

MODULARE UNTERGRUPPEN ENDLICHER GRUPPEN

VON
ROLAND SCHMIDT

Einleitung

Die Untergruppe M der Gruppe G heißt *modular in G* , wenn M mit jeder Untergruppe von G ein modulares Paar von Untergruppen von G bildet (s. [8], S.7), d.h. wenn gilt:

$$(U \cup M) \cap V = U \cup (M \cap V) \quad \text{für alle } U, V \subseteq G \text{ mit } U \subseteq V$$

und

$$(U \cup M) \cap V = (U \cap V) \cup M \quad \text{für alle } U, V \subseteq G \text{ mit } M \subseteq V.$$

Bekanntlich (s. [8], Th. 5, S. 5) ist ein Quasinormalteiler, also eine Untergruppe, die mit jeder Untergruppe von G vertauschbar ist, modular in G . Daß die Umkehrung nicht gilt, zeigt etwa das Beispiel der nichtabelschen Gruppe der Ordnung 6, in der die 2-Sylowgruppen zwar modular, aber nicht quasinormal sind. Die modularen Untergruppen sind also eine echte Verallgemeinerung der Quasinormalteiler, die ihrerseits eine Verallgemeinerung der Normalteiler darstellen.

Ziel unserer Arbeit ist es, zu zeigen, daß in endlichen Gruppen die modularen Untergruppen ziemlich nahe daran sind, Normalteiler zu sein. Genauer: wir wollen zeigen, daß die Struktur der Faktorgruppe des minimalen M enthaltenden Normalteilers M^G von G nach dem maximalen in M enthaltenen Normalteiler M_G von G und die Struktur der von G in M^G/M_G induzierten Automorphismengruppe recht stark eingeschränkt sind, wenn M modular in G ist. Wir erhalten die folgenden Ergebnisse:

Sei M modular in der endlichen Gruppe G . Dann gilt:

- (a) M/M_G ist nilpotent (§5, Satz 2),
- (b) M^G/M_G ist überauflösbar (§5, Satz 4) und
- (c) $G/C_G(M^G/M_G)$, d.h. die von G in M^G/M_G induzierte Automorphismengruppe, ist auflösbar der Nilpotenzlänge ≤ 3 (§6, Satz 5).

Die Aussage (a) ist eine Verallgemeinerung eines Satzes von Ito und Szép über Quasinormalteiler (s. [6], Satz 1, S. 168). Die Aussage (b) kann im Falle, daß M quasinormal in G ist, verschärft werden zu: M^G/M_G ist nilpotent (§5, Satz 3). Eine unmittelbare Folge von (a) und (c) ist, daß eine modulare Untergruppe einer perfekten Gruppe sowie eine perfekte modulare Untergruppe einer beliebigen endlichen Gruppe Normalteiler sind (§6, Korollar zu Satz 5). Dieses Ergebnis ist eine Verallgemeinerung eines Satzes

Received August 21, 1967.

von Kegel über Quasinormalteiler (s. [7], Satz 3, S. 211). Es ist ein Beispiel dafür, daß aus der Modularität einer Untergruppe unter geeigneten Zusatzvoraussetzungen ihre Normalität folgen kann.

Haupt Hilfsmittel beim Beweis dieser Sätze sind Ergebnisse über modulare Untergruppen M endlicher Gruppen G mit Primzahlpotenzindex bzw. mit Ketten als Faktorverband $[G/M]$, die vielleicht auch von unabhängigem Interesse sind:

(d) Ist $[G:M] = p^n$ (p Primzahl), so ist G/M_G entweder eine p -Gruppe oder eine P -Gruppe (s. §1) der Ordnung $p^n q$, q Primzahl, $p > q$ (§4, Satz 1).

(e) Ist $[G/M]$ eine Kette (d.h. durch Inklusion geordnet), so ist entweder G/M_G eine p -Gruppe oder M maximal in G und $o(G/M_G) = pq$, p, q Primzahlen (§4, Lemma 3).

