J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)
38-3 (1998) 367-413

Vektorbündel vom Rang 2 auf rationalen Regelflächen und auf $\mathbf{P}_k^n \times \mathbf{P}_k^m$

Von

Shih-kung Lo

Einleitung

Aufgrund der Ähnlichkeit der lokalen Strukturen zwischen rationalen Regelflächen ($X_e = \mathbf{P}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^1}(-e)) \to \mathbf{P}_k^1$) und $\mathbf{P}_k^2$ erwartet man bei der Klassifizierung und Deformationsverhalten von 2-Bündeln auf rationalen Regelflächen ähnliche Resultate wie diejenigen, die Strømme für $\mathbf{P}_k^2$ bewiesen hat. So kann man jedem normierten 2-Bündel E auf $X = X_e$ oder $\mathbf{P}_k^n \times \mathbf{P}_k^m$ ein Zahlenpaar $d(E) = (d_1, d_2) \in \mathbf{N}_{-1} \times \mathbf{N}_0$ ($\mathbf{N}_{-1} := \mathbf{N} \cup \{-1, 0\}$), den Typ von E, zuordnen (Korollar 1.3.2.). Ein 2-Bündel E auf $X = X_e$ bzw. $\mathbf{P}_k^n \times \mathbf{P}_k^m$ heißt im folgenden stabil, wenn $H^0(X, E_{norm}) = 0$, und andernfalls instabil. Der Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit ist die Untersuchung von instabilen 2-Bündeln auf X_e. Auf $X = X_e$ oder $\mathbf{P}_k^2$ existiert ein instabiles 2-Bündel vom Typ $d \geq (0,0)$ bzw. 0 und den Chernklassen c_1, c_2 genau dann, wenn $d^2 - dc_1 + c_2 \geq 0$ ist. Für instabile 2-Bündeln vom Typ d mit $d^2 - dc_2 + c_2 > 0$ oder $d^2 - dc_1 + c_2 = 0$ und $h^1(\mathcal{O}_X(2d - c_1)) = 0$ existiert eine glatte, irreduzible, quasiprojektive und rationale Varietät $\mathrm{M}(d)$ mit der Dimension

$$\dim \mathrm{M}(d) = \max\{3(d_2 - dc_1 + c_2) + h^1(\mathcal{O}_X(2d - c_1)) - 1, 0\},$$

die als grober Modulraum für solche Bündel dient.

Über die Deformierbarkeit von instabilen 2-Bündeln auf X_e erhält man das folgende Ergebnis: Auf X_e ($e = 0$ oder ungerade) läßt sich jedes 2-Bündel vom Typ (d_1, d_2) mit $d_1 \in \{0, 1\}$ oder $d_2 \in \{0, 1\}$ ins triviale 2-Bündel deformieren.

Die von Strømme benutzte Monade kann man auf $X = X_e$ oder $\mathbf{P}_k^n \times \mathbf{P}_k^m$ verallgemeinern (Kap.2 Abs.3). Es existiert eine Familie von $2l$-Bündeln auf X ($2l \geq \dim X$), in der alle bis auf eines trivial sind. Im speziellen Fall $l = 1$ und $X = X_e$ ist das eine direkte Übertragung der Monade von Strømme. Mit Hilfe der Monade von Strømme für diesen speziellen Fall erhalten wir die folgende Behauptung (Prop. 2.3.11) für

$$\mathrm{M}(d; v) := \{F \in \mathrm{M}(d) \mid F \text{ ist in den Typ } v \text{ deformierbar}\}, \ d > v.$$

This paper is an improvement of the author's thesis presented to the Department of Mathematics, Universität Osnabrück, Germany. The author appreciates the referee's valuable assistance in making the improvments.
Communicated by M. Maruyama, July 15, 1996
Revised May 12, 1997

Für $X = X_e$ ist $\mathbf{M}\,(d; v) \neq \emptyset$, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind: $2d_2 - c_{12} > (2d_1 - c_{11})e > 0$, und

a) Ist $\chi(\mathcal{O}_X(d - v + \mathcal{K}_X)) = h^0(\mathcal{O}_X(d - v + \mathcal{K}_X)) \geq v^2 - vc_1 + c_2$, so sei

$$h^1(\mathcal{O}_X(c_1 - d - v)) = 0, 2v_2 - c_{12} - (2v_1 - c_{11})e \geq -1$$

und $d_2 - v_2 \geq (d_1 - v_1)e$, $d_1 - v_1 \geq 1$.

b) Ist $h^0(\mathcal{O}_X(d - v + \mathcal{K}_X)) < v^2 - vc_1 + c_2$, so gelte

entweder (1) $h^0(\mathcal{O}_X(d - v)) > v^2 - vc_1 + c_2$ mit

$$d_2 + v_2 - c_{12} - 2 - e \geq (d_1 + v_1 - c_{11})e \text{ und } d_2 - v_2 - 2 - e \geq (d_1 - v_1)e$$

oder (2) $h^0(\mathcal{O}_X(d - v)) \leq v^2 - vc_1 + c_2$ mit $d_2 + v_2 - c_{12} \geq (d_1 + v_1 - c_{11})e$ und $\mathcal{O}_X(d - v)$ sei ein sehr amples Geradenbündel auf X.

Auf $\mathbf{P}^1_k \times \mathbf{P}^1_k$ (char$(k) \neq 2$) gilt das folgende Korollar 2.3.9: Für 2-Bündel mit verschwindenden Chernklassen ist

$$\operatorname{codim} \mathbf{M}(d; (0, 0)) = \max\{2(d_1 - 1)(d_2 - 1) - 1, 0\},$$

wobei das triviale 2-Bündel das einzige 2-Bündel vom Typ $(0, 0)$ ist.

In dieser Arbeit werden die Begriffe und Resultate von [Ha]: Algebraic Geometry vorausgesetzt. Wie üblich werden Vektorbündel und lokalfreie Garbe identifiziert.

Kapitel 1. Klassifizierung von Vektorbündeln vom Rang 2 auf rationalen Regelflächen

1.1. Charakterisierung von Vektorbündeln vom Rang 2 auf $X = X_e$ oder $\mathbf{P}^n_k \times \mathbf{P}^m_k$

Lemma 1.1.1. *Sei E eine lokalfreie Garbe auf einem reduzierten Schema X, $f : X \to Y$ ein Morphismus von Schemata, $H^0(X_y, E|_{X_y}) = 0\ \forall y \in Y$. Dann folgt $H^0(X, E) = 0$.*

Beweis.: Seien $U = \operatorname{Spec} B \subset X$ offen, $V = \operatorname{Spec} A \subset Y$ offen mit $f|_U : U \to V$ und $E|_U \cong \mathcal{O}^r_x|_U$. Sei $\phi : A \to B$ der zu $f|_U$ assoziierte Ringhomomorphismus. Sei $s \in H^0(X, E)$. $s|_U \in H^0(U, \mathcal{O}^r_x|_U) \cong B^r$, $p \in \operatorname{Spec} A. U_p \cong \operatorname{Spec} B_p/pB_p$. Nach Voraussetzung ist $s|_{U_p} = 0$, $\forall p \in \operatorname{Spec} A$. Daraus folgt, daß jede Komponente von $s|_U$ nilpotent in B ist. Also ist $s|_U = 0$, da X reduziert ist.

Sei $\pi : X_e \cong \mathbf{P}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1_k} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1_k}(-e)) \to \mathbf{P}^1_k$ die rationale Regelfläche mit $e \in \mathbf{N}_0$. Sei $C_0 \hookrightarrow X_e$ ein Schnitt von π mit $C_0^2 = -e$. Bekanntlich ist $\operatorname{Pic} X_e \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ mit Erzeugern C_0 und f, wobei f eine Faser von π ist, d.h. $bC_0 + cf \cong (b, c) \in \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$. (vgl. [Ha] Chap. 5 §3.2)

Ist E eine kohärente Garbe auf X_e und sind $b, c \in \mathbf{Z}$, so wird mit $E(b, c)$ die Garbe $E \otimes_{\mathcal{O}_{X_e}} \mathcal{O}_{X_e}(bC_0 + cf)$ bezeichnet.

Lemma 1.1.2. *Sei X_e wie oben. Sei E eine lokalfreie Garbe auf X_e. Dann existiert ein $n_E \in \mathbf{N}_0$, so daß $\forall n \geq n_E$, $H^0(X, E(0,-n)) = 0$ und $H^0(X, E(-n, 0)) = 0$ gilt.*

Beweis.: Nach der Projektionsformel gilt $\pi_* E(0,-n) \cong \pi_*(E)(-n)$. Benutzen wir die Larry Spektralsequenz für $E(0,-n)$, gilt es also

$$H^0(X_e, E(0,-n)) \cong H^0(\mathbf{P}^1_k, \pi_* E(0,-n)) \cong H^0(\mathbf{P}^1_k, \pi_*(E)(-n)) = 0$$

für n groß genug. Da für generische Punkte $y \in \mathbf{P}^1_k$ und n groß genug $E(-n,0)|_y \cong \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1_k}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1_k}(b)$ mit $a, b < 0$ gilt, ist $\pi_* E(-n, 0)$ eine Nullgarbe. Daraus folgt dann, daß $H^0(X_e, E(-n,0)) \cong H^0(\mathbf{P}^1_k, \pi_* E(-n,0)) = 0$ ist.

Für $\mathbf{P}^n_k \times \mathbf{P}^m_k$ mit $m, n \geq 1$ ist $\operatorname{Pic}(\mathbf{P}^n_k \times \mathbf{P}^m_k) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ mit $\mathrm{H}_{\mathbf{P}^n_k} \times \mathbf{P}^m_k$ und $\mathbf{P}^n_k \times \mathrm{H}_{\mathbf{P}^m_k}$ als Erzeugern, d.h. $b(\mathrm{H}_{\mathbf{P}^n_k} \times \mathbf{P}^m_k) + c(\mathbf{P}^n_k \times \mathrm{H}_{\mathbf{P}^m_k}) \cong (b, c) \in \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$, wobei $\mathrm{H}_{\mathbf{P}^n_k}$ bzw. $\mathrm{H}_{\mathbf{P}^m_k}$ Hyperebene in $\mathbf{P}^n_k$ bzw. $\mathbf{P}^m_k$ ist.

Korollar 1.1.3. *Sei $X = X_e$ oder $\mathbf{P}^n_k \times \mathbf{P}^m_k$ mit n, $m \geq 1$.* $\operatorname{Pic} X \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$. *$E$ sei lokalfreie Garbe auf X. Dann existieren $l_1, l_2 \in \mathbf{N}_0$, so daß $H^0(X, E(-t_1, 0)) = 0$, $H^0(X, E(0, -t_2)) = 0$, $\forall t_1 \geq l_1$, $t_2 \geq l_2$.*

Beweis.: Lemma 1.1.1, 1.1.2.

Für eine lokalfreie Garbe E auf $X = X_e$ oder $\mathbf{P}^n_k \times \mathbf{P}^m_k$ mit $m, n \geq 1$ existiert also $(a, b) \in \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$, so daß $H^0(X, E(a,b)) \neq 0$, $H^0(X, E(a - l_1, b - l_2)) = 0$ $\forall (l_1, l_2) \in \mathbf{N}_0 \oplus \mathbf{N}_0 \backslash \{(0,0)\}$.

Bemerkung 1.1.4. Sei E eine torsionsfreie kohärente Garbe auf $X = \mathbf{P}^n_k$. Es existiert eine nichtnegative ganze Zahl t_0, so daß $H^0(E(-t)) = 0$ für alle $t \geq t_0$ gilt.

Beweis.: Für $E^\vee := \mathcal{H}om(E, \mathcal{O}_X)$ existiert eine exakte Sequenz

$$\xi : \oplus \mathcal{O}_X \to E^\vee(r) \to 0,$$

wobei $\oplus \mathcal{O}_X$ endliche direkte Summe von $\mathcal{O}_X$ und r groß genug ist. Mit dem Funktor $\mathcal{H}om(\cdot, \mathcal{O}_X)$ angewendet auf ξ bekommen wir dann eine exakte Sequenz

$$0 \to (E^\vee)^\vee(-r) \to \oplus \mathcal{O}_X,$$

wobei $(E^\vee)^\vee$ die duale Garbe von $E^\vee$ ist. Da E torsionsfreie ist, ist E durch den natürlichen Garbenhomomorphism von E nach $(E^\vee)^\vee$ eine Untergarbe von $(E^\vee)^\vee$. Daraus folgt die Behauptung.

Proposition 1.1.5. *Sei $X = X_e$ oder $\mathbf{P}^n_k \times \mathbf{P}^m_k$ mit $m + n \geq 2$. F sei ein 2-Bündel auf X mit $H^0(F) \neq 0$ und $H^0(F(-l)) = 0$ für alle $l = (l_1, l_2) \in \mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_0 \backslash \{(0,0)\}$ (bzw. $l \in \mathbf{N}$ im Fall $X = \mathbf{P}^n_k$). Dann gilt für $s \in H^0(F)$, $s \neq 0$: Entweder ist $(s)_0$ von der Kodimension 2 oder $(s)_0 = \emptyset$.*

Beweis.: Für $X = \mathbf{P}^n_k \times \mathbf{P}^m_k$ mit $m \cdot n \neq 1$ gilt: Ist $(s)_0 = \emptyset$, so spaltet F. Da $F^\vee \xrightarrow{s^\vee} \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n_k \times \mathbf{P}^m_k}$ eine exakte Sequenz

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n_k \times \mathbf{P}^m_k}(c_1(F^\vee)) \to F^\vee \xrightarrow{s^\vee} \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n_k \times \mathbf{P}^m_k} \to 0$$

induziert, folgt daraus und aus

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^n \times \mathbf{P}_k^m}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^n \times \mathbf{P}_k^m}(c_1(F^\vee))) \cong H^1(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^n \times \mathbf{P}_k^m}(c_1(F^\vee))) = 0$$

die Spaltung von F. Sei $(s)_0$ von der Kodimension 1. Dann enthält $(s)_0$ eine 1-codimensionale Komponente. Sei D der dieser Komponente entsprechende Divisor, dann folgt

$$s \in H^0(F(-D)) = 0.$$

Das ist ein Widerspruch.

Der obige Schnitt s liefert einen Koszulkomplex

$$0 \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{s} F \to I_Y \otimes \det F \to 0$$

Ist $X = X_e$ oder $\mathbf{P}_k^n \times \mathbf{P}_k^m$ mit $m, n \geq 1$, so heißt E normiert, wenn für die erste Chernklasse $c_1(E) = (c_{11}, c_{12})$ von E gilt, daß $c_{11}, c_{12} \in \{-1, 0\}$. Ist $X = \mathbf{P}_k^n$, so heißt E normiert, wenn $c_1(E) \in \{-1, 0\}$.

Jedes Vektorbündel F vom Rang 2 auf X läßt sich durch Tensorieren mit einem Geradenbündel normieren. Es sei jetzt E ein normiertes 2-Bündel auf X mit $H^0(E) \neq 0$. E heißt vom Typ $d = (d_1, d_2) \in \mathbf{N}_0 \oplus \mathbf{N}_0$ (bzw. $d \in \mathbf{N}_0$ im Fall $X = \mathbf{P}_k^n$), wenn $H^0(E(-d)) \neq 0$, $H^0(E(-d-l)) = 0$ für $l \in \mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_0 \backslash \{(0,0)\}$ (bzw. $l \in \mathbf{N}$ im Fall $X = \mathbf{P}_k^n$).

Ein Schnitt $s \in H^0(E(-d))$, $s \neq 0$ definiert dann nach Prop. 1.1.5 eine Extension

$$(1): 0 \to \mathcal{O}_X(d) \to E \to I_Y(c_1 - d) \to 0,$$

wobei I_Y die Idealgarbe von $(s)_0$ ist.

Für $\mathbf{P}_k^n \times \mathbf{P}_k^m$ mit $n, m \geq 1$ ist der kanonische Divisor $\mathcal{K}_{\mathbf{P}_k^n \times \mathbf{P}_k^m} \cong (-n-1, -m-1)$ ([Ha] Chap. 2. Auf. 8.3). Also ist die dualisierende Garbe $\omega_{\mathbf{P}_k^n \times \mathbf{P}_k^m}$ auf $\mathbf{P}_k^n \times \mathbf{p}_k^m$ mit $mn \neq 0$ isomorph zu $\mathcal{O}_X(-n-1, -m-1)$. Für $X = \mathbf{P}_k^n$ bzw. X_e gilt $\omega_{\mathbf{P}_k^n} \cong \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^n}(-n-1)$ bzw. $\mathcal{O}_{X_e}(-2, -2-e)$.

Sei $\mathcal{O}_X(H)$ eine sehr ample invertierbare Garbe auf X mit $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^n}(H) \cong \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^n}(1)$ für $X = \mathbf{P}_k^n$. Das Hilbertpolynom von E bzgl. $\mathcal{O}_X(H)$ hängt nach dem Satz von Hirzebruch-Riemann-Roch nur von Chernklassen $c_1(E)$ und $c_2(E)$ ab. Damit hängt das Hilbertpolynom von I_Y bzgl. $\mathcal{O}_X(H)$ nach der exakten Sequenz (1) nur von d und $c_1(E)$, $c_2(E)$ ab.

Wir haben die exakte Sequenz

$$(2): 0 \to I_Y \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Y \to 0,$$

wobei I_Y die Idealgarbe von (1) ist. Also hängt das Hilbertpolynom von $\mathcal{O}_Y$ aus (2) bzgl. $\mathcal{O}_X(H)$ nur noch von d und $c_1(E)$, $c_2(E)$ ab. Sei p das Hilbertpolynom von $\mathcal{O}_Y$. Wir bezeichnen mit $\mathcal{H}ilb_X^p$ das Hilbertschema der abgeschlossenen Unterschemata von X mit festem Hilbertpolynom p. Sei $\mathcal{J}$ die assoziierte universelle Idealgarbe auf $X \times \mathcal{H}ilb_X^p$, $Y := \mathrm{Supp}(\mathcal{O}/\mathcal{J})$, wobei $\mathcal{O} := \mathcal{O}_{X \times \mathcal{H}ilb_X^p}$ die Strukturgarbe von $X \times \mathcal{H}ilb_X^p$ ist. Weiter sei $Y_h := \mathrm{Supp}(\mathcal{O} \otimes_{\mathcal{O}_h} k(h)/\mathcal{J}_{Y_h})$ für $h \in \mathcal{H}ilb_X^p$, wobei $\mathcal{J}_{Y_h} := \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_h} k(h)$. $\dim Y_h = r$ ist der Grad von p ([Ha] p. 52).

Lemma 1.1.6. $\mathbf{H}_p := \{h \in \mathcal{H}ilb_X^p \mid \mathcal{I}_{Y_h}$ *ist lokalvollständiger Durchschnitt der Kodimension* $n - r\}$ *ist offen in* $\mathcal{H}ilb_X^p$, *wobei* r *der Grad von* p *und* n *die Dimension von* X *ist.*

Beweis.: Für $h \in \mathcal{H}ilb_X^p$ mit der Eigenschaft, daß $\mathcal{I}_{Y_h}$ lokalvollständiger Durchschnitt der Kodimension $n-r$ ist, existiert für jeden Punkt $x \in Y_h$ f_1, $f_2 \cdots f_{n-r} \in \mathcal{I}_x$, so daß $(\mathcal{I}_{Y_h})_x$ durch $f_1 \otimes_{\mathcal{O}_h} 1, \dots, f_{n-r} \otimes_{\mathcal{O}_h} 1$ erzeugt ist. Wenn $\mathcal{I}_{Y_h}$ nicht lokalvollständiger Durchschnitt der Kodimension $n-r$ ist, existiert ein $x_0 \in \mathcal{I}_{Y_h}$ so daß $(\mathcal{I}_{Y_h})_{x_0}$ nicht durch $n-r$ Elemente von $(\mathcal{I}_{Y_h})_{x_0}$ erzeugbar ist.

$$\text{Sei } \pi : X \times \mathcal{H}ilb_X^p \to \mathcal{H}ilb_X^p \text{ die Projektion.}$$

$U = \{x \in X \times \mathcal{H}ilb_X^p | \pi(x) = h,\ (\mathcal{I}_{Y_h})_x = \mathcal{I}_x \otimes_{\mathcal{O}_h} k(h)$ ist durch $n-r$ Elemente von $(\mathcal{I}_{Y_h})_x$ erzeugbar$\}$ ist offen

Also ist $\pi(Y \backslash U)$ abgeschlossen in $\mathcal{H}ilb_X^p$, da π eigentlich ist. Es gilt somit $\mathbf{H}_p = \mathcal{H}ilb_X^p \backslash \pi(Y \backslash U)$ offen, da π surjektiv ist.

Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus zwischen Schemata. Man definiert wie folgt relative $\mathcal{E}xt$-garben.

Seien $\mathcal{F}, \mathcal{E}$ $\mathcal{O}_X$-Moduln. Man bilde eine injektive Auflösung I. von $\mathcal{E}$:

$$0 \to \mathcal{E} \to I_0 \to I_1 \cdots.$$

Wir bezeichnen mit $\mathcal{E}xt_f^i(\mathcal{F}, \mathcal{E})$ die i-te Kohomologie des Bildgarbenkomplexes $f_* \mathcal{H}om(\mathcal{F}, I.)$. Für die Funktoren $f_* \mathcal{H}om$ und Γ erhält man die Grothendieck-Spektralsequenz

$$\mathrm{E}_2^{pq} := H^p(Y, \mathcal{E}xt_f^q(\mathcal{F}, \mathcal{E})) \Rightarrow \mathrm{Ext}_X^{p+q}(\mathcal{F}, \mathcal{E}) = \mathrm{E}^{p+q} \text{ (man siehe [Lan])}$$

Diese Spektralsequenz induziert eine kurze exakte Sequenz, die niedere Termsequenz:

$$\begin{aligned} 0 &\to H^1(Y, f_* \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{E})) \to \mathrm{Ext}_X^1(\mathcal{F}, \mathcal{E}) \to H^0(Y, \mathcal{E}xt_f^1(\mathcal{F}, \mathcal{E})) \\ &\to H^2(Y, f_* \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{E})) \end{aligned}$$

Ist f ein eigentlicher Morphismus zwischen noetherschen Schemata X, Y und sind $\mathcal{F}$, $\mathcal{E}$ kohärente $\mathcal{O}_X$-Moduln, dann sind die relative Ext-Garbe $\mathcal{E}xt_f^i(\mathcal{F}, \mathcal{E})$ kohärente $\mathcal{O}_Y$-Moduln.

Für ein kartesisches Diagramm

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

mit einem platten Morphismus f und für einen kohärenten $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$, der platt über Y ist, gibt es ein $\mathcal{O}_{Y'}$-linearen Basiswechselhomomorphismus:

$$\mathcal{E}^i(g) : g^* \mathcal{E}xt_f^i(\mathcal{F}, \mathcal{E}) \to \mathcal{E}xt_{f'}^i(g'^* \mathcal{F}, g'^* \mathcal{E}).$$

Satz 1.1.7. *Sei $f: X \to Y$ ein platter eigentlicher Morphismus zwischen noetherschen Schemata X und Y. Seien $\mathcal{F}, \mathcal{E}$ kohärente $\mathcal{O}_X$-Moduln, platt über Y. Es sei $q \geq 0$ und es sei $y \in Y$. Dann gilt: $\mathcal{E}^i(g)$ ist genau dann Isomorphismus für jede Abbildung g in einer Umgebung von $g^{-1}(y) \subset Y'$ für $i = q$ (bzw. für $i = q$, $q-1$), wenn die Abbildung $\mathcal{E}xt_f^i(\mathcal{F}, \mathcal{E})_y \to \mathrm{Ext}_{X_y}^i(\mathcal{F}_y, \mathcal{E}_y)$ für $i = q$ surjektiv ist (bzw. $\mathcal{E}xt_f^i(\mathcal{F}, \mathcal{E})_y$ zusätzlich frei ist).*

Beweis. Man siehe [BP] Satz 2.

Satz 1.1.8. *Die Voraussetzungen für $f, \mathcal{F}, \mathcal{E}$ seien wie in Satz 1.1.7. Ist entweder Y reduziert und $\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{X_y}}^q(\mathcal{F}_y, \mathcal{E}_y) = 0$ für alle $q \geq q_0$, $q_0 \in \mathbf{N}$ und für alle $y \in Y$, oder ist Y regulär (glatt), dann gilt:*

Ist die Funktion $y \to \dim_k \mathrm{Ext}_{X_y}^q(\mathcal{F}_y, \mathcal{E}_y)$ für ein q konstant, so ist $\mathcal{E}xt_f^q(\mathcal{F}, \mathcal{E})$ lokal frei, und für jedes $y \in Y$ gilt : $\mathcal{E}xt_f^i(\mathcal{F}, \mathcal{E})_y \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} (\mathcal{O}_{Y,y}/m_y) = \mathrm{Ext}_{X_y}^i(\mathcal{F}_y, \mathcal{E}_y)$ für $i = q$, $q-1$.

Beweis.: Man siehe [BP] Satz 3.

Satz 1.1.9. *Sei $f: X \to Y$ platter, abgeschlossener surjektiver Morphismus von noetherschen Schemata. Sei $\mathcal{F}$ eine kohärente Garbe auf X und platt über Y. Dann ist*

$$U = \{y \in Y \mid \mathcal{F}_y \text{ lokal frei}\}$$

offen in Y.

Die Mengen $\mathbf{H}_p^j := \{h \in \mathbf{H}_p \mid \dim_k \mathrm{Ext}^1(\mathcal{J}_{Y_h}(c_1 - d), \mathcal{O}_X(d)) = j\}$, $j \in \mathbf{N}$ sind lokalabgeschlossen in $\mathbf{H}_p$, da $\mathcal{J}(c_1 - d)$ und $\mathcal{O}(d)$ kohärent und flach über $\mathbf{H}_p$ sind. ([Bă]; Satz 3)

$\mathbf{H}_p^j$ werde mit der reduzierten Struktur versehen.

