J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)
33-4 (1993) 1071-1096

Finitude des lacunes dans le spectre de l'opérateur de Schrödinger et de celui de Dirac avec des potentiels electrique et magnétique périodiques

Par

Alain GRIGIS et Abderemane MOHAMED

§1. Introduction et énoncé des résultats

On considère sur $\mathbf{R}^n$ un réseau $\Gamma = \{a; a = \sum_{j=1}^n k_j e_j,\ k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbf{Z}^n\}$, où $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de $\mathbf{R}^n$. Le réseau dual sera noté Γ^*,

$$\Gamma^* = \{\gamma \in \mathbf{R}^n; \gamma a \in 2\pi\mathbf{Z}, \forall a \in \Gamma\} .$$

Soit $V(x)$ une fonction réelle définie sur $\mathbf{R}^n$ et Γ-périodique,

$$V(x - a) = V(x), \qquad \forall a \in \Gamma . \tag{1.1}$$

Si $V(x) \in L^\infty(\mathbf{R}^n)$, il est connu que l'opérateur de Schrödinger,

$$H_V = -\Delta + V(x) , \tag{1.1'}$$

est essentiellement auto-adjoint, c'est à dire qu' il admet une unique extension auto-adjointe sur $L^2(\mathbf{R}^n)$ que nous noterons aussi H_V et qui contient $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, les fonctions indéfiniment dérivables et à support compact, dans son domaine. Quitte à faire une translation du spectre de H_V, $\mathrm{sp}\,(H_V)$, en ajoutant à $V(x)$ une constante, on se ramenera au cas où la moyenne de $V(x)$ sur le tore $\mathbf{T}^n = \mathbf{R}^n/\Gamma$ est nulle

$$\int_{\mathbf{T}^n} V(x)dx = 0 . \tag{1.1''}$$

Les spectre de H_V est composé de bandes:

$$\mathrm{sp}\,(H_V) = \bigcup_{k=1}^{\infty} b_k , \qquad b_k = [b_k^-, b_k^+] . \tag{1.2}$$

Pour tout entier k, b_k est l'image de la k$^{\text{ième}}$ valeur propre, $\lambda_k(\theta)$, de l'opérateur de Floquet $H_V^\theta = (D - \theta)^2 + V(x)$ sur $L^2(\mathbf{T}^n)$, le paramètre θ variant sur $\mathbf{R}^n$,

$$b_k = \{\lambda_k(\theta); \theta \in \mathbf{R}^n\} , \tag{1.3}$$

Received October 2, 1992, revised July 14, 1993
Communicated by T. Ikebe

$\left(D = (D_1, \dots, D_n) \text{ avec } D_j = -i\dfrac{\partial}{\partial x_j}\right)$. La suite des valeurs propres $(\lambda_j(\theta))_{j>0}$ est rangée par ordre croissant et chaque valeur propre est répétée autant de fois que sa multiplicité.

Plus généralement si $P = p(x, D)$ est un opérateur différentiel ou pseudo-différentiel sur $\mathbf{R}^n$, d'ordre m, elliptique et à coefficients assez réguliers et Γ-périodiques, i.e.,

$$p(x-a, \xi) = p(x, \xi), \qquad \forall a \in \Gamma \text{ et } \forall (x, \xi) \in T^*(\mathbf{R}^n),$$

alors P admet une unique extention fermée sur $L^2(\mathbf{R}^n)$ contenant $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ dans son domaine et son adjoint s'obtient de la même manière en partant de l'adjoint formel $p^*(x, D)$. La théorie de Floquet permet de voir que le spectre de P est constitué des valeurs propres des opérateurs de Floquet P^θ définis sur $L^2(\mathbf{T}^n)$ par

$$P^\theta u = p(x, D-\theta)u, \qquad \forall u \in \mathscr{D}(P^\theta) = W^m(\mathbf{T}^n),$$

le paramètre θ parcourant $\mathbf{R}^n$, ($W^m(\Omega)$ désigne l'espace de Sobolev d'ordre m sur Ω, et si P est un opérateur, $\mathscr{D}(P)$ désigne son domaine).

La conjecture de Bethe-Sommerfeld affirme que les bandes recouvrent toute une demi-droite, c'est à dire que les lacunes ou "gaps", (quand elles existent ce sont les intervalles ouverts $]b_k^+, b_{k+1}^-[$,) sont en nombre fini, ou encore, du fait que H_V est semi-borné inférieurement, qu'il existe un réel c tel que $[c, +\infty[\subset \mathrm{sp}(H_V)$.

Quand $n = 1$, on montre que la conjecture est fausse sauf pour des potentiels analytiques dits à un nombre fini de bandes, voir par exemple le livre de Eastham [EA], $[\mathrm{SK}]_1$ et, [GR] et [RA] pour des contre-exemples analytiques. Pour $n = 2$ elle a été démontrée par Dahlberg et Trubowitz [DA-TR], et pour $n = 3$ par Skriganov $[\mathrm{SK}]_2$, pour des potentiels $V(x)$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, voir aussi $[\mathrm{VE}]_1$. Pour $n > 3$, le résultat le plus récent est celui de O. A. Veliev $[\mathrm{VE}]_2$ qui démontre la conjecture pour des potentiels indéfiniment dérivables, $V \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$. D'autres propriétés des "gaps" et des valeurs propres de l'opérateur de Floquet peuvent se retrouver dans les travaux récents de J. Feldman, H. Knörrer et E. Trubowitz, [KN-TR] et $[\text{FE-KN-TR}]_{1,2}$.

Nous donnerons une autre démonstration de la conjecture de Bethe-Sommerfeld, pour $n > 1$ et $V(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^n; \mathbf{R})$, qui permet de retrouver les cas connus quand $2 \leqslant n \leqslant 3$ et $V(x) \in L^\infty(\mathbf{R}^n)$ et le cas non connu de l'opérateur de Schrödinger avec un potentiel magnétique périodique

$$H_V(\vec{c}) = \sum_{j=1}^n (D_j - c_j(x))^2 + V(x), \tag{1.4}$$

où $\vec{c}(x) = (c_1(x), \dots, c_n(x))$ est un potentiel magnétique vérifiant

$$\vec{c}(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^n; \mathbf{R}^n) \quad \text{et} \quad \vec{c}(x-a) = \vec{c}(x), \quad \forall a \in \Gamma \text{ et } \forall x \in \mathbf{R}^n. \tag{1.5}$$

Le champ magnétique $B(x)$ sera identifié à la deux-forme $B(x) = d(\sum_{j=1}^n c_j(x)dx_j)$.

Dans le cas où le champ magnétique $B(x)$ n'est pas nul, les démonstrations classiques consistant à considérer $H_V(\vec{c})$ comme une simple perturbation de $H_0(\vec{0})$ ne marchent pas car $H_V(\vec{c}) - H_0(\vec{0})$ n'est plus un opérateur borné sur $L^2(\mathbf{R}^n)$.

Nous partons de l'idée que la conjecture de Bethe-Sommerfeld est équivalente à dire qu'il existe un $\lambda_0 > 0$ tel que l'on ait

$$(1.6) \qquad N_{\mathrm{Max}}(\lambda^2; H_V(\vec{c})) > N_{\min}(\lambda^2; H_V(\vec{c})), \qquad \forall \lambda > \lambda_0,$$

où

$$N_{\mathrm{Max}}(\lambda^2; H_V(\vec{c})) = \mathrm{Max}\,\{N(\lambda^2; H_V^\theta(\vec{c}); \theta \in \mathbf{R}^n\},$$

$$H_V^\theta(\vec{c}) = \textstyle\sum_{j=1}^n (D_j - \theta_j - c_j(x))^2 + V(x),$$

et

$$N_{\min}(\lambda^2; H_V(\vec{c})) = \min\,\{N(\lambda^2; H_V^\theta(\vec{c})); \theta \in \mathbf{R}^n\},$$

(si G est un opérateur auto-adjoint, $N(\lambda; G)$ désigne le rang de sa projection spectrale sur $]-\infty, \lambda[$).

Dahlberg et Trubowitz [DA-TR] ont estimé $N_{\mathrm{Max}}(\lambda^2; H_0(\vec{0}))$ et $N_{\min}(\lambda^2; H_0(\vec{0}))$ et, par des arguments de perturbations, il en ont déduit (1.6), (avec $\vec{c} = \vec{0}$ et $n = 2$). Skriganov $[\mathrm{SK}]_2$ a suivi la même idée mais le résultat est plus difficile à prouver quand $n = 3$ que quand $n = 2$.

Ces méthodes de perturbations ne marchent pas quand le potentiel magnétique est non nul. Notre méthode consiste à estimer directement $N_{\mathrm{Max}}(\lambda^2; H_V(\vec{c}))$ et $N_{\min}(\lambda^2; H_V(\vec{c}))$.

Pour estimer $N(\lambda^2; H_V^\theta(\vec{c}))$ qui est une fonction Γ^*-périodique en θ, nous utilisons la méthode de L. Hörmander $[\mathrm{HO}]_{1,2}$, qui consiste à étudier à l'aide d'un opérateur Fourier-intégral, l'opérateur d'évolution associé à l'opérateur pseudo-différentiel Q^θ,

$$(1.7) \qquad F_t^\theta = \exp(itQ^\theta), \qquad \text{pour } t \in \mathbf{R},$$

avec

$$(1.8) \qquad Q^\theta = |H_V^\theta(\vec{c})|^{1/2},$$

(si L est un opérateur $|L|$ est l'opérateur auto-adjoint $|L| = (L^*L)^{1/2}$).

Les estimations classiques résultant de l'étude de F_t^θ, pour $|t|$ borné, permettent juste de voir qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$(1.9) \qquad N(\lambda^2; H_V^\theta(\vec{c})) = c_w\lambda^n + \mathcal{O}(\lambda^{n-1-\varepsilon}),$$

c_w étant la constante de Weyl, (voir par exemple [VO]), $c_w = \dfrac{1}{n}(2\pi)^{-n}|\mathbf{T}^n||\mathbf{S}^{n-1}|$. L'estimation (1.9) est insuffisante pour conclure, du fait que l'on ne sait pas si le reste, le $\mathcal{O}(\lambda^{n-1-\varepsilon})$, a une amplitude qui varie suffisamment comme fonction de θ.

Nous ferons, comme Dahlberg et Trubowitz [DA-TR], une étude du comportement asymtotique d'un nombre fini de coefficients de Fourier de $N(\lambda^2; H_V^\theta(\vec{c}))$, $(M_b(\lambda^2; H_V(\vec{c})))_{b\in\Gamma}$, pour en déduire l'amplitude de la fonction $\theta \to N(\lambda^2; H_V^\theta(\vec{c}))$,

$$(1.10) \qquad M_b(\lambda^2; H_V(\vec{c})) = (2\pi)^{-n}|\mathbf{T}^n| \int_{\mathbf{R}^n/\Gamma^*} e^{ib\theta} N(\lambda^2; H_V^\theta(\vec{c}))\,d\theta, \qquad \text{si } b \in \Gamma,$$

(on a utilisé l'égalité $|\mathbf{R}^n/\Gamma^*| = (2\pi)^n/|\mathbf{T}^n|$).

Nous obtenons un développement asymptotique de $M_b(\lambda^2; H_V(\vec{c}))$, modulo un $\mathcal{O}(1)$ qui permet d'avoir le théorème suivant.

Théorème [1.1] *Sous les hypothèses* (1.1) *et* (1.5), *et si* $V(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^n; \mathbf{R})$, *alors*

$$M_0(\lambda^2; H_V(\vec{c})) = \sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^{n-j} + \mathcal{O}(1)\,, \qquad \textit{ceci quand } \lambda \gg 1\,, \tag{1.11}$$

où les a_j *sont des constantes avec* a_1 *qui est nul et* a_0 *qui est la constante de Weyl*:

$$a_0 = c_w \qquad \textit{et} \qquad a_1 = 0\,. \tag{1.12}$$

Si $b \in \Gamma$ *et si* $b \neq 0$, *il existe une constante* $C_V(B, b)$, *ne dépendant que de* V, *du champ magnétique* $B(x)$ *et de* b, *telle que l'on ait*

$$\begin{aligned}|M_b(\lambda^2; H_V(\vec{c})) - |\mathbf{T}^n|(2\pi|b|)^{-(n+1)/2}\lambda^{(n-1)/2}\{&d_1(b, B)\sin[\lambda|b| - \pi(n-1)/4]\\ &+ (\lambda|b|)^{-1}d_2(b, B)\cos[\lambda|b| - \pi(n-1)/4]\\ &+ (\lambda|b|)^{-1}d_3(b, B, V)\sin[\lambda|b| - \pi(n-1)/4]\}|\\ \leqslant C_V(B, b)&(1 + \lambda^{(n-5)/2})\,,\end{aligned} \tag{1.13}$$

ceci $\forall b \in \Gamma \backslash \{0\}$ *et* $\forall \lambda \gg 1$.

