J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)
33-1 (1993) 115-142

Estimation de la densité d'une diffusion très dégénérée Etude d'un exemple

Par

Patrick FLORCHINGER et Rémi LÉANDRE

Introduction

Cet article est motivé par l'étude des formes sur l'espace des lacets menée dans [12] en se basant sur les travaux concernant la cohomologie cyclique entière développés dans [6]. Rappelons tout d'abord les principaux résultats obtenus dans [12]. Si $\sum_n (\omega_1^n, \dots, \omega_n^n)$ désigne une collection de formes sur une variété compacte M, la forme correspondante sur l'espace des lacets, de degré infini en général, obtenue au moyen d'intégrales itérées de Chen est dans tous les espaces L^p pourvu que la série $\sum_n \prod_{i=1}^n \frac{\|\omega_i^n\|_{1,\infty}}{\sqrt{n}} z^n$ possède un rayon de convergence infini (ici, $\|\cdot\|_{1,\infty}$ désigne une norme C^1). Toutefois, pour prouver ce théorème, il est nécessaire de supposer que le couple formé du brownien et de son transport parallèle est une diffusion satisfaisant la condition de Hörmander. D'autre part, par utilisation du calcul de Malliavin (c.f. [9], [22], [13], [14], [23], [10], [24], [27], [28], [30] par exemple pour un exposé sur ce sujet), on montre que si pour tout entier K, la série $\sum_n \prod_{i=1}^n \frac{\|\omega_i^n\|_{K,\infty}}{\sqrt{n!}} z^n$ possède un rayon de convergence infini ($\|\cdot\|_{K,\infty}$ désignant une norme C^K) alors, la forme correspondante sur l'espace des lacets est dans tous les espaces L^p. Ces résultats suffisent à montrer que les formes cohérentes et le caractère de Chern équivariant sur l'espace des lacets défini par Bismut [5] est dans tous les espaces L^p. Remarquons que cela reste malgré tout insuffisant du point de vue du calcul stochastique. On est donc amené à étudier une classe de diffusions très dégénérées, issue d'un exemple de Kusuoka-Stroock [15] où l'examen des fluctuations polynomiales de la diffusion (c.f. [18]) n'apporte aucun résultat sur la densité de celles-ci. Toutefois, on procède dans cet article à une étude qui ne coïncide pas exactement avec le cadre du problème originellement posé.

Dans la première partie de cet article, on considère le générateur A défini sur $\mathbf{R}^2$ par $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + g(x)\frac{\partial^2}{\partial y^2} + f(x)\frac{\partial}{\partial y}$ et, on suppose que la fonction g est exponentiellement plate en $x = 0$ (on peut consulter [16], [2-3] pour des exemples

Communicated by Prof. S. Watanabe, July 1, 1991

polynomiaux). Dans ce cas, la diffusion associée ne vérifie pas la condition de Hörmander mais on prouve, si la fonction g n'est pas trop plate, qu'elle posséde une densité de classe C^∞ par rapport à la mesure de Lebesgue. On exhibe ainsi un exemple d'opérateur non hypoelliptique dont le semi-groupe associé posséde une densité de classe C^∞. Après avoir calculé, sous des hypothèses globales sur les fonctions f et g, une estimation uniforme de la densité de ce semi-groupe, on montre que celle-ci est bornée par une fonction du temps ayant une explosion exponentielle lorsque t tend vers 0. Pour cela, on procède à un calcul direct en utilisant la forme spéciale du générateur et on obtient des estimations en temps long, dans ce cas, par utilisation du calcul de Malliavin (en supposant que les fonctions f et g sont de classe C^∞ et en imposant seulement des hypothèses locales) on obtient aussi des estimations en temps court. D'autre part, lorsqu'on posséde des bornes globales en espace et en temps, on donne dans le cas auto-adjoint où la fonction f est nulle, les inégalités de Sobolev logarithmiques afférentes.

Dans la seconde partie de cet article, on étudie le comportement sur la diagonale du noyau de la chaleur. En supposant le drift minoré par une puissance de $|x|$ au voisinage de l'origine, on montre l'inégalité suivante

$$p_t((0,0),(0,0)) \leq \exp\left(-\frac{C}{t^\gamma}\right)$$

pour tout $\gamma < 1$ et ceci, bien que la majoration uniforme du noyau de la chaleur puisse être en $\exp\left(\frac{C}{t^{\gamma_1}}\right)$ avec γ_1 grand. Dans ce travail, on rencontre des phénomènes analogues à ceux observés dans [2–3] bien que notre étude s'apparente plutôt aux exemples traités dans ces articles et qu'elle n'entre pas dans la catégorie des problèmes traités par la théorie des grandes déviations [26]. D'autre part, en considérant un opérateur différentiel de la forme $X_0 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n X_i^2$ vérifiant la condition de Hörmander on montre dans [19] que le volume des boules hypoelliptiques est en général indépendant de l'estimation de la densité du semi-groupe bien que l'estimation du volume des boules de Nagel-Stein-Wainger (c.f. [11]) soit vérifiée. De plus, dans le cas où le drift X_0 est nul, d'après [11], on a pour tout $t \leq 1$,

$$\frac{C_1'}{\operatorname{vol} B_x(\sqrt{t})} \exp\left[-\frac{d^2(x,y)}{C_2' t}\right] \leq p_t(x,y) \leq \frac{C_1}{\operatorname{vol} B_x(\sqrt{t})} \exp\left[-\frac{d^2(x,y)}{C_2 t}\right] \qquad (0.1)$$

où $d(x,y)$ désigne la distance sous-riemanienne associée à l'opérateur $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n X_i^2$ vérifiant l'hypothèse de Hörmander. Le problème étudié dans [19] concerne le membre de gauche de l'inégalité (0.1). Dans cet article, on montre pour les exemples concidérés auparavant que la quantité $p_t((0,0),(0,0))$ ne vérifie pas l'estimation de droite de l'inégalité (0.1) bien que l'opérateur différentiel A soit de la forme $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$. Ces deux résultats impliquent donc que les constantes C_1, C_2, C'_1, C'_2 figurant dans l'inégalité (0.1) ne sont pas universelles ce qui répond à un des problèmes posés dans [12].

Dans la troisième partie de cet article, on montre que les estimations de Varadhan sont vérifiées pour une grande classe de points soit en utillisant le calcul de Malliavin et la théorie des grandes déviations comme dans [18] ou [20] soit en utilisant, sans faire d'hypothèses de différentiabilité sur les fonctions f et g, la formule explicite donnant la densité du semi-groupe et en appliquant la théorie des grandes déviations de [26] comme dans [2–3]. Remarquons que les domaines de validité de ces deux méthodes ne sont pas identiques et que dans le second cas, il n'est pas nécessaire de supposer $p_t((0,0),(0,0))$ fini ce qui nous permet de considérer des fonctions g très plates en 0. Le dernier cas traité n'entrant pas dans le champ d'application de la méthode développée par Davies [7], nous en donnons deux versions stochastiques toutes deux basées sur des formules de Feynmann-Kac et de Girsanov, ce qui permet de comparer le semi-groupe associé à l'opérateur différentiel A soumis à une transformation de jauge au semi-groupe originel (c.f. [21]). La première de ces versions pour laquelle il n'est pas nécessaire de supposer que l'opérateur différentiel A est auto-adjoint est purement locale et utilise le calcul de Malliavin. La seconde version est globale et plus proche des calculs menés en analyse (c.f. [7]) car on suppose que l'opérateur différentiel est auto-adjoint et on utilise la formule de Kolmogorov. D'autre part, en faisant abstraction du calcul de Malliavin, il n'est pas utile d'imposer des hypothèses de régularité sur les coefficients. De plus, il est à noter que cette méthode ne donne pratiquement aucune information sur le comportement en temps petit du semi-groupe considéré si la borne uniforme de celui-ci est en $\exp\left(\frac{C}{t^\gamma}\right)$ pour un $\gamma > 1$ alors que la théorie des grandes déviations en donne pour toute une catégorie de points.

Nous tenons à remercier ici T. Coulhon, E. B. Davies, M. Emery, N. Varopoulos et M. Weber pour d'utiles conversations au cours de la réalisation de ce travail.

1. Majoration de la densité d'une diffusion très dégénérée

Soit A l'opérateur différentiel du second ordre sur $\mathbf{R}^2$ défini par

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}g^2(x)\frac{\partial^2}{\partial y^2} + f(x)\frac{\partial}{\partial y}$$

où f et g sont des fonctions continues et bornées. De plus, on suppose que pour tout x dans $\mathbf{R}^2$, on a

$$g(x) > C \exp\left[-\frac{C}{|x|^\alpha}\right]$$

avec $\alpha \in [0, 2[$.

Soit (x_t, y_t) la solution issue de (x, y) de l'équation différentielle stochastique dont le générateur infinitésimal est l'opérateur différentiel A. C'est à dire que le couple (x_t, y_t) est solution du système différentiel stochastique

$$\begin{cases} dx_t = dw_t^1 \\ dy_t = g(w_t^1)dw_t^2 + f(w_t^1)dt \\ x_0 = x \\ y_0 = y \end{cases} \tag{1.1}$$

où (w_t^1, w_t^2) est un brownien bidimensionnel standard.

Le but de cette section est de prouver le Théorème suivant,

Théorème 1.1. *Si $\alpha \in [0, 2[$ le couple (x_t, y_t) solution du système (1.1) possède une densité notée $p_t((x, y), (x', y'))$ majorée uniformément pour tous couples (x, y), (x', y') lorsque t est strictement positif par $\frac{1}{t}\exp\left[\frac{C}{t^\gamma}\right]$. De plus, on montre que $\gamma < 1$ si $\alpha \in [0, 1[$ et que γ tend vers l'infini lorsque α tend vers 2.*

Remarque 1.1. Lorsque f et g sont des fonctions de classe C^∞, l'opérateur différentiel A est hypoelliptique si $\alpha \in [0, 1[$ et, n'est pas hypoelliptique si $g(x) < \exp\left[-\frac{C}{|x|^\alpha}\right]$ au voisinage de l'origine lorsque α est supérieur à 1 (c.f. [15]).

Preuve du Théorème 1.1. Posons $\varepsilon = \sqrt{t}$. Alors, la quantité $p_t((x, y), (x', y'))$ est la densité du couple $(x_1(\varepsilon), y_1(\varepsilon))$ donné par,

$$\begin{cases} x_1(\varepsilon) = x + \varepsilon w_1^1 \\ y_1(\varepsilon) = y + \varepsilon \displaystyle\int_0^1 g(x + \varepsilon w_s^1)dw_s^2 + \varepsilon^2 \int_0^1 f(x + \varepsilon w_s^1)ds \end{cases} \tag{1.2}$$

Conditionellement à w_s^1, $y_1(\varepsilon)$ est une variable aléatoire gaussienne de moyenne $y + \varepsilon^2 \int_0^1 f(x + \varepsilon w_s^1)ds$ et de variance $\varepsilon^2 \int_0^1 g^2(x + \varepsilon w_s^1)ds$ (c.f. [16], [15]).