Sei $\mathcal{J}_j := (\mathrm{id} \times i)^* \mathcal{J}$, wobei $i: \mathbf{H}_p^j \to \mathbf{H}_p$ die Inklusion ist. Dann ist

$$\mathcal{E}_j := \mathcal{E}xt_{\mathrm{Pr}_2}^1(\mathcal{J}_j(c_1 - d), \mathcal{O}(d)) \text{ lokalfrei},$$

wobei $\mathcal{J}_j(c_1 - d) := \mathrm{Pr}_1^* \mathcal{O}_X(c_1 - d) \otimes \mathcal{J}_j$, $\mathcal{O}(d) := \mathrm{Pr}_1^* \mathcal{O}_X(d)$ und $\mathrm{Pr}_1 : X \times \mathbf{H}_p^j \to X$, $\mathbf{Pr}_2 : X \times \mathbf{H}_p^j \to \mathbf{H}_p^j$ die erste bzw. zweite Projektion ist. Sei $\mathbf{P}(\mathcal{E}_j^\vee)$ das projektive Bündel des Duals von $\mathcal{E}_j$ und $g: \mathrm{P}(\mathcal{E}_j^\vee) \to \mathbf{H}_p^j$ die Projektion. Ein Punkt $z \in \mathbf{P}(\mathcal{E}_j^\vee)$ wird mit dem Punkt $h = g(z) \in \mathbf{H}_p^j$ und der dazugehörigen Extension (modulo $k(h)^*$) identifiziert:

$$0 \to \mathcal{O}_h(d) \to E_z \to \mathcal{J}_{Y_h}(c_1 - d) \to 0 \text{ auf } X \times_k k(h).$$

Proposition 1.1.10. *$M(j, d, c_1, c_2) := \{z \in \mathbf{P}(\mathcal{E}_j^\vee) \mid E_z$ ist lokalfrei$\}$ ist offen in $\mathbf{P}(\mathcal{E}_j^\vee)$.*

Beweis.: Betrachten wir das folgende kartesische Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} X \times \mathbf{P}(\mathcal{E}_j^\vee) & \xrightarrow{\mathrm{id} \times g} & X \times \mathbf{H}_p^j \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Pr}_2} \\ \mathbf{P}(\mathcal{E}_j^\vee) & \xrightarrow{g} & \mathbf{H}_p^j \end{array}$$

Sei $\mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{E}_j^\vee)}(1)$ die universelle invertierbare Garbe. Die zugehörige Surjektion $g^*(\mathcal{E}_j^\vee) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{E}_j^\vee)}(1)$ liefert einen injektiven Garbenhomomorphismus:

$$\begin{aligned} 0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{E}_j^\vee)} &\xrightarrow{s} g^*(\mathcal{E}_j) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{E}_j^\vee)}(1) \\ &\cong \mathcal{E}xt^1_\pi((\mathrm{id} \times g)^* \mathcal{J}_j(c_1 - d), \mathcal{O}_{X \times \mathbf{P}(\mathcal{E}_j^\vee)}(d) \otimes \pi^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{E}_j^\vee)}(1)). \end{aligned}$$

Sei U eine affine offene Menge in $\mathbf{P}(\mathcal{E}_j^\vee)$ mit $\mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{E}_j^\vee)}(1)|_U \cong \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{E}_j^\vee)}|_U$.

Man hat die niedere Termsequenz:

$$\begin{aligned} 0 &\to H^1(U, \pi_* \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X \times U}}((\mathrm{id} \times g)^* \mathcal{J}_j(c_1 - d), \mathcal{O}_{X \times U}(d))) \\ &\to \mathrm{Ext}^1_{X \times U}((\mathrm{id} \times g)^* \mathcal{J}_j(c_1 - d), \mathcal{O}_{X \times U}(d)) \\ &\to H^0(U, \mathcal{E}xt^1_\pi((\mathrm{id} \times g)^* \mathcal{J}_j(c_1 - d), \mathcal{O}_{X \times U}(d)) \\ &\to H^2(U, \pi_* \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X \times U}}((\mathrm{id} \times g)^* \mathcal{J}_j(c_1 - d), \mathcal{O}_{X \times U}(d))). \end{aligned}$$

Der erste und der letzte term verschwinden. Also ist

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ext}^1_{X \times U}(\mathrm{id} \times g)^*(\mathcal{J}_j(c_1 - d), \\ &\mathcal{O}_{X \times U}(d)) \cong H^0(U, \mathcal{E}xt^1_\pi((\mathrm{id} \times g)^* \mathcal{J}_j(c_1 - d), \mathcal{O}_{X \times U}(d))). \end{aligned}$$

$s|_U$ liefert eine Extension ξ auf $X \times U$:

$$0 \to \mathcal{O}_{X \times U}(d) \to \mathcal{F} \to (\mathrm{id} \times g)^* \mathcal{J}_j(c_1 - 2d)|_{X \times U} \to 0.$$

$\mathcal{F}$ ist flach über U, da die beiden anderen Garben flach über U sind. Für $z \in U$ ist die assoziierte Extension (modulo $k(g(z))^*$) äquivalent zu $\xi|_{X \times \{z\}}$.

Also gilt $\mathcal{F}/m_z\mathcal{F} \cong E_z$. Nach Satz 1.1.9 folgt die Behauptung.

Bemerkung 1.1.11. Seien c_1 und c_2 und d vorgegeben. Für $X = \mathbf{P}_k^n$ oder $\mathbf{P}_k^n \times \mathbf{P}_k^m$ ist $\mathrm{M}(j, d, c_1, c_2)$ nur für endliche viele j nicht leer.

Beweis. Aus der langen exakten Sequenz für $\mathrm{Hom}((1), \mathcal{O}_X(d))$:

$$\begin{aligned} 0 &\to \mathrm{Hom}(I_Y(c_1 - d), \mathcal{O}_X(d)) \to \mathrm{Hom}(E, \mathcal{O}_X(d)) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X(d), \mathcal{O}_X(d)) \\ &\to \mathrm{Ext}^1(I_Y(c_1 - d), \mathcal{O}_X(d)) \to \mathrm{Ext}^1(E, \mathcal{O}_X(d)) \to 0 \cdots \end{aligned}$$

und

$$\mathrm{Hom}(E, \mathcal{O}_X(d)) \cong H^0(E(d - c_1)), \quad \mathrm{Ext}^1(E, \mathcal{O}_X(d)) \cong H^1(E(d - c_1))$$

folgt

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{Ext}^1(I_Y(c_1 - d), \mathcal{O}_X(d)) = \dim \mathrm{Hom}(I_Y(c_1 - d), \mathcal{O}_X(d)) - h^0(E(d - c_1)) \\ + 1 + h^1(E(d - c_1)). \end{aligned}$$

Da $\dim \mathrm{Hom}(I_Y(c_1 - d), \mathcal{O}_X(d)) \leq h^0(E(d - c_1))$ ist, ist

$$\dim \mathrm{Ext}^1(I_Y(c_1 - d), \mathcal{O}_X(d)) \leq h^1(E(d - c_1)) + 1.$$

Nach [Mar3] ist $h^1(E(d - c_1))$ beschränkt (vgl. auch Bemerkung 2.1.10 und dem Beweis von Prop. 2.1.9).

1.2. Berechnung von $\dim_k \operatorname{Ext}^1(I_Y(c_1-d), \mathcal{O}_X)$ für $X = X_e$ oder $\mathbf{P}_k^2$ und die Existenz der Vektorbündeln vom Typ d

In diesem Abschnitt sei $X = X_e$ oder $\mathbf{P}_k^2$. Nach dem Dualitätssatz von Serre ist

$$\dim_k \operatorname{Ext}^1(I_Y(c_1-d), \mathcal{O}_X(d)) = h^1(X, I_Y(c_1-2d) \otimes \omega_X),$$

wobei ω_X die dualisierende Garbe auf X ist.

$$\omega_{\mathbf{P}_k^2} \cong \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^2}(-3), \quad \omega_{X_e} \cong \mathcal{O}_{X_e}(-2, -2-e)$$

Aus $0 \to I_Y \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Y \to 0$ folgt

$$0 \to I_Y(c_1-2d) \otimes \omega_X \to \mathcal{O}_X(c_1-2d) \otimes \omega_X \to \mathcal{O}_Y \to 0.$$

Nehmen wir die lange exakte Sequenz der obigen exakten Sequenz, dann folgt:

$$0 \to H^0(X, \mathcal{O}_Y) \to H^1(X, I_Y(c_1-2d) \otimes \omega_X) \to H^1(X, \mathcal{O}_X(c_1-2d) \otimes \omega_X) \to 0.$$

Es gilt nun $h^1(X, I_Y(c_1-2d) \otimes \omega_X) = h^0(X, \mathcal{O}_Y) + h^1(X, \mathcal{O}_X(c_1-2d) \otimes \omega_X)$. Da Y von der Kodimension 2 ist, gilt $H^1(X, \mathcal{O}_Y) = H^2(X, \mathcal{O}_Y) = 0$. Also gilt $\chi(\mathcal{O}_Y) = h^0(X, \mathcal{O}_Y) = \deg Y = \text{Länge}(Y)$.

Aus den beiden exakten Sequenzen:

$$0 \to \mathcal{O}(d) \to E \to I_Y(c_1-d) \to 0 \tag{1.1}$$

$$0 \to I_Y \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Y \to 0 \tag{1.2}$$

können wir Länge(Y) berechnen. Aus (1.1) folgt $\chi(I_Y) = \chi(E(d-c_1)) - \chi(\mathcal{O}_X(2d-c_1))$. Aus (1.2) folgt $\chi(\mathcal{O}_Y) = \text{Länge}(Y) = \chi(\mathcal{O}_X) - \chi(E(d-c_1)) + \chi(\mathcal{O}_X(2d-c_1))$. Sei $\mathcal{E}$ eine lokalfreie Garbe von Rang r auf einer Fläche. Dann folgt aus dem Satz von Riemann-Roch:

$$\chi(\mathcal{E}) = r\chi(\mathcal{O}_X) + \tfrac{1}{2}c_1(\mathcal{E})(c_1(\mathcal{E}) - \mathcal{K}_X) - c_2(\mathcal{E}),$$

wobei $\mathcal{K}_X$ der kanonische Divisor auf X ist. Es folgt

$$\chi(E(d-c_1)) = 2 + \tfrac{1}{2}(2d-c_1)(2d-c_1-\mathcal{K}_X) - ((d-c_1)^2 + c_1(d-c_1) + c_2),$$

wobei $c_1 = c_1(E)$, $c_2 = c_2(E)$ ist.

$$\chi(\mathcal{O}_X(2d-c_1)) = 1 + \tfrac{1}{2}(2d-c_1)(2d-c_1-\mathcal{K}_X)$$

und somit

$$\chi(\mathcal{O}_Y) = \text{Länge}(Y) = d^2 - c_1 d + c_2.$$

Also ist $\dim_k \operatorname{Ext}^1(I_Y(c_1-d), \mathcal{O}_X(d)) = d^2 - dc_1 + c_2 + h^1(X, \mathcal{O}_X(c_1-2d) \otimes \omega_X)$. Für $X = X_e$ oder $\mathbf{P}_k^2$ braucht man also keine Stratifizierung wie für $\mathbf{P}_k^n \times \mathbf{P}_k^m$ mit $n+m > 2$. Nur für

$$j = d^2 - dc_1 + c_2 + h^1(X, \mathcal{O}_X(c_1-2d) \otimes \omega_X)$$

ist $\mathrm{M}(j,d,c_1,c_2) \neq \emptyset$. Zur Abkürzung schreilben wir statt $\mathrm{M}(j,d,c_1,c_2)$ jetzt $\mathrm{M}(d)$ für den Fall $X = X_e$ oder $\mathbf{P}_k^2$.

Proposition 1.2.1. *Sei $X = X_e$ oder $\mathbf{P}_k^2$. 2-Bündel von Typ d auf X existieren genau dann, wenn $d^2 - dc_1 + c_2 \geq 0$ ist.*

Beweis.: Sei Y ein 0-dimensionales Unterschema von X mit $d^2 - dc_1 + c_2$ einfachen Punkten. Man betrachte die globale Ext-Gruppe $\mathrm{Ext}^1(I_Y, \mathcal{O}_X(2d - c_1))$, wobei I_Y die zu Y gehörige Idealgarbe. Wir benutzen die niedere Termsequenz für die Spektralsequenz

$$\mathrm{E}_2^{pq} = H^p(X, \mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_X}(I_Y, \mathcal{O}_X(2d - c_1)) \Rightarrow \mathrm{E}^{p+q} = \mathrm{Ext}_X^{p+q}(I_Y, \mathcal{O}_X(2d - c_1)).$$

Dies ist die folgende exakte Sequenz:

$$\begin{aligned} 0 &\to H^1(X, \mathcal{H}om(I_Y, \mathcal{O}_X(2d - c_1))) \to \mathrm{Ext}^1(I_Y, \mathcal{O}_X(2d - c_1)) \\ &\to H^0(X, \mathcal{E}xt^1(I_Y, \mathcal{O}_X(2d - c_1))) \to H^2(X, \mathcal{H}om(I_Y, \mathcal{O}_X(2d - c_1))) \end{aligned}$$

Die exakte Sequenz $(\star) : 0 \to I_Y \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Y \to 0$ induziert die lange exakte Sequenz:

$$\begin{aligned} 0 &\to \mathcal{H}om(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_X(2d - c_1)) \to \mathcal{H}om(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X(2d - c_1)) \\ &\to \mathcal{H}om(I_Y, \mathcal{O}_X(2d - c_1)) \to \mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_X(2d - c_1)) \cdots \end{aligned}$$

Da Y lokalvollständiger Durchschnitt von der Kodimension 2 ist, ist

$$\mathcal{E}xt^i(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_X(2d - c_1)) = 0 \text{ für } i = 0, 1 \text{ ([GH] s. 690).}$$

Daraus folgt $\mathcal{H}om(I_Y, \mathcal{O}_X(2d - c_1)) \cong \mathcal{H}om(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X(2d - c_1)) \cong \mathcal{O}_X(2d - c_1)$. Man setzt dies in die niedere Termsequenz ein:

$$\begin{aligned} 0 &\to H^1(X, \mathcal{O}_X(2d - c_1)) \to \mathrm{Ext}^1(I_Y, \mathcal{O}_X(2d - c_1)) \\ &\to H^0(X, \mathcal{E}xt^1(I_Y, \mathcal{O}_X(2d - c_1))) \to H^2(X, \mathcal{O}_X(2d - c_1)). \end{aligned}$$

Da die Komponente von $2d - c_1$ nicht negativ ist, ist

$$H^2(X, \mathcal{O}_X(2d - c_1)) \cong H^0(X, \mathcal{O}_X(c_1 - 2d + \mathcal{K}_X))^\vee = 0.$$

Es gilt also

$$\begin{aligned} 0 &\to H^1(X, \mathcal{O}_X(2d - c_1)) \to \mathrm{Ext}^1(I_Y, \mathcal{O}_X(2d - c_1)) \\ &\to H^0(X, \mathcal{E}xt^1(I_Y, \mathcal{O}_X(2d - c_1))) \to 0. \end{aligned}$$

Um $\mathrm{Ext}^1(I_Y, \mathcal{O}_X(2d - c_1))$ zu verstehen muß man $\mathcal{E}xt^1(I_Y, \mathcal{O}_X(2d - c_1))$ berechnen. Aus $(\star)$ folgt $\mathcal{E}xt^1(I_Y, \mathcal{O}_X(2d - c_1)) \cong \mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_X(2d - c_1))$. Da Y lokalvollständiger Durchschnitt von der Kodimension 2 ist, ist

$$\mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_X(2d - c_1)) \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\det I_Y/I_Y^2, \mathcal{O}_Y(2d - c_1))$$

nach den lokalen fundamentalen Isomorphismus ([AK] s. 12–14, [GH] s. 690–692), wobei $\mathcal{O}_Y(2d-c_1) := \mathcal{O}_X(2d-c_1) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y$ ist.

Da $\mathcal{O}_Y$ 0-dimensional ist, ist

$$\mathcal{O}_Y(2d-c_1) \cong \mathcal{O}_Y \cong \det I_Y/I_Y^2.$$

Daraus folgt, daß $\mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_X(2d-c_1)) \cong \mathcal{O}_Y \cong \mathcal{E}xt^1(I_Y, \mathcal{O}_X(2d-c_1))$. Also ist $0 \to H^1(X, \mathcal{O}_X(2d-c_1)) \to \mathrm{Ext}^1(I_Y, \mathcal{O}_X(2d-c_1)) \to H^0(Y, \mathcal{O}_Y) \to 0$. Wählen wir eine Extension $\xi : 0 \to \mathcal{O}_X(2d-c_1) \to E(d-c_1) \to I_Y \to 0$ aus $\mathrm{Ext}^1(I_Y, \mathcal{O}_X(2d-c_1))$, die nach $1 \in H^0(Y, \mathcal{O}_Y)$ abbildet.

Da $\mathcal{E}xt^1(I_Y, \mathcal{O}_X(2d-c_1))_t = \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{X,t}}(I_{Y,t}, \mathcal{O}_{X,t}(2d-c_1))$ für $t \in X$ ist, definiert ξ_t eine Extension: $0 \to \mathcal{O}_{X,t}(2d-c_1) \to E_t(d-c_1) \to I_{Y,t} \to 0$, die 1_t in $\mathcal{O}_{Y,t}$ entspricht.

Da 1_t den $\mathcal{O}_{X,t}$-Modul $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{X,t}}(I_Y, \mathcal{O}_{X,t}(2d-c_1)) \cong \mathcal{O}_{Y,t}$ erzeugt, ist $E_t(d-c_1)$ nach dem Lemma von Serre ([OS] s. 98) lokalfrei. Also ist E lokalfrei von Rang 2.

Bemerkung 1.2.2. Der obige Beweis stammt aus ([OS] 5.1.1 Theorem)

1.3. Berechnung der $h^i(X, \mathcal{H}om(E,E))$, $0 \le i \le 2$ für 2-Bündel E mit $H^0(E) \neq 0$ auf $X = X_e$ oder $\mathbf{P}_k^2$

Um $h^i(X, \mathcal{H}om(E,E))$ $0 \le i \le 2$ zu berechnen muß man zuerst $h^i(X, \mathcal{L})$ $0 \le i \le 2$ für Geradenbündeln $\mathcal{L}$ auf $X = X_e$ oder $\mathbf{P}_k^2$ berechnen. Wir benutzen die Larry-Spektralsequenz für Vektorbündel $\mathcal{F}$ über X_e. Es gilt $\mathrm{E}_2^{pq} \cong H^q(R^p\pi_*\mathcal{F}) \Rightarrow H^{p+q}(\mathcal{F})$. Daraus folgt die folgenden Isomorphismen

$$H^1(\mathcal{F}) \cong H^0(R^1\pi_*\mathcal{F}) \oplus H^1(\pi_*\mathcal{F})$$
$$H^0(\mathcal{F}) \cong H^0(\pi_*\mathcal{F})$$
$$H^2(\mathcal{F}) \cong H^1(R^1\pi_*\mathcal{F}).$$

Nach der Projektionsformel gilt

$$\pi_*\mathcal{O}_{X_e}(a,b) \cong \pi_*\mathcal{O}_{X_e}(a,0) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^1}(b)$$
$$R^1\pi_*\mathcal{O}_{X_e}(a,b) \cong R^1\pi_*\mathcal{O}_{X_e}(a,0) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^1}(b).$$

Es gilt $R^1\pi_*\mathcal{O}_{X_e}(a,0) \cong (\pi_*\mathcal{O}_{X_e}(-a-2,0))^\vee \otimes (\bigwedge^2(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^1}(-e)))^\vee$ ([Ha] Chap. 3 Aufg. 8.4). Im Fall $a < 0$ ist $\pi_*\mathcal{O}_{X_e}(a,0) = 0$.

Im Fall $a \ge 0$ gilt nun

$$\pi_*\mathcal{O}_{X_e}(a,0) \cong S^a((\mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^1}(-e)) \cong \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^1}(-e) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^1}(-ae)$$

Es gilt $\pi_*\mathcal{O}(a,b) \cong \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^1}(b) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^1}(b-e) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^1}(b-ae)$ für $a \ge 0$ und

$$R^1\pi_*\mathcal{O}_{X_e}(a,b) \cong \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^1}(b+e) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^1}(b+2e) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^1}(b-(a+1)e)$$

für $a \le -2$. Für andere Fälle sind beide gleich 0.

Zusammengefaßt haben wir die folgende

Proposition 1.3.1. *Sei $a, b \in \mathbf{N}_0$. $X = X_e$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

$$\text{im Fall } ae \leq b : h^0(\mathcal{O}_X, (a,b)) = (a+1)\left(b+1-\frac{ae}{2}\right)$$

$$h^1(\mathcal{O}_X(a,b)) = h^2(\mathcal{O}_X(a,b)) = 0$$

$$\vdots$$

$$\text{im Fall } (a-i-1)e \leq b < (a-i)e,\ 0 \leq i \leq a-1 : h^2(\mathcal{O}_X(a,b)) = 0$$

$$h^0(\mathcal{O}_X(a,b)) = h^0(\mathcal{O}_X(a-i-1,b)) = (a-i)\left(b+1-\frac{(a-i-1)e}{2}\right)$$

$$h^1(\mathcal{O}_X(a,b)) = (i+1)\left(\frac{(2a-i)e}{2} - b - 1\right)$$

$$\text{für } a \geq 0,\ b > 0 : h^0(\mathcal{O}_X(a,-b)) = h^2(\mathcal{O}_X(a,-b)) = 0$$

$$h^1(\mathcal{O}_X(a,-b)) = (a+1)\left(b+\frac{ae}{2}-1\right)$$

$$\text{für } a > 0,\ b \geq 0 : h^0(\mathcal{O}_X(-a,b)) = h^2(\mathcal{O}_X(-a,b)) = 0$$

$$h^1(\mathcal{O}_X(-a,b)) = (a-1)\left(b+1+\frac{ae}{2}\right).$$

Korollar 1.3.2. *Der Typ eines normierten Vektorbündels E vom Rang 2 auf $X = X_e$ oder $\mathbf{P}_k^n \times \mathbf{P}_k^m$ ist eindeutig bestimmt.*

Beweis.: Es reicht die Behauptung für normiertes instabiles 2-Bündel E auf $X = X_e$ oder $\mathbf{P}_k^n \times \mathbf{P}_k^m$ mit $n \times m \neq 0$ zu zeigen. Seien $d, d' \geq 0$, 0 mit $d_1 < d_1'$. Angenommen seien d und d' die Typen von E. Betrachten wir die Standardextension für E bzgl. dem Typ d:

$$\xi : 0 \to \mathcal{O}_X(d) \to E \to I_Y(c_1 - d) \to 0.$$

Durch die lange exakte Sequenz für $\xi \otimes \mathcal{O}_X(-d')$ folgt $H^0(\mathcal{O}_X(d-d')) \cong H^0(E(-d'))$. Nach Prop. 1.3.1 bzw. dem Künnethformel gilt $H^0(\mathcal{O}_X(d-d')) = 0$. Das ist ein Widerspruch gegen die Voraussetzung, daß E auch ein Typ von d' ist.

Sei $\xi_E : 0 \to \mathcal{O}_X(d) \to E \xrightarrow{\varphi} I_Y(c_1 - d) \to 0$ die im Abschnitt 1 erwähnte Standardextension für ein 2-Bündel E vom Typ d auf $X = X_e$ oder $\mathbf{P}_k^2$.

$$\mathcal{H}om(E, \xi_E) : 0 \to \mathcal{H}om(E, \mathcal{O}_X(d)) \to \mathcal{H}om(E, E) \to \mathcal{H}om(E, I_Y(c_1 - d)) \to 0$$

Die exakte Sequenz $\mathcal{H}om(E, \xi_E)$ ist äquivalent zu der exakten Sequenz

$$E^\vee \otimes \xi_E : 0 \to E(d - c_1) \to E^\vee \otimes E \to E(-d) \otimes I_Y \to 0.$$

Aus der langen exakten Sequenz für $E^\vee \otimes \xi_E$:

$$0 \to H^0(E(d-c_1)) \to H^0(E^\vee \otimes E) \to H^0(E(-d) \otimes I_Y) \cdots$$

folgt $h^0(E(d-c_1)) \leq h^0(E^\vee \otimes E) \leq h^0(E(d-c_1)) + h^0(E(-d) \otimes I_Y)$.

$$\xi_Y : 0 \to I_Y \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Y \to 0$$

$$E(-d) \otimes \xi_Y : 0 \to E(-d) \otimes I_Y \to E(-d) \to E \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y \to 0$$

Es folgt aus der langen exakten Sequenz für $E(-d) \otimes \xi_Y$, daß

$$h^0(E(-d) \otimes I_Y) \leq h^0(E(-d)) \text{ ist.}$$

Sei $I_Y \neq \mathcal{O}_X$. Es folgt dann aus $\xi_E \otimes \mathcal{O}_X(d - c_1)$, daß

$$H^0(\mathcal{O}_X(2d - c_1)) \cong H^0(E(d - c_1))$$

ist. Aus $\mathcal{H}om(E, \xi_E)$ folgt, daß $\mathrm{id}_E \in \mathrm{Hom}(E, E)$ nach $\varphi \in \mathrm{Hom}(E, I_Y(c_1 - d))$ $(\varphi \neq 0)$ abgebildet ist. Damit ist $h^0(E(-d) \otimes I_Y) = 1$. Also gilt

$$h^0(E^\vee \otimes E) = h^0(E(d - c_1)) + h^0(E(-d) \otimes I_Y) = h^0(\mathcal{O}_X(2d - c_1)) + 1.$$

Sei $I_Y \cong \mathcal{O}_X$. Für $X = \mathbf{P}_k^n \otimes P_K^m$ ist

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_X(c_1 - d), \mathcal{O}_X(d)) \cong H^1(\mathcal{O}_X(2d - c_1)) = 0.$$

Also ist die exakte Sequenz ξ_E mit $E \cong \mathcal{O}_X(d) \oplus \mathcal{O}_X(c_1 - d)$ gespaltet. Folglich ist $\mathcal{H}om(E, E) \cong \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X(c_1 - 2d) \oplus \mathcal{O}_X(2d - c_1) \oplus \mathcal{O}_X$.