Les constantes $d_j(b, B)$, *pour* $j = 1, 2$, *sont complexes et ne dépendent que de* b *et du champ magnétique* $B(x)$, *celle* $d_3(b, B, V)$ *dépend de plus de* $V(x)$, *et, pour tout entier* $k > 0$, *il existe une constante* $C_k(B)$, *ne dépendant que de* $B(x)$, *telle que l'on ait*

$$|d_1(b, B) - 2| + |\mathrm{Re}\,(d_2(b, B) - d_2(b, 0))| \leqslant C_k(B)|||b|||^{-k}\,, \tag{1.14}$$

$(d_2(b, 0) = -(n-1) - (n^2-1)/4)$, *et*

$$|d_3(b, B, V) - d_3(b, B, 0)| \leqslant C_k(B)|||b|||^{-k}\|V\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n)}\,, \tag{1.15}$$

ceci si b *est un multiple d'un premier, i.e. si* $b = m\sum_{j=1}^{n} p_j e_j$ *avec* m *et les* $p_j \in \mathbf{Z}\backslash\{0\}$, *les* $|p_j|$ *étant des nombres premiers distincts deux à deux. On a noté* $|||b|||$ *le nombre* $|||b||| = \inf\{|p_j|, j = 1, \ldots, n\}$ *et* $\mathrm{Re}\,(z)$ *la partie réelle de* z.

Les estimations (1.13) et (1.14) permettent alors d'avoir le théorème suivant.

Théorème [1.2]. *Sous les hypothèses du théorème* [1.1], *il existe une constante* $\rho_n > 0$, *ne dépendant que de* n *et du champ magnétique* B, *et une constante* $C_V(B)$, *ne dépendant que de* V, *et du champ magnétique* B, *telles que, si* $n > 1$, *on ait*

$$N_{\mathrm{Max}}(\lambda^2; H_V(\vec{c})) - N_{\min}(\lambda^2; H_V(\vec{c})) > \rho_n \lambda^{\delta(n)} - C_V(B)(1 + \lambda^{\delta(n)-1})\,, \qquad \forall\lambda \gg 1\,, \tag{1.16}$$

avec $\delta(n) = \dfrac{n-1}{2}$ *si* $n - 1 \notin 4\mathbf{N}$ *et* $\delta(n) = \dfrac{n-3}{2}$ *si* $n - 1 \in 4\mathbf{N}$.

Corollaire [1.3]. *Sous les hypothèses* (1.1) *et* (1.5) *et la suivante,* $V(x) \in L^\infty(\mathbf{R}^n)$ si $2 \leqslant n \leqslant 3$, *et* $V(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ si $n > 3$, *il existe un réel* Λ *tel que*

$$[\Lambda, +\infty[\subset sp(H_V(\vec{c}))\,. \tag{1.17}$$

Nos méthodes permettent traiter d'autres opérateurs elliptiques; nous traiterons le cas l'opérateur de Dirac avec un potentiel magnétique et électrique périodiques au paragraphe § 3. Nous construirons l'opérateur d'évolution et démontrerons les résultats ci-dessus au paragraphe § 3.

Quitte à changer de jauge on se ramènera au cas où on a

$$\int_{\mathbf{T}^n} \vec{c}(x)dx = \vec{0}\,. \tag{1.18}$$

Il existe alors alors une unique fonction $g(x) \in C^\infty(\mathbf{T}^n; \mathbf{R})$ vérifiant

$$\Delta g(x) = \operatorname{div}(\vec{c}(x)) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} c_j(x) \qquad \text{et} \qquad \int_{\mathbf{T}^n} g(x)dx = 0\,. \tag{1.19}$$

On peut donc se ramener au cas où on a de plus

$$\operatorname{div}(\vec{c}(x)) = 0\,. \tag{1.20}$$

Le potentiel $\vec{c}(x)$ vérifiant (1.18) et (1.20) est uniquement déterminé par le champ magnétique $B(x)$. Il est facile de voir que la série de Fourier de $\vec{c}(x)$ vérifiant (1.18) et (1.20) s'obtient, de manière unique, à partir de celle du champ magnétique $B(x)$.

Nous tenons à remercier vivement *Y.* Colin de Verdière, J. C. Guillot et B. Helffer pour l'intérêt porté à ce travail.

Dans la suite, toute constante ne dépendant que de $V(x)$ et $\vec{c}(x)$ sera notée C.

On utilisera la notation o.p.d. pour opérateur pseudodifférentiel. Nous renvoyons à $[\mathrm{HO}]_2$ pour les notions de base des o.p.d..

Dans toute la suite, le produit scalaire sur $L^2(\mathbf{R}^n)$ et celui sur $L^2(\mathbf{T}^n)$ seront notés $\langle .|. \rangle$, et les normes associées par $\|.\|$.

§ 2. Démonstration des résultats

§ 2.1. Les o.p.d. sur le tore et la racine carrée de H. Si P est un o.p.d. sur $\mathbf{R}^n$,

$$Pf(x) = (2\pi)^{-n} \int_{T^*(\mathbf{R}^n)} e^{i\xi(x-y)} p(x, \xi) f(y) dy d\xi\,, \qquad \forall f \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)\,,$$

de symbole $p(x, \xi)$ Γ-périodique en x, $p(x - a, \xi) = p(x, \xi)$, $\forall a \in \Gamma$, alors P induit sur $\mathbf{T}^n$ un o.p.d.. Plus généralement si $\theta \in \mathbf{R}^n$, l'o.p.d. de symbole $p(x, \xi - \theta)$ induit sur $\mathbf{T}^n$ un o.p.d. que nous noterons P^θ, plus précisément si $f(x)$ est une fonction C^∞ et Γ-périodique sur $\mathbf{R}^n$, alors $p(x, D - \theta)f(x)$ est aussi Γ-périodique. Le noyau distribution de cet opérateur P^θ sur $\mathbf{T}^n$ est

$$KP^\theta(x, y) = \sum_{\gamma \in \Gamma^*} p(x, \gamma - \theta) e^{i\gamma(x-y)} = (2\pi)^{-n} \sum_{a \in \Gamma} \int_{\mathbf{R}^n} p(x, \xi - \theta) e^{i\xi(x-y+a)} d\xi\,;$$

les variables x et y parcourent une cellule élémentaire $\mathscr{K}$ modèlisant $\mathbf{T}^n$, la cellule de Wigner-Seitz par exemple,

$$\mathscr{K} := \{z \in \mathbf{R}^n;\, z = \tau_1 e_1 + \cdots + \tau_n e_n, \text{ avec } \tau_j \in [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}]\}\,.$$

La formule de composition des o.p.d. est conservée. De plus, si $p(x, \xi)$ est d'ordre k, alors P^θ opère continûment de l'espace de Sobolev $W^t(\mathbf{T}^n)$ sur celui $W^{t-k}(\mathbf{T}^n)$, ceci $\forall t \in \mathbf{R}$. La théorie de Floquet montre que, si U est l'isométrie entre $L^2(\mathbf{R}^n)$ et $L^2(\mathscr{K} \times \mathscr{K}^*)$,

$$U(f)(x, \theta) = (2\pi)^{-n/2}|\mathbf{T}^n|^{1/2} \sum_{a \in \Gamma} e^{i\theta(x-a)} f(x - a)\,, \tag{2.1}$$

($\mathscr{K}^*$ désigne la zone de Brillouin, une cellule élémentaire du reseau dual), alors on a

$$Pf(x) = U^{-1}[P^\theta U(f)(x, \theta)]\,, \qquad \forall f \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)\,. \tag{2.2}$$

Nous considérerons une autre classe de symboles. Si $p(z, y, \xi)$ est un symbole d'ordre k sur $(\mathbf{R}^n)^3$, i.e. pour tout multi-indices ζ, γ et ω, il existe $C_{\zeta,\gamma,\omega} > 0$ tel que

$$|\partial_z^\zeta \partial_y^\gamma \partial_\xi^\omega p(z, y, \xi)| \leqslant C_{\zeta,\gamma,\omega} \langle \xi \rangle^{k-|\omega|}\,,$$

$$<\xi> = (|\xi|^2 + 1)^{1/2}, \qquad \text{et si } p(z, y + a, \xi) = p(z, y, \xi),$$

$$\forall (z, y, \xi) \in (\mathbf{R}^n)^3 \qquad \text{et } \forall a \in \Gamma\,,$$

alors l'o.p.d., P, défini sur $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ par

$$Pf(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^{2n}} e^{i\xi(x-y)} p(x - y, y, \xi) f(y)\, dy\, d\xi\,,$$

induit un o.p.d., P^0, sur $\mathbf{T}^n$ de noyau distribution

$$KP^0(x, y) = (2\pi)^{-n} \sum_{a \in \Gamma} \int_{\mathbf{R}^n} p(x - y + a, y, \xi) e^{i\xi(x-y+a)} d\xi\,.$$

On se place sous les hypothèses du théorème [1.1].

Proposition [2.1]. *Sous les hypothèses du théorème* [1.1], *et si on a* (1.1′), (1.18) *et* (1.20), *alors l'opérateur* $Q = Q_V(\vec{c})$,

$$Q = |H_V(\vec{c})|^{1/2}\,, \tag{2.3}$$

est un o.p.d. d'ordre 1. *Plus précisément, il existe un symbole* $q(x, \xi) \in S^1(T^*(\mathbf{R}^n))$ *qui est* Γ*-périodique (en la variable* x*), et qui vérifie les propriétés suivantes.*

$$q(x, D) \text{ est proprement supporté} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} q(x, \xi) - [|\xi| - \tfrac{1}{2}|\xi|^{-1}(2\xi\vec{c}(x) - |\vec{c}(x)|^2 - V(x) \\ + |\xi|^{-2}(\xi\vec{c}(x))^2 + i|\xi|^{-2}\xi\partial_x(\xi\vec{c}(x)))] \in S^{-2}(T^*(\mathbf{R}^n)\backslash\{0\})\,, \end{aligned} \tag{2.5}$$

et pour tout entier $N > 0$, *il existe* $C_N > 0$ *tel que*

(2.6) $$\|(H_0(\vec{0}) + 1)^{N/2}(Q - q(x, D))(H_0(\vec{0}) + 1)^{N/2}\| \leqslant C_N \,.$$

Ceci résulte du calcul de [SE] de la racine carrée de $H_V(\vec{c})$, (voir aussi $[\mathrm{HO}]_2$).

Comme pour tout $\theta \in \mathscr{K}^*$, il existe un opérateur Q^θ sur $L^2(\mathbf{T}^n)$, de domaine $W^1(\mathbf{T}^n)$, tel que

(2.7) $$Qf(x) = U^{-1}[Q^\theta U(f)(x, \theta)]\,, \qquad \forall f \in W^1(\mathbf{R}^n)\,,$$

on a forcement

(2.8) $$Q^\theta = |H^\theta|^{1/2}\,.$$

On écrira que $q(x, \xi) \sim \sum_{j \leqslant 1} q_j(x, \xi)$, avec $q_j(x, \tau\xi) = \tau^j q_j(x, \xi)$, $\forall \tau > 0$ et $\forall (x, \xi) \in T^*(\mathbf{R}^n)$, $q_1(x, \xi) = |\xi|$ et

(2.8′) $$\int_{\mathbf{T}^n} q_0(x, \xi)dx = 0\,.$$

On a le résultat de perturbation suivant.

Proposition [2.2]. *Sous les hypothèses du théorème* [1.1], *si T est un o.p.d. sur $\mathbf{R}^n$ d'ordre-m,* avec $m \in \mathbf{N}$, *tel que T soit auto-adjoint sur $L^2(\mathbf{R}^n)$, alors il existe une constante $C_T > 0$, ne dépendant que de T, $V(x)$ et $\vec{c}(x)$, tel que l'on ait*

(2.9) $$N(\lambda - \lambda^{-m}C_T; Q^\theta) \leqslant N(\lambda; Q^\theta + T^\theta)$$
$$\leqslant N(\lambda + \lambda^{-m}C_T; Q^\theta)\,, \qquad \forall \lambda > 1 \text{ } et \text{ } \forall \theta \in \mathbf{R}^n\,.$$

Preuve. La Γ^*-periodicité en la variable θ du spectre montre qu'il suffit de considérer θ dans $\mathscr{K}^*$. L'opérateur $T^\theta(Q^\theta + i)^m$ est alors uniformement borné. Si $\lambda_k(\theta)$ est une valeur propre de Q^θ et si E_k est le sous espace propre associé, alors

$$\|(Q^\theta + T^\theta - \lambda_k(\theta))u\| = |\lambda_k(\theta) + i|^{-m}\|T^\theta(Q^\theta + i)^m u\|\,, \qquad \forall u \in E_k\,,$$

ce qui montre que le nombre des valeurs propres de $Q^\theta + T^\theta$ dans l'intervalle

$$[-|\lambda_k(\theta) + i|^{-m}\|T^\theta(Q^\theta + i)^m\| + \lambda_k\,, \quad \lambda_k + |\lambda_k(\theta) + i|^{-m}\|T^\theta(Q^\theta + i)^m\|]$$

est supérieur ou égal à la dimension de E_k.

