ t \in [0, T_0 n^{-\theta}], j=1,\cdot,d}} g_j(t, x)\right) n^{a}\right) \sum_{\substack{\jmath(\alpha) \le M \\ j=1,\cdot,m^0}} \|\partial^\alpha \varphi_j\| \end{aligned}$$

où
$$a = \operatorname{Max}\{0, \rho_j - \jmath(\nu^j \delta) - \theta\kappa_j; j = 1, \cdot, d\}\,.$$

Au cas où $s^\sim < +\infty$, on peut appliquer [1] de la proposition fondamentale avec $\xi^0 = \operatorname{Re} \zeta^0$, $\sigma^0 = \theta$, $\sigma^1 = \delta$, $a = \operatorname{Max}\{0, \rho_j - \jmath(\nu^j \delta) - \theta\kappa_j; j = 1, \cdot, d\}$, $\gamma = \theta$ et $\Omega_A \equiv \{x; |x| \le B\} \subset \Omega_0$ avec un $B > 0$ choisi pour tout $A > 0$ donné:

$$\operatorname{Sup}\{g_k(t, x); t \in [0, T_0 n^{-\theta}], |x| \le Bn^{-\delta}, k = 1, \cdot, d\} < A \qquad ({}^\forall n \gg 1)\,.$$

Et au cas où un des $s_j^\sim = +\infty$, s étant $s = +\infty$, on peut appliquer [2] de la proposition fondamentale avec $\xi^0 = \operatorname{Re} \zeta^0$, $\sigma^0 = \theta$, $\sigma^1 = \delta$, $a = 0$, $\Omega_A \equiv \{x; |x| \le B\} \subset \Omega_0$ pour un $A \equiv A^1$ fixé, et $\gamma = \theta$. **C.Q.F.D.**

(3) Démonstration du théorème 3. Considérons un P en question. On sait, grâce au théorème 1, que la partie réelle de la racine de l'équation $\rho_P^{\rho\delta}(\lambda)(t, x; \xi; \hat{x}) = 0$ est non positive. Souvenons-nous:

$$\rho_P^{\rho\delta}(\lambda)(t, x; \xi; \hat{x}) \equiv \lambda^{m^0} - \sum_{(j\alpha h)\in \Gamma_P^+} t^{\sigma(j\alpha h)-qj} x^{\nu(j\alpha h)} a_{j\alpha h}(0, \hat{x} + x_\delta)\xi^\alpha \lambda^{m^0-j}$$

où $\Gamma_P^+ \equiv \left\{(j\alpha h); \left(1 + \dfrac{\sigma(j\alpha h)}{j}, \dfrac{\mathscr{A}(\rho\alpha - \delta\nu(j\alpha h))}{j}\right) \in \Pi_P^+\right\}$.

Soit $r \equiv \mathrm{Min}\,\{\mathscr{A}(\alpha)/j; (j\alpha h) \in \Gamma_P^+, a_{j\alpha h}(0, \hat{x}) \neq 0\}$. Remarquons qu'au cas où $s \neq \infty$, on a $\alpha_{\rho\delta} > 0$. On a $0 < r \leq 1$. Car, grâce au choix du P et à l'hypothèse, $\Pi_P^+ \cap \{(X, Y); X \geq 0, Y = 0\} = \phi$. D'autre part, on sait que la partie réelle de la racine de l'équation:

$$\lambda^{m^0} - \sum_{\substack{(j\alpha h)\in \Gamma_P^+ \\ \mathscr{A}(\alpha)=r}} t^{\sigma(j\alpha h)-qj} x^{\nu(j\alpha h)} a_{j\alpha h}(0, \hat{x} + x_\delta)\xi^\alpha \lambda^{m^0-j} = 0\,,$$

la racine étant homogène d'ordre r en ξ, est encore non positive pour tout (t, x) en question et tout $\xi \in \mathbf{R}^d$. Si $r < 1$, c'est une contradiction. **C.Q.F.D.**

(4) Démonstration du théorème 4.