Im folgenden betrachten wir nur $X = X_e$ oder $\mathbf{P}_k^2$. Da Y von der Kodimension 2 ist, ist $h^0(E \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y) = 2h^0(X, \mathcal{O}_Y)$. Zuerst betrachten wir den Fall $I_Y \neq \mathcal{O}_X$. Aus der exakten Sequenz ξ_Y folgt $h^1(I_Y) = h^0(X, \mathcal{O}_Y) - 1$, $h^2(I_Y) = 0$. Aus der langen exakten Sequenz für $\xi_E \otimes \mathcal{O}_X(d - c_1)$ folgt dann

$$h^1(E(d - c_1)) = h^1(\mathcal{O}_X(2d - c_1)) + h^1(I_Y) = h^1(\mathcal{O}_X(2d - c_1)) + h^0(X, \mathcal{O}_Y) - 1$$

und $h^2(E(d - c_1)) = 0$, da nach Proposition 1.3.1 $h^2(\mathcal{O}_X(2d - c_1)) = 0$ ist.

Aus der langen exakten Sequenz für $\xi_Y \otimes \mathcal{O}_X(c_1 - 2d)$ folgt $h^2(I_Y(c_1 - 2d)) = 0$ und $h^1(I_Y(c_1 - 2d)) = h^0(X, \mathcal{O}_Y) + h^1(\mathcal{O}_X(c_1 - 2d))$. Aus der langen exakten Sequenz für $\xi_E \otimes \mathcal{O}_X(-d)$ bekommt man die folgenden Resultate:

$$h^1(E(-d)) = h^1(I_Y(c_1 - 2d)) = h^0(X, \mathcal{O}_Y) + h^1(\mathcal{O}_X(c_1 - 2d))$$
$$h^2(E(-d)) = h^2(I_Y(c_1 - 2d)) = h^2(\mathcal{O}_X(c_1 - 2d)) = h^0(\mathcal{O}_X(2d - c_1 + \mathcal{K}_X)).$$

Aus der langen exakten Sequenz für $E(-d) \otimes \xi_Y$ bekommen wir dann

$$h^1(E(-d) \otimes I_Y) = h^1(E(-d)) + 2h^0(X, \mathcal{O}_Y) = h^1(\mathcal{O}_X(c_1 - 2d)) + 3h^0(X, \mathcal{O}_Y) \text{ und}$$
$$h^2(E(-d) \otimes I_Y) = h^2(I_Y(c_1 - 2d)) = h^0(\mathcal{O}_X(2d - c_1 + \mathcal{K}_X)).$$

Zusammengefaßt kann man die Dimensionen der Kohomologiegruppen von $\mathcal{E}nd(E)$ aus der langen exakten Sequenz für $\mathcal{H}om(E, \xi_E)$ endgültig bestimmen. Es sind die folgenden Resultate für den Fall $I_Y \neq \mathcal{O}_X$:

$$\begin{aligned}
h^0(\mathcal{E}nd(E)) &= h^0(\mathcal{O}_X(2d - c_1)) + 1, \\
h^1(\mathcal{E}nd(E)) &= h^1(E(d - c_1)) + h^1(E(-d) \otimes I_Y) \\
&= h^1(\mathcal{O}_X(2d - c_1)) + h^1(\mathcal{O}_X(c_1 - 2d)) + 4h^0(X, \mathcal{O}_Y) - 1 \\
h^2(\mathcal{E}nd(E)) &= h^2(E(-d) \otimes I_Y) = h^0(\mathcal{O}_X(2d - c_1 + \mathcal{K}_X)).
\end{aligned}$$

Im Fall $I_Y = \mathcal{O}_X$ mit $\operatorname{Ext}^1(\mathcal{O}_X(c_1 - d), \mathcal{O}_X(d)) \cong h^1(\mathcal{O}_X(2d - c_1)) \neq 0$ unterscheidet man zwischen der trivialen Extension und den nichttrivialen Extensionen.

Bemerkung 1.3.3. Auf $X = \mathbf{P}_k^1 \times \mathbf{P}_k^1$ oder $\mathbf{P}_k^2$ ist $h^1(\mathcal{O}_X(2d - c_1))$ stets gleich 0. Auf $X = X_e$ mit $e > 0$ ist $h^1(\mathcal{O}_X(2d - c_1)) = 0$, wenn $2d_2 - c_{12} \geq (2d_1 - c_{11})e$ ist. (Proposition 1.3.1)

Für $h^1(\mathcal{O}_X(2d - c_1)) \neq 0$ ist entweder $E \cong \mathcal{O}_X(d) \oplus \mathcal{O}_X(c_1 - d)$ oder

$$E \not\cong \mathcal{O}_X(d) \oplus \mathcal{O}_X(c_1 - d).$$

Falls $E \cong \mathcal{O}_X(d) \oplus \mathcal{O}_X(c_1 - d)$ ist, ist

$$\mathcal{E}nd(E) \cong \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X(c_1 - 2d) \oplus \mathcal{O}_X(2d - c_1) \oplus \mathcal{O}_X.$$

Also sind

$$\begin{aligned}
&h^0(\mathcal{E}nd(E)) = 2 + h^0(\mathcal{O}_X(2d - c_1)),\\
&h^1(\mathcal{E}nd(E)) = h^1(\mathcal{O}_X(2d - c_1)) + h^1(\mathcal{O}_X(c_1 - 2d))\\
&\text{und } h^2(\mathcal{E}nd(E)) = h^2(\mathcal{O}_X(c_1 - 2d)) = h^0(\mathcal{O}_X(2d - c_1 + \mathcal{K}_X)).
\end{aligned}$$

Für $E \not\cong \mathcal{O}_X(d) \oplus \mathcal{O}_X(c_1 - d))$ gelten wegen der langen exakten Sequenz für $\mathcal{H}om(E, \xi_E)$ die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
h^0(\mathcal{E}nd(E)) &= h^0(E^\vee \otimes E) = h^0(E(d - c_1)) + 1\\
h^1(\mathcal{E}nd(E)) &= h^1(E^\vee \otimes E) = h^1(E(d - c_1)) + h^1(E(-d))\\
&= h^1(E(d - c_1)) + h^1(\mathcal{O}_X(c_1 - 2d))\\
h^2(\mathcal{E}nd(E)) &= h^2(E(-d)) = h^2(\mathcal{O}_X(c_1 - 2d)) = h^0(\mathcal{O}_X(2d - c_1 + \mathcal{K}_X)).
\end{aligned}$$

Aus $\xi_E \otimes \mathcal{O}_X(d - c_1)$ folgt nun

$$h^0(\mathcal{O}_X(2d - c_1)) \leq h^0(E(d - c_1)) \leq h^0(\mathcal{O}_X(2d - c_1)) + 1.$$

Entsprechend ist $h^1(\mathcal{O}_X(2d - c_1)) - 1 \leq h^1(E(d - c_1)) \leq h^1(\mathcal{O}_X(2d - c_1))$. Insgesamt haben wir die folgende

Proposition 1.3.4. *Sei E ein 2-Bündel vom Typ d auf $X = X_e$ oder $\mathbf{P}_k^2$ mit $d^2 - dc_1 + c_2 > 0$. Dann gelten die folgenden Aussagen*:

$$\begin{aligned}
&h^0(\mathcal{E}nd(E)) = h^0(\mathcal{O}_X(2d - c_1)) + 1\\
&h^1(\mathcal{E}nd(E)) = h^1(\mathcal{O}_X(2d - c_1)) + h^1(\mathcal{O}_X(c_1 - 2d)) + 4(d^2 - dc_1 + c_2) - 1\\
&h^2(\mathcal{E}nd(E)) = h^2(\mathcal{O}_X(2d - c_1 + \mathcal{K}_X)).
\end{aligned}$$

Sei E ein 2-Bündel vom Typ d auf $X \cong X_e$ oder $\mathbf{P}_k^2$ mit $d^2 - dc_1 + c_2 = 0$ und $h^1(\mathcal{O}_X(2d - c_1)) = 0$ oder $E \cong \mathcal{O}_X(d) \oplus \mathcal{O}_X(c_1 - d)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&h^0(\mathcal{E}nd(E)) = 2 + h^0(\mathcal{O}_X(2d - c_1)) + h^0(\mathcal{O}_X(c_1 - 2d))\\
&h^1(\mathcal{E}nd(E)) = h^1(\mathcal{O}_X(2d - c_1)) + h^1(\mathcal{O}_X(c_1 - 2d))\\
&h^2(\mathcal{E}nd(E)) = h^0(\mathcal{O}_X(2d - c_1 + \mathcal{K}_X)).
\end{aligned}$$

Sei E ein 2-Bündel vom Typ d auf $X = X_e$ $(e > 0)$ mit $d^2 - dc_1 + c_2 = 0$,

$$h^1(\mathcal{O}_X(2d - c_1)) \neq 0 \text{ und } E \not\cong \mathcal{O}_X(d) \oplus \mathcal{O}_X(c_1 - d).$$

Dann gelten die folgenden Ungleichungen

$$h^0(\mathcal{O}_X(2d - c_1)) \leq h^0(\mathcal{E}nd(E) \leq h^0(\mathcal{O}_X(2d - c_1)) + 1$$

$$h^1(\mathcal{O}_X(2d - c_1)) - 1 \leq h^1(\mathcal{E}nd(E)) \leq h^1(\mathcal{O}_X(2d - c_1))$$

und die Gleichung

$$h^2(\mathcal{E}nd(E)) = h^0(\mathcal{O}_X(2d - c_1 + \mathcal{K}_X)).$$

1.4. Die universelle Eigenschaft von $\mathrm{M}(d)$ für $X = X_e$ oder $\mathbf{P}_k^2$

Definition 1.4.1. Sei $\mathcal{E}$ eine lokalfreie Garbe vom Rang 2 auf X_T. $\mathcal{E}$ heißt Bündel vom reinen Typ d genau dann, wenn $R^2 P_{T*}\mathcal{E}^\vee(d + \mathcal{K}_X)$ lokalfrei vom Rang 1 ist, wobei T k-Schema von endlichem Typ ist.

Lemma 1.4.2. *Sei $\mathcal{E}/T$ eine Familie von Vektorbündeln vom Rang* 2 *auf X_T. $\mathcal{E}$ ist vom reinen Typ d genau dann, wenn $P_{T*}\mathcal{E}(-d)$ lokalfrei vom Rang* 1 *und der Basiswechsel auf T gilt.*

Beweis.: Es folgt aus dem Satz über die relative Dualität, funktoriell in N:

$$D^0 : P_{T*}(\mathcal{E}(-d) \otimes P_T^* N) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om(R^2 P_{T*}(\mathcal{E}^\vee(d + \mathcal{K}_X), N)$$

ist ein Isomorphismus für jede quasi-kohärente Garbe N auf T ([K1] Satz 21).

Proposition 1.4.3. *Sei $A \to B$ ein lokaler Ringhomomorphismus von lokalen noetherschen Ringen. Sei k der Restklassenkörper von A, und sei M ein B-Modul von endlichem Typ. Wenn $(f_i)_{1 \leq i \leq r}$ eine Folge von Elementen des maximalen Ideals von B und $(g_i)_{1 \leq i \leq r}$ ihr Bild in $B \otimes_A k$ ist, dann sind die folgende Aussagen äquivalent*:

(a) *Die Folge $(g_i)_{1 \leq i \leq r}$ ist $M \otimes_A k$-regulär und M ist A-platt.*

(b) *Die Folge $(f_i)_{1 \leq i \leq r}$ ist M-regulär, und $M / \sum_{i=1}^r f_i M$ ist A-platt. ([BS] Chap.* 5 *Prop.* 1.9 *s.* 167*)*

Lemma 1.4.4. *Sei $\mathcal{E}/T$ vom reinen Typ d, dann ist der natürliche Garbenhomomorphismus $P_T^* P_{T*}(\mathcal{E}(-d)) \to \mathcal{E}(-d)$ injektiv.*

Beweis.: Sei t ein k-Punkt von T. $P_T^* P_{T*}(\mathcal{E}(-d) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{E}(-d)$
Aus dem kartesischen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X = X \times \{t\} & \xrightarrow{\mathrm{id} \times j} & X \times T \\ {\scriptstyle P_t}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle P_T} \\ \{t\} & \xrightarrow{j} & T \end{array}$$

erhält man das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
(\mathrm{id}\times j)^* P_T^* P_{T*}(\mathscr{E}(-d)) & \xrightarrow{\mathrm{eval}\,\varphi_t} & \mathscr{E}_t(-d) \\
\| & & \| \\
P_t^* j^* P_{T*}(\mathscr{E}(-d)) & \xrightarrow{\mathrm{eval}\,\varphi_t} & \mathscr{E}_t(-d) \\
\text{Basiswechsel}\ \| & & \| \\
H^0(\mathscr{E}_t(-d))\otimes \mathscr{O}_X & \xrightarrow{\mathrm{eval}\,\varphi_t} & \mathscr{E}_t(-d).
\end{array}$$

eval φ_t entspricht einem Schnitt von $\mathscr{E}_t(-d)$, der nur in Kodimension 2 verschwindet. Also ist eval φ_t injektiv. Es folgt nach der obigen Proposition 1.4.3, daß φ_y für $y \in X \times \{t\}$ injektiv ist. Da P_T eigentlich ist, bilden alle k-Punkte von X_T nach k-Punkte von T ab. Da mit T auch X_T k-Schema von endlichem Typ ist, sind k-Punkte (abgeschlossene Punkte) von X_T dicht in X_T. Daraus folgt die Behauptung.

Im folgenden werden wir zeigen, daß jede Familie von 2-Bündeln $\mathscr{E}/T$ vom reinen Typ d einen Morphismus von T nach $\mathrm{M}(d)$ liefert. $\mathscr{L} := P_{T*}(\mathscr{E}(-d))$ ist nach Definition von $\mathscr{E}/T$ lokalfrei vom Rang 1 und der Basiswechselsatz gilt auf T. Sei $\cup_i U_i = T$ eine offene affine Überdeckung von T mit $\mathscr{L}|_{U_i} \cong \mathscr{O}_T|_{U_i}$

$$\begin{array}{l}
\text{Da } 0 \longrightarrow (\mathrm{id}\times j)^* P_T^* \mathscr{L} \xrightarrow{\mathrm{eval}\,\varphi_t} \mathscr{E}_t(-d) \longrightarrow I_{Y_t}(c_1 - 2d) \longrightarrow 0 \\
\qquad\qquad\qquad \| \\
\qquad\qquad\qquad \mathscr{O}_X
\end{array}$$

exakt ist mit einem 0-dimensionalen Unterschema Y_t von $\{X\}\times\{t\}$, induziert $0 \to \mathscr{O}_{X_{U_i}} \cong P_T^*\mathscr{L}|_{U_i} \xrightarrow{s_i} \mathscr{E}(-d)|_{U_i} \to Q_i \to 0$ einen Isomorphismus $Q_i \cong \mathscr{J}_{s_i} \otimes \det \mathscr{E}(-d)|_{U_i}$, wobei $\mathscr{J}_{s_i}$ die Idealgarbe des Nullstellengebildes ist, das zu dem Schnitt s_i gehört (Proposition 1.4.3). Sei $\mathbf{H}$ das Hilbertschema $\mathbf{H}_p$ mit $p = d^2 - dc_1 + c_2 > 0$ wie in Lemma 1.1.6 definiert. Dann existiert ein Morphismus $\psi_i : U_i \to \mathbf{H}$ mit $(\mathrm{id}\times\psi_i)^*\mathscr{J} \cong \mathscr{J}_{s_i}$, wobei $\mathscr{J}$ die universelle Idealgarbe von $\mathbf{H}$ ist. $\mathscr{J}_{s_i}$ ist platt über U_i.

Lemma 1.4.5. *Für die relative $\mathscr{E}xt$-Garbe $\mathscr{E}xt^1_{P_{U_i}}(\mathscr{J}_{s_i} \otimes \det\mathscr{E}(-d)|_{U_i}, \mathscr{O}_{X_{U_i}})$ gilt der Basiswechselsatz.*

Beweis.: Es braucht nur für jeden k-Punkt $t \in U_i \mathscr{E}xt^2_{P_{U_i}}(\mathscr{J}_{s_i} \otimes \det\mathscr{E}(-d), \mathscr{O}_{X_{U_i}})_t = 0$ gezeigt zu werden.

$0 \to \mathscr{O}_X \to \mathscr{E}_t(-d) \to \mathscr{J}_{s_{i_t}}(c_1 - 2d) \to 0$ induziert eine lange exakte Sequenz

$$\begin{aligned}
: 0 &\to \mathrm{Hom}(\mathscr{J}_{s_{i_t}}(c_1 - 2d), \mathscr{O}_X) \to \mathrm{Hom}(\mathscr{E}_t(-d), \mathscr{O}_X) \to \mathrm{Hom}(\mathscr{O}_X, \mathscr{O}_X) \\
&\to \mathrm{Ext}^1(\mathscr{J}_{s_{i_t}}(c_1 - 2d), \mathscr{O}_X) \to \mathrm{Ext}^1(\mathscr{E}_t(-d), \mathscr{O}_X) \to \mathrm{Ext}^1(\mathscr{O}_X, \mathscr{O}_X) \\
&\to \mathrm{Ext}^2(\mathscr{J}_{s_{i_t}}(c_1 - 2d), \mathscr{O}_X) \to \mathrm{Ext}^2(\mathscr{E}_t(-d), \mathscr{O}_X) \to \cdots.
\end{aligned}$$

Da $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) = H^1(\mathcal{O}_X) = 0$ und $\mathrm{Ext}^2(E(-d), \mathcal{O}_X) = H^0(E(-d + \mathcal{K}_X)) = 0$ ist, ist $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{J}_{s_{it}}(c_1 - 2d), \mathcal{O}_X) = 0$.

$$\mathcal{E}xt^2_{P_{U_i}}(\mathcal{J}_{s_i} \otimes \det \mathcal{E}(-d)|_{U_i}, \mathcal{O}_{X_{U_i}})_t \to \mathrm{Ext}^2(\mathcal{J}_{s_{it}}(c_1 - 2d), \mathcal{O}_{X_t}) = 0$$

ist surjektiv. Damit ist nach Satz 1.1.8

$$\mathcal{E}xt^2(\mathcal{J}_{s_i} \otimes \det \mathcal{E}(-d), \mathcal{O}_{X_{U_i}})_t \otimes_{T,t} \mathcal{O}_{T,t}/m_t \cong \mathrm{Ext}^2_{X_t}(\mathcal{J}_{s_i t}(c_1 - 2d), \mathcal{O}_{X_t}) = 0.$$

Da $\mathcal{E}xt^2_{P_{U_i}}(\mathcal{J}_{s_i} \otimes \det \mathcal{E}(-d)|_{U_i}, \mathcal{O}_{X_{U_i}})$ kohärent ist, ist $\mathcal{E}xt^2_{P_{U_i}}(\mathcal{J}_{s_i} \otimes \det \mathcal{E}(-d)|_{U_i}, \mathcal{O}_{X_{U_i}})_t$ nach dem Lemma von Nakayama gleich 0. Da T k-Schema von endlichem Typ ist, sind die abgeschlossene Punkte dicht in T. Also für $t \in U_i$ gilt der Basiswechselsatz.

Bezeichnen wir mit ξ die Standardextension:

$$0 \to P_T^* \mathcal{L} \to \mathcal{E}(-d) \to Q \to 0.$$

$\xi_i := \xi|_{X_{U_i}}$ Selbstverständlich ist $\xi_i|_{X_{U_i \cap U_j}} = \xi_j|_{X_{U_i \cap U_j}}$. Es gilt $Q_i = Q|_{X_{U_i}} \cong \mathcal{J}_{s_i} \otimes \det \mathcal{E}(-d)|_{X_{U_i}}$. Wie im Abschnitt 1 liefert die niedere Termsequenz einen Isomorphismus

$$\mathrm{Ext}^1_{X_{U_i}}(\mathcal{J}_{s_i} \otimes \det \mathcal{E}(-d)|_{U_i}, \mathcal{O}_{X_{U_i}}) \cong H^0(U_i, \mathcal{E}xt^1_{P_{U_i}}(\mathcal{J}_{s_i} \otimes \det \mathcal{E}(-d)|_{U_i}, \mathcal{O}_{X_{U_i}})).$$

Die mittels s_i konstruierte Extension ξ_i liefert ein Element aus

$$\mathrm{Ext}^1_{X_{U_i}}(\mathcal{J}_{s_i} \otimes \det \mathcal{E}(-d)|_{U_i}, \mathcal{O}_{X_{U_i}}),$$

also aus $H^0(U_i, \mathcal{E}xt^1_{P_{U_i}}(\mathcal{J}_{s_i} \otimes \det \mathcal{E}(-d)|_{U_i}, \mathcal{O}_{X_{U_i}}))$. Das ξ_i entsprechende Element $\sigma_i \in H^0(U_i, \mathcal{E}xt^1_{P_{U_i}}(\mathcal{J}_{s_i} \otimes \det \mathcal{E}(-d)|_{U_i}, \mathcal{O}_{X_{U_i}})$ ist nullstellenfrei, da die Einschränkung auf jeder Faser ein Bündel, also ein nicht spaltendes Element aus $\mathrm{Ext}^1_{X_t}(\mathcal{J}_{s_{it}}(c_1 - 2d), \mathcal{O}_{X_t})$ für alle k-Punkte $t \in U_i$ liefert und der Basiswechselsatz gilt (Satz 1.1.7; Lemma 1.3.5). Wenn U_i klein genug ist, dann ist $\det \mathcal{E}(-d)|_{U_i} \cong P_X^* \mathcal{O}_X(c_1 - 2d)$ nach dem folgenden

Lemma 1.4.6. *Sei $\mathcal{F}$ eine lokalfreie Garbe vom Rang* 1 *auf $X \times T$ mit $\mathcal{F}_t \cong \mathcal{O}_X$ für alle k-Punkte $t \in T$. Dann existiert es eine offene überdeckung $U_i \subset T$ mit $\mathcal{F}|_{U_i} \cong P_X^* \mathcal{O}_X|_{U_i}$.*

Beweis.: Betrachten wir das folgende kartesische Diagramm.

$$\begin{array}{ccc} X \times \{t\} & \xrightarrow{\mathrm{id} \times j} & X \times T \\ {\scriptstyle P_t}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle P_T} \\ \{t\} & \xrightarrow{j} & T \end{array}$$

Nach Voraussetzung gilt der Basiswechselsatz für alle $t \in T$ und es existiert eine offene Umgebung V von t, so daß $P_{T*}\mathcal{F}|_V \cong \mathcal{O}_T|_V$ ist. Es sei der natürliche

Garbenhomomorphismus $\varphi : P^* P_{T*}\mathcal{F}|_{P_T^{-1}V} \to \mathcal{F}|_{P_T^{-1}V}$.

$$\begin{array}{ccc}
(\mathrm{id}\times j)^* P_T^* P_{T*}\mathcal{F}|_V & \xrightarrow{\mathrm{eval}\,\varphi_t} & (\mathrm{id}\times j)^*\mathcal{F}|_V \\
\| & & \| \\
P_t^*(j^* P_{T*}\mathcal{F}|_{P_T^{-1}V}) & \xrightarrow{\mathrm{eval}\,\varphi_t} & \mathcal{F}_t \\
\| & & \| \\
H^0(X,\mathcal{F}_t)\otimes \mathcal{O}_X & \xrightarrow{\mathrm{eval}\,\varphi_t} & \mathcal{O}_X
\end{array}$$

Da $h^0(X,\mathcal{F}_{t'}) = 1$ für alle $t' \in V$ ist, ist eval $\varphi_{t'}$ ein Isomorphismus. φ ist ein Isomorphismus, da X_T k-Schema von endlichem Typ.

Also können wir zusätzlich annehmem, daß $\det \mathcal{E}(-d)|_{U_i} \cong P_T^*\mathcal{O}_X(c_1 - 2d)$ ist.

$$\begin{array}{ccc}
X_{U_i} & \xrightarrow{\mathrm{id}\times\psi_i} & X_{\mathbf{H}} \\
{\scriptstyle p_{U_i}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_{\mathbf{H}}} \\
U_i & \xrightarrow{\psi_i} & \mathbf{H}
\end{array}$$

Für $\mathbf{H}$ gilt der Basiswechselsatz. Also

$$\psi_i^* \mathcal{E}xt^1_{p_H}(\mathcal{J}_Z(c_1-2d),\mathcal{O}_{X_H}) \cong \mathcal{E}xt^1_{p_{U_i}}(\mathcal{J}_{s_i}(c_1-2d),\mathcal{O}_{X_{U_i}}).$$

Sei $\rho_i \in H^0(U_i, \psi_i^* \mathcal{E}xt^1_{p_H}(\mathcal{J}_Z(c_1-2d),\mathcal{O}_{X_H})$ das zu σ_i entsprechende Element. Dieser nullstellenfreie Schnitt ρ_i definiert einen surjektiven Garbenhomomorphismus:

$$\psi_i^* \mathcal{E}xt^1_{p_H}(\mathcal{J}_Z(c_1-2d),\mathcal{O}_{X_H})^\vee \xrightarrow{\rho_i^\vee} \mathcal{O}_{U_i} \longrightarrow 0.$$

Also existiert es ein $\mathbf{H}$-Morphismus φ_i

$$\begin{array}{ccc}
 & & \mathbf{P}(\mathcal{E}xt^1_{p_H}(\mathcal{J}_Z(c_1-2d),\mathcal{O}_{X_H})^\vee) := \mathbf{P} \\
 & \overset{\varphi_i}{\nearrow} & \downarrow \\
U_i & \xrightarrow{\psi_i} & \mathbf{H}
\end{array}$$

Da $\varphi_i|_{U_i\cap U_j} = \varphi_j|_{U_i\cap U_j}$ und $\psi_i|_{U_i\cap U_j} = \psi_j|_{U_i\cap U_j}$ sind, verkleben sich die lokalen Morphismen zu einem globalen $\mathbf{H}$-Morphismus

$$\begin{array}{ccc}
 & & \mathbf{P}(\mathcal{E}xt^1_{p_H}(\mathcal{J}_Z(c_1-2d),\mathcal{O}_{X_H})^\vee) := \mathbf{P} \\
 & \overset{\varphi}{\nearrow} & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\
T & \xrightarrow{\psi_i} & \mathbf{H}.
\end{array}$$

Es ist klar, daß φ durch $\mathrm{M}(d)$ faktorisiert (vgl. Prop. 1.1.10).