Comme l'opérateur $T^\theta(Q^\theta + T^\theta + i)^{-m}$ est aussi uniformément borné en $\theta \in \mathscr{K}^*$, le même raisonnement, en intervertissant les rôles de Q et $Q + T$, permet de conclure.

La Proposition [2.2] permet de supposer que $q(x, \xi) = 0$ si $|\xi| < C$ et que

(2.9′) $$Qf(x) = q(x, D)f(x) + Tf(x)\,, \qquad \forall f \in W^1(\mathbf{R}^n)\,,$$

avec T qui est un o.p.d. d'ordre $-N$, (on supposera $N > n$).

Comme $q(x, \xi)$ est Γ-périodique, pour tout $a \in \Gamma$ et pour tout $\theta \in \mathbf{R}^n$, on a

$$e^{i\theta(x-a)}(\exp[itq(x, D)]f)(x - a) = (\exp[itq(x, D - \theta)]f_a^\theta)(x)\,,$$

avec $f_a^\theta(x) = e^{i\theta(x-a)}f(x-a)$; on vérifie alors facilement que l'on a

$$U(\exp[itq(x,D)]f)(x,\theta) = \exp[itq(x,D-\theta)]U(f)(x,\theta), \qquad \forall f \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n),$$

et donc que

$$(2.9'') \qquad U\exp(itQ) = \exp(itQ^\theta)U,$$

$$(Q^\theta g)(x,\theta) = q(x, D-\theta)g^\theta, \qquad \text{si } g^\theta(x) = g(x,\theta), \quad \forall x \in \mathbf{T}^n.$$

§ 2.2. Construction de l'opérateur d'évolution sur $\mathbf{R}^n$. On construit, comme dans $[\mathrm{HO}]_1$, $\exp(itQ)$ comme un opérateur Fourier intégral, de phase

$$(2.10) \qquad \psi_t(x,y,\xi) = \xi(x-y) + t|\xi|,$$

$$\exp(itQ)f(x) = (S_t)^{\Psi_t}f(x) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^{2n}} e^{i\Psi_t(x,y,\xi)}s(t,y,\xi)f(y)dyd\xi.$$

Comme $Q(S_t)^{\Psi_t}f(x) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^{2n}} e^{i\Psi_t(x,y,\xi)}q(x,\xi)s(t,y,\xi)f(y)dyd\xi$, en faisant un développement de Taylor de $q(x,\xi)$, en x et au point $y - t\xi/|\xi|$, on peut écrire $Q(S_t)^{\Psi_t}$ comme un Fourier intégral de phase Ψ_t et d'amplitude fonction de (t,y,ξ), ceci modulo un opérateur régularisant.

Pour résoudre aisément les équations de transport donnant l'amplitude $s(t,y,\xi)$, on doit l'écrire sous la forme suivante,

$$(2.10') \qquad s(t,y,\xi) = e^{i\Psi_t^1(y,\xi)}p(t,y,\xi),$$

$$\text{avec } \Psi_t^1(y,\xi) = \int_0^t q_0(y-\tau\hat{\xi},\xi)d\tau, \qquad \left(\hat{\xi} = \frac{\xi}{|\xi|}\right).$$

Soit alors Φ_t la nouvelle phase

$$(2.10'') \qquad \Phi_t(x,y,\xi) = \Psi_t(x,y,\xi) + \Psi_t^1(y,\xi) = \Psi_t(x,y,\xi) + t\Psi^0(y,t\hat{\xi},\hat{\xi}),$$

(on a utilisé le fait que $\Psi_t^1(y,\tau\xi) = \Psi_t^1(y,\xi)$, $\forall\tau \in \mathbf{R}$). Il est facile de voir que la fonction $\Psi^0(y,z,\eta)$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R}^{3n}$, et que, pour tout multi-indice α, ζ et δ, il existe $C_{\alpha,\zeta,\delta}$ tel que

$$(2.10''') \qquad |\partial_y^\alpha\partial_z^\zeta\partial_\eta^\delta\Psi^0(y,z,\eta)| \leqslant C_{\alpha,\zeta\delta}|\eta|^{-|\delta|}, \qquad \forall (y,z,\eta) \in \mathbf{R}^{3n}.$$

Pour tout entier N fixé, on peut écrire

$$(2.11) \qquad \exp(itQ) = (P_t)^{\Phi_t} + \left(\int_0^t \exp(i(t-\tau)Q)(R_\tau)^{\Phi_\tau}d\tau\right) + \exp(itQ)R^0,$$

$(P_t)^{\Phi_t}$ et $(R_t)^{\Phi_t}$ sont des opérateurs Fourier intégraux de phase $\Phi_t(x,y,\xi)$, et d'amplitude $p(t,y,\xi)$ et $r(t,x-y,y,\xi)$ qui ont leur support en la variable ξ qui évite un voisinage fixe de l'origine, et R^0 est un o.p.d. indépendant de t, de symbole $\Gamma^0(x,\xi)$ Γ-périodique en x et $r^0(x,\xi) \in S^{-N}(T^*(\mathbf{R}^n))$ avec $N > n$,

$$(2.12)\qquad (P_t)^{\Phi_t}f(x) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^{2n}} e^{i\Phi_t(x,y,\xi)}p(t, y, \xi)f(y)dyd\xi\,, \qquad \forall f \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)\,,$$

et

$$(2.12')\qquad (R_t)^{\Phi_t}f(x) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^{2n}} e^{i\Phi_t(x,y,\xi)}r(t, x-y, y, \xi)f(y)dyd\xi\,, \qquad \forall f \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)\,.$$

Le symbole $p(t, y, \xi)$ s'écrit sous la forme

$$(2.13)\qquad p(t, y, \xi) = \sum_{j=0}^{N-1} p_{-j}(t, y, \xi)\,.$$

Pour tout j, pour tout multi-indice ω, δ et ζ, et pour tout entier i et k, il existe $C_{\omega,\delta,i,k}$ et $C_{\omega,\delta,\zeta,i,k} \in \mathbf{R}$, ne dépendant que de ω, δ, ζ, i et k, tel que l'on ait

$$(2.14)\qquad |\partial_\rho^i \partial_\xi^\omega \partial_y^\delta \partial_t^k p_{-j}(t, y, \xi)| \leqslant C_{\omega,\rho,i,k}\langle t\rangle^{[3j+|\omega|-k]_+}\langle \xi\rangle^{-j-|\omega|-i}\,,$$

et

$$(2.14')\qquad |\partial_\rho^i \partial_\xi^\omega \partial_y^\delta \partial_z^\zeta \partial_t^k r(t, z, y, \xi)| \leqslant C_{\omega,\rho,\zeta,i,k}\langle t\rangle^{[3N+|\omega|-k]_-}\langle \xi\rangle^{-N-|\omega|-i};$$

($\rho = |\xi|$, $\langle t\rangle = (|t|^2+1)^{1/2}$ et $[d]_+$ est égal à d, si $d \geqslant 0$, et à 0, si $d < 0$). Remarquons que si $|\xi| > 1$ on a

$$(2.15)_0\qquad p_0(t, y, \xi) = 1$$

et compte tenu de (2.5)

$$(2.15)_1\qquad p_{-1}(t, y, \xi) = -\int_0^t \{\partial_\xi[\partial_x q_0(y-\tau\hat{\xi}, \xi)] + i(\partial_\xi \Psi_\tau^1(y, \xi))(\partial_x q_0(y-\tau\hat{\xi}, \xi)) - iq_{-1}(y-\tau\hat{\xi}, \xi)\}d\tau\,,$$

et plus généralement, si $j > 0$, on a

$$(2.15)_j\qquad p_{-j}(t, y, \xi) = i\int_0^t e^{-i\psi_\tau^1(y,\xi)}\left\{\sum_{k=1}^{j} q_{-k}(y-\tau\hat{\xi}, \xi)s_{-j+k}(\tau, y, \xi) + \sum_{m=1}^{j-1}\sum_{|\alpha|=j-m}\frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha \left[\sum_{k=1}^{m} \partial_x^\alpha q_{-k}(y-\tau\hat{\xi}, \xi)s_{-m+k}(\tau, y, \xi)\right]\right\}d\tau\,,$$

et

$$(2.15)_\infty\qquad e^{i\psi_t^1(y,\xi)}r(t, x-y, y, \xi) = \sum_{k=1}^{N} q_{-k}(x-y+y, \xi)s_{-N+k}(t, y, \xi) + \sum_{m=1}^{N-1}\sum_{|\alpha|=N-m}\frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha\left[\sum_{k=1}^{m}\left(\int_0^1 (1-\tau)^{N-m}\partial_x^\alpha q_{-k} \times (x-y+t\hat{\xi}+\tau(y-t\hat{\xi}), \xi)d\tau\right)s_{-m+k}(t, y, \xi)\right],$$

avec la convention que $q_{-N}(x, \xi) = q(x, \xi) - \sum_{j=0}^{N-1} q_{-j}(x, \xi)$ et que

$$s_j(t, y, \xi) = e^{i\psi_t^1(y, \xi)} p_j(t, y, \xi) .$$

Les symboles $p(t, y, \xi)$ et $r(t, x, y, \xi)$ auront leur support dans $\{|\xi| > C\}$.

Pour étudier le noyau du reste de la formule donnant $\exp(itQ_V)$, on est amené à étudier le noyau $KR_t(x, y)$ donné par l'intégrale oscillante

$$KR_t(x, y) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} r(t, x - y, y, \xi) e^{i\Phi(t, x-y, y, \xi)} d\xi , \tag{2.16}$$

La formule (2.14′) montre que les intégrations par parties en $|\xi|$ permettent de gagner des puissances de $|\xi|$, plus précisement, si N est assez grand, pour tout entier k et j, et pour tout multi-indice ζ et δ, $|\zeta| + |\delta| < N/2$, il existe $C_{k,j} > 0$ tel que

$$|\partial_x^\zeta \partial_y^\delta KR_t(x, y)| \leqslant C_{k,j} \langle t\rangle^{3N+j} \langle x - y\rangle^{-j-1} (\langle |x - y| - |t|\rangle^{-k} + \langle t\rangle^{-k}) , \tag{2.17}$$

on a utilisé le fait que

$$\int_{\mathbf{S}^{n-1}} \langle z\omega + t\rangle^{-k-1} d\omega \leqslant C\langle z\rangle^{-1} (\langle |z| - |t|\rangle^{-k} + \langle t\rangle^{-k}) , \qquad \forall z \in \mathbf{R}^n . \tag{2.18}$$

De même pour tout entier $m \geqslant 0$, on a

$$(P_t)^{\phi_t}(f)(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^{2n}} e^{i\phi_t(x, y, \xi)} \left[\sum_{j=0}^{N-1} p_{-j,m}(t, x - y, y, \xi) \right] f(y) dy d\xi , \tag{2.19}$$

ceci pour tout $f \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$, si x est tel que $\hat{\xi}(x - y) + t \neq 0$, pour tout y dans le support de f: $p_{-j,m}(t, x - y, y, \xi) = i^m [\hat{\xi}(x - y) + t]^{-m} (\hat{\xi}\partial_\xi)^m p_{-j}(t, y, \xi)$.

§ 2.3. Etude du noyau distribution de l'opérateur d'évolution associé à l'opérateur de Floquet.

Lemme [2.3]. *Le noyau distribution,* $K_t Q^\theta(x, y)$, *de l'opérateur sur* $L^2(\mathbf{T}^n)$, $\exp(itQ^\theta)$ *est donné par*

$$K_t Q^\theta(x, y) = \sum_{a \in \Gamma} e^{i\theta(x-a-y)} K_t Q(x - a, y) , \tag{2.20}$$

où $K_t Q(x, y)$ *est le noyau distribution de l'opérateur* Q *sur* $L^2(\mathbf{R}^n)$ *et où* x *et* y *parcourent la cellule* $\mathscr{K}$ *de* $\mathbf{R}^n$ *modèlisant* $\mathbf{T}^n$.

Preuve. La Γ-périodicité de $q(x, D)$ montre que

$$K_t Q(x - a, y) = K_t Q(x, y + a) , \qquad \forall a \in \Gamma ,$$

ce qui permet de voir que

$$U \exp(itQ)(f)(x,\theta) = (2\pi)^{-n/2}|\mathbf{T}^n|^{1/2} \sum_{a\in\Gamma} e^{i\theta(x-a)} \sum_{b\in\Gamma} \int_{\mathscr{X}} K_t Q(x-a+b,y) f(y-b)dy$$

$$= \sum_{c\in\Gamma} \int_{\mathscr{X}} e^{i(x-c-y)} K_t Q(x-c,y)$$

$$\times \left[(2\pi)^{-n}|\mathbf{T}^n|^{1/2} \sum_{b\in\Gamma} e^{i\theta(y-b)} f(y-b)\right]dy\,,$$

ceci pour tout $f \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$. L'égalité (2.20) résulte alors de (2.1) et de (2.9″).