On obtient donc,

$$\begin{aligned} &p_\varepsilon((x, y), (x', y')) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}}\exp\left[-\frac{(x'-x)^2}{2\varepsilon^2}\right]\frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}}E_{\text{pont}}\left[\frac{1}{\left\{\displaystyle\int_0^1 g^2(x + \varepsilon w_s^1 + s(x'-x))ds\right\}^{1/2}}\right. \\ &\qquad \left. \times \exp\left[-\frac{\left|y' - y - \varepsilon^2 \displaystyle\int_0^1 f(x + \varepsilon w_s^1 + s(x'-x))ds\right|^2}{2\varepsilon^2 \displaystyle\int_0^1 g^2(x + \varepsilon w_s^1 + s(x'-x))ds}\right]\right] \end{aligned} \tag{1.3}$$

pour le pont brownien allant de 0 à 0.

On en déduit donc que cette densité est majorée par

$$\frac{1}{2\pi\varepsilon^2} E_{\text{pont}}\left[\frac{1}{\left\{\int_0^1 g^2(x+\varepsilon w_s^1+s(x'-x))ds\right\}^{1/2}}\right]$$

Procédons maintenant à une estimation de ce majorant.

Estimation en temps grand. Faisons maintenant tendre ε vers l'infini en majorant uniformément en x et x' l'ésperance ci-dessus. Dans ce but, posons $\tilde{x}=\dfrac{x}{\varepsilon}$ et $\tilde{x}'=\tilde{x}+\dfrac{x'-x}{\varepsilon}$. On est donc amené à estimer uniformément en $\tilde{x}$ et $\tilde{x}'$ la quantité

$$\begin{aligned} A_\varepsilon(\tilde{x},\tilde{y}) &= E_{\text{pont}}\left[\frac{1}{\left\{\int_0^1 g^2(x+\varepsilon w_s^1+s(x'-x))ds\right\}^{1/2}}\right] \\ &\leq CE_{\text{pont}}\left[\frac{1}{\left\{\int_0^1 \exp\left[-\dfrac{C}{\varepsilon^\alpha|\tilde{x}+w_s^1+s(\tilde{x}'-\tilde{x})|^\alpha}\right]ds\right\}^{1/2}}\right] \\ &\leq E_{\text{pont}}\left[-\frac{1}{\left\{\int_0^1 \exp\left[-\dfrac{C}{|\tilde{x}+w_s^1+s(\tilde{x}'-\tilde{x})|^\alpha}\right]ds\right\}^{1/2}}\right] \end{aligned} \tag{1.4}$$

pour ε supérieur à 1 car $g(x)$ est minorée par $C\exp\left[-\dfrac{C}{|x|^\alpha}\right]$.

Distinguons maintenant les quatre cas suivants,

1) $|\tilde{x}|>C,\ |\tilde{x}'|<C$
2) $|\tilde{x}|<C,\ |\tilde{x}'|>C$
3) $|\tilde{x}|<C,\ |\tilde{x}'|<C$
4) $|\tilde{x}|>C,\ |\tilde{x}'|>C$

1) Premier cas: Pour tout s dans $\left[0,\dfrac{1}{4}\right]$ on a

$$\frac{C}{2}<(1-s)|\tilde{x}|-s|\tilde{x}'|\leq|\tilde{x}+s(\tilde{x}'-\tilde{x})|$$

De plus, la quantité $\tilde{x}+s(\tilde{x}'-\tilde{x})$ reste de signe constant pour tout s dans $\left[0,\dfrac{1}{4}\right]$. En supposant qu'elle soit positive, on montre que

$$\int_0^1 \exp\left[-\frac{2}{|\tilde{x}+w_s^1+s(\tilde{x}'-\tilde{x})|^\alpha}\right]ds \geq C\int_0^{1/4} 1_{\{w_s^1>0\}}ds \tag{1.5}$$

Il suffit alors de prouver que

$$P_{\text{pont}}\left(\int_0^{1/4} 1_{\{w_s^1>0\}}ds < \eta\right) \leq O(\eta^n) \tag{1.6}$$

lorsque η tend vers 0 pour tout entier n. On propose dans la suite une preuve de (1.6) en utilisant le calcul de Malliavin.

Soit h une fonction de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^*$, inférieure à 1, égale à x^n si $0 < x < \frac{1}{2}$ et nulle si $x < 0$. On résoud alors l'équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} dx'_s = dw_s^1 \\ dy'_s = h(x'_s)ds \qquad \text{si } s < \dfrac{1}{4} \\ dy'_s = 0 \qquad \text{si } s \geq \dfrac{1}{4} \end{cases} \tag{1.7}$$

On obtient alors,

$$\begin{cases} x'_1 = w_1^1 \\ y'_1 = \displaystyle\int_0^{1/4} h(w_s^1)ds < \int_0^{1/4} 1_{\{w_s^1>0\}}ds \end{cases} \tag{1.8}$$

Par utilisation du calcul de Malliavin, on montre que le couple (x'_1, y'_1) posséde une densité $p^n(x', y')$ de plus en plus régulière lorsque n croit. De plus, si $y' < 0$, on a $p^n(0, y') = 0$. On en déduit donc

$$\begin{aligned} P_{\text{pont}}\left(\int_0^{1/4} 1_{\{w_s^1>0\}}ds < \eta\right) &\leq \int_0^{\eta} p^n(0, y')dy' \\ &\leq \eta^n \end{aligned} \tag{1.9}$$

pour η assez petit lorsque n est assez grand.

2) Deuxième cas: Ce cas est symétrique du premier cas par utilisation de la réversibilité du pont brownien.

3) Troisième cas: Introduisons maintenant le temps d'arrêt

$$T_K = \operatorname*{Inf}_s\left\{|\tilde{x} + w_s^1 + s(\tilde{x}' - \tilde{x})| > \frac{1}{C(\log K)^{1/\alpha}}\right\} \tag{1.10}$$

où w_s^1 est le pont brownien.

On estime alors la quantité $P_{\text{pont}}\left(T_K > \frac{1}{4}\right)$ en suivant une idée de M. Weber [29] (on peut aussi consulter [16] pour un exposé d'une idée semblable).

Par application d'une formule de Girsanov, on montre qu'il suffit d'estimer $P_{\text{brow}}\left(T_K > \frac{1}{4}\right)$. Pour cela, on effectue une subdivision de l'intervalle $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ en intervalles de la forme $[s_k, s_{k+1}]$ de longueur $\frac{1}{(\log K)^{2/\alpha}}$. Par utilisation de la propriété de Markov du mouvement brownien, on obtient

$$P_{\text{brow}}\left(T_K > \frac{1}{4}\right) \leq \prod_k P_{\text{brow}}\left(\left|w_{s_{k+1}} - w_{s_k} + \frac{1}{(\log K)^{2/\alpha}}(\tilde{x}' - \tilde{x})\right| < \frac{2}{C(\log K)^{1/\alpha}}\right)$$

$$\leq P_{\text{brow}}\left(|w_1| \frac{1}{|\log K|^{1/\alpha}} < \frac{C}{|\log K|^{1/\alpha}}\right) C(\log K)\frac{2}{\alpha}$$

$$\leq \exp[-C|\log K|^{2/\alpha}] \tag{1.11}$$

pour une constante C indépendante de $|\tilde{x}|$ et $|\tilde{x}'|$. Alors, par application de la formule de Girsanov,

$$P_{\text{pont}}\left(T_K > \frac{1}{4}\right) \leq \exp\,[-C|\log K|^{2/\alpha}] \tag{1.12}$$

pour une constante positive C indépendante de $|\tilde{x}|$ et $|\tilde{x}'|$.

D'autre part, en $s = T_K$ on a, $\exp\left[-\frac{C}{|\tilde{x} + w_s^1 + s(\tilde{x}' - \tilde{x})|^\alpha}\right] \geq \frac{1}{K}$. Introduisons maintenant T_K' le plus petit temps d'arrêt inférieur à $\frac{1}{2}$ et supérieur à T_K tel que $\exp\left[-\frac{C}{|\tilde{x} + w_s^1 + s(\tilde{x}' - \tilde{x})|^\alpha}\right] \leq \frac{1}{2K}$. Par application du théorème des accroissements finis à la fonction $x \to \exp\left[-\frac{C}{|x|^\alpha}\right]$ on a,

$$P_{\text{brow}}\left(T_K' - T_K \leq \frac{1}{K^3}\right)$$

$$\leq P_{\text{brow}}\left(\sup_{s \leq (1/K^3)} \left||w_{s+T_K}^1 + (s + T_K)(\tilde{x}' - \tilde{x})| - |w_{T_K}^1 + T_K(\tilde{x}' - \tilde{x})|\right| \geq \frac{C}{K}\right) \tag{1.13}$$

D'autre part, $(\tilde{x}' - \tilde{x})$ étant borné le second membre de l'inégalité (1.13) est donc majoré par

$$P_{\text{brow}}\left(\sup_{s \leq (1/K^3)} |w_s| \geq \frac{C}{K}\right) = P_{\text{brow}}\left(\sup_{s \leq 1} |w_s| \geq C\sqrt{K}\right)$$

$$\leq \exp[-CK] \tag{1.14}$$

Si $\alpha < 2$, en regroupant les résultats de (1.11), (1.13) et (1.14), on a

$$P_{\text{brow}}\left(\int_0^{1/2} \exp\left[-\frac{1}{|\tilde{x} + w_s^1 + s(\tilde{x}' - \tilde{x})|^\alpha}\right] ds < \frac{1}{2K^4}\right)$$

$$\leq \exp\,[-C|\log K|^{2/\alpha}] + \exp[-CK] \tag{1.15}$$

avec des constantes C indépendantes de $\tilde{x}$ et $\tilde{x}'$. De plus, cette inégalité reste vraie pour le pont brownien grâce à une transformation de Girsanov. D'autre part, comme $\alpha < 2$, on en déduit que la quantité $A_\varepsilon(\tilde{x}, \tilde{y})$ est uniformément bornée lorsque ε tend vers l'infini.

4) Quatrième cas: Lorsque $\tilde{x}$ et $\tilde{x}'$ sont de même signe, la quantité $\tilde{x} + s(\tilde{x}' - \tilde{x})$ reste de signe constant et de module supérieur à C sur $[0, 1]$. On procéde alors comme dans le premier cas. Lorsque $\tilde{x}$ et $\tilde{x}'$ sont de signes opposés, on peut supposer par symétrie que $|\tilde{x}| > |\tilde{x}'|$ dans ce cas, la quantité $|\tilde{x} + s(\tilde{x}' - \tilde{x})|$ est supérieure à $(1 - s)|\tilde{x}| - s|\tilde{x}| \geq \frac{C}{4}$ si $s < \frac{1}{8}$ et $\tilde{x} + s(\tilde{x}' - \tilde{x})$ reste de signe constant sur cet intervalle. On procéde alors de manière analogue au premier cas.