Es gilt die folgende

Proposition 1.4.7. *Sei $\mathscr{E}$ eine Familie von 2-Bündeln von reinem Typ d mit $d^2 - dc_1 + c_2 > 0$ auf $X \times T$. Dann existiert ein Morphismus $\varphi : T \to \mathrm{M}(d)$, so daß jeder Punkt $t \in T$ auf den $\mathscr{E}|_t$ entsprechenden Punkt in $\mathrm{M}(d)$ abgebildet wird.*

Korollar 1.4.8. *Sei die Voraussetzung wie in Proposition* 1.4.7. *Es existiert für $t \in T$ eine offene Umgebung W von $\varphi(t)$, so daß $\mathscr{E}|_{\varphi^{-1}(W)} \cong (\mathrm{id} \times \varphi)^* \mathscr{F}$ ist, wobei $\mathscr{F}$ eine lokale Familie über W ist.*

Beweis.: Seien $t \in U_j$ und $\varphi(t) \in \mathbf{P} := \mathbf{P}(\mathscr{E}xt^1_{P_H}(\mathscr{I}_Z(c_1 - 2d), \mathcal{O}_{X_H})^\vee)$, wobei U_j und $\mathbf{P}$ wie oben von Proposition 1.4.7 gemeint ist. Sei W eine offene Umgebung von $\varphi_j(t)$, so daß über $X \times W$ ein 2-Bündel $\mathscr{F}$ wie im Beweis von Proposition 1.1.10 existiert. Dann gilt $(\mathrm{id} \times \varphi_j)^* \mathscr{F}_y = \mathscr{E}_y$ für jeden $y \in V := \varphi_j^{-1}(W)$. Es gilt

$$H^0(X_V, \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_{X_V}}(\mathscr{E}|_{X_V}, (\mathrm{id} \times \varphi_j)^* \mathscr{F})) \cong H^0(V, P_{V*}\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_{X_V}}(\mathscr{E}|_{X_V}, (\mathrm{id} \times \varphi_j)^* \mathscr{F})),$$

wobei $(\mathrm{id} \times \varphi_j)$ auf X_V beschränkt ist.

Da $\mathbf{P}$ mit $\mathbf{H}$ reduziert und $H^0(X_y, \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_{X_y}}(\mathscr{E}|_{X_y}, (\mathrm{id} \times \varphi_j)^* \mathscr{F}|_{X_y}))$ für alle $y \in V$ konstant ist, gilt der Basiswechselsatz auf V. Nach Satz 1.1.8 ist $P_{V*}\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_{X_V}}(\mathscr{E}|_{X_V}, (\mathrm{id} \times \varphi_j)^* \mathscr{F})$ lokalfrei. Da $\mathscr{E}|_{X \times \{t\}}$ und $(\mathrm{id} \times \varphi_j)^* \mathscr{F}|_{X \times \{t\}}$ isomorph ist, gibt es eine offene Menge $\tilde{V} \subset V$, die diesen Isomorphismus liefert, d.h. ein Schnitt

$$s \in H^0(\tilde{V}, P_{\tilde{V}*}(\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_{X_{\tilde{V}}}}(\mathscr{E}|_{X_{\tilde{V}}}, (\mathrm{id} \times \varphi_j)^* \mathscr{F}|_{X_{\tilde{V}}}))) \text{ mit } \det(s) \neq 0.$$

Daraus folgt die Behauptung.

Bezeichnen wir mit $\mathscr{B}(d)$ den kontravarianten Funktor:

$$\mathscr{B}(d)(T) = \{\text{2-Bündeln } \mathscr{E} \text{ von reinem Typ } d \text{ auf } X \times T\}/\sim,$$

wobei T k-Schema von endlichem Typ ist und $\mathscr{E}_1 \sim \mathscr{E}_2$ genau dann gilt, wenn $\mathscr{E}_1 \cong \mathscr{E}_2 \otimes P_T^* \mathscr{L}$ mit einem Geradenbündel $\mathscr{L}$ auf T.

Für $X = X_e$ oder $\mathbf{P}^2_k$ mit $d^2 - dc_1 + c_2 \neq 0$ gibt es nach Proposition 1.4.7 eine natürliche Transformation $\tau : \mathscr{B}(d)(T) \to \mathrm{Hom}(T, \mathrm{M}(d))$ mit $\mathscr{B}(d)(\mathrm{Spec}\, k) \cong \mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}\, k, \mathrm{M}(d))$. Ist $d^2 - dc_1 + c_2 = 0$ und $h^1(\mathcal{O}_X(2d - c_1)) = 0$, so ist $\mathrm{M}(d) = \varnothing$ und $\mathscr{B}(d)(k) = \{[\mathcal{O}_X(d) \oplus \mathcal{O}_X(c_1 - d)]\} = \mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}\, k, B(d))$, wobei $B(d)$ ein Punkt ist.

Sei $\psi : \mathscr{B}(d) \to \mathrm{Hom}(-, N)$ eine andere natürliche Transformation durch einen k-Schema N. Da lokal auf $\mathrm{M}(d)$ nach dem Beweis von Proposition 1.1.10 eine universelle Familie 2-Bündeln existiert, existiert ein Morphismus $\varphi : \mathrm{M}(d) \to N$. Sei T ein beliebiges k-Schema von endlichem Typ und $\xi \in \mathscr{B}(d)(T)$. Nach Korollar 1.4.8 existiert eine offene Überdeckung T_i von T mit $\xi|_{T_i} = g_i^*(\mathscr{F}_i)$, wobei $g = \tau(\xi) \in \mathrm{Hom}(T, \mathrm{M}(d))$ mit $g_i := g|_{T_i} \to \mathrm{M}(d)$; und $\mathscr{F}_i$ die zu T_i entsprechende lokale Familie von 2-Bündeln auf $\mathrm{M}(d)$ ist.

$$\psi(\xi)|_{T_i} = \psi(\xi|_{T_i}) = \psi(g_i^*(\mathscr{F}_i)) = \psi(\mathscr{F}_i) \circ g_i = \psi \circ \tau(\xi|_{T_i})$$

Daraus folgt, daß $\psi(\xi) = \psi \circ \tau(\xi)$. Es gilt der folgende

Satz 1.4.9. *Sei $X = X_e$ oder $\mathbf{P}^2_k$. Für $d^2 - dc_1 + c_2 > 0$ ist* $\mathrm{M}(d)$ *eine irreduzible, glatte, quasiprojektive und rationale Varietät mit*

$$\dim \mathrm{M}(d) = 3(d^2 - dc_1 + c_2) + h^1(\mathcal{O}_X(2d - c_1)) - 1.$$

Außerdem ist $\mathrm{M}(d)$ *ein grober Modulraum für den Funktor $\mathscr{B}(d)$. Für $d^2 - dc_1 + c_2 = 0$ mit $h^1(\mathcal{O}_X(2d - c_1)) = 0$ ist $B(d) \cong \operatorname{Spec} k$. Zur Vereinfachung schreiben wir im folgenden stets $\mathrm{M}(d)$ statt $B(d)$. Für $d^2 - dc_1 + c_2 = 0$ mit $h^1(\mathcal{O}_X(2d - c_1)) \neq 0$ gibt es kein groben Modulraum für den Funktor aber eine vollständige Familie auf $X \times V$, wobei $V = H^1(\mathcal{O}_X(2d - c_1))$.*

Beweis.: $\mathbf{H}_{d^2 - dc_1 + c_2}$ mit $d^2 - dc_1 + c_2 > 0$ ist eine glatte irreduzible projektive Varietät von Dimension $2(d^2 - dc_1 + c_2)$ (Man siehe [Fo]). Mit Kapitel 2 Prop. 7.10 von [Ha] folgt die erste Behauptung. Die beiden anderen sind klar.

Korollar 1.4.10. *Sei* $\mathrm{M}(d)$ *ein grober Modulraum. Der Tangentialraum an dem Punkt $x \in \mathrm{M}(d)$, der die Isomorphieklasse des Bündels E repräsentiert, identifiziert sich mit dem Kern der kanonischen Abbildung*

$$\mathrm{Ext}^1(E, E) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_X(d), I_Y(c_1 - d)).$$

Beweis.: Es braucht nur der Fall $d^2 - dc_1 + c_2 > 0$ behandelt zu werden. Sei $x \in \mathrm{M}(d)$ der Punkt, der die Klasse $\{E\}$ repräsentiert. Dann identifiziert sich der Tangentialraum an $x \in \mathrm{M}(d)$ mit der möglichen k-Morphismen von $T = \mathrm{Spec}(k[\varepsilon])$ $(\varepsilon^2 = 0)$ nach $\mathrm{M}(d)$ an dem Punkt x. Sei θ ein solcher k-Morphismus. Dann liefert dieses θ nach dem Beweis von Proposition 1.1.10 eine exakte Sequenz

$$0 \to \mathcal{O}_{X_T}(d) \to E_0 \to I_{\tilde{Y}}(c_1 - d) \to 0.$$

E_0 entspricht einem Element in $\mathrm{Ext}^1(E, E)$, wobei $\mathrm{Ext}^1(E, E) \cong H^1(E^\vee \otimes E)$ gerade der Raum der Isomorphieklasse von 2-Bündeln E_0 auf X_T mit $E_0|_X \cong E$ ist. Nach Lemma 6.6 von [Mar2] existiert eine lokale Liftung auf X_T von der zu E gehörigen Standardextension

$$\xi_E : 0 \to \mathcal{O}_X(d) \to E \to I_Y(c_1 - d) \to 0.$$

Also liefert für $E_0 \in \mathrm{Ext}^1(E, E)$ nach Korollar 5.2 von [Gr] ein Element

$$c(E_0) \in \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_X(d), I_Y(c_1 - d)) \cong H^1(X, \mathscr{H}om(\mathcal{O}_X(d), I_Y(c_1 - d))),$$

das das Hindernis zur Existenz einer globalen Liftung von ξ_E auf X_T mit E_0 als Mittelterm darstellt, d.h. solch eine globale Liftung existiert genau dann, wenn $c(E_0) = 0$ ist. Umgekehrt liefert eine solche globale Liftung einen k-Morphismus θ, da $\mathrm{M}(d)$ ein grober Modulraum ist.

Kapitel 2. Deformation von Vektorbündeln vom Rang 2 auf $X = X_e$ oder $\mathbf{P}_k^2$

2.1. Quotschema von 2-Bündeln vom Typ $d \leq \bar{d}$

Der Begriff der Stabilität soll folgendermaßen definiert werden.

Definition 2.1.1. Sei E ein 2-Bündel auf $X = X_e$ oder $\mathbf{P}_k^n \times \mathbf{P}_k^m$. E heißt stabil genau dann, wenn $H^0(X, E_{norm}) = 0$ ist. Entsprechend heißt E instabil, wenn $H^0(X, E_{norm}) \neq 0$ ist.

Sei jetzt stets E normiert, d.h. $c_1(E) = (c_{11}, c_{12})$ mit c_{11}, $c_{12} \in \{-1, 0\}$ für $X = X_e$ oder $\mathbf{P}_k^n \times \mathbf{P}_k^m$ mit $n \geq 1$, $m \geq 1$; $c_1(E) \in \{-1, 0\}$ für $X = \mathbf{P}_k^n$ mit $n > 1$.

Der Typ $d(E)$ für ein stabiles normiertes 2-Bündel E bezeichnen wir $d(E) = -1$ für $X = \mathbf{P}_k^n$; $d(E) = (-1, 0)$ für $X = X_e$ oder $\mathbf{P}_k^n \times \mathbf{P}_k^m$ mit $n \geq 1$, $m \geq 1$.

Der Begriff des stabilen 2-Bündels auf $\mathbf{P}_k^n$ fällt mit dem von Takemoto-Mumford zusammen. $d = (d_1, d_2) \geq j = (j_1, j_2)$ bedeutet, daß $d_1 \geq j_1$, $d_2 \geq j_2$ ist.

Wenn zusätzlich noch $d_1 > j_1$ oder $d_2 > j_2$ ist, dann heißt $d = (d_1, d_2) > j = (j_1, j_2)$. Nach der Berechnung von Kapitel 1 Abs.3 ist

$$H^0(X_e, \mathcal{O}_{X_e}(a, -b) \oplus \mathcal{O}_{X_e}(-c, d)) = 0,$$

wenn $a, b, c, d \in \mathbf{N}_0$ mit $b, c \neq 0$ ist.

Also ist die Klasse von stabilen 2-Bündeln nicht leer. Analog gilt auch nach der Künnethformel, daß die Klasse von stabilen 2-Bündeln auf $\mathbf{P}_k^n \times \mathbf{P}_k^m$ nicht leer ist. Insbesondere existiert ein nicht spaltendes stabiles 2-Bündel auf X_e mit $e \neq 0$.

Lemma 2.1.2. *Sei E ein stabiles 2-Bündel auf $X = X_e$. Es gelten die folgenden beiden Aussagen*:

Falls $c_1(E) = (0, 0)$ *ist, ist* $c_2(E) \geq 2$.

Falls $c_1(E) = (-1, 0), (0, -1)$ *oder* $(-1, -1)$ *ist, ist* $c_2(E) \geq 1$.

Beweis.: $H^0(E) = H^2(E) \cong H^0(E(-c_1 + \mathcal{K}_X))^\vee = 0$

$$\chi(E) = 2 + \tfrac{1}{2} c_1(E)(c_1(E) - \mathcal{K}_X) - c_2(E) = -h^1(E) \leq 0.$$

Bemerkung 2.1.3. Für stabiles 2-Bündel E auf $\mathbf{P}_k^2$ gilt $c_2(E) \geq 2$ oder 1, wenn $c_1(E) = 0$ bzw. -1 ist.

Lemma 2.1.4. $\pi : X_e \to \mathbf{P}_k^1$. *Sei E ein stabiles 2-Bündel auf X_e mit $c_1(E) = (c_{11}, c_{12})$ und $E|_{f_y} \cong \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^1}(n) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^1}(c_{11} - n)$, wobei f_y die Faser von π über k-Punkt $y \in \mathbf{P}_k^1$ ist.*

Falls $c_1(E) = (0, 0)$ *oder* $(-1, -1)$, *dann ist* $n \leq c_2(E) - 1$.

Falls $c_1(E) = (-1, 0)$ *oder* $(0, -1)$, *dann ist* $n \leq c_2(E)$.

Beweis.:

$$\xi : 0 \to \mathcal{O}_X(-f_y) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_{f_y} \to 0$$

$$\mathcal{O}_X(-f_y) \cong \mathcal{O}_X(0,-1), \mathcal{O}_{f_y} \cong \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1_k}$$

$$E \otimes \xi : 0 \to E(0,-1) \to E \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1_k}(n) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1_k}(c_{11} - n) \to 0$$

Wie im Beweis von Lemma 2.1.2 gezeigt ist $\chi(E) = -h^1(E) \leq 0$. Dann folgt die Behauptung aus der langen exakten Sequenz von $E \otimes \xi$.

Bemerkung 2.1.5. Bekanntlich ist der generische Typ von stabilen 2-Bündeln auf $\mathbf{P}^2_k$ beschränkt. (man siehe ([OS])

Für 2-Bündel E auf $X = X_e$ oder $\mathbf{P}^2_k$ gilt nach dem Satz von Riemann-Roch:

$$\chi(E) = 2 + \tfrac{1}{2} c_1(E)(c_1(E) - \mathscr{K}_X) - c_2(E).$$

Sei $H = (a, b)$ mit $b > ae$, $a > 0$ für $X = X_e$ bzw. $a > 0$, $b > 0$ für $X = \mathbf{P}^n_k \times \mathbf{P}^m_k$ mit $n, m \geq 1$. Dann ist $\mathcal{O}_X(H)$ sehr ample auf $X = X_e$ oder $\mathbf{P}^n_k \times \mathbf{P}^m_k$, wenn $\mathcal{O}_X(H) \cong \mathcal{O}_X(1)$ auf $X = \mathbf{P}^n_k$ vereinbart ist.

Wir benutzen die Begriffe und Ergebnisse, die M. Maruyama in seinen Arbeiten ([Mar1], [Mar3]) gestellt hat. Für beliebigen kohärenten $\mathcal{O}_X$-Modul E bezeichnen wir mit $d(E, \mathcal{O}_X(H))$ den Grad der ersten Chernklasse von E bezüglich $\mathcal{O}_X(H)$ und mit $r(E)$ den Rang von E.

Definition 2.1.6. Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}$ eine Reihe von rationalen Zahlen. Ein torsionsfreier kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul E von Rang r heißt vom Typ $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1})$ bezüglich $\mathcal{O}_X(H)$ genau dann, wenn für beliebigen nicht-trivialen, quotienten $\mathcal{O}_X$-Modul F von E gilt:

$$d(E, \mathcal{O}_X(H))/r(E) - \alpha_s \leq d(F, \mathcal{O}_X(H)),$$

wobei $s = r(F)$ $(1 \leq s \leq r-1)$ ist.

Lemma 2.1.7 ([Mar1] Lemma 1.2). *Ein torsionsfreier kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul E vom Rang r auf X ist vom Typ $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1})$ genau dann, wenn für beliebigen nicht-trivialen $\mathcal{O}_X$-Untermodul G von E gilt*:

$$d(E, \mathcal{O}_X(H)) + (r-s)\alpha_{r-s}/s \geq d(G, \mathcal{O}_X(H))/r(G),$$

wobei $s = r(G)$ $(1 \leq s \leq r-1)$ ist.

Lemma 2.1.8. *Sei $\bar{d}$ vorgegeben. Für alle instabile 2-Bündeln E vom Typ $d \leq \bar{d}$ auf $X = X_e$ oder $\mathbf{P}^n_k \times \mathbf{P}^m_k$ mit festen Chernklassen existiert eine rationale Zahl α, so daß E vom Typ α im Sinne von Maruyama ist.*

Beweis.: Sei G ein nicht-trivialer $\mathcal{O}_X$-Untermodul von E mit $r(G) = 1$, dann ist $(G^\vee)^\vee$ eine lokalfreie Garbe vom Rang 1 (man siehe [OS] s. 154). Es gilt

$$(G^\vee)^\vee \subset (E^\vee)^\vee \cong E.$$

$$c_1(G) := c_1((G^\vee)^\vee).$$

Für instabiles 2-Bündel E vom Typ d gibt es eine Standardextension

$$\xi_E : 0 \to \mathcal{O}_X(d) \to E \to I_Y(c_1 - d) \to 0.$$

Aus ξ_E kann man einsehen, daß $H^0(E(a,b)) = 0$ für $a < -d_1$ oder $b < -d_2$ im Fall $X = X_e$ oder $\mathbf{P}_k^n \times \mathbf{P}_k^m$ mit $mn \neq 0$ bzw. $H^0(E(a)) = 0$ für $a < -d$ im Fall $X = \mathbf{P}_k^n$ ist. Daraus folgt, daß $c_1(G) \leq d$ ist. Für instabile 2-Bündeln E vom Typ $d \leq \bar{d}$ existiert eine gemeinsame Zahl α, so daß E vom Typ α im Sinne vom Maruyama ist.

Proposition 2.1.9. *Zu jedem $\bar{d}$ gibt es ein $\hat{n} \in \mathbf{N}$, so daß für alle 2-Bündeln E mit festen Chernklassen auf $X = X_e$ oder $\mathbf{P}_k^2$ mit $d(E) \leq \bar{d}$ gilt:*

$$H^1(X, E(\hat{n}H)) = H^2(X, E(\hat{n}H)) = 0$$

und $E(\hat{n}H)$ ist global erzeugt.

Beweis.: Für stabile 2-Bündel E mit $c_1(E) = c_1$ auf $X = X_e$ oder $\mathbf{P}_k^2$ gilt

$$H^2(E(nH)) = H^0(E(-nH - c_1 + \mathcal{K}_X))^\vee = 0 \text{ für } n \geq 0.$$

Also ist $\chi(E(nH)) = h^0(E(nH)) - h^1(E(nH))$ für $n \geq 0$. Aus $\chi(E(nH)) > 0$ folgt $H^0(E(nH)) \neq 0$. Da $\chi(E) \leq 0$ ist, existiert eine nur von $c_2(E)$ und H abhängige ganze Zahl $n_0 > 0$, so daß $H^0(E(n_0H)) \neq 0$ ist. Für jedes stabile 2-Bündel E existiert eine ganze Zahl n_E mit $H^0(E(n_EH)) \neq 0$ und $H^0(E((n_E - 1)H)) = 0$. Wir zeigen die Behauptung dieser Proposition nur für $X = X_e$, weil der Beweis für $X = \mathbf{P}_k^2$ genauso läuft. Nach Lemma 1.1.1 und Lemma 2.1.4 braucht man nur eine nur von c_2 abhängige ganze Zahl t, um $H^0(E(n_EH - (t,0))) = 0$ zu erreichen. Es golgt, daß (a,b) mit $H^0(E(a,b)) \neq 0$ und $H^0(E(a-1,b)) = H^0(E(a,b-1)) = 0$ existiert. Solche (a,b) sind für stabile 2-Bündeln auch beschränkt, d.h. a, $b \in [-v, v]$ für ein $v \in \mathbf{N}$. Sei $s \in H^0(E(a,b))$, $s \neq 0$, dann ist $(s)_0$ wie nach dem Beweis von Proposition 1.1.5 von der Kodimension 2. s liefert eine exakte Sequenz

$$\eta : 0 \to \mathcal{O}_X \to E(a,b) \to I_Y(c_1 + 2(a,b)) \to 0,$$

wobei I_Y die Idealgarbe bzgl. s ist.

Aus η sieht man ein, daß $H^0(E(t_1,t_2)) = 0$ für $t_1 < -a$ oder $t_2 < -b$ ist. Sei G ein nicht-trivialer $\mathcal{O}_X$-Untermodul von E mit $r(G) = 1$. Es gilt dann $c_1(G) \leq (a,b)$. Da solche (a,b) für stabile 2-Bündeln unr endlich möglich sind, findet man mit Lemma 2.1.8 dann eine ratinale Zahl α_1, so daß alle 2-Bündeln vom Typ $d \leq \bar{d}$ vom Typ α_1 im Sinne von Maruyama sind. Nach [Mar3] existiert ein algebraisches k-Schema T, so daß alle 2-Bündeln in der Familie $\mathcal{F}$ der torsionsfreien kohärenten Garben vom Rang 2 vom Typ α_1 über X_T sind. Die Menge

$$\tilde{T} := \{t \in T \mid \mathcal{F}_t \text{ ist lokalfrei}\}$$

ist offen in T. Definiert ist $\tilde{\mathcal{F}} := \mathcal{F}|_{\tilde{T}}$. Da $\tilde{T}$ quasikompqakt ist, existiert endliche viele affine k-Schemata $\tilde{T}_j = \operatorname{Spec} A_j$, so daß $\tilde{T} = \cup \tilde{T}_j$ ist. Sei $\varphi : X \to \mathbf{P}_k^N$ die projektionseinbettung bezüglich $\mathcal{O}_X(H)$. Dann ist $\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^N}(1) = \mathcal{O}_X(H)$. Betrachten wir das projektive Schema $X \times \tilde{T}_j$, dann ist $\mathcal{O}_X(H) \cong$

$(\varphi \times \imath_t)^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^N \times \tilde{T}_j}(1)$ für alle k-Punkte $t \in \tilde{T}$, wobei $\imath_t$ die Inklusion von $\{t\}$ nach $\tilde{T}_j$ ist. Es existiert eine ganze Zahl n_j mit $R^i \operatorname{Pr}_{\tilde{T}_j *} \tilde{\mathscr{F}}|_{\tilde{T}_j}(n) = 0$ für alle $n \geq n_j$ und $i = 1, 2$. Da $H^3(\tilde{\mathscr{F}}(nH)|_t) = 0$ für alle $t \in \tilde{T}_j$ ist, gilt dann $H^i(\tilde{\mathscr{F}}(n_j H)|_t) = 0$ für alle $t \in \tilde{T}_j$ und $i = 1, 2$ ([Ha] chap. 3 Theorem 12.11). Es existiert auch eine ganze Zahl l_j, so daß $\tilde{\mathscr{F}}|_{\tilde{T}_j}(l)$ für alle $l \geq l_j$ global erzeugt ist. Damit ist $\tilde{\mathscr{F}}|_t(lH)$ für alle $t \in \tilde{T}_j$ und $l \geq l_j$ global erzeugt ist. Nehmen wir $\hat{n} = \max\{n_j, l_j\}$, dann folgt die Behauptung.

Bemerkung 2.1.10. Analog existiert für alle instabilen 2-Bündeln E mit festen Chernklassen auf $\mathbf{P}_k^n \times \mathbf{P}_k^m$ mit $d(E) \leq \bar{d}$ auch ein $\hat{n} \in \mathbf{N}$, so daß $H^i(E(\hat{n}H)) = 0$ für $i \neq 0$ und $E(\hat{n}H)$ global erzeugbar sind.

Sei $\hat{n} \in \mathbf{N}$ wie in Proposition 2.1.9 gewählt. Sei $V \cong H^0(E(\hat{n}H))$ ein $h^0(E(\hat{n}H))$-dimensionaler k-Vektorraum. Es sei

$$V(-\hat{n}H) := V \otimes_k \mathcal{O}_X(-\hat{n}H), \quad V_T(-\hat{n}H) := V \otimes_k \mathcal{O}_{X_T}(-\hat{n}H)$$

für beliebiges k-Schema T von endlichem Typ.