Si maintenant g est une fonction réelle sur $\mathbf{R}$, à support compact et assez régulière, pour tout $b \in \Gamma$ fixé, la moyenne pondérée par $e^{ib\theta}$ de la trace de $g(Q^\theta)$ est donné grâce à (2.20) par

$$\text{(2.21)}\qquad \frac{1}{|\mathscr{X}^*|}\int_{\mathscr{X}^*} e^{i\theta b}\,\mathrm{Tr}\,(g(Q^\theta))d\theta = (2\pi)^{-n}|\mathbf{T}^n| \int_{\mathscr{X}^*} e^{i\theta b}\,\mathrm{Tr}\,(g(Q^\theta))d\theta\,.$$

$$= (2\pi)^{-n-1}|\mathbf{T}^n| \int_{\mathscr{X}} \int_{\mathbf{R}} \hat{g}(t) K_t Q(x-b,x)dtdx\,.$$

On va étudier $K_tQ(x-b,y)$ pour x et $y \in \mathscr{X}$ et b appartenant à un borné. Il s'agit donc d'étudier $K_tQ(x,y)$, pour x et $y \in B_{r_0}$, pour un $r_0 > 0$ donné, on a noté

$$\text{(2.22)}\qquad B_r := \{z \in \mathbf{R}^n;\, |z| < r\}\,,\qquad \text{si } r > 0\,.$$

Soit $\chi_0 \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, $\mathrm{supp}\,(\chi_0) \subset B_{2r_0}$ et $\chi_0(x) = 1$, $\forall x \in B_{r_0}$.

Lemme [2.4]. *Le noyau distribution de $\chi_0 \exp(itQ)\chi_0$ est donné par*

$$\text{(2.23)}\qquad \chi_0(x)K(P_t)^{\phi_t}(x,y)\chi_0(y) + \chi_0(x)K\mathscr{R}_t(x,y)\chi_0(y) + \chi_0(x)K\mathscr{R}_t^0(x,y)\chi_0(y)\,,$$

où $K(P_t)^{\phi_t}(x,y)$, $K\mathscr{R}_t(x,y)$ et $K\mathscr{R}_t^0(x,y)$ désignent les noyaux distributions des opérateurs $(P_t)^{\phi_t}$, $\mathscr{R}_t = \int_0^t \exp(i(t-\tau)Q)(R_\tau)^{\phi_\tau}d\tau$ et $\mathscr{R}_t^0 = \exp(itQ)R^0$, ϕ_t, $(P_t)^{\phi_t}$, $(R_t)^{\phi_t}$ et R^0 étant ceux de (2.11).

Le nouyau $K\mathscr{R}_t(x,y)$ est continu en (t,x,y) et il existe un entier $d_0 \geqslant 0$, ne dépendant que de n, une constante $C(N)$, ne dépendant que de N, tel que l'on ait

$$\text{(2.24)}\qquad |K\mathscr{R}_t(x,y)\chi_0(y)| \leqslant C(N)\langle t\rangle^{3N+d_0}\,,$$

et

$$\text{(2.25)}\qquad |K\mathscr{R}_t^1(x,y)\chi_0(y)| \leqslant C(N)\langle t\rangle^{3N+d_0}\,,$$

si $\mathscr{R}_t^1 = (-\Delta+1)^{n/2}\mathscr{R}_t$.

L'égalité (2.23) résulte de (2.11). Pour se convaincre de (2.24) et (2.25), on remarque que

$$\|\mathscr{R}_t\chi_0\|_{W^n(\mathbf{R}^n)} \leqslant C\|(Q+i)^n\mathscr{R}_t\chi_0 f\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}$$

$$\leqslant C\langle t\rangle\,\mathrm{Sup}\,\{\|R_{n,\tau}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}\,;\quad \tau \in\,]-|t|-1, |t|+1[\}\,,$$

$R_{k,\tau}$ est l'opérateur Fourier intégral, de phase ϕ_τ et d'amplitude $(|\xi| + i)^k r_\tau(x - y, y, \xi)\chi_0(y)$. L'estimation (2.14′) montre alors que, si N est assez grand, le noyau de $R_{n,\tau}$ vérifie, $\|KR_{n,\tau}(x, y)\|_{L^2(\mathbf{R}^{2n})} \leqslant C\langle\tau\rangle^{3N-3+d_0}$, et donc $\|R_\tau\chi_0\|_{W^n(\mathbf{R}^n)} \leqslant C\langle\tau\rangle^{3N-3+d_0}$.

Un raisonnement identique montre que $\|\chi_0(R_\tau)^*\|_{W^n(\mathbf{R}^n)} \leqslant C\langle\tau\rangle^{3N-3+d_0}$, ce qui permet d'établir (2.24). L'estimation (2.25) s'obtient de la même façon, si l'on remarque que $\|(-\Delta + 1)^{n/2}(Q + i)^{-n}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \leqslant C$.

Lemme [2.5]. *Pour toute fonction $g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, on a*

(2.26)
$$\frac{1}{|\mathscr{K}^*|}\int_{\mathscr{K}^*} e^{i\theta b}\,\mathrm{Tr}\,(g(Q^\theta))d\theta = \int_{\mathscr{K}} K[g(Q)R^0](x - b, x)dx$$
$$+ (2\pi)^{-1}\int_{\mathbf{R}\times\mathscr{K}} \hat{g}(t)K\mathscr{R}_t(x - b, x)dxdt$$
$$+ (2\pi)^{-n-1}\int_{\mathbf{R}\times\mathscr{K}\times\mathbf{R}^n} e^{i\Phi_t(x-b,x,\xi)}p_t(x, \xi)\hat{g}(t)dtdxd\xi\ ;$$

la troisieme intégrale est oscillante, $K[g(Q)R^0](x, y)$ est le noyau de $g(Q)R^0$ qui est continu, et $K\mathscr{R}_t(x, y)$ est le noyau de l'opérateur $\mathscr{R}_t$ défini dans (2.23), *p_t étant le symbole de $(P_t)^{\phi_t}$ défini dans* (2.11).

Le deuxième membre de l'égalité (2.26) trouve son sens dans (2.19) et (2.24), et l'égalité (2.26) elle-même est justifiée par (2.21) et (2.23).

On vérifie facilement que (2.26) s'étend aux fonctions g qui sont telles que $\langle\tau\rangle^{n-1}g(\tau)$ et $\hat{g}(t)\langle t\rangle^{3N+d_0}$ soient dans $L^1(\mathbb{R})$.

§ 2.4. Comportement asymptotique de $M_b(\lambda; Q)$. Soit alors $\lambda \gg 1$, et soit g_λ la fonction caractéristique de $]0, \lambda[$,

(2.27) $$g_\lambda(\tau) = 1, \quad \text{si } 0 < \tau < \lambda\,, \quad \text{et } g_\lambda(\tau) = 0 \text{ autrement,}$$

on a

(2.28) $$\hat{g}_\lambda(t) = it^{-1}(e^{-i\lambda t} - 1)\,.$$

Lemme [2.6]. *Pour tout $b \in \Gamma$, il existe une constante C_b, ne dépendant que de b et V, telle que l'on ait*

(2.29) $$M_b(\lambda; Q) = \frac{1}{|\mathscr{K}^*|}\int_{\mathscr{K}^*} e^{i\theta b}N(\lambda; Q^\theta)d\theta$$

qui vérifie, pour tout $\lambda > 1$, on a

(2.29′) $$\left|M_b(\lambda; Q) - (2\pi)^{-n-1}\int_{\mathbf{R}\times\mathscr{K}\times\mathbf{R}^n} \hat{g}_\lambda(t)e^{i(t|\xi| - b\xi + \Psi_t^1(x,\xi))}p(t, x, \xi)dtdxd\xi\right| \leqslant C_b\,.$$

Preuve. Soit $\chi_1(t)$ une fonction de troncature sur $\mathbf{R}$, C^∞, paire, égale à 1 sur $[-C_b, C_b]$ et à support dans $[-2C_b, 2C_b]$, $C_b = 1 + |b|$. On écrit que

(2.30) $$g_\lambda(Q) = g^0_\lambda(Q) + if(Q-\lambda) - if(Q),$$

où les transformées de Fourier de $f(\tau)$ et $g^0_\lambda(\tau)$ sont données par

$$\hat{f}(t) = \frac{1-\chi_1(t)}{t} \quad \text{et} \quad \hat{g}^0_\lambda(t) = \chi_1(t)\hat{g}_\lambda(t) = \chi_1(t)\frac{e^{-i\lambda t}-1}{-it}.$$

Mais on a

(2.30′) $$f(\tau) = f^0(\tau) + f^1(\tau),$$

avec $f^0(\tau) = \chi_1(\tau)f(\tau)$ qui vérifie

(2.31) $$f^0 \in C_0^\infty(\mathbf{R}),$$

et pour tout entier $k > 0$ on a

(2.31′) $$f^1(\tau) = (-i\tau)^{-k}[1-\chi_1(2\tau)]f^{1,k}(\tau),$$

la transformée de Fourier de $f^{1,k}(\tau)$ étant $\hat{f}^{1,k}(t) = \dfrac{d^k}{dt^k}\left(\dfrac{1-\chi_1(t)}{t}\right)$.

Les propriétés (2.31) et (2.31′) et l'ellipticité de Q montrent aisément que $f(Q)$ est à noyau continu et borné,

(2.32) $$|Kf(Q)(x,y)| \leqslant C, \qquad \forall x \text{ et } y \in \mathbf{R}^n.$$

De plus, pour tout entier $k > 0$, on peut écrire que

(2.33) $$f(Q-\lambda) = f^0(Q-\lambda) + \chi_{1,k}(Q-\lambda)f^{1,k}(Q-\lambda),$$

où $$\chi_{1,k}(\tau) = (-i\tau)^{-k}[1-\chi_1(2\tau)].$$

Il est clair que, grâce à (2.24) et (2.25), on a

(2.34)
$$\begin{aligned}
&\Big| Kg^0_\lambda(Q)(x-b,x) + Kf^0(Q-\lambda)(x-b,x) \\
&\quad - (2\pi)^{-n-1}\int_{\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n} [\hat{g}^0_t(t) + e^{-i\lambda t}\hat{f}^0(t)]p(t,x,\xi)e^{i(t|\xi|-b\xi+\psi^1_t(x,\xi))}dtd\xi\Big| \\
&= \left|(2\pi)^{-1}\int_{\mathbf{R}} [\hat{g}^0_\lambda(t) + e^{-i\lambda t}\hat{f}^0(t)][K\mathscr{R}_t(x-b,x) + K\mathscr{R}^0_t(x-b,x)]dt\right| \\
&\leqslant C, \qquad \forall x \in \mathscr{K}.
\end{aligned}$$

($\psi^1_t(x,\xi)$ est celui défini dans (2.10′)).

On remarque maintenant que, si l'entier k est choisi assez grand, (2.23)–(2.25) montrent que

(2.34′)
$$\begin{aligned}
&\Big| K[\chi_{1,k}(Q-\lambda)f^{1,k}(Q-\lambda)](x-b,x) \\
&\quad - (2\pi)^{-n-1}\int_{\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n} e^{-i\lambda t}\chi_{1,k}(t)\otimes\hat{f}^{1,k}(t)p(t,x,\xi)e^{i(t|\xi|-b\xi+\psi^1_t(x,\xi))}dtd\xi\Big| \\
&\leqslant C, \qquad \forall x \in \mathscr{K}.
\end{aligned}$$

Comme on a

$$\left|\iint_{\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n} \hat{f}(t)p(t, x, \xi)e^{i(t|\xi|-b\xi+\psi_t^1(x,\xi))}d\xi dt\right| \leqslant C .$$

(il suffit d'intégrer par partie à l'aide de $(t|\xi|)^{-1}\xi\partial_\xi$ pour se convaincre), les estimations (2.32), (2.34) et (2.34′) prouvent (2.29′), ceci compte tenu de (2.30) et de (2.33).

Lemme [2.7]. *Soit $p_{-j}(t, x, \xi)$ un symbole dans $C^\infty(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^{2n})$ tel que, pour tout entier i et k et pour tout multi-indice ω et ζ, il existe $C_{i,k,\omega,\zeta} > 0$, ne dépendant que de i, k, ω et ζ, de façon à ce que l'on ait*

$$(2.35)\qquad |\partial_t^k\partial_\rho^i\partial_\xi^\omega\partial_x^\zeta p_{-j}(t, x, \xi)| \leqslant C_{i,k,\omega,\zeta}\langle t\rangle^{[3j+\omega-k]_+}\langle\rho\rangle^{-j-|\omega|-i} ,$$

avec $\rho = |\xi|$.