Démonstration de la proposition 1. Envisageons la condition, pour ℓ fixé $(\ell = 1, \cdot, m)$:

(1) $L_{j(\mathring{\delta})}^{(\mathring{\gamma})}(\mathring{x}^0, \mathring{\xi}^0) = 0$ pour $\mathring{\gamma}$, $\mathring{\delta}$ tels que

$$\mathscr{A}(\mathring{\gamma} + (\mathring{\delta} - \mathring{\gamma})\mathring{p}) \leq m^0 - p_0(m^0 - k) - \frac{s}{s-1}(m^0 - j) \qquad j = 1, \cdot, m^0 - 1$$

Remarquons que l'on a:

$$L_{\ell(\mathring{\beta})}^{(\mathring{\gamma})}(\mathring{x}^0, \mathring{\xi}^0) = - \sum_{\substack{\mathscr{A}(\mu)=h-m^0+\ell \\ h=1,\cdot,m^0}} a_{h\mu(\mathring{\beta})}(\mathring{x}^0)\frac{\mu!}{(\mu-\gamma)!}\frac{(m^0-j)!}{(m^0-j-\gamma_0)!}\xi^{\mu-\gamma}\lambda^{m^0-h-\gamma_0}\Big|_{\xi=\mathring{\xi}^0}$$

$$= -\gamma_0!\gamma'!\frac{\mu_d!}{(\mu_d-\gamma_d)!}a_{h\mu(\mathring{\beta})}(0)$$

$$h = m^0 - \gamma_0\,, \qquad \mu' = \gamma'\,, \qquad \mu_d = \ell - \gamma_0 - \mathscr{A}(\gamma') \geq \gamma_d$$

Fixons j, α en sorte que l'on ait $\mathscr{A}(\alpha) = j - m^0 + \ell$. Compte tenu de cette remarque et $\mathscr{A}(\alpha) = j - m^0 + \ell$, on voit alors que (1) est équivalente à

(2) $a_{j\alpha(\mathring{\beta})}(0) = 0$ tant que

$$\mathscr{A}(\mathring{\beta}\mathring{p}) < j(1 - p_0) - \mathscr{A}(\alpha'(1 - p')) + \frac{s}{s-1}(\mathscr{A}(\alpha) - j) + kp_0 \qquad (\mathscr{A}(\alpha) = j - m^0 + \ell)\,.$$

Grâce à l'expension de Taylor, on voit que (2) est équivalente à

(3) $$\sigma(j\alpha h)p_0 + \mathscr{A}(\nu(j\alpha h)p) \geq -j\left(\frac{1}{s-1} + p_0\right) + \mathscr{A}\left(\alpha'\left(\frac{1}{s-1} + p'\right)\right) + \frac{s}{s-1}\alpha_d \qquad (\mathscr{A}(\alpha) = j - m^0 + \ell).$$

Soient $\rho' \equiv \frac{1}{s-1} + p'$, $\rho_d \equiv \frac{s}{s-1}$; $\delta \equiv p$. Pour ce $(\rho . \delta)$, les coefficients étant supposés analytiques, on a:

$$\frac{1}{s-1} = a_{\rho\delta} < b_{\rho\delta} \qquad \text{pour } d = 1 \text{ et } \frac{1}{s-1} = a_{\rho\delta} = b_{\rho\delta} \qquad \text{pour } d > 1$$

et (3) est équivalente à

$$(4) \quad \frac{\sigma(\rho\alpha - \delta v(j\alpha h))}{j} \leq p_0\left(1 + \frac{\sigma(j\alpha h)}{j}\right) + \frac{1}{s-1} \qquad (\sigma(\alpha) = j - m^0 + \ell).$$

La proposition est alors claire. **C.Q.F.D.**

Démonstration du théorème 4. Grâce au théorème 3 pour le poids $(\rho . \delta)$ défini à la proposition 1 pour p_j $(0 \leq j \leq d)$ données, on voit la nécessité de la (M_s) et (M_s') au cas [2] pour $p_0 = 0$. Quant à la nécessité de la (M_s') au cas [3], le théorème 3 pour ce poids ne peut pas être appliqué directement à cause du fait $a_{\rho\delta} = \frac{1}{s-1}$. Mais si on nie la (M_s'), le théorème 3 pour le poids $(\rho^{\sim}, \delta^{\sim})$, poids un peu perturbé de celui-là en sorte que $a_{\rho^{\sim}\delta^{\sim}} < \frac{s}{s-1}$, donne la contradiction. Le théorème 4 est alors clair grâce à la proposition 1.