Bezeichnen wir mit Quot das Grothendiecksche Quotschema der Quotienten $V(-\hat{n}H) \to F$ mit Hilbertpolynom

$$\chi(F(\mu H)) = 2 + (\mu H)^2 + c_1 \mu H - \mathscr{K} \mu H - \tfrac{1}{2} \mathscr{K}_X c_1 - c_2$$

im Fall $X = X_e$ oder $\mathbf{P}_k^2$, wobei c_1, c_2 die von uns betrachteten ersten und zweiten Chernklassen sind. Es sei

$$Q_1 := \{q \in \operatorname{Quot} \mid q : V(-\hat{n}H) \to F,\ F \text{ lokalfrei vom Rang } 2\}$$

Nach Satz 1.1.9 ist Q_1 offen in Quot.

$$Q_2 := \{q \in Q_1 \mid q : V(-\hat{n}H) \to E,\ H^0(E(-\bar{d}_1 - 1, 0)) = H^0(E(0, -\bar{d}_2 - 1)) = 0\}$$

bzgl. $X = X_e$.

bzw. $Q_2 := \{q \in Q_1 \mid q : V(-\hat{n}H) \to E,\ H^0(E(-\bar{d} - 1)) = 0\}$ bzgl. $X = \mathbf{P}_k^2$

$$Q := \{q \in Q_2 \mid q : V(-\hat{n}H) \to E,\ V \cong H^0(E(\hat{n}H))\}$$

Sei K der Kern von $q \otimes \mathcal{O}_X(\hat{n}H)$. Dann existiert eine exakte Sequenz

$$\xi_q : 0 \to K \to V \otimes_k \mathcal{O}_X \to E(\hat{n}H) \to 0.$$

Man betrachte die lange exakte Sequenz für ξ_q:

$$0 \to H^0(K) \to H^0(V \otimes_k \mathcal{O}_X) \to H^0(E(\hat{n}H) \to H^1(K) \to 0 \cdots.$$

Da $V \cong H^0(E(\hat{n}H))$ ist, ist $H^0(K) = H^1(K) = 0$. Es existiert eine universelle exakte Sequenz auf X_Q

$$\vartheta_{X_Q} : 0 \to \mathscr{K} \to V_Q(-\hat{n}H) \to \mathscr{F} \to 0.$$

$$\vartheta_{X_Q}|_{X_q} = \xi_q \text{ mit } \mathscr{K} \otimes \mathcal{O}_{X_Q}(\hat{n}H)|_{X_q} = K \text{ und } \mathscr{F} \otimes \mathcal{O}_{X_Q}(\hat{n}H)|_{X_q} = E$$

Also ist Q offen in Quot. Q heißt das Quotschema für 2-Bündeln auf $X = X_e$ oder $\mathbf{P}_k^2$ mit Typ $\leq \bar{d}$.

Bemerkung 2.1.11. Sei E ein normiertes 2-Bündel auf X_e. Wenn E die Bedingungen:

$$H^0(E(-d_1, 0)) \neq 0, \quad H^0(E(0, -d_2)) \neq 0,$$

$$H^0(E(-d_1 - 1, 0)) = H^0(E(0, -d_2 - 1)) = 0$$

erfüllt, dann ist $d(E) = (d_1, d_2)$.

Von Deformationstheorie haben wir die folgende

Proposition 2.1.12. *Sei $q : 0 \to K \to V(-\hat{n}H) \to F \to 0$ ein abgeschlossener Punkt von Q. $\mathscr{A} := \mathscr{H}om(K, F)$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(i) *Der Tangentialraum $T_{Q,q}$ an dem Punkt $q \in Q$ ist isomorph zu $H^0(\mathscr{A})$*

(ii) $h^0(\mathscr{A}) - h^1(\mathscr{A}) \leq \dim(Q_q) \leq h^0(\mathscr{A})$.

Beweis.: (man siehe [Lau], 4.2.4)

Korollar 2.1.13. *Sei $v := h^0(F(\hat{n}H))$. Dann gilt die folgende Ungleichung:*

$$v^2 - \chi(\mathscr{E}nd\ F) \leq \dim Q_q \leq v^2 - \chi(\mathscr{E}nd\ F) + h^2(\mathscr{E}nd\ F)$$

Q ist glatt im Punkt q genau dann, wenn $h^2(\mathscr{E}nd\ F) = 0$ ist.

Beweis.:

$$\mathscr{H}om(q, F) : 0 \to \mathscr{H}om(F, F) \to \mathscr{H}om(V(-\hat{n}H), F) \to \mathscr{H}om(K, F) \to 0$$

Die lange exakte Sequenz für die obige exakte Sequenz ist

$$0 \to \operatorname{Hom}(F, F) \to H^0(F(\hat{n}H)) \otimes V \to H^0(\mathscr{A}) \to H^1(\mathscr{E}nd\, F)$$

$$\to 0 \to H^1(\mathscr{A}) \to H^2(\mathscr{E}nd\, F) \to 0 \to H^2(\mathscr{A}) \to 0.$$

Daraus folgt $h^2(\mathscr{E}nd\, F) = h^1(\mathscr{A})$, $h^0(\mathscr{A}) = v^2 - h^0(\mathscr{E}nd\, F) + h^1(\mathscr{E}nd\, F)$

$$h^0(\mathscr{A}) - h^1(\mathscr{A}) = v^2 - \chi(\mathscr{E}nd\, F).$$

2.2. Deformation von 2-Bündeln auf $X = X_e$ oder $\mathbf{P}_k^2$

Definition 2.2.1. Sei E ein 2-Bündel mit $d(E) = d$ auf $X = X_e$ oder $\mathbf{P}_k^2$. E heißt in den Typ $v < d$ deformierbar genau dann, wenn ein irreduzibles k-Schema von endlichem Typ T mit einer Familie von 2-Bündeln $\mathscr{F}$ auf $X \times T$ existiert, so daß $t_0, t_1 \in T$ mit $\mathscr{F}_{t_0} \cong E$, $d(\mathscr{F}_{t_1}) = v$ und $v \leq d(\mathscr{F}_t) \leq d\, \forall t \in T$ existieren.

Nach dem Satz von Riemann-Roch gilt

$$\chi(\mathscr{E}nd\, E) = 4 + \tfrac{1}{2} c_1(\mathscr{E}nd\, E)(c_1(\mathscr{E}nd\, E) - \mathscr{K}_X) - c_2(\mathscr{E}nd\, E).$$

$$\mathscr{E}nd\, E \cong E^\vee \otimes E, \quad c_1(E^\vee \otimes E) = 0, \quad c_2(E^\vee \otimes E) = 4c_2(E) - c_1(E)^2$$

Also ist $\chi(\mathscr{E}nd\, E) = 4 - 4c_2(E) + c_1(E)^2$. Sei Q das in Abs.1 definierte Quotschema für 2-Bündel E auf $X = X_e$ oder $\mathbf{P}_k^2$ mit $d(E) \leq \bar{d}$. Betrachten wir die Stratifizierung bzgl. $R^2_{p_Q}{}_*\mathscr{F}^\vee(\bar{d} + \mathscr{K}_X)$ über Q, wobei $\mathscr{F}$ die universelle Familie der 2-Bündel mit Typ $\leq \bar{d}$ über X_Q ist. Bezeichnen wir mit $Q(d)$ das lokalabgeschlossene Schema von Q mit der flachen stratifizierten Struktur, so daß $R^2_{p_Q}{}_*\mathscr{F}^\vee(d + \mathscr{K}_X)$ lokalfrei vom Rang 1 über $Q(d)$ ist. $\mathscr{F}|_{X\times Q(d)}$ ist also von reinem Typ d, d.h. $d(\mathscr{F}_q) = d$ für alle $q \in Q(d)$ und der Basiswechselsatz gilt. Sei $\mathrm{M}(d)$ der grobe Modulraum für instabile 2-Bündel vom Typ d auf $X = X_e$ oder $\mathbf{P}_k^2$, d.h. $d^2 - dc_1 + c_2 > 0$ oder $d^2 - dc_1 + c_2 = 0$ mit $h^1(\mathscr{O}_X(2d - c_1)) = 0$, wobei c_1, c_2 die erste und zweite Chernklassen der betrachteten 2-Bündel sind.

Bemerkung 2.2.2. Bekanntlich ist $\mathrm{M}(-1)$ nicht leer und zwar ein grober Modulraum mit $\dim(\mathrm{M}(-1)) = 4c_2 + c_1 - 3$ für $X = \mathbf{P}_k^2$, wenn $4c_2 + c_1 - 3 \geq 0$.

Es existiert ein Morphismus

$$\varphi(d) : Q(d) \to \mathrm{M}(d)$$

Proposition 2.2.3. *$\varphi(d)$ ist glatt von relativer Dimension $v^2 - h^0(\mathscr{E}nd\, E)$, wobei $E \cong \mathscr{F}_q$ für ein $q \in Q(d)$ und $v = h^0(E(\hat{n}H))$ wie bei der Definition von Q.*

Beweis.: Sei A ein artinscher lokaler Ring über k mit maximalem ideal m. Wenn man ein Morphismus δ für das folgende kommutative Diagramm findet, so daß er mit den anderen Morphismen kommutiert, dann ist $\varphi(d)$ glatt.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(A/I) \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\gamma"'] & Q(d) \arrow[d, "\varphi(d)"] \\ \mathrm{Spec}\, A \arrow[r, "\psi"] \arrow[ur, "\delta"] & \mathrm{M}(d) \end{tikzcd}$$

Sei E das 2-Bündel, das den Punkt $\psi(\mathrm{Spec}\, A)$ entspricht.

$$E_A := (\mathrm{id}_X \times \psi)^* E, \quad E_{A/I} := (\mathrm{id}_X \times \psi \circ \gamma)^* E$$

Nach dem infinitesimalen Kriterium von Schlessinger ([Sch]) reicht es die Behauptung für den Fall $I = \varepsilon A$ mit $m\varepsilon = 0$ zu zeigen. Nach Lemma 6.6 von [Mar2] existiert eine offene affine Überdeckung $(U_i)_{1 \leq i \leq t}$ von X mit $E|_{U_i} \cong \mathscr{O}^2_{U_i}$, so daß

$$\mathscr{O}^v_{U_{i_A}} \xrightarrow{v_i} E_A(\hat{n}H)|_{U_{i_A}} \to 0$$

eine lokale Liftung für

$$0 \to K_{A/I} \to V(-\hat{n}H) \xrightarrow{\tilde{w}} E_{A/I} \to 0 \text{ ist.}$$

v_i entspricht einem Element von $H^0(E_A(\hat{n}H)|_{U_{i_A}})^v$. Das v_i entsprechende Element von $H^0(E_A(\hat{n}H)|_{U_{i_A}})^v$ werde auch mit v_i bezeichnet. Analog entspricht $\tilde{w} \otimes \mathrm{id}_{\mathscr{O}_{X\times \mathrm{Spec}\, A/I}(\hat{n}H)}$ einem Element von $H^0(E_{A/I}(\hat{n}H))^v$, das wir mit w bezeichnen.

Also gilt

$$v_i|_{U_{i_{A/I}}} = w_i, \quad w_i := w|U_{i_{A/I}}$$

Seien $(g_{ij})_{1\le i,j\le t}$ die Übergangsfunktionen von E_A bzgl. der Überdeckung $(U_{i_A})_{1\le i,j\le t}$.

$$(g_{ji}v_i|_{U_{i_A}\cap U_{j_A}} - v_j|_{U_{i_A}\cap U_{j_A}})|_{U_{i_{A/I}}\cap U_{j_{A/I}}} = 0$$

$$\mu_{ji} := g_{ji}v_i|_{U_{i_A}\cap U_{j_A}} - v_j|_{U_{i_A}\cap U_{j_A}} \in H^0(E_A(\hat{n}H)|_{U_{i_{\varepsilon A}}\cap U_{j_{\varepsilon A}}})^\nu \cong H^0(E(\hat{n}H)|_{U_i\cap U_j})^\nu$$

Sei $i < j < \alpha$.

$$\begin{aligned} &g_{\alpha j}g_{ji}v_i|_{U_{i_A}\cap U_{j_A}\cap U_{\alpha_A}} - g_{\alpha j}v_j|_{U_{i_A}\cap U_{j_A}\cap U_{\alpha_A}} \\ &\quad - (g_{\alpha i}v_i|_{U_{i_A}\cap U_{j_A}\cap U_{\alpha_A}} - v_\alpha|_{U_{i_A}\cap U_{j_A}\cap U_{\alpha_A}}) \\ &\quad + g_{\alpha j}v_j|_{U_{i_A}\cap U_{j_A}\cap U_{\alpha_A}} - v_\alpha|_{U_{i_A}\cap U_{j_A}\cap U_{\alpha_A}} = 0 \end{aligned}$$

Also entspricht $(\mu_{ji})_{1\le i,j\le t}$ einem Element von $H^1(E(\hat{n}H)^\nu) = 0$. Dann existiert $(s_i)_{1\le i\le t} \in H^0(E(\hat{n}H)|_{U_i})^\nu \cong H^0(E_A(\hat{n}H)|_{U_{i_{\varepsilon A}}})^\nu$, $1 \le i \le t$ mit

$$g_{ji}v_i|_{U_{i_A}\cap U_{j_A}} - v_j|_{U_{i_A}\cap U_{j_A}} = -g_{ji}s_i|_{U_{i_A}\cap U_{j_A}}.$$

Definieren wir $v := (v_i + s_i)_{1\le i\le t} \in H^0(E(\hat{n}H)^\nu)$, dann ist $v|_{X\times \operatorname{Spec} A/I} = w$. Also ist $0 \to K_{A/I} \to V_{A/I}(-\hat{n}H) \to E_{A/I} \to 0$ auf $X \times \operatorname{Spec} A$ global liftbar. Damit existiert ein Morphismus

$$\tilde{\delta} : \operatorname{Spec} A \to Q.$$

Nach dem Beweis von Proposition 1.4.7 existiert eine Familie von 2-Bündeln $\mathscr{F}$ über $X \times U$, wobei U eine offene Menge in $\mathrm{M}(d)$ ist. Durch ψ bekommt man eine exakte Sequenz

$$\xi_A : 0 \to \mathcal{O}_{X_A} \to E_A(-d) \to I_{Y_A}(c_1 - 2d) \to 0.$$

$$\xi_0 := \xi_A|_X : 0 \to \mathcal{O}_X \to E(-d) \to I_Y(c_1 - 2d) \to 0$$

I_{Y_A} ist flach über X_A. Da $H^0(I_{Y_A}(c_1 - 2d)|_X) = H^0(I_Y(c_1 - 2d)) = 0$ ist, ist $p_{\operatorname{Spec} A*}(I_Y(c_1 - 2d)) = 0$, wobei $p_{\operatorname{Spec} A} : X \times \operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} A$ die zweite Projektion ist. Es gilt dann

$$p_{\operatorname{Spec} A*}\mathcal{O}_{X_A} \cong \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A} \cong p_{\operatorname{Spec} A*}E_A(-d).$$

Das bedeutet gerade, daß E_A vom reinen Typ d ist. Nach der Eigenschaft der Flachheitssratifizierung ([Mu] Lecture 8) faktorisiert $\tilde{\delta}$ durch $Q(d)$, d.h.

$$\operatorname{Spec} A \xrightarrow{\delta} Q(d) \xrightarrow{\imath} Q \text{ mit } \imath \circ \delta = \tilde{\delta},$$

wobei $\imath$ die injektion ist. Daraus folgt, daß $\varphi(d)$ glatt ist. Aus der langen exakten Sequenz für $\mathscr{H}om(q, E) : 0 \to \mathscr{E}nd\, E \to \mathscr{H}om(V(-\hat{n}H), E) \to \mathscr{H}om(K, E)$

$\to 0$ folgt die folgende exakte Sequenz:

$$0 \to H^0(\mathscr{E}nd\, E) \to H^0(E(\hat{n}H)) \otimes V \to \mathrm{Hom}(K, E) \xrightarrow{\lambda} H^1(\mathscr{E}nd\, E) \to 0.$$

Es ist klar, daß $T_{Q(d),q} := \lambda^{-1} T_{M(d),\{E\}}$ ein Unterraum von $T_{Q,q} = \mathrm{Hom}(K, E)$ ist. Also ist $\varphi(d)$ glatt von relativer Dimension $v^2 - h^0(\mathscr{E}nd\, E)$.

Korollar 2.2.4. *Für $d^2 - dc_1 + c_2 > 0$ ist $Q(d)$ glatt mit*

$$\begin{aligned}\dim Q(d) &= v^2 - h^0(\mathcal{O}_X(2d - c_1)) + 3(d^2 - dc_1 + c_2) + h^1(\mathcal{O}_X(2d - c_1)) - 2\\ &= v^2 - \chi(\mathcal{O}_X(2d - c_1)) + 3(d^2 - dc_1 + c_2) - 2.\end{aligned}$$

Für $d^2 - dc_1 + c_2 = 0$ mit $h^1(\mathcal{O}_X(2d - c_1)) = 0$ ist $Q(d)$ glatt mit

$$\dim Q(d) = v^2 - h^0(\mathcal{O}_X(2d - c_1)) - h^0(\mathcal{O}_X(c_1 - 2d)) - 2.$$

Beweis.: Satz 1.4.9 und Proposition 2.2.3

Lemma 2.2.5. *Enthält $\bar{Q}(d)$ eine irreduzible Komponente von Q, dann ist*

$$\dim Q(d) \geq v^2 - \chi(\mathscr{E}nd\, E),$$

wobei $\chi(\mathscr{E}nd\, E) = 4 + c_1^2 - 4c_2$ mit $\{E\} \in Q(d)$ und $c_1 = c_1(E)$, $c_2 = c_2(E)$ ist.

Beweis.: Enthält $\bar{Q}(d)$ eine irreduzible Komponente, dann enthält $\bar{Q}(d)$ die offene Menge $Q\backslash$andere irreduzible Komponenten. Daraus folgt

$$\dim Q(d) \geq \dim Q_q \geq v^2 - \chi(\mathscr{E}nd\, E),$$

wobei q in der obigen genannten offenen Menge enthalten ist.

Lemma 2.2.6. *Sei $q : 0 \to K \to V(-\hat{n}H) \to E \to 0$ ein k-Punkt von Q mit $d(E) = d$, $d > v$. E ist in den Typ v deformierbar genau dann, wenn $q \in \bar{Q}(v)$ ist.*

Beweis.: Sei $\mathscr{E}$ eine irreduzible Familie von 2-Bündeln auf $X \times T$ mit $d(\mathscr{E}_t) \geq v$, $\forall t \in T$. O.E. sei T so klein, daß $P_{T*}\mathscr{E}(\hat{n}H)$ trivial von Rang $v = h^0(E(\hat{n}H))$ ist. Es existiert also ein Isomorphismus

$$V \otimes \mathcal{O}_{X \times T} \xrightarrow{\sim} P_T^* P_{T*}\mathscr{E}(\hat{n}H).$$

Die exakte Sequenz: $V \otimes \mathcal{O}_{X\times T} \xrightarrow{\sim} P_T^* P_{T*}\mathscr{E}(\hat{n}H) \to \mathscr{E}(\hat{n}H) \to 0$ liefert einen Morphismus $T \to Q$. Der generische Punkt von T(Typ v) landet in $Q(v)$.

Bemerkung 2.2.7. Wenn $\mathrm{M}(d)$ ein grober Modulraum ist, dann ist

$$\mathrm{M}(d; v) := \{D \in \mathrm{M}(d) \mid D \text{ ist in den Typ } v \text{ deformierbar}\}$$

abgeschlossen in $\mathrm{M}(d)$. Sei zusätzlich $\mathrm{M}(v)$ ein grober Modulraum. Da $\varphi(d)$ glatt von relativer Dimension $v^2 - h^0(\mathscr{E}nd\, E)$ $(\{E\} \in \mathrm{M}(d))$ ist, ist

$$\operatorname{codim} \mathrm{M}(d; v) \geq \dim Q(d) - \dim Q(v) + 1.$$

Man betrachte nun 2-Bündel auf X_e mit verschwindender erster und zweiter Chernklasse. Da $H^1(\mathcal{O}_X) = 0$ ist, ist $\mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X$ das einzige 2-Bündel vom Typ $(0,0)$. Im folgenden ist v als $h^0(E(\hat{n}H))$ für $\{E\} \in Q$ wie bei der Entstehung von Q gemeint. Da $h^0(\mathcal{E}nd(\mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X)) = 4$ ist, ist nach Korollar 2.2.4 $\dim Q(0,0) = v^2 - 4$. Es gilt dann $d^2 - dc_1 + c_2 = d^2 = 2d_1d_2 - d_1^2e$. Für $d = (0,d_2)$ ist $d^2 = 0$. Da $h^1(\mathcal{O}_X(2d)) = 0$ ist, ist $\mathcal{O}_X(0,d_2) \oplus \mathcal{O}_X(0,-d_2)$ das einzige 2-Bündel vom Typ $(0,d_2)$. Es gilt

$$\mathcal{O}_{X_e}(0,d_2) \oplus \mathcal{O}_{X_e}(0,-d_2) \cong \pi^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^1}(d_2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^1}(-d_2)).$$

Wir haben eine Extension

$$\xi : 0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^1}(-d_2) \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^1} \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^1}(d_2) \to 0$$

aus $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_{P_k^1}(d_2), \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^1}(-d_2)) \cong H^1(\mathbf{P}_k^1, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^1}(-2d_2))$. Nehmen wir die affine Gerade $\mathbf{A}^1$, die ξ und $0 \in H^0(\mathbf{P}_k^1, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^1}(-2d_2))$ verbündet, dann ist das 2-Bündel $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^1}(d_2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^1}(-d_2)$ in das triviale 2-Bündel $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^1}$ deformierbar. Liften wir diese Deformaion auf X_e, dann sind alle 2-Bündeln vom Typ $(0,d_2)$ in das triviale 2-Bündel $\mathcal{O}_{X_e} \oplus \mathcal{O}_{X_e}$ deformierbar. Wegen Symmetrie von $X = \mathbf{P}_k^1 \times \mathbf{P}_k^1$ ist auf $\mathbf{P}_k^1 \times \mathbf{P}_k^1$ auch 2-Bündel vom Typ $(d_1,0)$ mit $d_1 \geq 1$ in das triviale 2-Bündel deformierbar. $(d_1,0)^2 = -d_1^2e$ ist negativ, falls $e \geq 1$ und $d_1 > 0$ ist. Auf $X = X_e$ mit $e \geq 1$ existiert kein 2-Bündel vom Typ $(d_1,0)$ mit $d_1 \geq 1$. Für andere Fälle brauchen wir etwas kompliziertes argument. Für e ungerade ist $(1,d_2)^2 = 2d_2 - e \neq 0$. Also ist auf $X = X_e$ mit ungeradem e der Typ $(1,d_2)$ mit $d_2 < \frac{e+1}{2}$ leer und 2-Bündel vom Typ $(1,d_2)$ mit $d_2 \geq \frac{e+1}{2}$ nicht zerlegbar. Es gilt

$$\chi(\mathcal{O}_{X_e}(2(1,d_2))) = 1 + (1,d_2)(2(1,d_2) + (2,2+e)) = 6d_2 - 3e + 3.$$

Nach Korollar 2.2.4 ist dann $Q(1,d_2) = v^2 - 5$. Sei $\bar{d} = \left(1, \frac{e+1}{2}\right)$ für e ungerade. $Q\left(1,\frac{e+1}{2}\right) = \bar{Q}\left(1,\frac{e+1}{2}\right)$. Es ist $Q(0,d_2) \subset \bar{Q}(0,0)$ $\left(d_2 \leq \frac{e+1}{2}\right)$. Wäre $Q\left(1,\frac{e+1}{2}\right) \not\subset \bar{Q}(0,0)$, so wäre $Q\left(1,\frac{e+1}{2}\right) \setminus \bar{Q}(0,0)$ eine nicht leere offene Menge in Q. Es folgt $\dim Q\left(1,\frac{e+1}{2}\right) \geq v^2 - 4$ (vgl. den Beweis von Lemma 2.2.5). Das ist ein Widerspruch. Also ist $Q\left(1,\frac{e+1}{2}\right)$ in $\bar{Q}(0,0)$ enthalten. Daraus folgt aus Lemma 2.2.6, daß 2-Bündel vom Typ $\left(1,\frac{e+1}{2}\right)$ auf X_e (e ungerade) in das triviale 2-Bündel deformierbar sind. Für den Fall X_0 betrachten wir $\bar{d} = (1,1)$, dann folgt mit dem gleichen Argument das Resultat $Q(1,1) \subset \bar{Q}(0,0)$. Durch Induktion folgt dann, daß 2-Bündel vom Typ $(1,d_2)$ auf X_e mit ungeradem e oder $e = 0$ in das triviale 2-Bündel deformierbar. Aufgrund der

Symmetrie sind auch 2-Bündel vom Typ $(d_1, 1)$ auf $X = \mathbf{P}_k^1 \times \mathbf{P}_k^1$ in das triviale 2-Bündel deformierbar. Für $e = 1$ ist $(d_1, 1)^2 = d_1(2 - d_1)$. Daraus folgt, daß auf X_1 kein 2-Bündel vom Typ $(d_1, 1)$ mit $d_1 > 2$ existiert. Es ist schon gezeigt, daß 2-Bündel vom Typ $(1, 1)$ auf X_1 in das triviale 2-Bündel deformierbar sind. Da $h^1(\mathcal{O}_X(4, 2)) \neq 0$ ist, ist $\mathrm{M}(2, 1)$ kein grober Modulraum. Also ist dim $Q(2, 1)$ für den Fall $X = X_1$ unbekannt. Man weiß nicht, ob 2-Bündel vom Typ $(2, 1)$ auf X_1 in das triviale 2-Bündel deformierbar ist. Für $e = 2t + 1$, $t \in \mathbf{N}$ ist $(d_1, 1)^2 = 2d_1 - d_1^2 e = d_1(2 - d_1 e)$. Auf X_e mit $e = 2t + 1$, $t \in \mathbf{N}$ existiert kein 2-Bündel vom Typ $(d_1, 1)$ mit $d_1 \geq 1$. Zusammengefaßt haben wir den folgenden

Satz 2.2.8. *Auf X_e mit $e \neq 0$ existiert kein 2-Bündel von Typ $(d_1, 0)$ mit verschwindenden Chernklassen. Alle 2-Bündel vom Typ $(0, d_2)$ $(\mathcal{O}_X(0, d_2) \oplus \mathcal{O}_X(0, -d_2))$ sind auf X_e in das triviale 2-Bündel deformierbar. Auf $X = X_e$ mit ungeradem e existieren 2-Bündel vom Typ $(1, d_2)$ genau dann, wenn $d_2 \geq \dfrac{e+1}{2}$ ist; und zwar sind alle in das triviale 2-Bündel deformierbar. Insbesondere existieren auf $\mathbf{P}_k^1 \times \mathbf{P}_k^1$ alle 2-Bündel von Typ (d_1, d_2) mit $d_1 \in \{0, 1\}$ oder $d_2 \in \{0, 1\}$, die alle in das triviale 2-Bündel deformierbar sind.*

Bemerkung 2.2.9. In der Arbeit von Strømme ([St]) sind 2-Bündel vom Typ 1 und 2 auf $\mathbf{P}_k^2$ nach dem gleichen Argument in das triviale 2-Bündel deformierbar. Mit dem gleichehen Argument wie oben für verschiedenen Chernklassen $c_1 = (-1, 0)$, $(0, -1)$ oder $(-1, -1)$ mit $c_2 = 0$ bekommt man die ähnliche Resultate wie Satz 2.2.8.