S'il existe $C > 0$, assez grand, tel que

$$(2.36)\qquad \operatorname{supp}(p_{-j}) \subset \{(t, x, \xi)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^{2n}; |\xi| \geqslant C\} ,$$

alors, si $b \neq 0$, on a

$$(2.37)\qquad \left|\iint_{\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n} e^{i\phi_t(x-b,x,\xi)}p_{-j}(t, x, \xi)\hat{g}_\lambda(t)d\xi dt\right| \leqslant C_b(\lambda^{((n-1)/2)-j} + 1) ;$$

C_b étant une constante > 0 ne dépendant que de b.

Preuve. Comme $|\partial_\rho\phi_t(x-b, x, \xi)| = |t - b\hat{\xi}|$, le théorème de la phase non stationnaire permet de négliger ce qui se passe quand $|t| \geqslant |b| + 1$. On peut donc supposer que

$$\operatorname{supp}(p_{-j}(t, x, \xi)) \subset \{(t, x, \xi)\in\mathbf{R}^{2n+1} ; |\xi| \geqslant C \text{ et } |t| \leqslant |b| + 2\} .$$

On fait un développement de Taylor en t, au voisinage de $t = b\hat{\xi}$, à l'ordre n de $s_{-j}(t, x, \xi) = e^{it\psi^0(x,t\hat{\xi},\hat{\xi})}p_{-j}(t, x, \xi)$. Par des intégrations par partie, on remplace les puissances de $(t - b\hat{\xi})$, $(t - b\hat{\xi})^k$, par $(i\partial_\rho)^k$ appliqué à l'amplitude. On est donc ramené à considérer le cas où s_{-j} est indépendant de t, d'où à étudier

$$(2.38)\qquad p_{-j,\lambda}(x) := \int_{\mathbf{R}^n} e^{-ib\xi}g_\lambda(|\xi|)e^{ib\hat{\xi}\psi^0(x,b\hat{\xi}\hat{\xi},\hat{\xi})}p_{-j}(x, \xi)d\xi .$$

Dans l'intégrale de (2.38), on fait des intégrations par partie à l'aide de $i|b|^{-2}b\partial_\xi$ jusque à obtenir un $\mathcal{O}(1)$, la formule de Green donne alors des intégrales sur la sphère $\{\xi; |\xi| = \lambda\}$, ce qui nous ramène à étudier

$$(2.38')\qquad p'_{-j,\lambda}(x) = \lambda^{n-1}\int_{\mathbf{S}^{n-1}} e^{-i\lambda b\hat{\xi}}e^{ib\hat{\xi}\psi^0(x,b\hat{\xi}\hat{\xi},\hat{\xi})}p_{-j}(x, \lambda, \hat{\xi})d\hat{\xi} .$$

Sur $\mathbf{S}^{n-1}$, la phase $\hat{\xi} \to -b\hat{\xi}$ a deux points critiques, $\hat{b}$ et $-\hat{b}$, et elle est non dégénérée en ces deux points, le hessien est défini-positif en $\hat{b}$ et défini-négatif en $-\hat{b}$, par conséquent le théorème de la phase stationnaire montre que

$$p'_{-j,\lambda}(x) = \mathcal{O}(\lambda^{-j+(n-1)/2}),$$

ce qui permet de conclure quand $b \neq 0$.

Lemme [2.8]. *Si $p_{-j}(t, x, \xi)$ est comme dans le lemme* (2.7) *et si $p_{-j}(t, x, \xi)$ s'annule à l'ordre $k \geqslant 1$ en $t = 0$,*

$$\partial_t^p p_{-j}(0, x, \xi) = 0, \qquad \text{si } p < k,$$

alors on a

$$\left| \int_{\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n} e^{i\phi_t(x,x,\xi)} p_{-j}(t, x, \xi)\hat{g}_\lambda(t) d\xi dt \right| \leqslant C(1 + \lambda^{n-j-k}). \tag{2.39}$$

Preuve. On suit la démonstration du lemme (2.7), on est ramené au cas où p_{-j} est à support dans $\{(t, x, \xi); |t| < 2\}$. L'hypothèse (2.36), (2.10″) et (2.10‴) permettent de faire le changement de variable $|\xi| \to |\xi| + \Psi^0(x, t\hat{\xi}, \hat{\xi})$, et de se ramener à $\Phi_t(x, x, \xi) = \Psi_t(x, x, \xi) = t|\xi|$, ceci modulo l'addition à p_{-j} d'un autre symbole vérifiant les mêmes propriétés.

On remarque que $t^{-k+1} p_{-j}(t, x, \xi)$ vérifie les mêmes propriétés avec $k = 1$, ce qui permet, grâce à des intégrations par partie à l'aide de ∂_ρ, $k - 1$ fois, $(\rho = |\xi|)$, de se ramener au cas où j est égal à $j + k - 1$ et k à 1. Enfin on se ramène à $k = 0$ et $(e^{-i\lambda t} - 1)$ à la place de $\hat{g}_\lambda(t)$.

La phase en (t, ξ), $t|\xi|$, n'a pas de point critique sur le support de l'amplitude, (on a utilisé (2.36)). Les points critiques de la phase en (t, ξ), $t|\xi| - t\lambda$, sont dans $\{(t, \xi); |\xi| = \lambda \text{ et } t = 0\}$, comme

$$\int_{\mathbf{R}^n} \frac{1}{[(|\xi| - \lambda)^2 + 1]^N} (|\xi| + 1)^{-j-k+1} d\xi = \mathcal{O}(\lambda^{n-j-k}),$$

on déduit facilement (2.39).

§ 2.5. Démonstration du théorème [1.1]. La proposition [2.6] montre que

$$M_0(\lambda; Q) = (2\pi)^{-n-1} \int_{\mathbf{R}\times\mathscr{K}\times\mathbf{R}^n} \hat{g}_\lambda(t) e^{it|\xi|} \left(1 - \frac{\Psi^0(x, t\hat{\xi}, \hat{\xi})}{|\xi|}\right)^{n-1}$$
$$\times\, p(t, x, \xi + \Psi^0(x, t\hat{\xi}, \hat{\xi})) dx d\xi + \mathcal{O}(1), \qquad \text{quand } \lambda \to +\infty.$$

Un développement de Taylor en t et des intégrations par parties à l'aide de ∂_ρ, $(\rho = |\xi|)$, permettent de voir que

$$M_0(\lambda; Q) = \sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^{n-j} + \mathcal{O}(1), \qquad \text{quand } \lambda \to +\infty,$$

$a_0 = c_w$ et comme $\Psi^0(x, t\hat{\xi}, \hat{\xi})$ est à moyenne nulle sur $\mathscr{K}$ et que $p_{-1}(0, x, \xi) = 0$, on trouve que $a_1 = 0$. Le développement asymptotique de $M_0(\lambda; Q)$ et les propositions [2.1] et [2.2] prouvent (1.11) et (1.12).

Démontrons maintenant (1.13). Soit $b \in \Gamma\backslash\{0\}$. Il résulte de (2.13), (2.14), $(2.15)_0$, (2.29′) et (2.37) que

$$M_b(\lambda; Q) = (2\pi)^{-n-1} \int_{\mathbf{R}\times\mathscr{K}\times\mathbf{R}^n} \hat{g}_\lambda(t) e^{i\Phi_t(x-b,x,\xi)}[1 + p_{-1}(t, x, \xi)]dtdxd\xi$$
$$+ \mathcal{O}(\lambda^{(n-5)/2} + 1).$$

La formule de Taylor à l'ordre un appliquée à la variable t au point $b\hat{\xi}$ et aux fonctions $e^{it\psi^0(x,t\hat{\xi},\hat{\xi})}$ et $p_{-1}(t, x, \xi)$ permet de voir en utilisant (2.37) et sa preuve que

$$M_b(\lambda; Q) = (2\pi)^{-n-1} \int_{\mathbf{R}\times\mathscr{K}\times\mathbf{R}^n} \hat{g}_\lambda(t) e^{i(t|\xi|-b\xi+b\hat{\xi}\psi^0(x,b\hat{\xi}\hat{\xi},\hat{\xi}))}[1 + p_{-1}(b\hat{\xi}, x, \xi)]dtdxd\xi$$
$$+ \mathcal{O}(1 + \lambda^{(n-5)/2}),$$

(on a utilisé le fait que $\hat{\xi}\partial_\xi[t\psi^0(x, t\hat{\xi}, \hat{\xi})] = 0$), et donc

$$M_b(\lambda; Q) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathscr{K}\times\mathbf{R}^n} g_\lambda(|\xi|) e^{-i(b\xi-b\hat{\xi}\psi^0(x,b\hat{\xi}\hat{\xi},\hat{\xi}))}[1 + p_{-1}(b\hat{\xi}, x, \xi)]dxd\xi$$
$$+ \mathcal{O}(1 + \lambda^{(n-5)/2}).$$

On intègre par parties en ξ à l'aide de $i|b|^{-2}b\partial_\xi$, la formule de Green montre que

$$\text{(2.40)} \quad M_b(\lambda; Q) = i(2\pi)^{-n}\lambda^{n-1}|b|^{-2} \int_{\mathscr{K}\times\mathbf{S}^{n-1}} b\hat{\xi} e^{-i(\lambda b\hat{\xi}-b\hat{\xi}\psi^0(x,b\hat{\xi}\hat{\xi},\hat{\xi}))}$$
$$\times [1 + |b|^{-2}b\partial_\xi(b\hat{\xi}\psi^0(x, b\hat{\xi}\hat{\xi}, \hat{\xi})) + p_{-1}(b\hat{\xi}, x, \lambda\hat{\xi})]dxd\hat{\xi}$$
$$+ \mathcal{O}(1 + \lambda^{(n-5)/2}).$$

Comme la phase, $\hat{\xi} \to b\hat{\xi}$, n'a que deux points critiques qui sont non dégénérés, $\hat{b}$ et $-\hat{b}$, en utilisant la formule précédant (2.40) et en intégrant par parties à l'aide de la variable radiale $|\xi|$, on a aussi que

$$\text{(2.40')} \quad M_b(\lambda; Q) = i(2\pi)^{-n}\lambda^{n-1} \int_{\mathscr{K}\times\mathbf{S}^{n-1}} (b\hat{\xi})^{-1} e^{-i(\lambda b\hat{\xi}-b\hat{\xi}\psi^0(x,b\hat{\xi}\hat{\xi},\hat{\xi}))}$$
$$\times \chi(b\hat{\xi})[1 + p_{-1}(b\hat{\xi}, x, \lambda\hat{\xi}) - i\lambda^{-1}(n-1)(b\hat{\xi})^{-1}]dxd\hat{\xi}$$
$$+ \mathcal{O}(1 + \lambda^{(n-5)/2});$$

où χ est une fonction de troncature sur $\mathbf{R}$, égale à un dans un voisinage de 1 et de -1, et nulle dans un voisinage de zéro.

Lemme [2.9]. *Si $f \in C^\infty(\mathbf{R}^n\backslash\{0\})$, alors on a*

$$\text{(2.41)} \quad \int_{\mathbf{S}^{n-1}} e^{-i\lambda b\hat{\xi}} f(\hat{\xi})d\hat{\xi} = \left(\frac{2\pi}{\lambda|b|}\right)^{(n-1)/2} \Bigg\{ e^{-i(\lambda|b|-((n-1)/4)\pi)}$$
$$\times \left[f(\hat{b}) + \frac{i}{2\lambda|b|}(\Delta'_{\hat{b}} f(\hat{b}) - (n-1)\partial_{\hat{b}} f(\hat{b}) - \frac{n^2-1}{4} f(\hat{b}))\right]$$
$$+ e^{i(\lambda|b|-((n-1)/4)\pi)}\Bigg[f(-\hat{b}) - \frac{i}{2\lambda|b|}(\Delta'_{\hat{b}} f(-\hat{b})$$

$$+ (n-1)\partial_{\hat{b}} f(-\hat{b}) - \frac{n^2-1}{4} f(-\hat{b}))\Big]\Big\}$$

$$+ \mathcal{O}(1 + (\lambda|b|)^{-(n+3)/2});$$

$\partial_{\hat{b}}$ est la dérivation suivant le vecteur $\hat{b}$ et $\Delta'_{\hat{b}}$ est le Laplacien sur l'hyperplan orthogonal à $\hat{b}$.