(5) Démonstration du théorème 5. [1] Considérons le poids $(\rho, \delta) \equiv (1, 0)$. Montrons

$$(\Delta)_{10}(\hat{x}) \subset G \equiv \{(X, Y); X \geq 0, Y \leq 1\} - \{(0, 1)\}.$$

Remarquons que $b_{10} = 1$. Nions le résultat. Il existerait alors un $\theta > 0$ tel que $P_\theta \equiv (1 + q_\theta, p_\theta)$ satisfait à (3-6) et que $p_\theta - (1 + q_\theta) \geq 1$ de sorte que $\kappa_0^\theta = 0$. C'est une contradiction grâce au théorème 2.

Or compte tenu du théorème 1, on a

$$(\Delta)_{10}(\hat{x}) \subset G \equiv \{(X, Y); X \geq 0, Y \leq 1\} - \{(0, Y); 0 < Y \leq 1\}.$$

Le reste est claire encore grâce au théorème 1.

[2] Considérons le poids $(\rho, \delta) \equiv (1, 0)$. Montrons

$$(\Delta)_{10}(\hat{x}) \subset G \equiv \{(X, Y); X \geq 0, Y \leq \mu^{-1}X\}.$$

Nous remarquons que $b_{\rho\delta} = 0$. Nions le résultat. Il existerait alors un $\theta > \mu^{-1}$ tel que $P_\theta \equiv (1 + q_\theta, p_\theta)$ satisfait à (3-6) et que $p_\theta - (1 + q_\theta) \geq 0$ de sorte que $\kappa_0^\theta < \mu$. C'est une contradiction grâce au théorème 2.

Montrons que L est kowalevskien. Nions le résultat. Alors il existerait un (j, α) tel que $|\alpha| > j$, $a_{j\alpha}(t, x) \not\equiv 0$ à tout voisinage de l'origine. Alors il existerait un $\hat{t}$ sufiisamment petit tel que $a_{j\alpha}(\hat{t}, x) \not\equiv 0$. Considérons les $(\mathrm{PCH})_\tau (\hat{t} < \tau < T_0)$. Alors la considération de la première étape avec $\mu = 1$ nous mène à la contradiction. **C.Q.F.D.**

(6) Démonstration des théorèmes 6, 7.

Démonstration de la proposition 2. La démonstration se fait tout pareillement à [9]. Nous nous contentons d'esquisser la démonstration. Nous envoyons les lecteurs à [9] sur le détail.

Considérons les $(\mathrm{PCH})_\tau (0 < \tau < T_0)$ à données initiales communes $\varphi_j(x) \in H_R^s(\mathbf{R}^d)$ $(j = 1, \cdot, m^0)$. Formons la fonction $u^0(t, x; \tau) \in C^{m+m^0}([0, T_0], H_R^s(\mathbf{R}^d))$ qui est la solution formelle à $t = \tau$ du $(\mathrm{PCH})_\tau$ à données initiales $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{m^0}$. Soit $f^0(t, x; \tau) \equiv L(t, x; \partial_t, \partial_x) u^0(t, x; \tau)$. Nous la prolongeons par 0 dans $[0, \tau] \times \mathbf{R}^d$. La fonction $f(t, x; \tau)$ ainsi prolongée est de $C^{m^1}([0, T_0], H_R^s(\mathbf{R}^d))$ et plate à $t = 0$. Soit $v(t, x; \tau)$ la solution du $(\mathrm{PC})_0$ pour la donnée $f(t, x; \tau)$. Alors $u(t, x; \tau) \equiv u^0(t, x; \tau) - v(t, x; \tau)$ est la solution du $(\mathrm{PCH})_\tau$. Nous préparons l'estimation canonique pour la solution du $(\mathrm{PC})_0$ à l'aide du théorème du graphe fermé de Banach. Nous obtenons ainsi l'estimation de $v(t, x; \tau)$ par $f(t, x; \tau)$. Nous estimons $u^0(t, x; \tau)$ et $f^0(t, x; \tau)$ par les $\varphi_j(x)$ $(j = 1, \cdot, m^0)$. Par les réunissant, nous obtenons l'estimation uniforme par rapport à τ $(0 < \tau < T_0)$ de solutions $u(t, x; \tau)$ de $(\mathrm{PCH})_\tau$ par les données initiales $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{m^0}$ communes aux $(\mathrm{PCH})_\tau (0 < \tau < T_0)$. **C.Q.F.D.**