Estimation en temps petit. Passons maintenant à l'estimation de la densité en temps petit. Dans les cas 1, 2 et 4, on prouve aisément d'après (1.4) et (1.5) que

$$A_\varepsilon(x, y) \leq \exp\left[\frac{2}{\varepsilon^\alpha}\right] \tag{1.16}$$

Seul le troisième cas présente quelques difficultés. On effectue un raisonnement similaire au précédent pour définir le temps d'arrêt T_K mais ici, T_K' est le plus petit temps d'arrêt supérieur à T_K tel que

$$||\tilde{x} + w^1_{s+T_K} + (s + T_K)(\tilde{x}' - \tilde{x})|^\alpha - |\tilde{x} + w^1_{T_K} + T_K(\tilde{x}' - \tilde{x})|^\alpha| \geq \frac{1}{K}\,.$$

On obtient donc,

$$P_{\text{brow}}\left(T_K' - T_K \leq \frac{1}{K^{1+2/\alpha}}\right) \leq \exp[-CK] \tag{1.17}$$

d'où,

$$\begin{aligned} &P_{\text{brow}}\left(\int_0^{1/2} \exp\left[-\frac{C}{\varepsilon^\alpha|\tilde{x} + w^1_s + s(\tilde{x}' - \tilde{x})|^\alpha}\right] ds \leq \frac{1}{K^{1+2/\alpha}} \exp\left[-\frac{C|\log K|}{\varepsilon^\alpha}\right]\right) \\ &\quad\leq \exp[-CK] + \exp[-C|\log K|^{2/\alpha}] \end{aligned} \tag{1.18}$$

On déduit par utilisation d'une formule de Girsanov sur l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$,

$$\begin{aligned} &P_{\text{pont}}\left(\int_0^1 \exp\left[-\frac{C}{\varepsilon^\alpha|\tilde{x} + w^1_s + s(\tilde{x}' - \tilde{x})|^\alpha}\right] ds \leq \frac{1}{K^{C/\varepsilon^\alpha}}\right) \\ &\quad\leq \exp[-CK] + \exp[-C|\log K|^{2/\alpha}] \end{aligned} \tag{1.19}$$

Ainsi, il suffit d'estimer lorsque ε tend vers 0, la quantité

$$A_1(\varepsilon) + A_2(\varepsilon) = \int_0^\infty K^p(\exp[-CK^{\varepsilon^\alpha}] + \exp[-C|\log K^{\varepsilon^\alpha}|^{2/\alpha}])\, dK \tag{1.20}$$

La formule de Stirling nous permet de majorer la quantité $A_1(\varepsilon)$ par $\exp\left[\frac{C}{\varepsilon^{2\alpha}}\right]$.

D'autre part, écrivons $\frac{2}{\alpha} = 1 + \eta + \eta'$ avec $\eta > 0$ et $\eta' > 0$.

On obtient ainsi,

$$\begin{aligned} A_2(\varepsilon) &\leq \int_0^{\infty} K^p \exp\left[-C\varepsilon^2 |\log K|^{\eta} |\log K|^{1+\eta'}\right] dK \\ &\leq \int_0^{\exp[1/\varepsilon^{2/\eta}]} K^p dK + \int_{\exp[1/\varepsilon^{2/\eta}]}^{\infty} K^p \exp\left[-|\log K|^{1+\eta'}\right] dK \\ &\leq C \exp\left[\frac{C}{\varepsilon^{2/\eta}}\right] \end{aligned} \tag{1.21}$$

On déduit donc lorsque ε tend vers 0,

$$A_\varepsilon(x, y) \leq \exp\left[\frac{C}{\varepsilon^{2/\eta}}\right] + \exp\left[\frac{C}{\varepsilon^{2\alpha}}\right] \tag{1.22}$$

Cela conclue la preuve du Théorème 1.1.

Remarque 1.3. Si la fonction f est nulle, l'opérateur différentiel A engendre un semi-groupe symétrique pour la mesure $dxdy$. De plus, si h est une fonction strictement positive appartenant au domaine de la forme de Dirichlet Q associée à l'opérateur différentiel A, on montrera dans l'appendice l'inégalité de Sobolev logarithmique suivante,

$$\int_{\mathbf{R}^2} h^2 \log h \, dxdy \leq \varepsilon Q(h, h) + F(\varepsilon)\|h\|_2^2 + \|h\|_2^2 \log \|h\|_2 \tag{1.23}$$

où $\|h\|_2^2 = \int_{\mathbf{R}^2} h^2(x, y) dxdy$ et $F(\varepsilon) = \frac{C}{\varepsilon^\gamma} - \frac{1}{2}\log \varepsilon + C$.

On en déduit donc le théorème de comparaison suivant. Introduisons l'opérateur différentiel L' défini par,

$$L' = \frac{\partial}{\partial x} a_{1,1}(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} a_{1,2}(x, y) \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} a_{2,1}(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} a_{2,2}(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \tag{1.24}$$

où la matrice a est telle que $a(x, y) \geq \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & g(x) \end{bmatrix}$.

Alors, l'opérateur différentiel L' est formellement auto-adjoint, les formes de Dirichlet Q et Q' sont telles que $Q' \geq Q$ et, on en déduit que le semi-groupe associé posséde une densité $p_t'((x, y), (x', y'))$ majorée par $\frac{1}{t}\exp\left[\frac{C}{t^\gamma}\right]$. La preuve de ce résultat est reporté dans l'appendice.

Les hypothèses imposées aux coefficents de l'opérateur différentiel A dans le Théorème 1.1 étaient globales dans le but de faire le lien avec l'inégalité de Sobolev logarithmique. D'autre part, nous n'avons pas supposé que les fonctions g et h étaient de classe C^∞ si bien qu'aucun résultat de régularité pour la densité $p_t((x, y), (x', y'))$ n'a été prouvé. De plus, si les fonctions g et h sont de classe C^∞, on montre par utilisation des calculs directs de la preuve du Théorème 1.1 et du théorème de dérivation sous le signe somme que la densité $p_t((x, y), (x', y'))$ est de classe C^∞.

Nous donnons maintenant une approche différente basée sur le calcul de Malliavin en donnant une version purement locale.

Théorème 1.2. *Supposons que les fonctions f et g sont de classe C^∞ à dérivées bornées et que $g(x) > \exp\left[-\frac{1}{|x|^\alpha}\right]$ au voisinage de l'origine pour $\alpha < 2$. Alors, la quantité $p_t((0, 0), (x', y'))$ existe et est de classe C^∞. De plus,*

$$\frac{\partial^{(\alpha_1,\alpha_2)}}{\partial x^{(\alpha_1)}\partial y^{(\alpha_2)}} p_t((0, 0), (x', y')) \leq \exp\left[\frac{C(\alpha_1, \alpha_2)}{t^\gamma}\right] \tag{1.25}$$

pour tout $t \leq 1$. D'autre part, si $\alpha < 1$, on a $\gamma < 1$ et si α tend vers 2, γ tend vers l'infini.

Preuve du Théorème 1.2. Posons $x = y = 0$ dans la formule (1.2). Les fonctions f et g étant à dérivées bornées, il suffit de montrer que la matrice de Malliavin $U(\varepsilon)$ du couple $(x_1(\varepsilon), y_1(\varepsilon))$ vérifie l'inégalité suivante pour $\varepsilon \leq 1$,

$$E_B((\det U(\varepsilon))^{-p}) \leq \exp\left[\frac{C(p)}{\varepsilon^{2\gamma}}\right] \tag{1.25}$$

D'autre part la différentielle du flot associé à (1.2) étant égale à

$$\phi_\varepsilon(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varepsilon \int_0^s g'(\varepsilon w_u^1) dw_u^2 + \varepsilon^2 \int_0^s f'(\varepsilon w_u^1) du & 1 \end{bmatrix} \tag{1.26}$$

on en déduit que

$$\phi_\varepsilon^{-1}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\varepsilon \int_0^s g'(\varepsilon w_u^1) dw_u^2 - \varepsilon^2 \int_0^s f'(\varepsilon w_u^1) du & 1 \end{bmatrix} \tag{1.27}$$

La forme quadratique de Malliavin étant alors donnée par

$$U_\varepsilon(X, Y) = \int_0^1 \varepsilon^2 \left\langle X - \left(\varepsilon \int_0^s g'(\varepsilon w_u^1) dw_u^2 - \varepsilon^2 \int_0^s f'(\varepsilon w_u^1) du\right) Y \right\rangle^2 ds + \int_0^1 \varepsilon^2 g^2(\varepsilon w_u^1) Y^2 du \tag{1.28}$$

il suffit donc de montrer que

$$E_B\left(\operatorname*{Inf}_{X^2+Y^2=1} U_\varepsilon(X, Y)^{-p}\right) \leq \exp\left[\frac{C(p)}{\varepsilon^{2\gamma}}\right] \tag{1.29}$$

Distinguons dans (1.29) les cas où $|Y| < \dfrac{1}{K^{1/3}}$ et où $|Y| \geq \dfrac{1}{K^{1/3}}$. D'autre part, on a

$$P_{\text{brow}}\left(\varepsilon^{1/2} \sup_{s\leq(1/K)} \left|\int_0^s g'(\varepsilon w_u^1)dw_u^2\right| > C\right) \leq \exp\left[-\frac{CK}{\varepsilon}\right] \tag{1.30}$$

On en déduit donc que

$$P_{\text{brow}}\left(\operatorname*{Inf}_{X^2+Y^2=1} U_\varepsilon(X, Y) < \frac{C\varepsilon^2}{K}\right)$$

$$\leq \exp\left[-\frac{K}{\varepsilon}\right] + P_{\text{brow}}\left(\int_0^{1/K} C\varepsilon^2 < C'\frac{\varepsilon^2}{K}\right) + P_{\text{brow}}\left(\frac{\varepsilon^2}{K^{2/3}}\int_0^1 g^2(\varepsilon w_s^1)ds < \frac{C\varepsilon^2}{K}\right)$$

$$\leq \exp\left[-\frac{K}{\varepsilon}\right] + P_{\text{brow}}\left(\int_0^1 g^2(\varepsilon w_u^1)du < \frac{C}{K^{1/3}}\right) \tag{1.31}$$

avec $C < C'$.

D'autre part, d'après la preuve du Théorème 1.1, on a

$$P_{\text{brow}}\left(\int_0^1 g^2(\varepsilon w_u^1)du < \frac{C}{K^{1/3}}\right) \leq \exp\left[-CK^{C\varepsilon^\alpha}\right] + \exp\left[-C\varepsilon^2|\log K|^{2/\alpha}\right] \tag{1.32}$$

Alors, en regroupant les résultats des inégalités (1.31) et (1.32), on obtient

$$P_{\text{brow}}\left(\operatorname*{Inf}_{X^2+Y^2=1} U_\varepsilon(X, Y) < \frac{\varepsilon^2}{K}\right) \leq \exp[-K] + \exp\left[-CK^{C\varepsilon^\alpha}\right] + \exp\left[-C|\log K|^{2/\alpha}\right] \tag{1.33}$$

De plus, en raisonnant de manière analogue à (1.19) et (1.20), on déduit que

$$E_B((\det U(\varepsilon))^{-p}) \leq \exp\left[\frac{C(p)}{\varepsilon^{2\gamma}}\right] \tag{1.34}$$

2. Pathologies sur la diagonale. Etude de deux exemples

Dans ce paragraphe, nous allons étudier deux exemples de pathologies du comportement du noyau de la chaleur sur la diagonale. La première de ces pathologies est apparentée à celles exposées dans [2–3], [8], [21] tandis que la seconde est plus proche de celles traitée dans [19]. Dans cet article le problème étudié provient du fait que l'explosion du noyau de la chaleur est supérieure à la quantité donnée par le taux de décroissance du volume de la boule sous-riemanniene lorsque son diamètre tend vers 0.