Pour s'en convaincre, il suffit de voir que la phase $\xi \to b\xi$ a seulement deux points critiques $\hat{b}$ et $-\hat{b}$, le théorème de la phase stationnaire montre que, si $\xi = (\eta, \tau)$, avec $\tau = \hat{b}\xi$, alors

$$\int_{\mathbf{S}^{n-1}} e^{-i\lambda b\xi} f(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \frac{\chi(\eta)}{\tau(\eta)} [e^{-i\lambda|b|\tau(\eta)} f(\eta, \tau(\eta)) + e^{i\lambda|b|\tau(\eta)} f(\eta, -\tau(\eta))]\, d\eta$$

$$+ \mathcal{O}((\lambda|b|)^{-k}), \qquad \text{ceci } \forall k \in \mathbf{N},$$

où $\tau(\eta) = (1 - |\eta|^2)^{1/2}$ et χ est une fonction de troncature à support dans un petit voisinage de l'origine et valant 1 près de l'origine.

On fait le changement de variable $\eta \to 2^{1/2}(1 + \tau(\eta))^{-1/2}\eta$, en négligeant dans le Jacobien les termes qui s'annulent à l'ordre trois à l'origine, ceci compte tenu de la phase stationnaire, on obtient que

$$\int_{\mathbf{S}^{n-1}} e^{-ib\xi} f(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \chi_0(\eta)\left(1 - \frac{n+1}{8}|\eta|^2\right)$$

$$\times [e^{-i\lambda|b|\tau_0(\eta)} f(\tau_1(\eta)\eta, \tau_0(\eta)) + e^{i\lambda|b|\tau_0(\eta)} f(\tau_1(\eta)\eta, -\tau_0(\eta))]\, d\eta$$

$$+ \mathcal{O}(1 + (\lambda|b|)^{-2});$$

où $\tau_0(\eta) = 1 - |\eta|^2/2$, $\tau_1(\eta) = (1 - |\eta|^2/4)^{1/2}$ et χ_0 est une fonction de troncature comme χ. Le théorème de la phase stationnaire permet alors d'avoir (2.41).

Les estimations (2.40′) et (2.41) prouvent (1.13). Les estimations (1.14) et (1.15) s'obtiennent facilement en remarquant que la fonction

$$\xi \to \varphi_b(x, \xi) = \int_0^{b\xi} q_0(x - \tau\xi, \xi)\, d\tau$$

vérifie $\varphi_b(x, \hat{b}) = |b| \sum_{\omega \in \Gamma_b^*} q_{0,\omega}(\hat{b}) e^{i\omega x}$, où $\Gamma_b^* = \{\omega \in \Gamma^*; \omega b = 0\}$ est le sous-réseau du dual, de l'hyperplan normal à b, ceci si

$$q_0(x, \xi) = \sum_{\omega \in \Gamma^*} q_{0,\omega}(\xi) e^{i\omega x}.$$

On se place maintenant dans le cas où b est un multiple d'un premier. Si $\omega \in \Gamma_b^* \backslash \{0\}$, alors

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} \omega_j e_j^*, \qquad \text{avec } \omega_j \in \mathbf{Z}, \qquad \operatorname{Sup}\{|\omega_j|; j = 1, \ldots, n\} \geqslant |||b|||,$$

((e_j^*) est la base duale de la base (e_j)), par conséquent, il existe une constante C_Γ, ne dépendant que de Γ, tel que $|\omega| \geqslant C_\Gamma |||b|||$, $\forall \omega \in \Gamma_b^* \setminus \{0\}$.

Par conséquent, comme $q_0(x, \hat{b}) \in C^\infty(\mathbf{T}^n)$ et que $q_{0,0}(\xi) = 0$, pour tout entier j, il existe C_j indépendant de b, tel que l'on ait $|\varphi_b(x, \hat{b})| \leqslant C_j |||b|||^{-j}$.

Ceci prouve, compte tenu de (2.40′) et (2.41), que, pour tout entier j, il existe C_j tel que l'on ait

$$|d_1(B) - 2| \leqslant C_j |||b|||^{-j} . \tag{2.42}$$

Si $f_b(x, \xi) = (b\xi)^{-1} e^{i\varphi_b(x,\xi)}$, on vérifie de la même façon que, pour tout entier j, il existe C_j tel que l'on ait

$$|\hat{b}\partial_\xi f_b(x, \pm\hat{b}) + 1| + |\Delta_\xi f_b(x, \pm\hat{b})| \leqslant C_j |||b|||^{-j} ,$$

par conséquent, compte tenu de (2.40′) et de (2.41), on a

$$\begin{aligned} M_b(\lambda^2; H_V(\vec{c})) = {} & |\mathbf{T}^n|(2\pi|b|)^{-(n+1)/2}\lambda^{(n-1)/2}\{d_1(b, B)\sin[\lambda|b| - \pi(n-1)/4] \\ & + (|b|\lambda)^{-1} d_2^0(b, B)\cos[\lambda|b| - \pi(n-1)/4] \\ & + i\lambda^{-1} e^{-i(\lambda|b| - ((n-1)/4)\pi)} \int_{\mathscr{X}} e^{i\varphi_b(x,\hat{b})} p_{-1}(|b|, x, \hat{b})dx \\ & - i\lambda^{-1} e^{i(\lambda|b| - ((n-1)/4)\pi)} \int_{\mathscr{X}} e^{i\varphi_b(x,\hat{b})} p_{-1}(-|b|, x, -\hat{b})dx \\ & + \mathcal{O}(1 + \lambda^{(n-5)/2}) ; \end{aligned} \tag{2.42′}$$

et pour tout entier j, il existe C_j tel que

$$|d_2^0(b, B) - d_2(b, 0)| \leqslant C_j |||b|||^{-i} \qquad \text{et} \qquad d_2(b, 0) = n - 1 + (n^2 - 1)/4 .$$

Soient $d_2^1(b, B)$ et $d_3^0(b, B)$ les constantes suivantes,

$$d_2^1(b, B) = i|b| \int_{\mathscr{X}} [p_{-1}(|b|, x, \hat{b}) + p_{-1}(-|b|, x, -\hat{b})]dx ,$$

$$d_3^0(b, B) = |b| \int_{\mathscr{X}} [p_{-1}(|b|, x, \hat{b}) - p_{-1}(-|b|, x, -\hat{b})]dx .$$

La propriété (1.1″) et (2.5) et $(2.15)_1$ montrent que $d_2^1(b, B)$ et $d_3^0(b, B)$ ne dépendent que de b et $B(x)$ et que, pour tout entier j, il existe C_j tel que

$$|d_2(b, B) - d_2^0(b, B) - d_2^1(b, B)| \leqslant C_j |||b|||^{-j}$$

$$\text{et} \qquad |d_3(b, B, V) - d_3^0(b, B)| \leqslant C_j |||b|||^{-j}(1 + \|V\|_{L^\infty(\mathbf{R})}) ,$$

ce qui établit (1.15) grâce à (2.42′). De plus la propriété (1.18) permet de voir que

$$d_3^1(b, B) = i|b| \int_{\mathscr{X}} [|\vec{c}(x)|^2 - (\hat{b}\vec{c}(x))^2]dx ,$$

ce qui complète la preuve de (1.14).

§ 2.6. Démonstration du théorème [1.2]. Si $n-1 \notin 4\mathbf{N}$, on remarque $\left|\sin\left(s+\frac{\pi}{2}\right)\right| + \left|\sin\left(2s+\frac{\pi}{2}\right)\right| \geqslant 1$, $\forall s \in \mathbf{R}$, et si $n-1 \in 4\mathbf{N}$, on remarque que, pour tout $a \neq 0$, $a \in \mathbf{R}$, il existe $\varepsilon_a > 0$, tel que, et pour tout $z \in \mathbf{C}$,

$$\left|\left(1+\frac{z}{s}\right)\sin(s) + \frac{a}{s}\cos(s)\right| + \left|\left(1+\frac{z}{2s}\right)\sin(2s) + \frac{a}{2s}\cos(2s)\right| \geqslant \varepsilon_a/s\,, \quad \forall s > 1 + 2|z|\,.$$

En prenant dans (1.13) b puis $2b$, on en déduit, compte tenu de (1.14), que si b est premier et assez grand, il existe $\rho_n = \rho_n(b, B) > 0$, ne dépendant que de n, b et B, tel que

$$|M_b(\lambda^2; H_V(\vec{c}))| + |M_{2b}(\lambda^2; H_V(\vec{c}))| \geqslant 2\rho_n \lambda^{\delta(n)}\,, \qquad \forall \lambda \gg 1 + |b|\,, \tag{2.43}$$

$\delta(n)$ étant celui de (1.16).

On écrit que,

$$(2\pi)^{-n}|\mathbf{T}^n| \int_{\mathscr{K}^*} e^{ib\theta}[N(\lambda^2; H_V^\theta(\vec{c})) - M_0(\lambda^2; H_V(\vec{c}))]d\theta = 0$$

et, grâce à (1.13), (1.14) et à (2.43), on trouve qu'il existe $b \in \Gamma$ tel que

$$\left|(2\pi)^{-n}|\mathbf{T}^n| \int_{\mathscr{K}^*} e^{i\theta b}[N(\lambda^2; H_V^\theta(\vec{c})) - M_0(\lambda^2; H_V(\vec{c}))]d\theta\right| \geqslant \rho_n \lambda^{\delta(n)} + \mathcal{O}(\lambda^{(n-5)/2})\,,$$

ceci $\forall \lambda \gg 1$. On en déduit alors facilement (1.16).

§ 2.7. Démonstration du corollaire [1.3]. Quand V est C^∞, (1.17) résulte de (1.16).

Si $V \in L^\infty(\mathbf{R}^n)$ et vérifie (1.1) et (1.1″), pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un potentiel $V_\varepsilon \in C^\infty(\mathbf{R}^n; \mathbf{R})$, vérifiant (1.1), (1.1″) et

$$\|V(x) - V_\varepsilon(x)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n)} \leqslant \varepsilon\,. \tag{2.44}$$

Soit $\varepsilon > 0$ assez petit et soit V_ε comme ci-dessus. Pour tout $\lambda > 1$, on a d'après le principe du mini-max,

$$N_{\mathrm{Max}}(\lambda^2; H_V(\vec{c})) \geqslant N_{\mathrm{Max}}(\lambda^2 - \varepsilon; H_{V_\varepsilon}(\vec{c}))\,, \tag{2.45}$$

$$N_{\min}(\lambda^2; H_V(\vec{c})) \leqslant N_{\min}(\lambda^2 + \varepsilon; H_{V_\varepsilon}(\vec{c}))\,, \tag{2.45'}$$

et

$$M_0(\lambda^2 - \varepsilon; H_V(\vec{c})) \leqslant M_0(\lambda^2; H_{V_\varepsilon}(\vec{c})) \leqslant M_0(\lambda^2 + \varepsilon; H_V(\vec{c}))\,. \tag{2.45''}$$

Par conséquent (2.45)–(2.45″) montrent que

$$\begin{aligned} N_{\mathrm{Max}}(\lambda^2; H_V(\vec{c})) - N_{\min}(\lambda^2; H_V(\vec{c})) &\geqslant N_{\mathrm{Max}}(\lambda^2; H_V(\vec{c})) - M_0(\lambda^2; H_V(\vec{c})) \\ &\geqslant N_{\mathrm{Max}}(\lambda^2 - \varepsilon; H_{V_\varepsilon}(\vec{c})) - M_0(\lambda^2 + \varepsilon; H_{V_\varepsilon}(\vec{c})) \\ &\geqslant [N_{\mathrm{Max}}(\lambda^2 - \varepsilon; H_{V_\varepsilon}(\vec{c})) - M_0(\lambda^2 - \varepsilon; H_{V_\varepsilon}(\vec{c}))] \\ &\quad + [M_0(\lambda^2 - \varepsilon; H_{V_\varepsilon}(\vec{c})) - M_0(\lambda^2 + \varepsilon; H_{V_\varepsilon}(\vec{c}))]\,. \end{aligned}$$

(On a utilisé le fait que $N_{\min}(\mu; H) \leqslant M_0(\mu; H) \leqslant N_{\mathrm{Max}}(\mu; H)$).

Comme $M_0(\lambda^2; H_{V_\varepsilon}(\vec{c})) = p_{V_\varepsilon}(\lambda) + \mathcal{O}(1)$, $p_{V_\varepsilon}(\lambda)$ étant le polynôme dans (1.11), on déduit aisément des théorèmes [1.1] et [1.2] et du fait que $n - 1 \notin \mathbf{N}$ que

$$N_{\mathrm{Max}}(\lambda^2 - \varepsilon; H_{V_\varepsilon}(\vec{c})) - M_0(\lambda^2 - \varepsilon; H_{V_\varepsilon}(\vec{c})) \geqslant \lambda^{(n-1)/2}\rho_n - C(V_\varepsilon)(\lambda^{(n-5)/2} + 1)\,,$$

et que

$$M_0(\lambda^2 + \varepsilon; H_{V_\varepsilon}(\vec{c})) - M_0(\lambda^2 - \varepsilon; H_{V_\varepsilon}(\vec{c})) \leqslant n\varepsilon a_0(0)\lambda^{n-2} + C(V_\varepsilon)(\lambda^{n-3} + 1)$$

où $C(V_\varepsilon)$ est une constante ne dépendant que de V_ε.