Démonstration de la remarque juste après la définition 6. Remarquons que la solution construite ci-haut est la solution unique. Supposons que le $(\mathrm{PC})_0$ ait l'unicité à juage $O(t^\mu)$. Fixons un S $(0 < S \le T_2)$. Fixons un (t^0, x^0) $(S < t^0 < T_2)$. Ayant $t^\mu - S^\mu \le {}^\exists C(t - S)$ $(S \le t < T_2)$, si les données initiales $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{m^0}$ aux $(\mathrm{PCH})_\tau (S < \tau < t^0)$ s'annullent dans $\{x; |x - x^0| \le C|t^0 - S|\}$, $u^0(t, x; \tau)$, $f^0(t, x; \tau)$ s'annullent dans $\{(t, x); |x - x^0| \le C|t - t^0|, \tau < t < t^0\}$. Donc $f(t, x)$ s'annule dans $\{(t, x); |x - x^0| \le |t^\mu - t^{0^\mu}|, 0 < t < t^0\}$. Grâce à l'hyporthèse, $v(t^0, x^0)$ et à posteriori $u(t^0, x^0)$ s'annulent. Ainsi les $(\mathrm{PCH})_\tau (S < \tau < T_2)$ ont l'unicité à jauge $O(t)$.

Supposons que le $(\mathrm{PC})_0$ soit $\mathscr{E}$-bien posé. Remarquons qu'à (UL), pour tous $\hat{x} \in \Omega_1$ et voisinage Ω de $\hat{x}$ relativement compact, on peut choisir η uniformément pour tout $x \in \Omega$. Soit η_n celui choisi pour $\varepsilon = 1/n$. Nous pouvons supposer $\eta_n > \eta_{n+1}$ $({}^\forall n)$; $\lim_{n \to \infty} \eta_n = 0$. Soit $\tilde{g}(t, x) \equiv 1/n$ si $\eta_{n+1} < t \le \eta_n$. Soit $g(t, x)$ la jauge telle que $\tilde{g}(t, x) \le g(t, x)$. Alors les $(\mathrm{PCH})_\tau (0 < \tau < T_2)$ ont l'unicité à jauge $g(t, x)$ à $\hat{x}$. **C.Q.F.D.**

La démonstration des théorèmes 6, 7 est alors claire.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
FACULTÉ DES SCIENCES
UNIVERSITÉ D'EHIMÉ

Bibliographie

[1] M. S. Baouendi-C. Goulaouic, Cauchy problem with characteristics initial hypersurface, Comm. Pure. Appl. Math., **26** (1973), 455–475.

[2] V. Ya. Ivrii, Conditions for correctness in Gevrey classes of the Cauchy problem for weakly hyperbolic equations, Sib. Math. J., **17** (1976), 422–435. (Sib. Mat. Z., **17**-3 (1976), 547–563)

[3] V. Ya. Ivrii, Cauchy problem conditions for hyperbolic operators with charactristics of variable multiplicity for Gevrey classes, Sib. Math. J., **17**-4-6 (1976), 921–931. (Sib. Mat. Z., **17**-6 (1976), 1256–1270)

[4] V. Ya. Ivrii-V. M. Petkov, Necessary conditions for the Cauchy problem for non-strictly hyperbolic equations to be well-posed, Russian Math. Surveys, **29**-5 (1974), 1–70. (Upsekhi Mat. Nauk, **29**-5 (1974), 3–70)

[5] K. Kajitani, On the $\mathscr{E}$-well posed evolution equations, Comm. Partial Differential Equations, **4**-6 (1979), 595–608.