Les résultats exposés dans ce paragraphe sont énoncés sous des hypothèses globales toutefois, remarquons que ces dernières peuvent être localisées.

Théorème 2.1. *Soient f et g deux fonctions mesurables telles que*

$$C_1 \exp\left[-\frac{C_1'}{|x|^\alpha}\right] < g(x) < C_2 \exp\left[-\frac{C_2'}{|x|^\alpha}\right] \tag{2.1}$$

pour $\alpha \in]0, 2[$ *et,*

$$f(x) > |x|^\beta \tag{2.2}$$

pour $\beta > 0$. *Alors, pour tout* $\gamma < 1$, *on a*

$$p_t((0,0),(0,0)) \leq \exp\left[-\frac{C(\gamma)}{t^\gamma}\right] \tag{2.3}$$

lorsque t tend vers 0.

Preuve du Théorème 2.1. En posant $\varepsilon = \sqrt{t}$, on obtient la majoration suivante de $p_t((0,0),(0,0))$,

$$p_t((0,0),(0,0))$$
$$\leq \frac{C}{\varepsilon^2} E_{\text{pont}}\left[\frac{1}{\left(\int_0^1 \exp\left[-\frac{C}{\varepsilon^\alpha |w_s^1|^\alpha}\right] ds\right)^{1/2}} \exp\left[-\frac{C\varepsilon^\beta \int_0^1 |w_s^1|^\beta ds}{\int_0^1 \exp\left[-\frac{C}{\varepsilon^\alpha |w_s^1|^\alpha}\right] ds}\right]\right] \tag{2.4}$$

Désignons par γ_1 un réel positif et considérons les cas où la quantité $\int_0^1 \exp\left[-\frac{C}{\varepsilon^\alpha |w_s^1|^\alpha}\right] ds$ est inférieure où supérieure à ε^{γ_1}. D'autre part, l'exponentielle d'un nombre négatif étant inférieure à 1, on déduit que

$$\begin{aligned} p_t((0,0),(0,0)) &\leq \frac{C}{\varepsilon^{2-\gamma_1}} P_{\text{pont}}\left(\int_0^1 \exp\left[-\frac{C}{\varepsilon^\alpha |w_s^1|^\alpha}\right] ds > \varepsilon^{\gamma_1}\right) \\ &\quad + \frac{C}{\varepsilon^2} E_{\text{pont}}\left[\frac{\exp\left[-C\varepsilon^{\beta-\gamma_1} \int_0^1 |w_s^1|^\beta ds\right]}{\left(\int_0^1 \exp\left[-\frac{C}{\varepsilon^\alpha |w_s^1|^\alpha}\right] ds\right)^{1/2}}\right] \\ &= A_1(\varepsilon) + A_2(\varepsilon) \end{aligned} \tag{2.5}$$

Estimons tout d'abord la quantité $A_1(\varepsilon)$. Par application de la majoration exponentielle et du théorème des croissances comparées, on a lorsque ε tend vers 0,

$$\begin{aligned} P_{\text{pont}}\left(\int_0^1 \exp\left[-\frac{C}{\varepsilon^\alpha |w_s^1|^\alpha}\right] ds > \varepsilon^{\gamma_1}\right) &\leq P_{\text{pont}}\left(\sup_{s \leq 1} |w_s^1| > \frac{C}{\varepsilon(-\log \varepsilon^{\gamma_1})^{1/\alpha}}\right) \\ &\leq \exp\left[-\frac{C}{\varepsilon^{2\gamma}}\right] \end{aligned} \tag{2.6}$$

pour tout $\gamma < 1$.

On en déduit donc que $A_1(\varepsilon)$ vérifie la conclusion du Théorème. D'autre part, par un raisonnement analogue au précédent, on montre qu'il existe $\gamma_2 > 0$ tel que

$$P_{\text{pont}}\left(\int_0^1 |w_s^1|^\beta ds < \frac{1}{K}\right) \leq \exp\left[-K^{\gamma_2}\right] \tag{2.7}$$

De plus, le Théorème 1.1 et l'inégalité de Cauchy-Schwarz montrent qu'il existe un réel γ_0 tel que

$$A_2(\varepsilon) \leq C \exp\left[\frac{C}{\varepsilon^{\gamma_0}}\right] E_{\text{pont}}\left[\exp\left[-C\varepsilon^{\beta-\gamma_1}\int_0^1 |w_s^1|^\beta ds\right]\right]^{1/2} \tag{2.8}$$

lorsque ε tend vers 0.

Choisissons γ_1 assez grand pour que les nombres $\left(\frac{-\beta+\gamma_1}{2}\right)\gamma_2$ et $\frac{\gamma_1-\beta}{2}$ soient supérieurs à γ_0 et à 2γ. De l'inégalité (2.7) on déduit donc,

$$P_{\text{pont}}\left(\int_0^1 |w_s^1|^\beta ds < \varepsilon^{(\gamma_1-\beta)/2}\right) \leq \exp\left[-\frac{C}{\varepsilon^{\sup(\gamma_0, 2\gamma)}}\right] \tag{2.9}$$

De plus, comme l'exponentielle d'un nombre négatif est inférieure à 1, on a

$$\begin{aligned} A_2(\varepsilon) &\leq \exp\left[-\frac{C}{\varepsilon^{2\gamma}}\right] + \exp\left[\frac{C}{\varepsilon^{\gamma_0}}\right]\exp\left[-C\varepsilon^{(\beta-\gamma)/2}\right] \\ &\leq \exp\left[-\frac{C}{\varepsilon^{2\gamma}}\right] \end{aligned} \tag{2.10}$$

Remarque 2.1. Il est à noter qu'en ne tenant compte que du terme $A_2(\varepsilon)$, on pourrait avoir des décroissances exponentielles aussi rapides qu'on le désire. Toutefois ceci est impossible pour la quantité $p_t((0,0),(0,0))$ (c.f. Théorème 3.1). Par contre, on peut montrer en raffinant l'inégalité (2.6) que $p_t((0,0),(0,0)) \leq \exp\left[-\frac{C}{t(-\log t)^{2/\alpha}}\right]$.

Considérons maintenant le second type de pathologie provenant du taux d'explosion de la densité. Supposons que f soit la fonction nulle et considérons la métrique de Carnot-Carathéodory associée à l'opérateur différentiel L. Soit (h_1, h_2) un élément de l'espace de Cameron-Martin muni de la norme énergie. Considérons l'équation différentielle

$$\begin{cases} dx_t(h) = dh_t^1 \\ dy_t(h) = g(x_t(h))dh_t^2 \\ x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases} \tag{2.11}$$

De plus, posons $d^2(x, y) = \inf_{x_1(h)=x,\, y_1(h)=y} \|h\|^2$ et notons $B(r)$ l'ensemble des couples (x, y) tels que $d(x, y) \leq r$. Supposons par la suite que la fonction g est telle que

$$C_1 \exp\left[-\frac{C_1'}{|x|^\alpha}\right] \leq g(x) \leq C_2 \exp\left[-\frac{C_2'}{|x|^\alpha}\right]$$

avec $\alpha \in]0, 2[$. Alors, on a le Théorème suivant,

Théorème 2.2. *Lorsque t tend vers 0, on a*

$$\lim_{t \to 0} \mathrm{Vol}\, B(\sqrt{t}) p_t((0, 0), (0, 0)) = \infty \tag{2.12}$$

Preuve du Théorème 2.2. Calculons tout d'abord un minorant de Vol $B(\sqrt{t})$. La boule $B(\sqrt{5t})$ est l'ensemble des couples de la forme $\left(\sqrt{t}h_1^1, \sqrt{t}\int_0^1 g(\sqrt{t}h_s^1)dh_s^2\right)$ avec $\|h_1\|^2 + \|h_2\|^2 \leq 5$.

Considérons la famille des fonctions h telles que $h_1(s) = us$ et $h_2(s) = vs$ avec $u \in [1, 2]$ et $v \in [0, 1]$. On en déduit donc du théorème des valeurs intermédiaires que la boule $B(\sqrt{5t})$ contient l'ensemble des couples de la forme $\left(\sqrt{tu}, \sqrt{t}vC_1 \int_0^1 \exp\left[-\frac{C_1'}{\sqrt{t^\alpha u^\alpha s^\alpha}}\right] ds\right)$ avec $u \in [1, 2]$ et $v \in [0, 1]$. C'est à dire aussi, l'ensemble des couples de la forme $\left(\sqrt{tu}, \frac{v}{u}\int_0^{\sqrt{tu}} \exp\left[-\frac{C}{s^\alpha}\right] ds\right)$ avec $u \in [1, 2]$ et $v \in [0, 1]$. D'autre part, cet ensemble contient la boite $[\sqrt{t}, 2\sqrt{t}] \times \left[0, \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{t}} \exp\left[-\frac{C}{s^\alpha}\right] ds\right]$ dont le volume est minoré par $\sqrt{t}\exp\left[-\frac{C}{\sqrt{t^\alpha}}\right]$.

On en déduit donc,

$$\frac{C}{\mathrm{Vol}\, B(\sqrt{t})} \leq \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left[\frac{C}{\sqrt{t^\alpha}}\right] \tag{2.13}$$

Minorons maintenant la quantité $p_t((0, 0), (0, 0))$. On a

$$\begin{aligned} p_t((0, 0), (0, 0)) &\geq \frac{1}{C_2\sqrt{t}} E_{\text{pont}}\left[\frac{1}{\left(\int_0^1 \exp\left[-\frac{C_2'}{\sqrt{t^\alpha}|w_s^1|^\alpha}\right] ds\right)^{1/2}}\right] \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{t}} E_{\text{pont}}\left[\exp\left[\frac{C}{\sqrt{t^\alpha} \sup_{s \leq 1} |w_s^1|^\alpha}\right]\right] \\ &\geq \exp\left[\frac{C}{\sqrt{t^{(\alpha+\alpha\gamma)}}}\right] P_{\text{pont}}\left(\sup_{s \leq 1} |w_s^1| < \sqrt{t^\gamma}\right) \end{aligned} \tag{2.14}$$

D'autre part, on a

$$P_{\text{pont}}\left(\sup_{s \leq 1} |w_s^1| < \sqrt{t^\gamma}\right) \geq P_{\text{brow}}\left(\sup_{s \leq 1} |w_s^1| < \frac{1}{2}\sqrt{t^\gamma}\right) \tag{2.15}$$

De plus, d'après [29], on déduit,

$$P_{\text{brow}}\left(\sup_{s\leq 1}|w_s^1| < \frac{1}{2}\sqrt{t^\gamma}\right) \geq \exp\left[-\frac{C}{t^\gamma}\right] \tag{2.16}$$

On obtient donc,

$$p_t((0,0),(0,0)) \geq \exp\left[\frac{C}{\sqrt{t^{(\alpha+\alpha\gamma)}}}\right]\exp\left[-\frac{C}{t^\gamma}\right] \tag{2.17}$$

En outre, si $2\gamma < \alpha + \alpha\gamma$, c'est à dire si $\gamma < \frac{\alpha}{2-\alpha}$, on a

$$p_t((0,0),(0,0)) \geq \exp\left[\frac{C}{\sqrt{t^{(\alpha+\alpha\gamma)}}}\right] \tag{2.18}$$

Cela termine la preuve du Théorème.