2.3. Verallgemeinerung der Monade von Strømme

Sei $E = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_l$ ein Vektorbündel auf $X = X_e$ oder $\mathbf{P}_k^n \times \mathbf{P}_k^m$, wobei E_i für $1 \leq i \leq l$ mit $2l \geq \dim X$ 2-Bündel auf X sind. Zusätzlich sei c_1 die erste Chernklasse von E_i für $1 \leq i \leq l$. Sei $\tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_l) \in H^0(E(d - c_1))$ ein globaler Schnitt mit $\tau_i \in H^0(E_i(d - c_1))$, $1 \leq i \leq l$, wobei $2d - c_1 > 0$, $d - c_1 \geq 0$ bzw. $2d - c_1 > (0, 0)$, $d - c_1 \geq (0, 0)$ je nachdem ob $\mathrm{Pic}(X) \cong \mathbf{Z}$ oder $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ ist.

$$Y_i := \{p \in X \mid \tau_i(p) = 0\} \subset X$$

Vorausgesetzt sei die Existenz von $F \in H^0(\mathcal{O}_X(2d - c_1))$ mit $F \neq 0$ und $Y_F \cap Y_1 \cap \cdots \cap Y_l = \emptyset$, wobei Y_F das Nullstellengebilde von F in X ist. Man betrachte die folgende Monade

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(c_1 - d) \xrightarrow{b(\lambda)} \mathcal{O}_X(c_1 - d) \oplus E \oplus \mathcal{O}_X(d) \xrightarrow{a(\lambda)} \mathcal{O}_X(d) \longrightarrow 0.$$

Die Abbildungen $a(\lambda)$ und $b(\lambda)$ sind wie folgt definiert.

$$b(\lambda) := (\lambda, \tau, -F)^t, \quad a(\lambda) := (F, \tau \wedge, \lambda), \quad \lambda \in k$$

$$\tau \wedge := (\tau_1 \wedge, \tau_2 \wedge, \ldots, \tau_l \wedge)$$

Für $s \in E(U) = E_1(U) \oplus E_2(U) \cdots \oplus E_l(U)$ mit $s = (s_1, s_2, \ldots, s_l)$, $s_i \in E_i(U)$ gilt also

$$\tau|_U \wedge s = \tau_1|_U \wedge s_1 + \cdots + \tau_l|_U \wedge s_l \in \mathcal{O}_X(d)|_U,$$

da $\bigwedge^2 E_i \cong \mathcal{O}_X(c_1)$ für $1 \le i \le l$ sind.

Für $\lambda \neq 0$ ist es klar, daß $b(\lambda)$ bzw. $a(\lambda)$ exakt auf $\mathcal{O}_X(c_1 - d)$ bzw. $\mathcal{O}_X(d)$ ist. Sei jetzt $\lambda = 0$. Für $p \notin Y_F$ ist F_p eine Einheit in $\mathcal{O}_X(c_1 - d)_p \cong \mathcal{O}_{X_p}$. Damit ist $a(0)_p$ surjektiv bzw. $b(0)_p$ injektiv.

Für $p \in Y_F$ existiert ein Y_j mit $p \notin Y_j$, da $Y_F \cap Y_1 \cap \cdots \cap Y_l = \varnothing$ ist.

$$\tau_{j_p} \cong (\tau^1_{j_p}, \tau^2_{j_p}) \in \mathcal{O}_{X_p} \oplus \mathcal{O}_{X_p} \cong E_{j_p}$$

Also ist $\tau^1_{j_p}$ oder $\tau^2_{j_p}$ eine Einheit und damit $a(0)_p$ surjektiv bzw. $b(0)_p$ injektiv.

Lemma 2.3.1. $\operatorname{Ker} a(\lambda)/\operatorname{Im} b(\lambda)$ *ist lokalfrei vom Rang 2l. Für* $\lambda \neq 0$ *ist*

$$\operatorname{Ker} a(\lambda)/\operatorname{Im} b(\lambda) \cong E.$$

Beweis.: Sei $\lambda \neq 0$. Zu zeigen, daß $\operatorname{Ker} a(\lambda) \cong \mathcal{O}_X(c_1 - d) \oplus E$ ist. Sei U offen in X. Sei

$$(x, y, z) \in \mathcal{O}_X(c_1 - d)(U) \oplus E(U) \oplus \mathcal{O}_X(d)(U)$$

mit $F|_U x + \tau_U \wedge y + \lambda z = 0$. Es folgt dann $z = -\frac{F|_U}{\lambda} x - \tau\Big|_U \wedge \frac{y}{\lambda}$. Also ist

$$\operatorname{Ker} a(\lambda)(U) = \Big\{(x, y, z) \in \mathcal{O}_X(c_1 - d)(U) \oplus E(U) \oplus \mathcal{O}_X(d)(U) \,|$$

$$z = -\frac{F|_U}{\lambda} x - \tau\Big|_U \wedge \frac{y}{x}\Big\}.$$

Definieren wir $\phi : \operatorname{Ker} a(\lambda) \to \mathcal{O}_X(c_1 - d) \oplus$ E mit

$$\phi_U\left(x, y, -\frac{F|_U}{\lambda} x - \tau\Big|_U \wedge \frac{y}{x}\right) = (x, y) \in \mathcal{O}_X(c_1 - d)(U) \oplus E(U).$$

Offensichtlich ist ϕ ein Isomorphismus. $\phi \circ b(\lambda) = (\lambda, \tau)$ ist eine Abbildung von $\mathcal{O}_X(c_1 - d)$ nach $\mathcal{O}_X(c_1 - d) \oplus E$, die mit $b(\lambda)$ verträglich ist. Um $\operatorname{Ker} a(\lambda)/\operatorname{Im} b(\lambda) \cong E$ zu zeigen, muß man die Exaktheit der Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(c_1 - d) \xrightarrow{\binom{\lambda}{\tau}} \mathcal{O}_X(c_1 - d) \oplus E \xrightarrow{(\tau, -\lambda)} E \longrightarrow 0$$

nachweisen.

Sei $(x, y) \in \mathcal{O}_X(c_1 - d)(U) \oplus E(U)$ mit $\tau x - \lambda y = 0$. Setzen wir $v = \frac{x}{\lambda} \in \mathcal{O}_X(c_1 - d)(U)$. Es folgt dann $\begin{pmatrix} \lambda v \\ \tau v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Also ist $\operatorname{Ker} a(\lambda)/\operatorname{Im} b(\lambda) \cong E$ für $\lambda \neq 0$. $\operatorname{Ker} a(0)$ ist lokalfrei vom Rang $2l + 1$. Sei $p \in X$. Eine der

Komponenten von

$$b(0)_p = (0, \tau^1_{1_p}, \tau^2_{1_p}, \ldots, \tau^1_{l_p}, \tau^2_{l_p}, F_p)$$

ist eine Einheit, da $Y_F \cap Y_1 \cdots\cdots \cap Y_l = \emptyset$ ist.

O.E. sei F_p eine Einheit. $\operatorname{Ker} a(0)_p \cong \mathcal{O}^{2l+1}_{X_p}$

$$\operatorname{Im} b(0)_p \cong \{(\tau_{11}, \tau_{12}, \ldots, \tau_{l1}, \tau_{l2}, \tilde{F}_p v) \mid v \in \mathcal{O}_{X_p}\},$$

wobei $\tau^j_{i_p} \cong \tau_{ij} \in \mathcal{O}_{X_p}$, $1 \leq i \leq l$, $j \in \{1, 2\}$ und $F_p \cong \tilde{F}_p \in \mathcal{O}_{X_p}$ sind. Definieren wir

$$\gamma : \operatorname{Ker} a(0)_p / \operatorname{Im} b(0)_p \to \mathcal{O}^{2l}_{X_p}$$

mit $\gamma(x, y) = y\tilde{\tau}_p - x\tilde{F}_p$, wobei $x \in \mathcal{O}^{2l}_{X_p}$, $y \in \mathcal{O}_{X_p}$ und $\tilde{\tau}_p := (\tau_{11}, \tau_{12}, \ldots, \tau_{l1}, \tau_{l2})$ sind. Für $(\tilde{\tau}_p, \tilde{F}_p)v \in \operatorname{Im} b(0)_p$ ist $\tilde{\tau}_1 \tilde{F}_p v - \tilde{F}_p \tilde{\tau}_p v - \tilde{\tau}_1 = 0$. Also ist γ wohldefiniert. γ ist injektiv, da aus $\gamma(x, y) = 0$ $x = \tilde{F}_p^{-1} y \tilde{\tau}_p$ folgt. γ ist surjektiv, da $\tilde{F}_p$ eine Einheit ist. Also ist $\operatorname{Ker} a(0)/\operatorname{Im} b(0)$ lokalfrei vom Rang $2l$ ist.

Proposition 2.3.2. *Sei* $H^1(E(-d)) = 0$, $E \not\cong E' \oplus \mathcal{O}_X(c_1 - d)$ *und* $2d \neq c_1$. *Dann ist* $\operatorname{Ker} a(0)/\operatorname{Im} b(0) \not\cong E$.

Beweis.: Man betrachte die folgende Darstellung der Monade von Strømme.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_X(c_1 - d) & \longrightarrow & \operatorname{Ker} a(0) & \longrightarrow & D & \longrightarrow & 0 \\
 & & \Vert & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_X(c_1 - d) & \xrightarrow{b(0)} & \mathcal{O}_X(c_1 - d) \oplus E \oplus \mathcal{O}_X(d) & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow{\scriptstyle a(0)} & & \downarrow & & \\
 & & & & \mathcal{O}_X(d) & = & \mathcal{O}_X(d) & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0, & &
\end{array}$$

wobei $B := \operatorname{Coker} b(0) \cong \mathcal{O}_X(c_1 - d) \oplus (E \oplus \mathcal{O}_X(d))/\operatorname{Im}(\tau, -F)$ ist. Aus der Voraussetzung $Y_F \cap Y_1 \cap \cdots \cap Y_l = \emptyset$ folgt, daß $E \oplus \mathcal{O}_X(d)/\operatorname{Im}(\tau, -F)$ lokalfrei vom Rang $2l$ ist.

Annahme: $D = \operatorname{Ker} a(0)/\operatorname{Im} b(0) \cong E$. Dann ist die Sequenz:

$$0 \to E \to B \to \mathcal{O}_X(d) \to 0 \in \operatorname{Ext}^1(\mathcal{O}_X(d), E) \cong H^1(E(-d)) = 0.$$

Also ist $B \cong E \oplus \mathcal{O}_X(d)$. Aber $E \not\cong E' \oplus \mathcal{O}_X(c_1 - d)$ und $d \neq c_1 - d$. Das ist ein Widerspruch. Damit sit $\operatorname{Ker} a(0)/\operatorname{Im} b(0) \not\cong E$.

Lemma 2.3.3. *Sei die Monade*

$$P^*_A \mathcal{O}_X(c_1 - d) \xrightarrow{b} P^*_A \mathcal{O}_X(c_1 - d) \oplus P^*_A E \oplus P^*_A \mathcal{O}_X(d) \xrightarrow{a} P^*_1 \mathcal{O}_X(d),$$

wobei $P_A = X \times A \to A$ *mit* $A := \operatorname{Spec} k[u]$ *die zweite Projektion ist, wie folgt definiert*:

$$b := (u \otimes_k 1, 1 \otimes_k \tau, 1 \otimes_k (-F))^t, \quad a := (1 \otimes_k F, 1 \otimes_k \tau_A, u \otimes_k 1).$$

Dann ist $\operatorname{Ker} a / \operatorname{Im} b$ *lokalfrei vom Rang* $2l$.

Beweis.: X_A ist ein k-Schema von endlichem Typ. Also sind die abgeschlossenen Punkte von X_A dicht in X_A. $P_A : X_A \to A$ ist eigentlich. Alle abgeschlossenen Punkte (k-Punkte) von X_A sind in Fasern über k-Punkten von A enthalten.

$$b|_{X \times \{\lambda\}} \cong (\lambda, \tau, -F) = b(\lambda), \quad a|_{X \times \{\lambda\}} \cong (F, \tau \wedge, \lambda) = a(\lambda),$$

wobei $\lambda \in k$, $\{\lambda\}$ ein abgeschlossener Punkt (k-Punkt) von A ist.

$(\operatorname{Ker}/\operatorname{Im} b)_p$ ist lokalfrei vom Rang $2l$ für einen k-Punkt $p \in X_A$. Da die k-Punkte dicht in X_A sind, ist $(\operatorname{Ker} a / \operatorname{Im} b)$ lokalfrei vom Rang $2l$.

Korollar 2.3.4. *Es existiert eine Familie* $\mathscr{V}$ *von* $2l$*-Bündeln über* X_A *mit* $2l \geq \dim X$, *so daß außer über einem Punkt* $t_0 \in A$ *über allen anderen Punkten* $t \in A$ $\mathscr{V}_t \cong \mathcal{O}_X^{2l}$ *gilt.*

Sei jetzt $X \cong \mathbf{P}_k^2$ oder X_e und $l = 1$, d.h. E eine lokalfreie Garbe vom Rang 2 auf X. Vorausgesetzt ist nun, daß E normiert ist mit $d(E) = h$. Sei $d > h$. Unter den Bedingungen $\tau \in H^0(E(d - c_1))$ mit $(\tau)_0$ von der Kodimension 2 und $F \in H^0(\mathcal{O}_X(2d - c_1))$ mit $Y_F \cap (\tau)_0 = \varnothing$ untersuchen wir die Eigenschaft von $D = \operatorname{Ker} a(0) / \operatorname{Im} b(0)$.

Für $\lambda = 0$ gilt die folgende Darstellung der Monade von Strømme:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_X(c_1 - d) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \operatorname{Ker} a(0) \arrow[r] \arrow[d] & D \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_X(c_1 - d) \arrow[r, "b(0)"] & \mathcal{O}_X(c_1 - d) \oplus E \oplus \mathcal{O}_X(d) \arrow[r] \arrow[d, "a(0)"] & B \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & \mathcal{O}_X(d) \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathcal{O}_X(d) \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Lemma 2.3.5. $B^\vee(c_1) \cong \operatorname{Ker} a(0)$

Beweis.: Sei $b(0) := (0, \tau, -F)^t$, $a(0) := (F, \tau \wedge, 0)$. Es gilt

$$B \cong \mathcal{O}_X(c_1 - d) \oplus (E \oplus \mathcal{O}_X(d)) / \operatorname{Im}(\tau, -F).$$

$N(d) := (E \oplus \mathcal{O}_X(d))/\mathrm{Im}(\tau, -F)$ ist lokalfrei vom Rang 2 und

$$B^\vee \cong \mathcal{O}_X(d - c_1) \oplus (N(d))^\vee .$$

Aus der exakten Sequenz:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(c_1 - d) \xrightarrow{(\tau,-F)^t} E \oplus \mathcal{O}_X(d) \longrightarrow N(d) \longrightarrow 0$$

folgt $c_1(N) = 0$, $c_2(N) = d^2 - dc_1 + c_2$. Damit ist $N(d)^\vee \cong N(-d)$. Also ist

$$B^\vee(c_1) \cong \mathcal{O}_X(d) \oplus N(c_1 - d).$$

Der Garbenhomomorphismus

$$\psi : N(c_1 - d) = (E(c_1 - 2d) \oplus \mathcal{O}_X(c_1 - d))/\mathrm{Im}(\tau, -F) \longrightarrow \mathcal{O}_X(c_1 - d) \oplus E$$

wird durch folgenden Prägarbenhomomorphismus $\tilde{\psi}$ definiert. Man bemerke auch, daß $(\tau, -F)$ hier als $(\tau, -F) \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{O}_X(c_1 - 2d)}$ zu verstehen ist.

Seien $x \in E(c_1 - 2d)(U)$, $y \in \mathcal{O}_X(c_1 - d)(U)$ für U offen in X.

$$\tilde{\psi}(x \oplus y + \mathrm{Im}(\tau, -F)(U)) := -\tau|_U \wedge x \oplus (F|_U x + \tau|_U y)$$

Betrachten wir die folgende Sequenz

$$\begin{gathered} 0 \longrightarrow (E(c_1 - 2d) \oplus \mathcal{O}_X(c_1 - d))/\mathrm{Im}(\tau, -F) \oplus \mathcal{O}_X(d) \\ \xrightarrow{\begin{pmatrix} \psi \\ \mathrm{id}_{\mathcal{O}_X(d)} \end{pmatrix}} \mathcal{O}_X(c_1 - d) \oplus E \oplus \mathcal{O}_X(d) \xrightarrow{a(0)} \mathcal{O}_X(d) \longrightarrow 0. \end{gathered}$$

Es ist $a(0) \circ \begin{pmatrix} \psi \\ \mathrm{id}_{\mathcal{O}_X(d)} \end{pmatrix} = 0$. Um

$$\mathrm{Ker}\, a(0) = \mathrm{Im}\begin{pmatrix} \psi \\ \mathrm{id}_{\mathcal{O}_X(d)} \end{pmatrix} \cong B^\vee(c_1)$$

zu zeigen, muß man die Exaktheit der obigen Sequenz zeigen.

Sei $p \in X$. $(x \oplus y + \mathrm{Im}(\tau, -F)_p) \oplus z \in (N(c_1 - d) \oplus \mathcal{O}_X(d))_p$. Dann gilt

$$\begin{pmatrix} \psi \\ \mathrm{id}_{\mathcal{O}_X(d)} \end{pmatrix}(x \oplus y + \mathrm{Im}(\tau, -F)_p \oplus z) = -\tau_p \wedge x \oplus (F_p x + \tau_p y) \oplus z = 0.$$

Es folgt $z = 0$. Seien $x \cong (x_1, x_2) \in \mathcal{O}_{X_p} \oplus \mathcal{O}_{X_p}$, $\tau_p \cong (\tau_1, \tau_2) \in \mathcal{O}_{X_p} \oplus \mathcal{O}_{X_p}$. Für den Fall $p \notin (\tau)_0$ ist O.E. τ_2 eine Einheit. Aus $\tau_p \wedge x \cong \tau_1 x_2 - \tau_2 x_1$ folgt $x_1 = \dfrac{\tau_1}{\tau_2} x_2$. Damit ist

$$x \cong (x_1, x_2) = \frac{x_2}{\tau_2}(\tau_1, \tau_2).$$

Also ist $x = \tau_p v$ mit $v \in \mathcal{O}_X(c_1 - 2d)_p$. Aus $0 = F_p x + \tau_p y = F_p \tau_p v + \tau_p y = \tau_p(F_p v + y)$ folgt $y = -F_p v$. Daraus folgt

$$x + y + \mathrm{Im}(\tau, -F)_p \oplus z = 0 \in N(c_1 - d)_p \oplus \mathcal{O}_X(d)_p.$$

Falls $p \in (\tau)_0$ ist, ist $p \notin (F)_0$. Also ist F_p eine Einheit in $\mathcal{O}_X(2d - c_1)_p$. Aus $F_p x + \tau_p y = 0$ folgt $x = -\frac{1}{F_p}\tau_p y = \tau_p\left(\frac{-y}{F_p}\right)$ und

$$x \oplus y = (\tau_p, -F_p)\left(\frac{-y}{F_p}\right) \in \operatorname{Im}(\tau, -F)_p$$

$\begin{pmatrix} \psi \\ \mathrm{id}_{\mathcal{O}_X(d)} \end{pmatrix}$ ist injektiv.

Sei $p \in X$ mit $p \notin (\tau)_0$. $\tau_p \cong (\tau_1, \tau_2) \in \mathcal{O}_{X_p} \oplus \mathcal{O}_{X_p}$ mit τ_2 eine Einheit, $y \cong (y_1, y_2) \in \mathcal{O}_{X_p} \oplus \mathcal{O}_{X_p}$. Aus $F_p x + \tau_p \wedge y = 0$ folgt $y_1 = F_p \frac{x}{\tau_2} + \frac{\tau_1}{\tau_2} y_2$. Gesucht sind $w \in E(c_1 - 2d)_p$ und $v \in \mathcal{O}_X(c_1 - d)_p$ mit $-\tau_p \wedge w = x$, $F_p w + \tau_p v = y$. Es gilt

$$w \cong (w_1, w_2) \in \mathcal{O}_{X_p} \oplus \mathcal{O}_{X_p}$$

$$\text{Aus} - \begin{vmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} = x \text{ folgt } x = \tau_2 w_1 - \tau_1 w_2.$$

Aus $F_p(w_1, w_2) + (\tau_1, \tau_2)v = (y_1, y_2)$ folgt: Komponentenweise gilt $F_p w_1 + \tau_1 v = y_1$ und $F_p w_2 + \tau_2 v = y_2$. Setzen wir $w_1 = \frac{x}{\tau_2}$, $v = \frac{y_2}{\tau_2}$. Daraus folgt $w_2 = 0$ aus $F_p w_2 + \tau_2 v = y_2 = F_p w_2 + y_2 = y_2$. Für $p \in (\tau)_0$ ist $p \notin (F)_0$. Also ist F_p eine Einheit. Aus $F_p x + \tau_p \wedge y = 0$ folgt $x = \tau_p \wedge \left(-\frac{1}{F_p} y\right)$. Setzen wir $w = \frac{1}{F_p} y$, $v = 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \psi \\ \mathrm{id}_{\mathcal{O}_X(d)} \end{pmatrix}(w \oplus v + \operatorname{Im}(\tau, -F)_p) \oplus z &= -\tau_p \wedge \frac{1}{F_p} y \oplus \left(F_p \frac{1}{F_p} y + \tau_p 0\right) \oplus z \\ &= x \oplus y \oplus z \in \operatorname{Ker} a(0) \end{aligned}$$

$$\operatorname{Ker} a(0) = \operatorname{Im}\begin{pmatrix} \psi \\ \mathrm{id}_{\mathcal{O}_X(d)} \end{pmatrix}$$

Sei $\xi \in \operatorname{Ext}^1(I_Y, \mathcal{O}_X(c_1 - 2d))$ die durch τ induzierte exakte Sequenz, wobei I_Y die zu $(\tau)_0$ gehörige Idealgarbe ist.

Proposition 2.3.6. *(i) $d(D) = d$, (ii) $\xi(D) = F^2\xi$, wobei $\xi(D)$ die zu D gehörige Standardextension, und (iii) die zu $\xi(D)$ gehörige Idealgarbe stimmt mit der zu E gehörige Idealgarbe I_Y überein.*

Beweis.: Um $B^\vee(c_1) \cong \operatorname{Ker} a(0)$ in die Darstellung der Monade von Strømme einsetzen zu können suchen wir einen Garbenhomomorphismus von $\mathcal{O}_X(c_1 - d)$ nach $N(c_1 - d) \oplus \mathcal{O}_X(d)$, der mit

$$\mathcal{O}_X(c_1 - d) \xrightarrow{(0, \tau, -F)' = b(0)} \mathcal{O}_X(c_1 - d) \oplus E \oplus \mathcal{O}_X(d)$$

verträglich ist. Setzen wir $\alpha : \mathcal{O}_X(c_1 - d) \to (E(c_1 - 2d) \oplus \mathcal{O}_X(c_1 - d))/\mathrm{Im}(\tau, -F) \oplus \mathcal{O}_X(d)$ mit $\alpha(x) = (0 \oplus x)/\mathrm{Im}(\tau, -F) \oplus -Fx$ für $x \in \mathcal{O}_X(c_1 - d)(U)$, U offen in X, dann ist

$$\begin{pmatrix} \psi \\ \mathrm{id} \end{pmatrix} \alpha(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau x \\ -Fx \end{pmatrix}.$$

α ist der gesuchte Garbenhomomorphismus.

Die Darstellung der Monade von Strømme ist dann das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_X(c_1 - d) \arrow[r, "{(0,\mathrm{id},-F)}"] \arrow[d, equal] & \dfrac{(E(c_1 - 2d) \oplus \mathcal{O}_X(c_1 - d))}{\mathrm{Im}(\tau, -F) \oplus \mathcal{O}_X(d)} \arrow[r] \arrow[d] & D \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_X(c_1 - d) \arrow[r] & \mathcal{O}_X(c_1 - d) \oplus E \oplus \mathcal{O}_X(d) \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & \mathcal{O}_X(d) \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathcal{O}_X(d) \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0, &
\end{tikzcd}$$

wobei $(E(c_1 - 2d) \oplus \mathcal{O}_X(c_1 - d))/\mathrm{Im}(\tau, -F) \oplus \mathcal{O}_X(d) \cong B^\vee(c_1)$ mit $N(c_1 - d) \cong (E(c_1 - 2d) \oplus \mathcal{O}_X(c_1 - d))/\mathrm{Im}(\tau, -F)$ ist.