Comme $$n - 2 \leqslant (n-1)/2\,, \quad \text{si } n \leqslant 3\,,$$

on conclut en prenant ε assez petit que l'on a encore, si $2 \leqslant n \leqslant 3$,

$$N_{\mathrm{Max}}(\lambda^2; H_V(\vec{c})) - N_{\min}(\lambda^2; H_V(\vec{c})) \geqslant \lambda^{(n-1)/2}\rho_n + \mathcal{O}(1)\,.$$

§ 3. Le cas de l'opérateur de Dirac

§ 3.1. Enoncé des résultats. On considère l'opérateur de Dirac $P_V(\vec{c})$ sur $\mathscr{H} = L^2(\mathbf{R}^n; \mathbf{C}^{2m})$,

$$P_V(\vec{c}) = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_m & A^*(D - \vec{c}(x)) \\ A(D - \vec{c}(x)) & -\mathbf{1}_m \end{bmatrix} + V(x)\mathbf{1}_{2m}\,, \tag{3.1}$$

($\mathbf{1}_k$ désigne la matrice identité d'ordre k), le potentiel électrique $V(x)$ et celui magnétique $\vec{c}(x)$ sont supposés réels, Γ-périodiques et C^∞.

L'opérateur $A(D)$ est un système $m \times m$ elliptique, homogène d'ordre 1 et vérifiant

$$A^*(D)A(D) = -\Delta \mathbf{1}_m\,. \tag{3.2}$$

On s'intéressera plus particulièrement aux cas suivants:

$$n = 3 \text{ avec } m = 2 \quad \text{et} \quad A(D) = A^*(D) = \sigma D = \textstyle\sum_{j=1}^3 \sigma_j D_j\,;$$

$$n = 2 \text{ avec } m = 1 \quad \text{et} \quad P_0 = \textstyle\sum_{j=1}^2 \sigma_j D_j\,;$$

Les matrices σ_j sont celles bien connues de Pauli,

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Il est bien connu que $P_V(\vec{c})$ est essentiellement auto-adjoint sur $\mathscr{H}$. Avec comme domaine l'espace de Sobolev d'ordre 1, $W^1(\mathbf{R}^n; \mathbf{C}^{2m})$, l'opérateur $P_V(\vec{c})$ est auto-adjoint. Le spectre de $P_V(\vec{c})$ est constitué de l'union des spectres des opérateurs de Floquet:

$$\operatorname{sp}(P_V(\vec{c})) = \bigcup_\theta \operatorname{sp}(P_V^\theta(\vec{c}))\,, \quad (\text{le paramètre } \theta \text{ parcourant } \mathbf{R}^n)\,, \tag{3.3}$$

où $P_V^\theta(\vec{c})$ est l'opérateur différentiel défini sur le tore $\mathbf{T}^n$, auto-adjoint sur

$L^2(\mathbf{T}^n; \mathbf{C}^{2m})$, de domaine $W^1(\mathbf{T}^n; \mathbf{C}^{2m})$, et défini comme $P_V(\vec{c})$ en remplaçant $A(D - \vec{c}(x))$ par $A(D - \theta - \vec{c}(x))$.

Le spectre de $P_V^\theta(\vec{c})$ est constitué d'une suite de valeurs propres, chacune étant répétée autant de fois que sa multiplicité: $\mathrm{sp}\,(P_V^\theta(\vec{c})) = \{\lambda_k(\theta); k \in \mathbf{Z}^*\}$, avec $\lambda_{-k-1}(\theta) \leqslant \lambda_{-k}(\theta) < 0 \leqslant \lambda_k(\theta) \leqslant \lambda_{k+1}(\theta)$, si $k > 0$.

Pour tout $k \in \mathbf{Z}^*$, on considère alors la bande b_k qui est l'image de la fonction $\lambda_k(\theta)$,

$$\mathrm{sp}\,(P_V(\vec{c})) = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}^*} b_k \qquad \text{et} \qquad b_k = \bigcup_\theta \lambda_k(\theta) = [b_k^-, b_k^+]\,. \tag{3.4}$$

Il est facile de voir que, dans le cas de l'opérateur de Dirac classique quand $n = 3$, les bandes b_{2k-1} et b_{2k} se touchent ainsi que les bandes b_{-2k+1} et b_{-2k}, si $k > 0$. La conjecture de Bethe-Sommerfeld pour l'opérateur de Dirac peut être formulée ainsi: il existe un réel $c > 0$ tel que $]-\infty, -c]$ et $[c, +\infty[$ soient inclus dans le spectre de P, c'est à dire qu'il existe un entier $k_0 > 0$ tel que l'on ait

$$\begin{cases} b_{k+1}^- \leqslant b_k^+\,, & \forall k > k_0\,, \qquad \text{et} \\ b_{-k-1}^- \leqslant b_{-k}^+\,, & \forall k > k_0\,. \end{cases} \tag{3.5}$$

Pour tout opérateur G et pour tout $\lambda > 0$, on définit $N^+(\lambda; G)$ et $N^-(\lambda; G)$ le rang de la projection spectrale de G sur $]0, \lambda[$ et, respectivement, sur $]-\lambda, 0[$, si le spectre de G sur $[-\lambda, \lambda]$ est purement ponctuel. L'entier $N^+(\lambda; G)$ est le nombre des valeurs propres de G dans $]0, \lambda[$ et $N^-(\lambda; G)$ celui dans $]-\lambda, 0[$. Soient alors $N_{\mathrm{Max}}^\pm(\lambda; P_V^\theta(\vec{c}))$ et $N_{\mathrm{min}}^\pm(\lambda; P_V^\theta(\vec{c}))$ définis comme dans (1.6),

$$N_{\mathrm{Max}}^\pm(\lambda; P_V^\theta(\vec{c})) := \mathrm{Max}\,\{N^\pm(\lambda; P_V^\theta(\vec{c})); \theta \in \mathbf{R}^n\} \tag{3.6}$$

et

$$N_{\mathrm{min}}^\pm(\lambda; P_V^\theta(\vec{c})) := \min\,\{N^\pm(\lambda; P_V^\theta(\vec{c})); \theta \in \mathbf{R}^n\}\,. \tag{3.6'}$$

Théorème [3.1]. *Sous les hypothèses du théorème* [1.1] *et* (3.1) *et* (3.2), *il existe une constante* $\rho_n > 0$, *ne dépendant que de* n *et de* Γ, *et une constante* $C_V(B)$, *ne dépendant que de* V *et du champ magnétique* B, *telles que, si* $n > 1$, *on ait*

$$N_{\mathrm{Max}}^\pm(\lambda; P_V(\vec{c})) - N_{\mathrm{min}}^\pm(\lambda; P_V(\vec{c})) > \rho_n \lambda^{\delta(n)} - C_V(B)(1 + \lambda^{(n-5)/2})\,, \tag{3.7}$$

ceci $\forall \lambda \gg 1$, $\delta(n)$ *étant celui de* (1.16).

Corollaire [3.2]. *Sous les hypothèses du théorème* [3.1], *il existe* $\Lambda > 0$ *tel que*

$$]-\infty, -\Lambda[\, \cup\, [\Lambda, +\infty[\, \subset \mathrm{sp}\,(P_V(\vec{c}))\,. \tag{3.8}$$

§ 3.2. Démonstration du théorème [3.1]. On notera $\mathrm{OPS}^j(\mathbf{R}^n; \mathbf{C}^k)$ les opérateurs sur $L^2(\mathbf{R}^n; \mathbf{C}^k)$ qui sont des o.p.d. d'ordre j.

On se place dans le cas où (1.1″) est vérifié et, par un changement de jauge, dans le cas où (1.18) et (1.20) le sont aussi.

Remarquons que les opérateurs $A^{\pm}(\vec{c})$,

$$A^+(\vec{c}) = A(D - \vec{c}(x)) \quad \text{et} \quad A^-(\vec{c}) = A^*(D - \vec{c}(x)), \tag{3.9}$$

définis sur $L^2(\mathbf{R}^n; \mathbf{C}^m)$, avec comme domaine commun l'espace de Sobolev d'ordre un $W^1(\mathbf{R}^n; \mathbf{C}^m)$, sont adjoints l'un de l'autre:

$$[A^+(\vec{c})]^* = A^-(\vec{c}) \quad \text{et} \quad [A^-(\vec{c})]^* = A^+(\vec{c}). \tag{3.10}$$

Si les A_j, $j = 1, \ldots, n$, sont le n matrices $m \times m$, unitaires et telles que

$$A(D) = \sum_{j=1}^{n} A_j D_j, \tag{3.11}$$

on a alors

$$A_j^* A_k + A_k^* A_j = A_j A_k^* + A_k A_j^* = 2\delta_{j,k}\mathbf{1}_m \tag{3.11'}$$

et

$$A^-(\vec{c})A^+(\vec{c}) = H_0(\vec{c})\mathbf{1}_m + T^+(B) \quad \text{et} \quad A^+(\vec{c})A^-(\vec{c}) = H_0(\vec{c})\mathbf{1}_m + T^-(B), \tag{3.12}$$

$$\text{avec } T^+(B) = -\sum_{j=2}^{n}\sum_{k=1}^{j-1} [D_j c_k(x) - D_k c_j(x)] A_j^* A_k$$

$$\text{et} \quad T^-(B) = -\sum_{j=2}^{n}\sum_{k=1}^{j-1} [D_j c_k(x) - D_k c_j(x)] A_j A_k^*,$$

($H_0(\vec{c})$ est celui de (1.4)).

Lemme [3.3]. *Il existe un opérateur unitaire U sur $\mathscr{H}$, qui est un o.p.d. d'ordre un et qui est une transformation de Foldy-Wouthuysen, i.e. tel que l'on ait*

$$U^* P_0(\vec{c}) U = \begin{bmatrix} Q^+(\vec{c})\mathbf{1}_m & 0 \\ 0 & -Q^-(\vec{c})\mathbf{1}_m \end{bmatrix}, \tag{3.13}$$

avec $Q^{\pm}(\vec{c}) = [1 + H^{\pm}(\vec{c})]^{1/2}$, *et* $H^+(\vec{c}) = A^-(\vec{c})A^+(\vec{c}) = A^*(D - \vec{c}(x))A(D - \vec{c}(x))$ *et* $H^-(\vec{c}) = A^+(\vec{c})A^-(\vec{c}) = A(D - \vec{c}(x))A^*(D - \vec{c}(x))$.

Preuve. Dans la suite, on omettra la référence à $\vec{c}$. Soient $g(\lambda)$ et $f(\lambda)$ les fonctions réelles suivantes définies sur $]-1, +\infty[$,

$$g(\lambda) = 2^{-1/2}[1 + (\lambda + 1)^{-1/2}]^{1/2} \quad \text{et} \quad f(\lambda) = 2^{-1/2}[(\lambda + 1) + (\lambda + 1)^{1/2}]^{-1/2},$$

on a $g^2(\lambda) + \lambda f^2(\lambda) = 1$.

Pour tout $z \in \mathbf{C}\backslash[0, +\infty[$, et pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a

$$A^+(H^+ - z\mathbf{1}_m)^{-1} = (H^- - z\mathbf{1}_m)^{-1}A^+ \tag{3.14}$$

et

$$A^-(H^- - z\mathbf{1}_m)^{-1} = (H^+ - z\mathbf{1}_m)^{-1}A^-. \tag{3.14'}$$

L' égalité (3.14) permet de voir que l'on a

$$A^{+}f(H^{+}) = f(H^{-})A^{+} \quad \text{et} \quad A^{+}g(H^{+}) = g(H^{-})A^{+}\,, \tag{3.15}$$

de même celle (3.14′) montre que l'on a

$$A^{-}f(H^{-}) = f(H^{+})A^{-} \quad \text{et} \quad A^{-}g(H^{-}) = g(H^{+})A^{-}\,. \tag{3.15′}$$

Soit alors U l'opérateur continu sur $\mathscr{H}$,

$$U = \begin{bmatrix} g(H^{+}) & -A^{-}f(H^{-}) \\ A^{+}f(H^{+}) & g(H^{-}) \end{bmatrix}. \tag{3.16}$$

Les égalités (3.15) et (3.15′) montrent que U est unitaire, $U^{*}U = \mathbf{1}_{2m}$, et le calcul de [SE] montre que U est un o.p.d. d'ordre 1 et on peut vérifier aisément qu'il est à symbole Γ-périodique.

Comme $$g^{2}(\lambda) + 2\lambda g(\lambda)f(\lambda) - \lambda f^{2}(\lambda) = (1+\lambda)^{1/2}$$

et que $$g^{2}(\lambda) - 2g(\lambda)f(\lambda) - \lambda f^{2}(\lambda) = 0\,,$$

on vérifie facilement en utilisant (3.15) et (3.15′) que l'on a (3.13).