Remarque 2.2. Le γ optimal est $\frac{\alpha}{2-\alpha}$ et par conséquent, l'exposant optimal de $\sqrt{t}$ est $\frac{2}{2-\alpha}$. Ainsi, pour obtenir l'inégalité (2.12), il suffisait d'avoir un encadrement de la fonction g par $\exp\left[-\frac{C}{|x|^\beta}\right]$ et $\exp\left[-\frac{C}{|x|^\alpha}\right]$ avec $\alpha < \beta < \frac{\alpha}{2-\alpha}$.

3. Estimation de Davies et estimation de Varadhan

Le but de ce paragraphe est de donner des estimations hors diagonale du noyau de la chaleur. Dans le but de comparer les domaines de validité des estimations de Varadhan (c.f. [17], [20]) et des estimations de Davies (c.f. [7]) nous donnons deux analogues stochastiques de la méthode de Davies [7]. Pour cela, on commence par effectuer une estimation de Varadhan purement locale par utilisation du calcul de Malliavin (c.f. [17], [20]) et de la théorie des grandes déviations (c.f. [1]).

Supposons que les fonctions f et g sont de classe C^∞ à dérivées de tous ordres bornées et qu'au voisinage de l'origine on a $g(x) > C\exp\left[-\frac{C}{|x|^\alpha}\right]$ pour un $\alpha \in [0, 2[$. De plus, on remarque que l'application qui à h associe le couple $(x_1(h), y_1(h))$ est une submersion de l'espace de Cameron-Martin sur $\mathbf{R}^2$ en tout h tel que $h^1 \neq 0$. Par suite, en appliquant la remarque de la première partie de [17] et [3] on sait que $p_t((0,0),(0,0)) \neq 0$ est équivalant à $d^2(x,y) < \infty$. D'autre part, on remarque d'après (1.3) que $p_t((0,0),(0,0))$ est strictement positif pour tout couple (x,y). On a donc

Théorème 3.1. *Si $\alpha \in [0, 2[$, on a uniformément sur tout compact K de $\mathbf{R}^2$,*

$$\varliminf_{t\to 0} 2t\log p_t((0,0),(x,y)) \geq -d^2(x,y) \tag{3.1}$$

et, uniformément sur tout compact K de $\mathbf{R}^2 - (\{0\} \times \mathbf{R})$,

$$\overline{\lim_{t \to 0}}\, 2\, t \log \left| \frac{\partial^{(\alpha_1, \alpha_2)}}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}} p_t((0,0),(x,y)) \right| \le -d^2(x,y) \tag{3.2}$$

pour tout multi-indice (α_1, α_2). *De plus, si* $\alpha \in [0, 1[$, *l'inégalité* (3.2) *reste valide sur tout compact K de* $\mathbf{R}^2$.

Preuve du Théorème 3.1. La preuve de l'inégalité (3.1) est similaire à celle de la première partie de [17] puisque l'application $h \to (x_1(h), y_1(h))$ est une submersion en tout h tel que h^1 est non nul. La preuve de l'inégalité (3.2) est identique à celle de [20] lorsque $\alpha < 1$ car, on posséde une estimation de l'inverse de la forme quadratique de Malliavin $U(\varepsilon)$ du couple $(x_1(\varepsilon), y_1(\varepsilon))$ en $\exp\left[\frac{C}{\varepsilon^{2\alpha}}\right]$ qui est négligeable devant $\exp\left[\frac{C}{\varepsilon^2}\right]$ puisque $\alpha < 1$. Le cas non trivial se produit lorsque $\alpha \in [1, 2[$ et $x \neq 0$.

On procéde alors de la manière suivante: introduisons une fonction g égale à 1 sur un petit voisinage de (x, y) et nulle en dehors d'un second petit voisinage de (x, y) n'intersectant pas la droite d'équation $x = 0$. L'inégalité (3.2) découle alors de l'inégalité suivante qui se substitue dans notre cadre à (1.29),

$$E\left[\operatorname*{Inf}_{X^2+Y^2=1} U_\varepsilon(X, Y)^{-p} g(x_1(\varepsilon), y_1(\varepsilon))\right]^{1/p} \le \frac{C(g)}{\varepsilon^2} \tag{3.3}$$

Par conditionnement, il suffit de montrer d'après (1.31), que lorsque ε tend vers 0,

$$P_{\text{pont}}\left(\int_0^1 g^2(\varepsilon w_s^1 + sx)ds < \frac{C}{K^{1/3}}\right) \le \exp\left[-CK^\nu\right] \tag{3.4}$$

pour une constante ne dépendant pas de x tel que $g(x, y) = 0$. La preuve de cette inégalité est similaire à celle du Théorème 1.1.

Nous proposons maintenant en utilisant la théorie des grandes déviations [26], comme dans les exemples de [2–3], une version de ce Théorème en faisant uniquement des hypothèses de continuité sur les coefficients.

Théorème 3.2. *Supposons que les fonctions f et g sont continues bornées et que la fonction g est non nulle, sauf peut être en* $(0, 0)$, *sur un voisinage de l'origine. Alors,* $p_t((0,0),(x,y))$ *est définie et continue pour t assez petit sur tout compact K de* $\mathbf{R}^2 - (\mathbf{R} \times \{0\})$. *De plus, on a uniformément sur le compact K,*

$$2t \log p_t((0,0),(x,y)) \to -d^2(x,y) \tag{3.5}$$

Preuve du Théorème 3.2. Pour montrer que $p_t((0,0),(x,y))$ est continue et bornée pour t assez petit, il suffit de remarquer après avoir posé $\varepsilon = \sqrt{t}$ que

$$p_t((0,0),(x,y)) = \frac{1}{2\pi\varepsilon^2}\exp\left[-\frac{x^2}{2\varepsilon^2}\right] E_{\text{pont}}\left[\frac{\exp\left[-\dfrac{\left|y-\varepsilon^2\displaystyle\int_0^1 f(x+\varepsilon w_s^1+sx)ds\right|^2}{2\varepsilon^2\displaystyle\int_0^1 g^2(x+\varepsilon w_s^1+sx)ds}\right]}{\left(\displaystyle\int_0^1 g^2(x+\varepsilon w_s^1+sx)ds\right)^{1/2}}\right]$$

existe pour ε assez petit puisque y est non nul dans K et que les expressions figurant sous le signe E_{pont} sont continues. Soit η un réel strictement positif. Comme les fonctions f et g sont bornées, si ε est choisi suffisamment petit, on a l'encadrement suivant indépendamment de (x, y) dans K,

$$\frac{C}{\varepsilon}\exp\left[-\frac{x^2}{2(1-\eta)^2\varepsilon^2}\right]E_{\text{pont}}\left[\exp\left[-\frac{|y|^2}{(1-\eta)^2\varepsilon^2 2\displaystyle\int_0^1 g^2(\varepsilon w_s^1+sx)ds}\right]\right]$$

$$\leq p_t((0,0),(x,y))$$

$$\leq \frac{C}{\varepsilon}\exp\left[-\frac{x^2}{2(1+\eta)^2\varepsilon^2}\right]E_{\text{pont}}\left[\exp\left[-\frac{|y|^2}{(1+\eta)^2\varepsilon^2 2\displaystyle\int_0^1 g^2(\varepsilon w_s^1+sx)ds}\right]\right] \tag{3.7}$$

Introduisons la quantité $\tilde{d}(x, y)$ définie de la manière suivante,

$$\tilde{d}^2(x,y) = \operatorname*{Inf}_{h/h(1)=0}\left\{\frac{|y|^2}{\displaystyle\int_0^1 g^2(h_s+sx)ds} + \|h\|^2\right\} \tag{3.8}$$

On déduit alors de la première inégalité de l'encadrement (3.7) et de la théorie des grandes déviations qu'on a uniformément sur le compact K,

$$\varliminf_{t\to 0} 2t\log p_t((0,0),(x,y)) \geq -\frac{|x|^2}{(1-\eta)^2} - \tilde{d}^2\left(x, \frac{y}{1-\eta}\right) \tag{3.9}$$

en remarquant que la fonctionelle $h \to \displaystyle\int_0^1 g^2(h_s)ds$ est continue sur l'espace de Cameron-Martin associé au pont brownien et nulle uniquement en $h = 0$.

De l'inégalité de droite dans (3.7), il résulte de la théorie des grandes déviations que

$$\varlimsup_{t\to 0} 2t\log p_t((0,0),(x,y)) \leq -\frac{|x|^2}{(1+\eta)^2} - \tilde{d}^2\left(x, \frac{y}{1+\eta}\right) \tag{3.10}$$

Il reste alors à montrer que $\tilde{d}(x, y)$ est continue en (x, y) avec $y \neq 0$ et à interpréter $|x|^2 + \tilde{d}^2(x, y)$.

Le premier point résulte de la continuité de la fonction g et de la compacité pour la convergence uniforme de la boule unité de l'espace de Cameron-Martin. D'autre part, nous présentons un procédé indirect qui permet d'identifier les deux termes considérés précédemment. Soit $g_n \geq g$ une suite de fonctions positives de classe C^∞ à dérivées de tous ordres bornées convergeant vers la fonction g uniformément sur tout compact. Notons $p_t^n((0, 0), (x, y))$ le noyau de la chaleur associé à l'opérateur

$$L^n = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}g_n^2(x)\frac{\partial^2}{\partial y^2} + f(x)\frac{\partial}{\partial y}\ .$$

Par application des deux théorèmes précédents à la quantité $p_t^n((0, 0), (x, y))$ on déduit de l'unicité de la limite quand t tend vers 0 de $2t \log p_t((0, 0), (x, y))$ que pour l'opérateur L^n on a,

$$|x|^2 + \tilde{d}_n^2(x, y) = d_n^2(x, y) \tag{3.11}$$

Il reste alors à montrer que les suites $d_n(x, y)$ et $\tilde{d}_n(x, y)$ convergent uniformément sur tout compact vers $d(x, y)$ et $\tilde{d}(x, y)$ respectivement. La première de ces convergences résulte de l'inégalité $d_n(x, y) \leq d(x, y)$ et de la compacité de la boule unité de l'espace de Cameron-Martin pour la norme uniforme. La preuve de la seconde convergence est identique à la précédente l'inégalité $d_n(x, y) \leq d(x, y)$ étant remplacée par l'inégalité $\tilde{d}_n(x, y) \leq \tilde{d}(x, y)$.