Daraus bekommt man das folgende Diagramm mit exakten Zeilen.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_X(c_1 - 2d) \arrow[r, "\tau \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{O}_X(c_1 - 2d)}"] \arrow[d, "F"] & E(-d) \arrow[r, "\tau \wedge"] \arrow[d, "P_N"] & I_Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_X \arrow[r, "{(0,\mathrm{id})}"] \arrow[d, "F"] & N \arrow[r, "{(\tau \wedge, 0)}"] \arrow[d, "\mathrm{Pr}_1"] & I_Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_X(2d - c_1) \arrow[r, "\mathrm{Pr}_2"] & D(d - c_1) \arrow[r, "{(\tau \wedge, 0, 0)}"] & I_Y \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Wie die obige Darstellung der Monade von Strømme zeigt, ist

$$D(d - c_1) = (N \oplus \mathcal{O}_X(2d - c_1))/\mathrm{Im}(0, \mathrm{id}, -F).$$

P_N ist die Projektion von $E(-d)$ nach N. Pr_1 und Pr_2 sind die Projektionen von N bzw. $\mathcal{O}_X(2d - c_1)$ nach $D(d - c_1)$. $\mathrm{Pr}_2 \circ (0, \mathrm{id}) = \mathrm{Pr}_1 \circ F$ ist klar, da für $x \in \mathcal{O}_X(U)$, U offen in X $(0, x, -Fx) \in \mathrm{Im}(0, \mathrm{id}, -F)$ ist. Die erste und zweitte Komponente der Abbildung $(\tau \wedge, 0, 0)$ von $D(d - c_1)$ nach I_Y entsprechen genau der Abbildung $(\tau \wedge, 0)$ von N nach I_Y. Damit ist die letzte Zeile eine exakte Sequenz. Aus der obigen kommutativen exakten Zeilen folgt dann die Behauptung.

Satz 2.3.7. *Es sei* $\mathrm{char}(k) \neq 2$. *Seien* D *und* E *zwei 2-Bündel auf* $X = X_e$ *oder* $\mathbf{P}_k^2$ *mit* $d(D) = d > d(E) = v$. *Zusätzlich sei* $\mathrm{M}(d)$ *ein grober Modulraum. Es existiert eine exakte Sequenz*

$$\xi_0 : 0 \to \mathcal{O}_X(c_1 - d) \to E \to I_Y(d) \to 0$$

mit $Y = Y(D)$, *wobei* $Y(D)$ *das zur Standardextension von* D *gehörige Unterschema von* X *ist. Vorausgesetzt ist*

$$\begin{aligned} 0 &= h^1(\mathcal{O}_X(2d - c_1)) = h^1(\mathcal{O}_X(c_1 - d - v)) \\ &= h^1(\mathcal{O}_X(c_1 - d - v - (0,1))) = h^1(\mathcal{O}_X(c_1 - d - v - (1,0))) \end{aligned}$$

für $X = X_e$. *Existiert ein* $F_0 \in H^0(\mathcal{O}_X(2d - c_1))$ *mit* $V(F_0) \cap Y = \varnothing$, *und ist die durch* F_0 *induzierte Abbildung*

$$H^1(E(-d)) \xrightarrow{F_0} H^1(E(d - c_1))$$

surjektiv, dann ist D *in den Typ* v *deformierbar.*

Beweis.: Sei G ein 2-Bündel, das der Mittelterm von $\xi \in \mathrm{Ext}^1(I_Y(d), \mathcal{O}_X(c_1 - d))$ ist, dann ist G nach Voraussetzung vom Typ v.

Da $V(F_0) \cap Y = \varnothing$ ist, ist G mit dem Mittelterm von $F_0^2\xi$ lokalfrei. Betrachten wir die Abbildung

$$\varphi : H^0(\mathcal{O}_X(2d - c_1)) \times \mathrm{Ext}^1(I_Y(d), \mathcal{O}_X(c_1 - d)) \to \mathrm{Ext}^1(I_Y(c_1 - d), \mathcal{O}_X(d)),$$

wobei $\varphi(F, \xi) := F^2\xi$ ist.

Nach Bemerkung 2.2.7 ist $\mathrm{M}(d, v) \subset \mathrm{M}(d)$ abgeschlossen in $\mathrm{M}(d)$, wobei $\mathrm{M}(d, v) := \{D \in \mathrm{M}(d) \mid D \text{ ist in den Typ } v \text{ deformierbar}\}$ ist. Wir fassen Definitionbereich und Bildbereich von φ als affine Schemata auf. Dann entspricht φ einem Morphismus. Um die Behauptung zu zeigen, braucht man also nur zu zeigen, daß φ dominant ist. Aus $0 \to I_Y \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Y \to 0$ folgt, daß $\dim \mathrm{Ext}^1(I_Y, \mathcal{O}_X) = h^1(I_Y(\mathcal{K}_X)) = \deg Y$ und $\dim \mathrm{Ext}^1(I_Y(c_1 - d), \mathcal{O}_X(d)) = h^1(I_Y(c_1 - 2d + \mathcal{K}_X)) = \deg Y + h^1(\mathcal{O}_X(2d - c_1))$ sind. Nach Voraussetzung ist $h^1(\mathcal{O}_X(2d - c_1)) = 0$. Also ist

$$\dim \mathrm{Ext}^1(I_Y, \mathcal{O}_X) = \dim \mathrm{Ext}^1(I_Y(c_1 - d), \mathcal{O}_X(d)) = \deg Y.$$

Um zu zeigen, daß $F_0 : \mathrm{Ext}^1(I_Y, \mathcal{O}_X) \to \mathrm{Ext}^1(I_Y(c_1 - d), \mathcal{O}_X(d))$ ein Isomorphismus ist, braucht man nur zu geigen, daß F_0 injektiv ist.

$\mathcal{H}om(I_Y, \bullet)$ angewendet auf $0 \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{F_0} \mathcal{O}_X(2d - c_1) \to \mathcal{O}_{F_0}(2d - c_1) \to 0$ ergibt die lange exakte Sequenz

$$\begin{aligned} 0 &\to \mathrm{Hom}(I_Y, \mathcal{O}_X) \to \mathrm{Hom}(I_Y, \mathcal{O}_X(2d - c_1)) \to \mathrm{Hom}(I_Y, \mathcal{O}_{F_0}(2d - c_1)) \\ &\to \mathrm{Ext}^1(I_Y, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{F_0} \mathrm{Ext}^1(I_Y, \mathcal{O}_X(2d - c_1)) \cdots . \end{aligned}$$

$\mathcal{H}om(\bullet, \mathcal{L})$ angewendet auf $0 \to I_Y \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Y \to 0$ liefert

$$0 \to \mathcal{H}om(\mathcal{O}_Y, \mathcal{L}) \to \mathcal{H}om(\mathcal{O}_X, \mathcal{L}) \to \mathcal{H}om(I_Y, \mathcal{L}) \to \mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_Y, \mathcal{L}),$$

wobei $\mathscr{L}$ lokalfrei vom Rang 1 ist. Da Y lokal vollständiger Durchschnitt von der Kodimension 2 ist, ist

$$\mathscr{H}om(\mathcal{O}_Y,\mathscr{L}) \cong \mathscr{E}xt^1_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_Y,\mathscr{L}) = 0.$$

Es folgt dann $\mathscr{H}om(I_Y,\mathscr{L}) \cong \mathscr{H}om(\mathcal{O}_X,\mathscr{L})$.

Da $V(F_0)\cap Y = \varnothing$ ist, ist $\mathrm{Hom}(I_Y,\mathcal{O}_{F_0}(2d-c_1)) = H^0(\mathcal{O}_{F_0}(2d-c_1))$. Daraus folgt, daß

$$0 \to \mathrm{Hom}(I_Y,\mathcal{O}_X) \to \mathrm{Hom}(I_Y,\mathcal{O}_X(2d-c_1)) \to \mathrm{Hom}(I_Y,\mathcal{O}_{F_0}(2d-c_1)) \to 0$$

exakt ist. Also ist F_0 injektiv. Definiere

$$\beta : H^0(\mathcal{O}_X(2d-c_1)) \times \mathrm{Ext}^1(I_Y,\mathcal{O}_X(c_1-2d)) \to \mathrm{Ext}^1(I_Y,\mathcal{O}_X)$$

mit $\beta(F,\xi) = F_0\xi + 2F\xi_0$.

Betrachten wir das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
H^0(\mathcal{O}_X(2d-c_1)) & \xrightarrow{2} & H^0(\mathcal{O}_X(2d-c_1)) \\
\downarrow{\scriptstyle (2,0)} & & \downarrow{\scriptstyle \xi_0} \\
H^0(\mathcal{O}_X(2d-c_1)) \times \mathrm{Ext}^1(I_Y(2d-c_1),\mathcal{O}_X) & \xrightarrow{\beta} & \mathrm{Ext}^1(I_Y,\mathcal{O}_X) \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Pr}_2} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\
\mathrm{Ext}^1(I_Y(2d-c_1),\mathcal{O}_X) & \xrightarrow{\gamma} & \mathrm{Ext}^1(E(-d),\mathcal{O}_X) \\
& & \downarrow \\
& & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_X(c_1-2d),\mathcal{O}_X) \\
& & \cong H^1(\mathcal{O}_X(2d-c_1)) = 0.
\end{array}$$

ξ_0 und p stammen aus der vorgegebenen exakten Sequenz ξ_0. γ ist definiert als

$$\mathrm{Ext}^1(I_Y(2d-c_1),\mathcal{O}_X) \xrightarrow{F_0} \mathrm{Ext}^1(I_Y,\mathcal{O}_X) \xrightarrow{p} \mathrm{Ext}^1(E(-d),\mathcal{O}_X)$$

Pr_2 ist die zweite Projektion von $H^0(\mathcal{O}_X(2d-c_1)) \times \mathrm{Ext}^1(I_Y(2d-c_1),\mathcal{O}_X)$ auf $\mathrm{Ext}^1(I_Y(2d-c_1),\mathcal{O}_X)$. Da $E(-d) \to I_Y \xrightarrow{F_0} I_Y(2d-c_1)$ äquivalent zu $E(-d) \xrightarrow{F_0} E(d-c_1) \to I_Y(2d-c_1)$ ist, faktorisiert γ durch die Abbildung F_0: $\mathrm{Ext}^1(E(d-c_1),\mathcal{O}_X) \cong H^1(E(-d)) \to \mathrm{Ext}^1(E(-d),\mathcal{O}_X) \cong H^1(E(d-c_1))$, wobei die Abbildung nach Voraussetzung surjektiv ist. Mit der Surjektivität von $E(d-c_1) \to I_Y(2d-c_1)$ ist γ auch surjektiv. Damit ist β surjektiv. Das Differential $d\varphi$ von φ im Punkt (F_0,ξ_0) ist gleich $F_0\beta = F_0^2\xi + 2F_0F\xi_0$ und zwar surjektiv. φ ist glatt im Punkt (F_0,ξ_0), damit auch platt im Punkt (F_0,ξ_0). Da Plattheit eine offene Bedingung ist, existiert eine offene Umgebung V von (F_0,ξ_0), so daß φ auf V platt ist. Da ein platter Morphismus eine offene Abbildung ist, ist $\varphi(V)$ offen. Damit ist φ dominant. An Stelle des affinen Raums $\mathrm{Ext}^1(I_Y(c_1-d),\mathcal{O}_X(d))$ betrachten wir den projektiven Raum

$$\mathbf{P}(\mathrm{Ext}^1(I_Y(c_1-d),\mathcal{O}_X(d))^\vee)$$

für $\mathrm{Ext}^1(I_Y(c_1-d),\mathcal{O}_X(d))$. Das Bild von φ (k-Punkte) mit Ausnahme des Ursprungs $\{0\}$ in $\mathbf{P}(\mathrm{Ext}^1(I_Y(c_1-d),\mathcal{O}_X(d))^\vee)$ ist dicht. Da die Menge der exakten Sequenzen aus $\mathrm{Ext}^1(I_Y(c_1-d),\mathcal{O}_X(d))$, die einen lokalfreien Mittelterm (2-Bündel vom Typ d) besitzen, nach dem Beweis von Proposition 1.1.10 offen in $\mathbf{P}(\mathrm{Ext}^1(I_Y(c_1-d),\mathcal{O}_X(d)))$ ist, folgt die Behauptung.

Wir kombinieren Satz 3.7 und 4.19 Satz von [Kr]. Sei Y ein 0-dimensinales Unterschema von $X=X_e$ oder $\mathbf{P}_k^2$ mit Länge$(Y)=d^2-dc_1+c_2$. Y erfülle die folgenden Bedingungen: Y sei ein Gorensteinschema mit der Cayley-Bacharach Eigenschaft bzgl. $\omega_X\otimes\mathcal{O}_X(2d-c_1)$ und $h^0(I_Y(d-v))\neq 0$, $h^0(I_Y(d-v-(1,0)))$ $=h^0(I_Y(d-v-(0,1)))=0$ bzw. $h^0(I_Y(d-v-1))=0$, $h^1(\mathcal{O}_X(2d-c_1-(0,1)))=$ $h^1(\mathcal{O}_X(c_1-d-v))=h^1(\mathcal{O}_X(c_1-d-v-(0,1)))=h^1(\mathcal{O}_X(c_1-d-v-(1,0)))=0$, dann sind alle 2-Bündel D von Typ d mit $Y(D)=Y$ in den Typ v deformierbar. In dem folgenden Satz zeigen wir, daß unter gewissen Bedingungen die Kodimension von $\mathrm{M}(d,v)$ explizit angegeben werden kann.

Satz 2.3.8. *Sei char* $(k)\neq 2$. *Seien* $\mathrm{M}(d)$ *und* $\mathrm{M}(v)$ *zwei grobe Modulräume für 2-Bündeln auf* $X=X_e$ *mit* $d>v\geq(0,0)$. *Sei* $\mathcal{O}_X(2d-c_1)$ *ein sehr amples Geradenbündel. Es gelte*

$$H^1(\mathcal{O}_X(c_1-d-v))=H^1(\mathcal{O}_X(c_1-d-v-(1,0)))=H^1(\mathcal{O}_X(c_1-d-v-(0,1)))$$
$$=H^1(\mathcal{O}_X(d-v-c_1+\mathcal{K}_X))=H^1(\mathcal{O}_X(d-v+\mathcal{K}_X))=0 \textit{ und}$$
$$(d_2-v_2)-(d_1-v_1)e\geq 0,\ 2v_2-c_{12}-(2v_1-c_{11})e\geq -1,\ d_1-v_1\geq 1$$

Falls $h^0(\mathcal{O}_X(d-v+\mathcal{K}_X))\geq v^2-vc_1+c_2$ *ist, dann enthält* $\mathrm{M}(d;v)$ *eine irreduzible Komponente von der Kodimension* $\dim Q(d)-\dim Q(v)+1$. *Damit ist* $\mathrm{M}(d,v)$ *von der Kodimension* $\dim Q(d)-\dim Q(v)+1$.

Beweis. Sei $\{E\}\in\mathrm{M}(v)$. Betrachten wir die folgende Standardextension ξ für E.

$$\xi:0\to\mathcal{O}_X(v)\to E\to I_Y(c_1-v)\to 0$$
$$\xi\otimes\mathcal{O}_X(d-c_1+\mathcal{K}_X):0\to\mathcal{O}_X(d+v-c_1+\mathcal{K}_X)\to E(d-c_1+\mathcal{K}_X)$$
$$\to I_Y(d-v+\mathcal{K}_X)\to 0$$

Es gilt $H^i(E(d-c_1+\mathcal{K}_X))\cong H^i(I_Y(d-v+\mathcal{K}_X))$ für $i\neq 0$.

Da $h^0(\mathcal{O}_X(d-v))\geq h^0(\mathcal{O}_X(d-v+\mathcal{K}_X))\geq h^0(\mathcal{O}_Y)=v^2-vc_1+c_2$ ist, existiert Y mit

$$h^1(I_Y(d-v))=h^2(I_Y(d-v))=h^1(I_Y(d-v+\mathcal{K}_X))=h^2(I_Y(d-v+\mathcal{K}_X))=0.$$

Damit ist $\mathrm{A}(d;v)\subset\mathrm{M}(v)$ die offene Menge von E mit $H^i(E(d-c_1+\mathcal{K}_X))=$ $H^i(E(d-c_1))=0$ für $i\neq 0$ nicht leer. Es gilt

$$\mathcal{K}_X=(-2,-2-e).$$

Sei f eine Faser mit $f \cap Y = \emptyset$. Dann gilt:

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^1}(v_1) \to E|_f \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^1}(c_{11} - v_1) \to 0$$

ist exakt. Daraus folgt, daß $E|_f \cong \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^1}(v_1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^1}(c_{11} - v_1)$. Tensoriert man die Sequenz

$$0 \to \mathcal{O}_X(0, -1) \xrightarrow{f} \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^1} \to 0$$

mit $E(d - v + \mathscr{K})$, so erhält man

$$\begin{aligned} 0 &\to E(d - c_1 - (2, 2 + e + 1)) \to E(d - c_1 - (2, 2 + e)) \\ &\to \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^1}(d_1 - c_{11} - 2 + v_1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^1}(d_1 - v_1 - 2) \to 0. \end{aligned}$$

Es folgt wegen $d_1 - v_1 \geq 1$, daß

$$H^2(E(d - c_1 - (2, 2 + e + 1))) = H^2(E(d - c_1 + \mathscr{K}_X)) = 0.$$

Wiederholen wir das gleiche Verfahren, so folgt $H^2(E(d - c_1 - (2, 2 + 2e))) = 0$. Ebenso ist

$$\begin{aligned} 0 &\to E(d - c_1 - (2, 2 + e)) \to E(d - c_1 - (2, 1 + e)) \\ &\to \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^1}(d_1 - c_{11} - 2 + v_1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^1}(d_1 - v_1 - 2) \to 0 \end{aligned}$$

exakt. Es folgt dann $H^1(E(d - c_1 - (2, 1 + e))) = H^1(E(d - c_1 + \mathscr{K}_X)) = 0$. Ohne Einschränkung nehmen wir an, daß der Schnitt C_0 von $X_e Y$ nicht schneidet, d.h. $C_0 \cap Y = \emptyset$. Dann erhält man:

$$\xi|_{C_0} : 0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^1}(v_2 - v_1 e) \to E|_{C_0} \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^1}(c_{12} - v_2 + (v_1 - c_{11})e) \to 0.$$

Da nach Voraussetzung $2v_2 - c_{12} - (2v_1 - c_{11})e \geq -1$ ist, ist $E|_{C_0}$ zerlegbar. Tensorieren von

$$\eta : 0 \to \mathcal{O}_X(-1, 0) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_{C_0} \to 0 \text{ mit } \mathcal{O}_{C_0} \cong \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^1}$$

ergibt $\eta \otimes E(d - c_1 - (1, 1 + e)) : 0 \to E(d - c_1 - (2, 1 + e)) \to E(d - c_1 - (1, 1 + e)) \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^1}(d_2 - c_{12} - (d_1 - c_{11})e - 1 + v_2 - v_1 e) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^1}(d_2 - v_2 - (d_1 - v_1)e - 1) \to 0$. Für $e = 0$ ist $d_2 - c_{12} - 1 + v_2 \geq -1$. Für $e \neq 0$ ist $d_2 - d_1 e \geq \frac{c_{12} - c_{11}e + 1}{2}$, da $\mathcal{O}_X(2d - c_1)$ ein sehr amples Geradenbündel ist. Zusätzlich mit den Voraussetzungen $v_2 - v_1 e \geq \frac{c_{12} - c_{11}e - 1}{2}$ und $(d_2 - v_2) - (d_1 - v_1)e \geq 0$ ist dann

$$h^1(E(d - c_1 - (1, 1 + e))) = 0.$$

Betrachten wir das sehr ample Geradenbündel $\mathcal{O}_X(H) \cong \mathcal{O}_X(1, 1 + e)$, dann ist $E(d - c_1)$ 0-regulär bzgl. H, d.h. $h^1(E(d - c_1 - H)) = h^2(E(d - c_1 - 2H)) = 0$. Aus der Standardextension für E ist $H^0(E(d - c_1))$ nach dem Verschwindungssatz von ([Mu] Lecture 14) global erzeugt. Es existiert ein $\tau \in H^0(E(d-c_1))$ mit $\operatorname{codim}(\tau)_0 = 2$ (siehe Beweis von [Wa] Lemma 3.3 (ii)). Man erhält

$$\xi_\tau : 0 \to \mathcal{O}_X \to E(d-c_1) \to I_{\overline{Y}}(2d-c_1) \to 0$$

mit Länge$(\overline{Y}) = c_2(E(d-c_1)) = d^2 - dc_1 + c_2$. Wir wenden Hom an und erhalten $\operatorname{Hom}(\xi_\tau \otimes \mathcal{O}_X(c_1-d),\ \mathcal{O}_X(c_1-d)) : 0 \to \operatorname{Hom}(I_{\overline{Y}}(d),\ \mathcal{O}_X(c_1-d)) \to \operatorname{Hom}(E, \mathcal{O}_X(c_1-d)) \to \operatorname{Hom}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) \to \operatorname{Ext}^1(I_{\overline{Y}}(d), \mathcal{O}_X(c_1-d)) \to \operatorname{Ext}^1(E, \mathcal{O}_X(c_1-d)) \to 0 \cdots$. Es gilt $\operatorname{Ext}^1(E, \mathcal{O}_X(c_1-d)) \cong H^1(E(d-c_1+\mathcal{K}_X)) = 0$ und

$$\operatorname{Hom}(E, \mathcal{O}_X(c_1-d)) \cong H^2(E(d-c_1+\mathcal{K}_X)) = 0.$$

Also ist $\dim \operatorname{Ext}^1(I_{\overline{Y}}(d), \mathcal{O}_X(c_1-d)) = 1$. Es sei

$$Z := \{(E,[\tau]) | E \in A(d;v), \tau \in H^0(E(d-c_1)), \tau \neq 0, \operatorname{codim}(\tau)_0 = 2\},$$

wobei $[\tau] \in \mathbf{P}(H^0(E(d-c_1))^\vee)$ die Klasse von τ ist.

Seien $(E, \tau^\vee)$, $(E', \tau'^\vee) \in Z$ mit $(\tau)_0 = (\tau')_0$, dann ist $E \cong E'$ und τ, τ' äquivalent unter der natürlichen Aktion von $\operatorname{Aut}(E)$ auf $H^0(E(d-c_1))$. Sei $\mathcal{E}$ eine lokale Familie von 2-Bündeln über $X \times U$, U offen in $\mathrm{M}(v)$.

Für $E \in \mathrm{A}(d;v)$ gilt $H^i(E(d-c_1)) = 0$ für $i \neq 0$ und $\chi(E(d-c_1)) = h^0(E(d-c_1))$. Sei $V := U \cap \mathrm{A}(d;v)$. Sei $\mathcal{E}|_{X\times V} := \mathcal{F}$. Für $\mathcal{F}$ gilt der Basiswechselsatz auf V. Betrachten wir das folgende kartesische Diagramm.

$$\begin{array}{ccc} X \times \mathbf{P}(\mathrm{Pr}_{2*}\mathcal{F}^\vee) & \xrightarrow{\mathrm{id}\times\pi} & X \times V \\ g\downarrow & & \downarrow \mathrm{Pr}_2 \\ \mathbf{P}(\mathrm{Pr}_{2*}\mathcal{F}^\vee) & \xrightarrow{\pi} & V \end{array}$$

$g : X \times \mathbf{P}(\mathrm{Pr}_{2*}\mathcal{F}^\vee) \to \mathbf{P}(\mathrm{Pr}_{2*}\mathcal{F}^\vee)$ sei die zweite Projektion.

Die natürliche Surjektion $\pi^*\mathrm{Pr}_{2*}\mathcal{F}^\vee \to \mathcal{O}(1) \to 0$ liefert einen injektiven Garbenhomomorphismus $j : \mathcal{O} \to \pi^*\mathrm{Pr}_{2*}\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}(1)$. Sei W eine offene Menge in $\mathbf{P}(\mathrm{Pr}_{2*}\mathcal{F}^\vee)$, so daß $\mathcal{O}(1)|_W$ trivial ist. $j|_W$ entspricht einem globalen Schnitt s von $\pi^*\mathrm{Pr}_{2*}\mathcal{F}|_W$. Wegen der Gültigkeit des Basiswechselsatzes ist

$$\pi^*\mathrm{Pr}_{2*}\mathcal{F} \cong g_*(\mathrm{id}\times\pi)^*\mathcal{F}.$$

Also ist s ein globaler Schnitt von $H^0(X \times W, (\mathrm{id}\times\pi)^*\mathcal{F})$. Dieser s liefert dann einen Garbenhomomorphismus $\theta : \mathcal{O} \to (\mathrm{id}\times\pi)^*\mathcal{F}|_{X\times W}$. Für $(E,[\tau]) \in Z \cap W$ liefert $\theta|_{X\times(E,\tau^\vee)}$ einen Koszulkomplex

$$\xi_\tau : 0 \to \mathcal{O}_X \to E(d-c_1) \to I_Y(2d-c_1) \to 0.$$

Nach Proposition 1.4.3 ist $s|_{Z\cap W}$ ein Schnitt der Kodimension 2. Folglich existiert eine Idealgarbe $\mathcal{J}$ von $X \times (Z \cap W)$ platt über $L := Z \cap W$. Nach der universelle Eigenschaft vom Hilbertschema $\mathbf{H}$ der 0-dimensionalen Unterschemata von X mit Länge $= d^2 - dc_1 + c_2$ existiert ein Morphismus $\varphi : L \to \mathbf{H}$, so daß $\mathcal{J} = (\mathrm{id}\times\varphi)^*\mathcal{J}_H$ ist, wobei $\mathcal{J}_H$ die universelle Idealgarbe von $X \times \mathbf{H}$ ist. Mit L

ist $\varphi(L)$ auch irreduzibel. Für eine offene Menge N in der offenen Menge L ist $\varphi(N)$ dicht $\varphi(L)$. Damit ist $\bar{\varphi}(L) := cl(\varphi(L))$ die abgeschlossene Hülle der Menge

$$R := \{(\tau)_0 \in \mathbf{H} \mid (E, [\tau]) \in Z\}.$$

Da L ein integres Schema über k ist, faktorisiert φ durch das integre Schema $\bar{\varphi}(L)$. Nach [Ha] Kap. 2 Aufg. 3.22 ist

$$\dim \bar{\varphi}(L) = \dim \mathrm{M}(v) + \chi(E(d - c_1)) - h^0(\mathcal{E}nd\, E).$$

Aus der Koszulkomplex ξ_τ folgt $\chi(E(d - c_1)) = \chi(I_Y(2d - c_1)) + 1$. Aus der exakten Sequenz $0 \to I_Y(2d - c_1) \to \mathcal{O}_X(2d - c_1) \to \mathcal{O}_Y \to 0$ folgt

$$\chi(I_Y(2d - c_1)) = \chi(\mathcal{O}_X(2d - c_1)) - (d^2 - dc_1 + c_2).$$

Nach Korollar 2.2.4 ist

$$\begin{aligned} \dim Q(d) &= v^2 - \chi(\mathcal{O}_X(2d - c_1)) + 3(d^2 - dc_1 + c_2) - 2 \\ &= v^2 - \chi(I_Y(2d - c_1)) + 2(d^2 - dc_1 + c_2) - 2 \\ &= v^2 + 2(d^2 - dc_1 + c_2) - \chi(E(d - c_1)) - 1. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\operatorname{codim} \bar{\varphi}(L) = 2(d^2 - dc_1 + c_2) - \chi(E(d - c_1)) - (\dim \mathrm{M}(v) - h^0(\mathcal{E}nd\, E))$$

Also ist $\operatorname{codim} \bar{\varphi}(L) = \dim Q(d) - \dim Q(v) + 1$.