Lemme [3.4]. *Pour tout entier $N \geqslant 0$, il existe un opérateur unitaire U_N sur $\mathscr{H}$, qui est un o.p.d., tel que l'on ait*

$$U_N^{*}P_V(\vec{c})U_N = \begin{bmatrix} Q_V^{+}(\vec{c}) & 0 \\ 0 & -Q_{-V}^{-}(\vec{c}) \end{bmatrix} + L(\vec{c}, V, N)\,, \tag{3.17}$$

avec $$L(\vec{c}, V, N) = \begin{bmatrix} L_{11}(\vec{c}, V, N) & L_{12}(\vec{c}, V, N) \\ L_{21}(\vec{c}, V, N) & L_{22}(\vec{c}, V, N) \end{bmatrix},$$

les $L_{ij}(\vec{c}, V, N)$ étant des systèmes $m \times m$ d'o.p.d. à symbole Γ-périodique vérifiant

$$L_{jj}(\vec{c}, V, N) \in \mathrm{OPS}^{-1}(\mathbf{R}^{n}; \mathbf{C}^{m})\,, \qquad L_{ij}(\vec{c}, V, N) \in \mathrm{OPS}^{-1-N}(\mathbf{R}^{n}; \mathbf{C}^{m}) \quad \text{si } i \neq j\,, \tag{3.18}$$

i et $j \in \{1, 2\}$, le symbole principal de $L_{jj}(\vec{c}, V, N)$ étant à moyenne nulle sur le tore $\mathbf{T}^{n}$. (Si $W(x)$ est un potentiel, on a noté $Q_W^{\pm}(\vec{c})$ l'opérateur $Q^{\pm}(\vec{c}) + W(x)\mathbf{1}_m$).

Preuve. On fait une récurrence sur N. Pour $N = 0$, il est facile de voir que la transformation de Foldy-Wouthuysen U du lemme [3.3] convient, $U_0 = U$. Si $N \in \mathbf{N}$ et si U_N est un o.p.d. unitaire sur $\mathscr{H}$ tel les propriétes (3.17) et (3.18) soient vérifiées, on écrit alors que

$$U_N^{*}P_V(\vec{c})U_N = \begin{bmatrix} E & M^{*} \\ M & -F \end{bmatrix}, \tag{3.19}$$

où E et F sont des opérateurs auto-adjoints sur $L^{2}(\mathbf{R}^{n}; \mathbf{C}^{m})$ de même domaine tels que $E + F$, avec le domaine commun, soit autoadjoint. L'opérateur M est continu. Comme E et F sont des o.p.d. elliptiques de symbole principal $|\xi|\mathbf{1}_m$, il existe des opérateurs auto-adjoints T_E et $T_F \in \mathrm{OPS}^{-\infty}(\mathbf{R}^{n}; \mathbf{C}^{m})$, tels que $E + T_E$ et $F + T_F$ soient positifs, on peut supposer plus précisément que, (modulo $\mathrm{OPS}^{-\infty}(\mathbf{R}^{n}; \mathbf{C}^{m})$), on a

$$E > 1 \quad \text{et} \quad F > 1 . \tag{3.20}$$

Les opérateurs $G^{\pm}$ suivants sont alors bien définis,

$$G^{+} = 2[E + F + [(E + F)^2 + 4M^*M]^{1/2}]^{-1} , \tag{3.21}$$

$$G^{-} = 2[E + F + [(E + F)^2 + 4MM^*]^{1/2}]^{-1} , \tag{3.21$'$}$$

ainsi que les opérateurs $J^{\pm}$ suivants,

$$J^{+} = [\mathbf{1}_m + G^{+}M^*MG^{+}]^{-1/2} , \tag{3.22}$$

$$J^{-} = [\mathbf{1}_m + G^{-}MM^*G^{-}]^{-1/2} . \tag{3.22$'$}$$

Soit W l'opérateur défini sur $\mathscr{H}$ de la façon suivante,

$$W = \begin{bmatrix} J^{+} & -M^*G^{-}J^{-} \\ MG^{+}J^{+} & J^{-} \end{bmatrix}, \tag{3.23}$$

on a $W^*W = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_m & R \\ R & \mathbf{1}_m \end{bmatrix}$, avec $R = J^{-}(MG^{+} - G^{-}M)J^{+}$.

Comme les $J^{\pm}$ sont des o.p.d. d'ordre zéro et que les $G^{\pm}$ sont d'ordre -1 et ont le même symbole principal, R est un o.p.d. d'ordre $-N-2$. Grâce à (3.20), la norme de R est <1, par conséquent $U_{N+1} = W[W^*W]^{-1/2}$ est bien défini et c'est o.p.d. unitaire qui vérifie

$$U_{N+1} - W \in \mathrm{OPS}^{-N-2}(\mathbf{R}^n; \mathbf{C}^{2m}) . \tag{3.24}$$

On vérifie facilement que

$$U_{N+1}^* \begin{bmatrix} E & M^* \\ M & -F \end{bmatrix} U_{N+1} = \begin{bmatrix} E' & C^* \\ C & -F' \end{bmatrix},$$

avec $C \in \mathrm{OPS}^{-N-1}(\mathbf{R}^n; \mathbf{C}^m)$, $E - E'$ et $F - F'$ sont dans $\mathrm{OPS}^{-1}(\mathbf{R}^n; \mathbf{C}^m)$; comme les symboles principaux de E, F, des $G^{\pm}$ et des $J^{\pm}$ ne dépendent pas de la variable d'espace x, on vérifie facilement que les symboles principaux de $E - E'$ et de $F - F'$ sont à moyenne nulle sur le tore.

Démonstration du théorème [3.1]. On choisit N assez grand dans le lemme [3.4]. La construction de l'opérateur d'évolution du paragraphe §2 marche encore, pour les systèmes $m \times m$ elliptiques $Q^{\pm}$ avec

$$Q^{+} = Q_V^{+}(\vec{c}) + L_{11}(\vec{c}, V, N) \qquad \text{et} \qquad Q^{-} = Q_{-V}^{-}(\vec{c}) - L_{22}(\vec{c}, V, N) ,$$

car leur symbole principal est $|\xi|\mathbf{1}_m$. De plus, leur symbole sous-principal, qui est ici $q_0^{\pm}(x, \xi) = [V(x) - |\xi|^{-1}(\xi\vec{c}(x))]\mathbf{1}_m$, est, grâce à (1.1''), (1.20) et (1.22), à intégrale nulle sur le tore $\mathbf{T}^n$; de même le symbole d'ordre -1, $q_{-1}^{\pm}(x, \xi)$, vérifie

$$\int_{\mathbf{T}^n} q_{-1}^{\pm}(x, \xi)dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{T}^n} [1 + |\vec{c}(x)|^2 + |\xi|^{-2}(\xi\vec{c}(x))^2]\mathbf{1}_m dx .$$

Par conséquent les estimations de $M_b(\lambda; Q)$ du paragraphe §2 sont encore valables, avec $Q = Q^{\pm}$, et on a en particulier on a

(3.25) $$M_0(\lambda; Q^\pm) = \sum_{j=0}^{n} a_j^\pm \lambda^{n-j} + \mathcal{O}(1), \qquad \text{quand } \lambda \to +\infty,$$

(avec $a_0^\pm = mc_w$, c_w est la constante de Weyl classique et $a_1^\pm = 0$), et si $b \in \Gamma \backslash \{0\}$ est fixé on a l'équivalent de (1.13),

(3.26) $$\begin{aligned} |M_b(\lambda; Q^\pm) - m|\mathbf{T}^n|(2\pi|b|)^{-(n+1)/2}\lambda^{(n-1)/2}\{&d_1(b, B)\sin[\lambda|b| - \pi(n-1)/4] \\ &+ (\lambda|b|)^{-1}d_2(b, B)\cos[\lambda|b| - \pi(n-1)/4] \\ &+ (\lambda|b|)^{-1}d_3(b, B, V)\sin[\lambda|b| - \pi(n-1)/4]\}| \\ \leqslant\ & C_V(B, b)(1 + \lambda^{(n-5)/2}), \end{aligned}$$

ceci $\forall b \in \Gamma \backslash \{0\}$ et $\forall \lambda \gg 1$, $C_V(B, b)$ étant comme dans (1.13) ainsi que les $d_j(b, B)$ et $d_3(b, B, V)$, ces derniers satisfont (1.14) et (1.15).

Mais (3.18) et une estimation du type (2.9) montrent que

(3.27) $$N(\lambda - C_N\lambda^{-N+1}; (Q^\pm)^\theta) \leqslant N^\pm(\lambda; P_V^\theta(\vec{c})) \leqslant N(\lambda + C_N\lambda^{-N+1}; (Q^\pm)^\theta),$$

ceci $\forall \theta \in \mathscr{K}^*$ et $\forall \lambda > 1$, C_N étant une constante >0 ne dépendant que de V, B et N. Le théorème [3.1] résulte alors aisément de (3.25)–(3.27) avec $N \geqslant (n+5)/2$.

Remarque [3.5]. Le théorème [3.1] et son corollaire sont valables pour l'opérateur de Dirac à masse nulle $P_V^0(\vec{c}) = P_V(\vec{c}) - \begin{bmatrix} \mathbf{1}_m & \\ & -\mathbf{1}_m \end{bmatrix}$.

En effet la démonstration marche encore si on perturbe $P_V^0(\vec{c})$ par un o.p.d. R d'ordre $-N$ de façon à ce que la transformation de Foldy-Wouthuysen soit bien définie, N étant supposé >0 et assez grand. On prend

$$R = f(H^+(\vec{c}))(\beta + \mathbf{1}_{2m}) + f(H^-(\vec{c}))(\beta - \mathbf{1}_{2m}),$$

avec $\beta = P_V(\vec{c}) - P_V^0(\vec{c})$ et $f(t) = (t+1)^{-N/2}$.

Université de Paris-Nord
Département de Mathématiques
Av. J.B. Clément
H-93430 Villetaneuse, France

Université de Nantes, Faculté des Sciences
Département de Mathématiques, URA 760
2, rue de la Houssinière
44072 Nantes Cedex 03, France

Références

[DA-TR] J. Dahlberg and E. Trubowitz, A remark on two dimensional periodic potentials, Comment Math. Helvetici, **57** (1982), 130–134.

[EA] M. S. P. Eastham, The spectral theory of periodic differential equations, Scottish Academic Press, London, 1973.

[FE-KN-TR]$_1$ J. Feldman, H. Knörrer and E. Trubowitz, The perturbatively stable spectrum of a periodic Schrödinger operator, Invent. Math. **100**-2, (1990), 259–300.

[FE-KN-TR]$_2$ J. Feldman, H. Knörrer and E. Trubowitz, Perturbatively unstable eigenvalues of a periodic Schrödinger operator, Comment. Math. Helvetici, **66** (1991), 557–579.

[GR] A. Grigis, Estimations asymptotiques des intervalles d'instabilité pour l'équation de Hill, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 4^e série, t.20, 1987, 641–672.

[KN-TR] H. Knörrer and E. Trubowitz, A directional compactification of the complex Bloch variety, Comment. Math. Helvetici, **65** (1990), 114–149.

[HO]$_1$ L. Hörmander, The spectral function of an elliptic operator, Acta Math., **121** (1968), 193–218.

[HO]$_2$ L. Hörmander, The analysis of linear partial differential operators, III, IV, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[RA] T. Ramond, Intervalles d'instabilité pour une équation de Hill à potentiel méromorphe, Thèse Université Paris-Nord, Décembre 1991.

[SE] R. T. Seeley, Complex powers of an elliptique operator, Singular Integrals, Proc. Symp. Pure Math., 10, Am. Math. Math. Soc., 288–307, (1967).

[SK]$_1$ M. M. Skriganov, Geometric and arithmetic methods in the spectral theory of multidimensional periodic operators, Proceedings of the Steklov Institute of Math., **171**-2 (1987).

[SK]$_2$ M. M. Skriganov, The spectrum band structure of the three-dimensional Schrödinger operator with periodic potential, Invent. Math., **80** (1985), 107–121.

[VE]$_1$ O. A. Veliev, Asymptotic formulas for the eigenvalues of a periodic Schrödinger operator and the Bethe-Sommerfeld conjecture, Funct. Anal. Appl., **21**-2 (1987), 87–100.

[VE]$_2$ O. A. Veliev, The spectrum of multidimensional periodic operators, (russian), Teor. Funktssiî Funktsional. Anal. i Prilozhen., **49** (1988), 17–34.

[VO] A. V. Volovoy, Improved two-term asymptotics for the eigenvalue distribution function of an elliptic operator on a compact manifold, Comm. in Part. Equat., **15**-11 (1990), 1509–1563.