Exposons maintenant deux analogues stochastiques de la méthode de Davies [7]. La première de ces méthodes, purement locale, est basée sur le calcul de Malliavin et n'utilise pas uniquement la symétrie du semi-groupe.

Pour une fonction $\psi(x, y)$ de classe C^∞, on obtient en calculant de manière analogue à [21], la quantité $e^{-\psi}Ae^{\psi}$,

$$\begin{aligned} e^{-\psi}Ae^{\psi} = A &+ \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} + g^2(x)\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}g^2(x)\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} \\ &+ \frac{1}{2}g^2(x)\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + f(x)\frac{\partial\psi}{\partial y} \end{aligned} \tag{3.12}$$

Soit $P_{\psi,t}$ le semi-groupe associé à l'opérateur différentiel $e^{-\psi}Ae^{\psi}$. Par utilisation d'une formule de Girsanov et d'une formule de Feynmann-Kac, on a de manière analogue à la formule (1.11) de [21],

$$\begin{aligned} P_{\psi,t}f(x, y) = E\Bigg[f(x_1(\varepsilon), y_1(\varepsilon)) &\exp\left[\frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^1 \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}(x_s(\varepsilon), y_s(\varepsilon)) + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}(x_s(\varepsilon), y_s(\varepsilon))\right)^2\right) ds\right] \\ &\times \exp\left[\frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^1 g^2(x_s(\varepsilon))\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}(x_s(\varepsilon), y_s(\varepsilon)) + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}(x_s(\varepsilon), y_s(\varepsilon))\right)^2\right) ds\right] \\ &\times \exp\left[\varepsilon\int_0^1 \frac{\partial\psi}{\partial x}(x_s(\varepsilon), y_s(\varepsilon))\delta w_s^1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^1 \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}(x_s(\varepsilon), y_s(\varepsilon))\right)^2 ds\right] \\ &\times \exp\left[\varepsilon\int_0^1 g(x_s(\varepsilon))\frac{\partial\psi}{\partial y}(x_s(\varepsilon), y_s(\varepsilon))\delta w_s^2 - \frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^1 g^2(x_s(\varepsilon))\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}(x_s(\varepsilon), y_s(\varepsilon))\right)^2 ds\right] \\ &\times \exp\left[\varepsilon^2\int_0^1 f(x_s(\varepsilon))\frac{\partial\psi}{\partial y}(x_s(\varepsilon), y_s(\varepsilon))\, ds\right]\Bigg] \end{aligned} \tag{3.13}$$

pour la diffusion $(x_s(\varepsilon), y_s(\varepsilon))$ issue de (x, y). (Ici, δw_s^i désigne la différentielle au sens d'Itô). En résumé, on a

$$P_{\psi,t}f(x, y) = E[f(x_1(\varepsilon), y_1(\varepsilon)) \exp [I_1(\varepsilon) + I_2(\varepsilon)]] \tag{3.14}$$

avec,

$$I_1(\varepsilon) = \varepsilon \int_0^1 \frac{\partial \psi}{\partial x}(x_s(\varepsilon), y_s(\varepsilon))\delta w_s^1 + \varepsilon \int_0^1 g(x_s(\varepsilon))\frac{\partial \psi}{\partial y}(x_s(\varepsilon), y_s(\varepsilon))\delta w_s^2 \tag{3.15}$$

et,

$$\begin{aligned} I_2(\varepsilon) = {} & \frac{\varepsilon^2}{2} \int_0^1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(x_s(\varepsilon), y_s(\varepsilon))ds + \frac{\varepsilon^2}{2} \int_0^1 g^2(x_s(\varepsilon))\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}(x_s(\varepsilon), y_s(\varepsilon))\, ds \\ & + \varepsilon^2 \int_0^1 f(x_s(\varepsilon))\frac{\partial \psi}{\partial y}(x_s(\varepsilon), y_s(\varepsilon))\, ds \end{aligned} \tag{3.16}$$

Notation 3.1. On dira qu'une fonction ψ nulle en $(0, 0)$ est de classe H si les conditions suivantes sont satisfaites,

(*) $\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y)\right)^2 + g^2(x)\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y)\right)^2 \leq 1$

(**) Les fonctions $\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(x, y)$, $g(x)\frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y)$, $g^2(x)\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}(x, y)$ et $f(x)\frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y)$ sont de classe C^∞ à dérivées de tous ordres bornées.

Remarquons que la condition (*) a été introduite par Davies [7] page 83.

De plus, on a le résultat suivant,

Théorème 3.3. *Supposons que les fonctions f et g sont de classe C^∞ à dérivées de tous ordres bornées et qu'au voisinage de l'origine on a $g(x) > \exp\left[-\frac{C}{|x|^\alpha}\right]$ pour un α dans $[0, 2[$. Soient ψ une fonction de classe H, γ la constante donnée par le Théorème 1.3 et δ un réel strictement positif à 1 alors, il existe deux constantes notées $C_\delta(\psi)$ et $C(\delta)$ telles que pour tout $t \leq 1$ et tout couple (x, y), on a*

$$p_t((0, 0), (x, y)) \leq C_\delta(\psi) \exp\left[\frac{C(\delta)}{t^\gamma}\right] \exp\left[-\frac{|\psi(x, y)|^2}{2\delta t}\right] \tag{3.17}$$

Preuve du Théorème 3.3. Soit ψ une fonction de classe H. Par utilisation de l'inégalité de Hölder, des formules d'intégration par parties données par le calcul de Malliavin, on montre que la densité de la mesure $P_{\psi\beta/t,t}f(0, 0)$ est majorée par $\exp\left[\frac{\delta\beta^2}{2t}\right] \exp [C(\delta)\beta] \exp\left[\frac{C(\delta)}{t^\gamma}\right]$ pour le même réel γ que celui donné par le Théorème 1.3. D'autre part, la densité de la mesure qui à la fonction f associe $P_{\psi\beta/t,t}f(0, 0)$ est égale à $\exp\left[\frac{\psi(x, y)\beta}{t}\right] p_t((0, 0), (x, y))$.

On en déduit donc,

$$p_t((0,0),(x,y)) \le \exp[|\beta| C_\delta(\psi)] \exp\left[\frac{C(\delta)}{t^\gamma}\right] \exp\left[\frac{\delta\beta^2}{2t} - \frac{\beta\psi(x,y)}{t}\right] \tag{3.18}$$

En suivant une idée développée par Davies [7], extremisons cette inégalité en β. Lorsque $\beta = \frac{1}{\delta}\psi(x,y)$, l'inégalité (3.18) devient,

$$p_t((0,0),(x,y)) \le \exp[|\psi(x,y)| C_\delta(\psi)] \exp\left[\frac{C(\delta)}{t^\gamma}\right] \exp\left[-\frac{\psi^2(x,y)}{2\delta t}\right] \tag{3.19}$$

cela termine la preuve du Théorème 3.3 car nous ne tenons compte que des réels t tels que $t \le 1$.

Remarque 3.1. Si X_1 désigne le champ de vecteur $\frac{\partial}{\partial x}$ et X_2 le champ de vecteur $g(x)\frac{\partial}{\partial y}$ on peut améliorer les calculs ci-dessus et montrer que toutes les dérivées suivant les champs de vecteurs X_1 et X_2 de $p_t((0,0),(x,y))$ vérifient elles aussi l'inégalité (3.17). Cela est dû au fait que la fonction ψ se dérive correctement dans les directions des champs de vecteurs X_1 et X_2.

D'autre part, il semble exclu d'obtenir une estimation du type de (3.17) pour les dérivées $\frac{\partial^{(\alpha)}}{\partial x^{(\alpha)}}\frac{\partial^{(\beta)}}{\partial y^{(\beta)}} p_t((0,0),(x,y))$ sous la condition H. Pour obtenir une telle estimation, il faut supposer, au lieu de l'hypothèse (**), que la fonction ψ est de classe C_b^∞ ce qui donne une mauvaise approximation de la distance $d(x,y)$. En effet, si on supprime l'hypothèse (**), Jerison et Sanchez [11] ont montré que la distance $d(x,y)$ est telle que $\sup_{\psi \text{ vérifiant } H} \psi^2(x,y) = d^2(x,y)$. D'autre part, on peut aussi noter que la fonction $d(x,y)$ n'est ni de classe C^∞ ni Höldérienne, comme nous allons le prouver.

Si on suppose que $g(x) \le \exp\left[-\frac{C}{|x|^\alpha}\right]$ pour un $\alpha \in [0, 2[$, on a

$$\tilde{d}^2(0,y) \ge \operatorname*{Inf}_{h(1)=0} \left\{ |y|^2 C \exp\left[\frac{C}{(\sup|h_s|^\alpha)}\right] + \sup|h_s|^2 \right\} \tag{3.20}$$

car $\sup|h_s|^2 \le \|h\|^2$.

On obtient donc,

$$\tilde{d}^2(x,y) \ge \operatorname*{Inf}_{u>0} \left\{ C|y|^2 \exp\left[\frac{C}{u^\alpha}\right] + u^2 \right\} \tag{3.21}$$

Introduisons la fonction $F_y(u)$ définie par $F_y(u) = C|y|^2 \exp\left[\frac{C}{u^{\alpha/2}}\right] + u$. On a alors,

$$F_y'(u) = -\frac{C\alpha}{2}\frac{1}{u^{1+\alpha/2}}|y|^2 C^2 \exp\left[\frac{C}{u^{\alpha/2}}\right] + 1 \tag{3.22}$$

On remarque donc, que la fonction $F_y'(u)$ est décroissante et posséde un unique 0. On en déduit donc que $F_y(u)$ posséde un unique minimum noté u_y.

De plus, $u_y \to 0$ lorsque $y \to 0$ d'où, $\exp\left[\frac{C}{u_y^{\alpha/2}}\right] \leq \frac{C}{y^2}$ et $u_y \geq (-C \log|y|)^{2/\alpha}$. Ce qui implique que $F_y(u_y)$ est supérieur à $(-C \log|y|)^{2/\alpha}$ et donc que $d(0, y) \geq (-C \log|y|)^{1/\alpha}$ quand $|y|$ tend vers 0.

Appliquons maintenant la méthode de Davies développée dans le chapitre 3 de [7]. Ici, on suppose que seule la condition (*) de H est satisfaite. Alors, on a comme dans le corollaire 3.2.2 de [7],

$$\int_{\mathbf{R}^2} h^p \log h \, dxdy \leq \varepsilon \int A^{1/2}(\phi h) A^{1/2}(\phi^{-1} h^{p-1}) dxdy + \gamma(\varepsilon, p)\|h\|_{L^p}^p + \|h\|_{L^p}^p \log \|h\|_{L^p} \tag{3.23}$$

avec

$$\gamma(\varepsilon, p) = 2F(\varepsilon(1-\mu))p^{-1} + \varepsilon\beta^2 \left\{1 + \frac{(p-2)^2}{4(p-1)\mu}\right\} \tag{3.24}$$

pour $\phi = e^{-\beta\psi}$.