Da $\mathcal{O}_X(2d - c_1)$ ein sehr amples Geradenbündel ist, existiert ein globaler Schnitt F in $H^0(\mathcal{O}_X(2d - c_1))$, der das in Satz 2.3.7 vorgegebene 0-dimensionale Unterschema Y von X nicht schneidet. Die Voraussetzungen von Satz 2.3.7 sind erfüllt. Folglich enthält $\mathrm{M}(d, v)$ eine irreduzible Komponente von der Kodimension $\dim Q(d) - \dim Q(v) + 1$. Nach Bemerkung 2.2.7 ist dann

$$\operatorname{codim} \mathrm{M}(d; v) = \dim Q(d) - \dim Q(v) + 1.$$

Korollar 2.3.9. *Sei* $\operatorname{char}(k) \neq 2$. *Für 2-Bündel vom Typ d auf* $\mathbf{P}_k^1 \times \mathbf{P}_k^1$ *mit* $c_1 = c_2 = 0$ *ist*

$$\operatorname{codim} \mathrm{M}(d; (0,0)) = \max\{2(d_1 - 1)(d_2 - 1) - 1, 0\}.$$

Beweis.: Korollar 2.2.4, Satz 2.2.8, Satz 2.3.8.

Bemerkung 2.3.10. Für den Satz 2.3.8 entsprechenden Satz im Fall $\mathbf{P}_k^2$ siehe man [St] 4.7 Theorem.

Sei E ein 2-Bündel von Typ $v \geq (0,0)$. Für $(0,0) < b \leq d - c_1 + v$ betrachten wir die zu $H^0(E(d - c_1 - b))$, $H^0(\mathcal{O}_X(b))$ und $H^0(E(d - c_1))$ gehörendenden projektiven Räume. Man betrachte den folgenden projektiven Morphismus:

$$\mathbf{P}(\varphi(b)) : \mathbf{P}(H^0(E(d - c_1 - b))) \times \mathbf{P}(H^0(\mathcal{O}_X(b))) \to \mathbf{P}(H^0(E(d - c_1)))$$

mit $\varphi(b)(\tau, F) = \tau F \in H^0(E(d - c_1))$.

Es ist klar, daß $\dim \operatorname{Im} \varphi(b) \leq h^0(E(d-c_1-b)) - 1 + h^0(\mathcal{O}_X(b)) - 1$ und $\operatorname{Im} \varphi(b)$ abgeschlossen in $\mathbf{P}(H^0(E(d-c_1)))$ ist. Vorausgesetzt sei

$$\dim \mathrm{P}(H^0(E(d-c_1))) = h^0(E(d-c_1)) - 1 > \dim \operatorname{Im} \varphi(b)$$

für alle b mit $(0,0) < b \leq (d - c_1 + v)$. Dann sind alle $(\tau)_0$ für

$$\tau \in H^0(E(d-c_1)) \Big\backslash \bigcup_{(0,0)<b \leq d-c_1+v} \operatorname{Im} \varphi(b)$$

von der Kodimension 2. Also ist die Menge der 2-codimensionalen globalen Schnitte von $H^0(E(d-c_1))$ offen in $\mathbf{P}(H^0(E(d-c_1)))$.

Jetzt stellen wir einige hinreichende Bedingungen für die Existenz der 2-codimensionalen globalen Schnitten von $H^0(E(d-c_1))$ für den Fall

$$h^0(\mathcal{O}_X(d - v + \mathcal{K}_X)) < v^2 - vc_1 + c_2$$

auf.

Der Fall (1): Es sei $h^0(\mathcal{O}_X(d-v)) > v^2 - vc_1 + c_2$. Im diesen Fall werde $(d_2 + v_2 - c_{12} - 2 - e) \geq (d_1 + v_1 - c_{11})e$ und $(d_2 - v_2 - 2 - e) \geq (d_1 - v_1)e$ vorausgesetzt. Dann ist $h^1(\mathcal{O}_X(d + v - c_1 - b)) = h^1(\mathcal{O}_X(d - v - b)) = 0$ für

$$d - v - b \geq (0,0), \quad (0,0) < b = (b_1, b_2) < -\mathcal{K}_X = (2, 2+e).$$

$$\begin{aligned} \mathrm{A}(d;v) := \{\{E\} \in \mathrm{M}(v) | &h^0(I_{Y(E)}(d-v-b)) \\ &= \max\{h^0(\mathcal{O}_X(d-v-b)) - (v^2 - vc_1 + c_2), 0\}; 0 \leq b < d - v\} \end{aligned}$$

$\mathrm{A}(d;v)$ ist offen in $\mathrm{M}(v)$. Betrachten wir die Tensorierung der Standardextension ξ_E von E mit $\mathcal{O}_X(d - c_1 - b)$:

$$0 \to \mathcal{O}_X(d + v - c_1 - b) \to E(d - c_1 - b) \to I_{Y(E)}(d - v - b) \to 0.$$

Da nach Voraussetzung $h^1(\mathcal{O}_X(d + v - c_1 - b)) = 0$ für $d - v - b \geq (0,0)$ ist, ist

$$h^0(E(d-c_1-b)) = h^0(\mathcal{O}_X(d+v-c_1-b)) + h^0(I_{Y(E)}(d-v-b)).$$

Zu zeigen ist $h^0(E(d-c_1)) - 1 - \dim \operatorname{Im} \varphi(b) > 0$ für $E \in \mathrm{A}(d;v)$ und alle b mit $(0,0) < b < (2, 2+e)$. Es reicht für b mit

$$h^0(I_{Y(E)}(d-v-b)) = h^0(\mathcal{O}_X(d-v-b)) - (v^2 - vc_1 + c_2) > 0$$

zu zeigen, daß

$$\begin{aligned} \vartheta(b) := h^0(\mathcal{O}_X(d-v)) + h^0(\mathcal{O}_X(d+v-c_1)) - h^0(\mathcal{O}_X(d+v-c_1-b)) \\ - h^0(\mathcal{O}_X(d-v-b)) - h^0(\mathcal{O}_X(b)) + 1 > 0 \text{ ist.} \end{aligned}$$

Nach Proposition 1.3.1 gilt

$$h^0(\mathcal{O}_X(f)) - h^0(\mathcal{O}_X(f-b)) = (f_1 + 1)\left(b_2 - \frac{b_1}{2}e\right) + b_1\left(f_2 - b_2 + 1 - \frac{(f_1 - b_1)}{2}e\right)$$

für $f = (f_1, f_2) \geq b$ mit $f_2 \geq f_1 e$ und $(f_2 - b_2) \geq (f_1 - b_1)e$.

Aus den Voraussetzungen folgt $2d_2 - c_{12} - (2d_1 - c_{11})e \geq 4 + 2e$. Dann gelten die folgende Ungleichungen. Setzen wir $h^0(\mathcal{O}_X(0, b_2)) = b_2 + 1$ und $f = d - v,\ d + v - c_1 - b$ in $\vartheta(0, b_2)$ ein. Dann ist $\vartheta(0, b_2) = b_2(2d_1 - c_{11} + 1) > 0$.

Für den Fall $b = (1, b_2)$ mit $e \leq b_2 \leq 2 + e$ ist

$$\vartheta(1, b_2) = 2d_2 - c_{12} - (2d_1 - c_{11})e + (2d_1 - c_{11} - 2)b_2 + 1 + 2e > 0.$$

Für $b_1 = 1, 0 \leq b_2 < e$ ist

$$\vartheta(1, b_2) = 2d_2 - c_{12} - (2d_1 - c_{11})e + (2d_1 - c_{11} - 1)b_2 + 2 + e > 0.$$

Für $e \neq 0$ und $b_2 = e,\ 1 + e$ ist $h^0(\mathcal{O}_X(2, b_2)) = 2(b_2 + 1) - e$. Im diesen Fall ist $\vartheta(2, b_2) = 2(2d_2 - c_{12} - (2d_1 - c_{11})e) + (2d_1 - c_{11} - 4)b_2 + 3 + e > 0$.

Für $e \neq 0$ und $b_1 = 2,\ 0 \leq b_2 < e$ ist

$$\vartheta(2, b_2) = 2(2d_2 - c_{12} - (2d_1 - c_{11})e) + (2d_1 - c_{11} - 3)b_2 + 4 > 0.$$

Für $e = 0$ ist $\vartheta(2, b_2) = 2(2d_2 - c_{12}) + (2d_1 - c_{11} - 5)b_2 + 2 > 0$. Für jedes $E \in \mathrm{A}(d; v)$ mit den Bedingungen vom Fall (1) existiert eine nicht leere offene Untermenge von $\mathbf{P}(H^0(E(d - c_1)))$, so daß jedes Element davon ein Nullstellenschema von der Kodimension 2 für den entsprechenden globalen Schnitt besitzt.

Der Fall (2): Es sei $h^0(\mathcal{O}_X(d - v)) \leq v^2 - vc_1 + c_2$ mit $d_2 + v_2 - c_{12} \geq (d_1 + v_1 - c_{11})e$ und $\mathcal{O}_X(d - v)$ sei ein sehr amples Geradenbündel auf X. Im diesen Fall setzen wir

$$\mathrm{A}(d; v) := \{\{E\} \in \mathrm{M}(v) \mid h^0(I_{Y(E)}(d - v)) = 1, h^0(I_{Y(E)}(d - v - b)) = 0, b > (0,0)\}$$

Da nach Voraussetzung ein 0-dimensionales Unterschema Y (Länge$(Y) = v^2 - vc_1 + c_2$) von X mit $h^0(I_Y(d - v)) = 1$ und $h^0(I_Y(d - v - b)) = 0$ für $(0,0) < b < (d - v)$ existiert, ist $\mathrm{A}(d; v)$ nicht leer. $\mathrm{A}(d; v)$ ist lokalabgeschlossen in $\mathrm{M}(v)$. Zusammgefaßt haben wir die folgende

Proposition 2.3.11. *Sei $d > v \geq (0,0)$ und $\mathcal{O}_X(2d - c_1)$ ein sehr amples Geradenbündel auf $X = X_e$. Dann ist $\mathrm{M}(d; v)$ nicht leer, falls die folgende Bedingungen erfüllt sind.*

Ist $\chi(\mathcal{O}_X(d - v + \mathcal{K}_X)) = h^0(\mathcal{O}_X(d - v + \mathcal{K}_X)) \geq v^2 - vc_1 + c_2$, so gelte

$$h^1(\mathcal{O}_X(c_1 - d - v)) = 0, \quad 2v_2 - c_{12} - (2v_1 - c_{11})e \geq -1,$$

$$d_2 - v_2 \geq (d_1 - v_1)e \quad \text{und } d_1 - v_1 \geq 1$$

Ist $h^0(\mathcal{O}_X(d - v + \mathcal{K}_X)) < v^2 - vc_1 + c_2$, so gelte Fall (1) : $h^0(\mathcal{O}_X(d - v)) > v^2 - vc_1 + c_2$ mit

$$d_2 + v_2 - c_{12} - 2 - e \geq (d_1 + v_1 - c_{11})e \quad \text{und } d_2 - v_2 - 2 - e \geq (d_1 - v_1)e.$$

Fall (2) : $h^0(\mathcal{O}_X(d - v)) \leq v^2 - vc_1 + c_2$ mit $d_2 + v_2 - c_{12} \geq (d_1 + v_1 - c_{11})e$ und $\mathcal{O}_X(d - v)$ sei ein sehr amples Geradenbündel auf X.

Beweis.: Für die Existenz der notwendigen globalen Schnitte bei der Anwendung von der Monade von Strømme siehe man den Beweis von Satz 2.3.8 und das obige Argument für den Fall (1) und (2). Die Bedingung, daß das Geradenbündel $\mathcal{O}_X(2d - c_1)$ sehr ampel ist, garantiert die Existenz eines globalen Schnitts in $H^0(\mathcal{O}_X(2d - c_1))$, der das vorgegebene 0-dimensionales Unterschema Y nicht schneidet. Nach Lemma 2.3.1, 2.3.3 und Proposition 2.3.6 folgt dann die Behauptung.

Bemerkung 2.3.12. Es kann sein, daß auch wenn die Bedingungen von Proposition 2.3.11 nicht erfüllt sind, $\mathrm{M}(d; v)$ nicht leer ist. Man vergleiche Satz 2.2.8 und Bemerkung 2.2.9. Bis jetzt ist $d^2 - dc_1 + c_2 \geq v^2 - vc_1 + c_2$ immer erfüllt, falls ein 2-Bündel vom Typ d sich in den Typ v deformieren läßt. Ist dies auch eine notwendige Bedingung dafür, daß ein 2-Bündel vom Typ d in den Typ v deformierbar ist?

Sei $\mathrm{char}(k) \neq 2$. Seien $\mathrm{M}(d)$, $\mathrm{M}(v)$ zwei grobe Modulräume von den instabilen 2-Bündeln vom Typ d bzw. v auf $X = X_e$.

Unter den Bedingungen von Proposition 2.3.11 für den Fall $h^0(\mathcal{O}_X(d - v + \mathcal{K}_X)) < v^2 - vc_1 + c_2$ untersuchen wir eine mögliche Abschätzung von $\dim \mathrm{M}(d; v)$. Für den Fall (2) brauchen wir zusätzlich noch die folgende Voraussetzungen:

$$h^1(\mathcal{O}_X(d + v - c_1)) = h^1(\mathcal{O}_X(c_1 - d - v - b)) = 0, \quad b = (0, 0), (0, 1), (1, 0).$$

Da nach Voraussetzung $h^i(\mathcal{O}_X(d - v)) = 0$ für $i \neq 0$ ist, ist $\chi(\mathcal{O}_X(d - v)) = h^0(\mathcal{O}_X(d - v))$. Also ist

$$\chi(I_{Y(E)}(d - v)) = h^0(\mathcal{O}_X(d - v)) - (v^2 - vc_1 + c_2),$$

wobei $I_{Y(E)}$ die zu E gehörige Standardidealgarbe. Zuerst betrachten wir den Fall (1) $\chi(I_Y(d - v)) > 0$. Da $h^0(\mathcal{O}_X(d - v)) > v^2 - vc_1 + c_2$ ist, ist

$$h^0(I_{Y(E)}(d - v)) \geq h^0(\mathcal{O}_X(d - v)) - (v^2 - vc_1 + c_2) > 0.$$

$$Z := \{(E, k^*\tau^\vee) \mid E \in \mathrm{A}(d; v), \tau \in H^0(E(d - c_1)) \text{ mit } \operatorname{codim}(\tau)_0 = 2\}$$

Aus der langen exakten Sequenz für

$$\xi(E) : 0 \to \mathcal{O}_X(d + v - c_1) \to E(d - c_1) \to I_{Y(E)}(d - v) \to 0$$

folgt dann $h^i(E(d - c_1)) = 0$ für $i \neq 0$ und $\chi(E(d - c_1)) = h^0(E(d - c_1))$. Sei $(E, \tau^\vee) \in Z$ mit $E \in \mathrm{A}(d; v)$. Es gilt der folgende Koszulkomplex

$$\xi_\tau : 0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\tau} E(d - c_1) \xrightarrow{\tau\wedge} I_Y(2d - c_1) \longrightarrow 0.$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(\xi_\tau \otimes \mathcal{O}_X(c_1 - d), \mathcal{O}_X(c_1 - d)) : \cdots 0 &\to H^0(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) \\ &\to \mathrm{Ext}^1(I_Y(d), \mathcal{O}_X(c_1 - d)) \\ &\to \mathrm{Ext}^1(E, \mathcal{O}_X(c_1 - d)) \to 0 \cdots \end{aligned}$$

Es folgt dann $\dim \operatorname{Ext}^1(I_Y(d), \mathcal{O}_X(c_1 - d)) = 1 + h^1(E(d - c_1 + \mathcal{K}_X))$. Aus der langen exakten Sequenz für $\xi(E) \otimes \mathcal{O}_X(\mathcal{K}_X)$ folgt wegen $h^1(\mathcal{O}_X(d + v - c_1 + \mathcal{K}_X)) = 0$ die Gleichung $h^1(E(d - c_1 + \mathcal{K}_X)) = h^1(I_{Y(E)}(d - v + \mathcal{K}_X))$.

Aus der langen exakten Sequenz für

$$0 \to I_{Y(E)}(d - v + \mathcal{K}_X) \to \mathcal{O}_X(d - v + \mathcal{K}_X) \to \mathcal{O}_{Y(E)} \to 0$$

folgt $h^1(I_{Y(E)}(d - v + \mathcal{K}_X)) = \delta + h^0(I_{Y(E)}(d - v + \mathcal{K}_X))$, wobei

$$\delta := v^2 - vc_1 + c_2 - h^0(\mathcal{O}_X(d - v + \mathcal{K}_X)) \text{ ist.}$$

Da $E \in \mathrm{A}(d; v)$ ist, ist $h^0(I_{Y(E)}(d - v + \mathcal{K}_X)) = 0$. Also ist

$$\dim \operatorname{Ext}^1(I_Y(d), \mathcal{O}_X(c_1 - d)) = 1 + \delta.$$

Es läuft dann wie im Beweis von Satz 2.3.8. Der Unterschied ist die Dimension von $\operatorname{Ext}^1(I_Y(d), \mathcal{O}_X(c_1 - d))$. Damit enthält $\mathrm{M}(d; v)$ nach [Ha] Aufg. 3.22 Kap. 2 eine irreduzible Komponente höchst von der Kodimension

$$\dim Q(d) - \dim Q(v) + 1 + \delta.$$

Für den Fall (2) $\chi(I_{Y(E)}(d - v)) = h^0(\mathcal{O}_X(d - v)) - (v^2 - vc_1 + c_2) \leq 0$ existiert $Y(E)$ mit $h^0(I_{Y(E)}(d - v)) = 0$. Also ist die Menge

$$\mathrm{A}(d; v) := \{E \in \mathrm{M}(v) \mid h^0(I_{Y(E)}(d - v)) = 1;\ h^0(I_{Y(E)}(d - v - b)) = 0,\ b > (0,0)\}$$

nicht mehr offen in $\mathrm{M}(v)$. Da $\mathcal{O}_X(d - v)$ nach Voraussetzung ein sehr amples Geradenbündel ist, bestimmen $h^0(\mathcal{O}_X(d - v)) - 1$ Punkte in X eindeutig eine Kurve. Die übrige $v^2 - vc_1 + c_2 - h^0(\mathcal{O}_X(d - v)) + 1$ Punkten können sich nur auf dieser Kurve frei bewegen. Also $2(h^0(\mathcal{O}_X(d - v)) - 1)$ Freiheiten sind für die Punkte, die die Kurven bestimmen. Nach dieser geometrischen Vorstellung sollte

$$\begin{aligned}
\dim \mathrm{A}(d; v) &= (2(h^0(\mathcal{O}_X(d - v)) - 1) + v^2 - vc_1 + c_2 - (h^0(\mathcal{O}_X(d - v)) - 1) \\
&\quad + v^2 - vc_1 + c_2 - 1 \\
&= 2(v^2 - vc_1 + c_2) + h^0(\mathcal{O}_X(d - v)) - 2 \\
&= \dim \mathrm{M}(v) + h^0(\mathcal{O}_X(d - v)) - 1 - (v^2 - vc_1 + c_2) \text{ sein.}
\end{aligned}$$

Die Aussage von $\dim \mathrm{A}(d; v)$ bleibt noch zu überprüfen!

Zu zeigen ist $h^1(E(d - c_1)) = v^2 - vc_1 + c_2 - h^0(\mathcal{O}_X(d - v)) + 1$. Es folgt aus der langen exakten Sequenz für $\xi(E)$, daß $h^1(E(d - c_1)) = h^1(I_{Y(E)}(d - v))$ ist. Wegen der langen exakten Sequenz für die exakte Sequenz der Idealgarbe $I_{Y(E)}(d - v)$ gilt $h^1(I_{Y(E)}(d - v)) = v^2 - vc_1 + c_2 - h^0(\mathcal{O}_X(d - v)) + 1$. Folglich ist

$$\dim \mathrm{A}(d; v) = \dim \mathrm{M}(v) - h^1(E(d - c_1)).$$

Für die lokale Familie von 2-Bündeln $\mathcal{E}$ über die offen Menge U einer irreduziblen Komponente von $\mathrm{A}(d; v)$ gilt der Basiswechselsatz, da $h^1(E(d - c_1))$ konstant ist.

$$\dim \mathbf{P}(\mathrm{Pr}_{2*}\mathscr{E}^\vee) = \dim \mathrm{A}(d;v) + h^0(E(d-c_1)) - 1 = \dim \mathrm{M}(v) - \chi(E(d-c_1)) - 1$$

Es läuft wie im Beweis von Satz 2.3.8 und durch die Benutzung von [St] 4.11 Lemma (eventuell mit Modifizierung). Dann enthält $\mathrm{M}(d;v)$ eine irreduzible Komponente mit maximaler Kodimension $\dim Q(d) - \dim Q(v) + 1 + \delta$. Ich denke, daß sich dies mathematisch präzise durchfüren läßt.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
SCHOOL OF SCIENCE
MING CHUAN UNIVERSITY

Literaturverzeichnis

[AK] A. Altman and St. Kleiman, Introduction to Grothendieck duality Theory, Lecture Notes in Math. 146, Springer Verlag, 1970.

[Ba] W. Barth, Moduli of vector bundles on the projective plane, Invent. Math., **42** (1977).

[Bă] C. Bănică, Topologisch triviale holomorphe Vektorbündel auf $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, Crelle's J., **344** (1983).

[Br] J. E. Brosius, Rank-2 Vector Bundles on a Ruled Surface I, II, Math. Ann., **265** (1983) und **266** (1983).

[BP] C. Bănică, M. Putinar and G. Schumacher, Variation der globarlen Ext in Deformationen kompakter Komplexer Räume, Math. Ann., **250** (1980).

[BS] C. Bănică and O. Stănasilă, Algebraic Methods in the global Theory of complex spaces, New York, Wiley, 1976.

[FK] O. Forster and K. Knorr, Über die Deformationen von Vektorraumbündeln auf kompakten komplexen Räumen, Math. Ann., **209** (1974).

[Fo] I. Fogarty, Algebric families on an algebraic surface, Amer. J. Math., **90** (1968).

[Fu] W. Fulton, Intersection Theory, Erg. der Math., 3.Folge, Band 2, Springer Verlag, 1984.

[GH] P. Griffiths and J. Harris, Principles of Algebraic Geometry, J. Wiley & Sons, New York, 1978.

[Gr] A. Grothendieck, Techniques de construction et Théorèmes déxistece en géométrie algébrique: Les schémas de Hilbert, Sém. Bourbaki 1960/61, exposé 221.

[Ha] R. Hartshorne, Algebraic Geometry, Springer Verlag, 1977.

[Has] R. Hartshorne, Stable vector bundles of rank 2 on $\mathbf{P}^3$, Math. Ann., **238** (1978).

[Ho] H. J. Hoppe, Modulräume stabiler Vektorbündel vom Rang 2 auf rationalen Regelflächen, Math. Ann., **264** (1983).

[HS] H. J. Hoppe and H. Spindler, Modulräume stabiler 2-Bündel auf Regelflächen, Math. Ann., **249** (1980).

[Hu] K. Hulek, Stable rank-2 vector bundles on $\mathbf{P}^2$ with c_1 odd, Math. Ann., **242** (1979).

[Kl] S. Kleiman, Relative duality for quasi-coherent sheaves, Composition Math., **41** (1980).

[Kr] M. Kreuzer, Vektorbündel und der Satz von Cayley-Bacharach, Dissertation Universität Regensburg, 1989.

[Lan] S. Lang, Algebra, Addison-Wesley, 3. edtion, 1993.

[Lau] O. A. Laudal, Formal moduli of algebraic structures, Lecture notes in Mathematics 754, Spinger Verlag, 1979.

[Mar1] M. Maruyama, Stable vector bundles on an algebraic surface, Nogoya Math. J., **58** (1975).

[Mar2] M. Maruyama, Moduli of stable sheaves, II. J. Math. Kyoto Univ., **18** (1978).

[Mar3] M. Maruyama, On boundedness of families of torsion free sheaves, J. Math. Kyoto Univ., **21** (1981).

[Mat] H. Matsumura, Commutative Algebra, W. A. Benjamin, (1980).

[Mu] D. Mumford, Lectures on curves on an algebraic surface, Annals of Math. Studies 59.

[Mum] D. Mumford, The Red Book of Varieties and Schemes, Lecture Notes in Mathematics 358, Springer Verlag.

[OS] Ch. Okonek, M. Schneider and H. Spindler, Vector bundles on complex projective spaces, Birkhäuser, 1987.

[Scha] U. Schafft, Nichtsepariertheit instabiler Rang-2-Vektorbündel auf $\mathbf{P}^2$, Dissertation Göttingen, 1980.

[Sch] M. Schlessinger, Functor of Artin Rings, Trans. Am. Math. Soc., **130** (1968).

[St] S. A. Strømme, Deforming vector bundles on the projective plane, Math. Ann., **263** (1983).

[Wa] C. H. Walter, Components of the Stack of Torsion-Free Sheaves of Rank 2 on Ruled Surfaces, Laboratoire de Mathématiques; Université de Nice, 1993, preprint.