[6] K. Kitagawa, Une remarque sur le problème de Cauchy analytique, J, Math. Kyoto Univ., **27**-2 (1987), 275–303.

[7] K. Kitagawa, Sur des conditions nécessaires pour les équations en évolution pour que le problème de Cauchy soit bien posé dans les classes de fonctions C^∞ [I]. J. Math. Kyoto Univ. 30-4 (1990) 671–703

[8] K. Kitagawa, Sur des conditions nécessaires pour les équations en évolution pour que le problème de Cauchy soit bien posé dans les classes de fonctions C^∞ [II]. J. Math. Kyoto Univ. 31-1 (1991) 1–32

[9] K. Kitagawa, Principe de Duhamel et Problèmes de Cauchy uniformément bien posés. (à paraitre dans J. Math. Kyoto Univ.)

[10] T. Mandai, Necessary Conditions for Well-Posedness of the Flat Cauchy Problem and the Regularity-Loss of Solutions, Publ. Res. Inst. Math. Sci., **19**-1 (1983), 145–168.

[11] T. Mandai, Generalised Levi conditions for weakly hyperbolic equations—An attempt to treat the degeneracy with respect to the space variables, Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ., **22**-1 (1986), 1–23.

[12] M. Miyake, Degenerate parabolic differential equations—Necessity of the well-posedness of the Cauchy problem, J. Math. Kyoto Univ., **14** (1974), 461–476.

[13] S. Mizohata, Some remarks on the Cauchy problem, J. Math. Kyoto Univ., **1**-1 (1961), 109–127.

[14] S. Mizohata, Henbibun Houteishiki ron (en japonais), Iwanami Shoten (1965), 262–264.

[15] S. Mizohata, On evolution equations with finite propagation speed, Israel J. Math., **13**-1-2 (1972), 173–187.

[16] S. Mizohata, On the Cauchy-Kowalevski theorem, Math. Anal. & Appl. part B Advances in Math. Suppl. Studies vol 7B (1981) (Acad. Press), 617–652.

[17] S. Mizohata, On the hyperbolicity in the domain of real analytic functions and Gevrey classes, Hokkaido Math. J., **12**-3 (1983), 298–310.

[18] S. Mizohata, On analytic regularities, Séminaire sur Propagation des singularités et opérateurs différentiels (J. Vaillant), Hermann (1985), 82–105.

[19] S. Mizohata, On the Cauchy problem for hyperbolic equations in C^∞ and Gevrey classes, Proc. of VIII Escola Latino-Americana de Matematica, Springer, 1986.

[20] S. Mizohata, On the Cauchy problem, (Lecture note at Wuhan) Acad. Press, 1986.

[21] S. Mizohata, On the Cauchy problem for hyperbolic equations and related problems (micro-local energy method) Taniguchi Symposium "Hyperbolic Equations and Related Topics".

[22] T. Nishitani, On the Lax-Mizohata Theorem in the Analytic and Gevrey Classes, Proc. Japan Acad., **53**-A-3 (1977), 88–90.

[23] H. M. Schaefer, Topological vector spaces, Macmillan Company, New York, 1966, 76–79.

[24] T. Sadamatsu, On a necessary condition for the well-posedness of the Cauchy problem for evolution equations. J. Math. Kyoto Univ. 29-2 (1989) 221–231

[25] H. Tahara, Fuchsian type equations and Fuchsian hyperbolic equations, Japan J. Math., **5**-2 (1979), 245–347.

[26] H. Tahara, Singular hyperbolic systems III. On the Cauchy problem for Fuchsian hyperbolic partial differential equations, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math., **27** (1980), 465–507.

[27] Y. Takei, Mizohata's micro-localization, Master Thesis, Kyoto Univ., 1986.