Posons $\varepsilon(p) = \lambda + 2^\lambda p^{-\lambda}$ de sorte que $\int_2^\infty p^{-1}\varepsilon(p)dp = t$ et introduisons

$$\begin{aligned} \Gamma(p) &= \frac{2}{p}\gamma(\varepsilon(p), p) \\ &= \frac{Cp^\lambda \gamma}{p^2 t^\gamma} - \frac{C \log p}{p^2} - \frac{1}{p^2}\log t + \frac{t}{p}\beta^2 p^{-\lambda}\lambda\left[C + \frac{(p-2)^2}{4(p-1)\mu}\right]2^\lambda \end{aligned} \tag{3.25}$$

D'autre part, pour que la quantité $\int_2^\infty \Gamma(p)dp$ converge, on doit supposer que $\lambda\gamma < 1$ et que $\lambda > 1$ ce qui n'est possible que si $\gamma < 1$ dans l'inégalité de Sobolev logarithmique.

Dans ce cas, on a

$$\int_2^\infty \Gamma(p)dp \leq \frac{C}{t^\gamma} - \frac{1}{2}\log t + C(\lambda) + \beta^2 \tag{3.26}$$

Toutefois, on ne peut pas contrairement à [7] page 88 faire tendre $C(\lambda)$ vers 1 en faisant tendre λ vers l'infini car $\lambda\gamma < 1$.

On obtient alors le Théorème suivant, l'opérateur différentiel L' étant défini par l'égalité (1.24),

Théorème 3.4. *Supposons que la matrice $a(x, y)$ soit minorée par*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp\left[-\frac{C}{|x|^\alpha}\right] \end{bmatrix}.$$

Notons $d((x, y), (x', y'))$ *la distance associée à la métrique définie par la matrice* $a(x, y)$ *alors, le semi-groupe* P_t *possède une densité* $p'_t((x, y), (x', y'))$ *telle que pour tout* $t \geq 0$ *et tous couples* (x, y), (x', y') *on a*

$$p'_t((x, y), (x', y')) \leq \frac{C}{t} \exp\left[\frac{C}{t^\gamma}\right] \exp\left[-\frac{Cd^2((x, y), (x', y'))}{t}\right] \tag{3.27}$$

pour $\gamma < 1$.

Preuve du Théorème 3.4. De l'inégalité (3.26), on déduit que la norme $L^{2,\infty}$ du semi-groupe associé à $\exp[-\beta\psi]A\exp[\beta\psi]$ est majorée par $\frac{C}{\sqrt{t}}\exp\left[\frac{C}{t^\gamma}\right]\exp[C\beta^2]$ si la fonction ψ vérifie la condition (*). De plus, comme le semi-groupe est symétrique, on en déduit que sa densité est bornée uniformément par $\frac{C}{t}\exp\left[\frac{C}{t^\gamma}\right]\exp[Ct\beta^2]$.

On a donc,

$$\exp[-\beta\psi(x, y)]p'_t((x, y), (x', y'))\exp[\beta\psi(x', y')] \leq \frac{C}{t}\exp\left[\frac{C}{t^\gamma}\right]\exp[Ct\beta^2] \tag{3.28}$$

D'où,

$$p'_t((x, y), (x', y')) \leq \frac{C}{t}\exp\left[\frac{C}{t^\gamma}\right]\exp[\beta(\psi(x, y) - \psi(x', y')) + Ct\beta^2] \tag{3.29}$$

On extremise cette quantité en prenant $\beta = -\frac{2}{Ct}(\psi(x, y) - \psi(x', y'))$ et, on obtient

$$p'_t((x, y), (x', y')) \leq \frac{C}{t}\exp\left[\frac{C}{t^\gamma}\right]\exp\left[-\frac{\psi(x, y) - \psi(x', y')}{Ct}\right] \tag{3.30}$$

où les constantes apparaissant dans l'inégalité (3.30) ne dépendent pas de la fonction ψ.

D'autre part, d'après [11],

$$d^2((x, y), (x', y')) = \operatorname*{Inf}_{\psi \text{ de classe } H} |\psi(x, y) - \psi(x', y')| \tag{3.31}$$

Cela termine la preuve de (3.27).

Terminons cet article en donnant un deuxième analogue stochastique de la méthode de Davies suivant de plus près l'esprit de [7]. Comme la technique utilisée est sensiblement différente de la première, introduisons une nouvelle classe de fonctions de la façon suivante,

Notation 3.2. On dira qu'une fonction ψ est dans H' si les conditions suivantes sont satisfaites,

(*) $\left|\frac{\partial\psi}{\partial x}(x, y)\right|^2 + g^2(x)\left|\frac{\partial\psi}{\partial y}(x, y)\right|^2 \leq 1$

et,

(**) Les fonctions $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2}(x, y)$ et $g^2(x)\dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2}(x, y)$ sont bornées.

Alors, on prouve le Théorème suivant,

Théorème 3.5. *Supposons que la norme $L^{p,\infty}$ du semi-groupe P_t est majorée par $\dfrac{C(p)}{t^{1/p}}\exp\left[\dfrac{C(p)}{t^\gamma}\right]$. Soit ψ une fonction de la classe H' alors, pour tout $t \geq 0$, tout couple (x, y), (x', y') et tout $\delta > 1$, il existe une constante $C(\delta)$ et un réel strictement positif $\alpha(\delta)$ tel que*

$$p_t((x, y), (x', y'))$$

$$\leq \frac{C(\delta)}{t^{\alpha(\delta)}}\exp\left[\frac{C(\delta)}{t^\gamma}\right]\exp\left[-\frac{(\psi(x, y)-\psi(x', y'))^2}{2\delta t}\right]\exp\left[C_\delta(\psi)(\psi(x, y)-\psi(x', y'))\right] \tag{3.32}$$

Remarque 3.2. Lorsque δ tend vers 1, $\alpha(\delta)$ tend à priori vers 0.

Preuve du Théorème 3.5. Soit $l \leq 1$. On a,

$$\begin{aligned} |P_{\beta(\psi/t),lt}f(x, y)| &= E[f(x_1(\sqrt{lt}), y_1(\sqrt{lt}))\exp[I_1(\sqrt{lt}) + I_2(\sqrt{lt})]] \\ &\leq E[f^p(x_1(\sqrt{lt}), y_1(\sqrt{lt}))]^{1/p}\exp[\beta l C_p(\psi)]\exp\left[\frac{\beta^2}{2t}\frac{p}{p-1}l\right] \end{aligned} \tag{3.33}$$

par application de l'inégalité de Hölder.

D'autre part, par hypothèses, on a pour $r > 1$,

$$E[f^p(x_1(\sqrt{lt}), y_1(\sqrt{lt}))]^{1/p} \leq \frac{1}{(lt)^{1/r}}\exp\left[\frac{C(r)}{(lt)^\gamma}\right]\|f\|_{L^{pr}} \tag{3.34}$$

Alors, pour tout $r > 1$,

$$\|P_{\beta(\psi/t),lt}\|_{L^{pr}\to L^\infty} \leq \frac{C(r)}{(lt)^{1/r}}\exp\left[\frac{C(r)}{(lt)^\gamma}\right]\exp[\beta l C_p(\psi)]\exp\left[\frac{\beta^2}{2t}\frac{p}{p-1}l\right] \tag{3.35}$$

ce qui signifie,

$$\left\{\iint (p_{\beta(\psi/t),lt}((x, y), (x', y')))^{pr/(pr-1)}dx'dy'\right\}^{(pr-1)/pr}$$

$$\leq \frac{C(r)}{(lt)^{1/r}}\exp\left[\frac{C(r)}{(lt)^\gamma}\right]\exp[\beta l C_p(\psi)]\exp\left[\frac{\beta^2}{2t}\frac{p}{p-1}l\right] \tag{3.36}$$

La propriété de Markov et la symétrie du semi-groupe perturbé impliquent que

$$
\begin{aligned}
p_{\beta(\psi/t),t}((x, y), (x', y')) &= \iint_{\mathbf{R}^2} p_{\beta(\psi/t),lt}((x, y), (x'', y''))p_{\beta(\psi/t),(1-l)t}((x'', y''), (x', y'))dx''dy'' \\
&\leq \left\{ \iint_{\mathbf{R}^2} (p_{\beta(\psi/t),lt}((x, y), (x'', y'')))^{pr/(pr-1)} dx''dy'' \right\}^{(pr-1)/pr} \\
&\times \left\{ \iint_{\mathbf{R}^2} (p_{\beta(\psi/t),(1-l)t}((x'', y''), (x', y')))^{pr} dx''dy'' \right\}^{1/pr} \qquad (3.37)
\end{aligned}
$$

Introduisons $q' = r' = \sqrt{\dfrac{pr}{pr-1}}$ de sorte que $pr = \dfrac{q'r'}{q'r'-1}$. On déduit alors de (3.27) et (3.28),

$$
\begin{aligned}
&p_{\beta(\psi/t),t}((x, y), (x', y')) \\
&\leq \frac{C(p, l, r)}{t^{\alpha(p,r)}} \exp\left[\frac{C(p, l, r)}{t^{\gamma}}\right] \exp\left[\beta C_{p,r}(\psi)\right] \exp\left[\frac{\beta^2}{2t}\frac{p}{p-1}l\right] \exp\left[\frac{\beta^2}{2t}C_{p,r}(l-1)\right]
\end{aligned} \qquad (3.38)
$$

Soit $\delta > 1$. En prenant l assez proche de 1 et p assez grand, on obtient

$$
p_{\beta(\psi/t),t}((x, y), (x', y')) \leq \frac{C(\delta)}{t^{\alpha(\delta)}} \exp\left[\frac{C(\delta)}{t^{\gamma}}\right] \exp\left[\beta C_{\delta}(\psi)\right] \exp\left[\frac{\beta^2\delta}{2t}\right] \qquad (3.39)
$$

Remarquons que $\alpha(\delta)$ tend à priori vers 0 quand δ tend vers 1. Or,

$$
p_{\beta(\psi/t),t}((x, y), (x', y')) = \exp\left[-\frac{\beta\psi(x, y)}{t}\right] p_t((x, y), (x', y')) \exp\left[\frac{\beta\psi(x', y')}{t}\right] \qquad (3.40)
$$

On en déduit donc que

$$
p_t((x, y), (x', y')) \leq \frac{C(\delta)}{t^{\alpha(\delta)}} \exp\left[\frac{C(\delta)}{t^{\gamma}}\right] \exp\left[\beta C_{\delta}(\psi)\right] \exp\left[\frac{\beta^2\delta}{2t} + \frac{\beta}{t}(\psi(x, y) - \psi(x', y'))\right] \qquad (3.41)
$$

On conclue en extrémisant le membre droit de l'inégalité (3.41) en prenant $\beta = \frac{1}{\delta}(\psi(x, y) - \psi(x', y'))$. Cela termine la preuve du Théorème 3.5.

4. Appendice

Une inégalité de Sobolev logarithmique. L'inégalité (1.23) ne résulte pas directement du Théorème 1.1 par application du Théorème 2.2.3 de [7] car dans ce dernier, les normes utilisées sont des normes $L^{2,\infty}$. Calculons maintenant la norme $L^{p,\infty}$ du semi-groupe P_t associé à l'opérateur différentiel L.

On a,

$$E[f(x_1(\varepsilon), y_1(\varepsilon))] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon^2}} \iint_{\mathbf{R}^2} f(x', y') \exp\left[-\frac{(x'-x)^2}{2\varepsilon^2}\right]$$

$$\times E_{\text{pont}}\left[\frac{\exp\left[-\dfrac{|y'-y|^2}{\varepsilon^2 \int_0^1 g^2(x+\varepsilon w_s^1 + s(x'-x))ds}\right]}{\left(\int_0^1 g^2(x+\varepsilon w_s^1 + s(x'-x))ds\right)^{1/2}}\right] dx'dy' \quad \text{(A.1)}$$

En effectuant alors le changement de variables $x' \to x' - x$ et $y' \to y' - y$, on obtient

$$E[f(x_1(\varepsilon), y_1(\varepsilon))] = \frac{1}{2\pi\varepsilon^2} \iint_{\mathbf{R}^2} f(x' + x, y' + y) \exp\left[-\frac{x'^2}{2\varepsilon^2}\right]$$

$$\times E_{\text{pont}}\left[\frac{\exp\left[-\dfrac{y'^2}{2\varepsilon^2 \int_0^1 g^2(x + \varepsilon w_s^1 + sx')ds}\right]}{\left(\int_0^1 g^2(x + \varepsilon w_s^1 + sx')ds\right)^{1/2}}\right] dx'dy' \quad \text{(A.2)}$$

D'autre part, par application de l'inégalité de Hölder avec les nombres conjugués p et q, on déduit

$$E[f(x_1(\varepsilon), y_1(\varepsilon))] \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon^2}} \|f\|_{L^p} \left\{\iint_{\mathbf{R}^2} \exp\left[-\frac{qx'^2}{2\varepsilon^2}\right]\right.$$

$$\left. \times E_{\text{pont}}\left[\frac{\exp\left[-\dfrac{qy'^2}{2\varepsilon^2 \int_0^1 g^2(x+\varepsilon w_s^1 + sx')ds}\right]}{\left(\int_0^1 g^2(x+\varepsilon w_s^1 + sx')ds\right)^{q/2}}\right] dx'dy' \right\}^{1/q} \quad \text{(A.3)}$$

Alors, en intégrant par rapport à y' après avoir appliqué le Théorème de Fubini, on a,

$$E[f(x_1(\varepsilon), y_1(\varepsilon))]$$

$$\leq \frac{C}{\sqrt{2\pi\varepsilon^{2-1/q}}} \|f\|_{L^p} \left\{\int_{\mathbf{R}} \exp\left[-\frac{qx'^2}{2\varepsilon^2}\right] E_{\text{pont}}\left[\frac{1}{\left(\int_0^1 g^2(x+\varepsilon w_s^1 + sx')ds\right)^{(q-1)/2}}\right] dx'\right\}^{1/q}$$

(A.4)

Alors, d'après les inégalités obtenues dans le Théorème 1.1, on obtient

$$\begin{aligned} E[f(x_1(\varepsilon), y_1(\varepsilon))] &\leq \frac{C(p)}{\varepsilon^{2-1/q}} \|f\|_{L^p} \exp\left[\frac{C(p)}{\varepsilon^{2\gamma}}\right]\left(\int_{\mathbf{R}} \exp\left[-\frac{qx'^2}{2\varepsilon^2}\right]dx'\right)^{1/2} \\ &\leq \frac{C(p)}{\varepsilon^{2-2/q}} \|f\|_{L^p} \exp\left[\frac{C(p)}{\varepsilon^{2\gamma}}\right] \\ &\leq \frac{C}{t^{1/p}} \exp\left[\frac{C(p)}{t^\gamma}\right] \|f\|_{L^p} \end{aligned} \tag{A.5}$$

On en déduit donc que la norme $L^{2,\infty}$ du semi-groupe P_t est majorée par $\frac{C}{\sqrt{t}} \exp\left[\frac{C}{t^\gamma}\right]$ ce qui implique l'inégalité de Sobolev logarithmique (1.23). Montrons maintenant la réciproque de cette proposition en suivant les idées développées dans [7]. D'après le Lemme 2.2.6 de [7], on a

$$\int h^p \log h \, dxdy \leq \varepsilon \int Ah\, h^{p-1} dxdy + \frac{2F(\varepsilon)}{p} \|h\|_{L^p}^p + \|h\|_{L^2}^2 \log \|h\|_{L^2} \tag{A.6}$$

Choisissons comme dans [7] page 73, $\varepsilon(p) = \lambda t\, 2^\lambda p^\lambda$ avec $2\lambda\gamma = 1$ de sorte que $\int_2^\infty p^{-1}\varepsilon(p)dp = t$. Introduisons maintenant,

$$\Gamma(p) = \frac{2}{p} F(\varepsilon(p)) = \frac{2}{p}\left[\frac{Cp^{1/2}}{t^\gamma} - \frac{\lambda}{2}\log p - \frac{1}{2}\log t + C\right] \tag{A.7}$$

d'après le Théorème 2.2.7 de [7], on déduit que la norme $L^{2,\infty}$ du semi-groupe P_t est majorée par e^M avec

$$\begin{aligned} M &= \int_2^\infty \frac{2}{p^2}\left[\frac{Cp^{1/2}}{t^\gamma} - \alpha \log p - \frac{1}{2}\log t + C\right]dt \\ &= -\frac{1}{2}\log t + \frac{C}{t^\gamma} + C \end{aligned} \tag{A.8}$$

Ainsi, la norme $L^{2,\infty}$ du semi-groupe P_t est majorée par $\frac{C}{\sqrt{t}} \exp\left[\frac{C}{t^\gamma}\right]$. De plus, comme le semi-groupe P_t est symétrique, on en déduit que la densité de ce semi-groupe est majorée par $\frac{C}{t} \exp\left[\frac{C}{t^\gamma}\right]$ pour tout $t > 0$.

URA CNRS 399
Département de Mathématiques
Université de Metz
UFR MIM
Ile du Saulcy
F 57045 Metz Cedex

ET
INRIA LORRAINE
IRMA
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ LOUIS PASTEUR
RUE DESCARTES
F 67084 STRASBOURG CEDEX

Références

[1] R. Azencott, Grandes déviations et applications. In: Hennequin, P. L. (ed.) Ecole d'été de Probabilités de Saint Flour VIII-1978. (Lect. Notes Math., vol 774, pp 2–176), Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1980.

[2] G. Ben Arous et R. Léandre, Décroissance exponentielle du noyau de la chaleur sur la diagonale Partie I, Probability Theory and Related Fields (à paraître).

[3] G. Ben Arous et R. Léandre, Décroissance exponentielle du noyau de la chaleur sur la diagonale Partie II, Probability Theory and Related Fields (à paraître).

[4] J. M. Bismut, Large deviations and the Malliavin calculus, Progress in Mathematics, 45, Birkhaüser, Boston, 1984.

[5] J. M. Bismut, Index theorem and equivariant cohomology on the loop space, Comm. Math. Phys., **98** (1985), 213–237.

[6] A. Connes, Entire cyclic cohomology of Banach algebras and characters of q-summable Fredholm modules, K-theory, **1** (1988), 519–548.

[7] E. B. Davies, Heat kernels and spectral theory, Cambridge tracts in mathematics 92, Cambridge University Press, 1990.

[8] P. Florchinger et R. Léandre, Décroissance non exponentielle du noyau de la chaleur, Soumis pour publication.

[9] L. Gross, Potential theory on Hilbert spaces, J. Funct. Anal., **1** (1967), 123–181.

[10] N. Ikeda, Probabilistic methods in the study of asymptotics. In: Hennequin, P. L. (ed.) Ecole d'été de Probabilités de Saint Flour XVIII–1988. (Lect. Notes Math., vol 1427, pp 195–325), Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1990.

[11] D. S. Jerison et A. Sanchez-Calle, Subelliptic second order differential operators. In: Berenstein, E. (ed) Complex analysis III (Lect. Notes Math., vol 1227, pp 46–78), Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1987.

[12] J. Jones et R. Léandre, L^p chen forms over the loop space, Prépublication.

[13] P. Kree, La théorie des distributions en dimension quelconque et l'intégration stochastique. In: Korezlioglu, H., Ustunel, A. S. (eds.) Stochastic analysis and related topics. (Lect. Notes Math., vol 1316, pp 170–233), Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1988.

[14] H. Kuo, Gaussian measure on Banach spaces, Lect. Notes Math., vol 463, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1975.

[15] S. Kusuoka et D. W. Stroock, Application of the Malliavin calculus Part II, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA, **32**–1 (1985), 1–76.

[16] R. Léandre, Thèse de troisième cycle, Univ. Besançon, 1984.

[17] R. Léandre, Estimation en temps petit de la densité d'une diffusion hypoelliptique, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris Série I, **301**–17 (1985), 801–804.

[18] R. Léandre, Renormalisation et calcul des variations stochastiques, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris Série I, **302**–3 (1986), 135–138.

[19] R. Léandre, Volume de boules sous-riemanniennes et explosion du noyau de la chaleur au sens de Stein. In: Azéma, J., Yor, M. (eds.) Séminaire de Probabilités XXIII. (Lect. Notes Math., vol 1372, pp 426–448), Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1990.

[20] R. Léandre et F. Russo, Estimation de Varadhan pour les diffusions à deux paramètres, Probability Theory and Related Fields, **84** (1990), 429–451.

[21] R. Léandre et F. Russo, Estimation de la densité de l'équation de Zakai robuste. Pré-publication.

[22] P. Malliavin, Stochastic calculus of variations and hypoelliptic operators. Proccedings of the International Conference on Stochastic Differential Equations (Kyoto 1976), 195–263, Tokyo: Kinokuniya, New York: Wiley, 1978.

[23] P. A. Meyer, Le calcul de Malliavin et un peu de pédagogie, R.C.P. n°34, Université de Strasbourg, 1984.

[24] D. Nualart et E. Pardoux, Stochastic calculus with anticipating integrands, Probability Theory and Related Fields, **78** (1988), 535–581.

[25] D. Ocone, A guide to the stochastic calculus of variations. In: Korezlioglu, H., Ustunel, A. S. (eds.) Stochastic analysis and related topics. (Lect. Notes Math., vol 1316, pp 1–79), Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1988.

[26] S. R. S. Varadhan, Large deviations and applications, SIAM, Philadelphia, 1984.

[27] S. Watanabe, Stochastic differential equations and Malliavin calculus, Tata Inst. of Fundamental Research, Bombay, Springer, 1984.

[28] S. Watanabe, Analysis of Wiener functionals and its applications to heat kernels, Ann. of Proba., **15**-1 (1987), 1–39.

[29] M. Weber, Les petites valeurs du maximum absolu du mouvement brownien, Une preuve sans transformée de Laplace, Communication manuscrite.

[30] M. Zakai, The Malliavin calculus, Acta Applicandae Math., **3** (1985), 175–207.