Die Bedeutung der modularen Untergruppen liegt darin, daß ihre Bilder unter Verbandsisomorphismen wieder modulare Untergruppen sind (während Normalteiler und Quasinormalteiler i. allg. nicht wieder auf Normalteiler bzw. Quasinormalteiler abgebildet werden). Insbesondere sind also die Bilder von Normalteilern unter Verbandsisomorphismen modulare Untergruppen der Bildgruppe. Unter Benutzung dieser Tatsache lassen sich mit Hilfe unserer Ergebnisse über die modularen Untergruppen endlicher Gruppen eine Reihe der bekannten Sätze über nicht normale Verbandsisomorphismen beweisen—z. B. [8], II, Prop. 2.11., 2.12., Th. 13, Th. 14, (1) und (3)—; insbesondere folgt aus (e) sofort, daß Bilder auflösbarer bzw. perfekter endlicher Gruppen unter Verbandsisomorphismen wieder auflösbar bzw. perfekt sind (s. [8], II, Th. 9 und 10).

Der erste Teil dieser Arbeit entstand während eines sechswöchigen Studienaufenthaltes bei Herrn Prof. Dr. G. Zacher in Padua. Ihm und Herrn Prof. Dr. R. Baer, der die Arbeit anregte, möchte ich für ihre wertvollen Ratschläge und Hinweise sehr herzlich danken.

1. Bezeichnungen und Vorbemerkungen

Wir betrachten nur endliche Gruppen; "Gruppe" bedeutet also immer endliche Gruppe.

Wir werden die folgenden mehr oder weniger üblichen Bezeichnungen stets benützen und stellen sie hier deshalb zum Nachschlagen zusammen.

Sei G eine Gruppe, U and V Untergruppen von G ($U, V \subseteq G$), W ein Normalteiler von V , g ein Element von G ($g \in G$) und p eine Primzahl. Dann bezeichnen wir mit

- $o(G)$ die Ordnung von G ,
- $\Phi(G)$ die Frattiniuntergruppe von G (= Durchschnitt aller maximalen Untergruppen von G),
- $\mathfrak{U}(G)$ den Untergruppenverband von G ,
- $U_p(G)$ den minimalen Normalteiler mit p -Faktorgruppe von G ,

$[G:U]$	den Index von U in G ,
$[G/U]$	den Verband aller $X \in \mathfrak{U}(G)$ mit $U \subseteq X \subseteq G$,
$U \cup V$	die minimale U und V enthaltende Untergruppe von G ,
$U \cap V$	den Durchschnitt von U und V ,
UV	die Menge aller uv mit $u \in U$ und $v \in V$,
U^g	die Menge aller $g^{-1}ug$ mit $u \in U$,
U^G	die normale Hülle von U in G ($= \bigcup_{x \in G} U^x$), d.h. den minimalen U enthaltenden Normalteiler von G ,
U_G	das Herz von U in G ($= \bigcap_{x \in G} U^x$), d.h. den maximalen in U enthaltenen Normalteiler von G ,
$N_G(U)$	den Normalisator von U in G ,
$C_U(V/W)$	den Zentralisator von V/W in U ,
$\{g\}$	die von g erzeugte Untergruppe von G .

Weiter bedeutet

$U \triangleleft G$: U ist normal in G ,

$U \triangleleft_q G$: U ist quasinormal in G , d.h. $UX = XU$ für alle $X \subseteq G$,

$H \cong K$: H ist isomorph zu K , wenn H und K zwei Gruppen oder Verbände sind.

G ist eine P -Gruppe (s. [8], S. 11), wenn G entweder eine elementarabelsche p -Gruppe ist oder von Elementen a_1, \dots, a_n und b erzeugt wird mit $a_i^p = b^q = 1$, $a_i a_j = a_j a_i$, $ba_i b^{-1} = a_i^r$ mit $r^q \equiv 1 \pmod{p}$, $r \not\equiv 1 \pmod{p}$, p und q Primzahlen, $p \neq q$. [Der Untergruppenverband einer nichtabelschen P -Gruppe der Ordnung $p^n q$ ist isomorph zu dem einer elementarabelschen p -Gruppe der Ordnung p^{n+1} . Damit ist auch jeder Faktorverband $[G/U]$ nach einer Untergruppe U einer P -Gruppe G isomorph zum Untergruppenverband einer elementarabelschen p -Gruppe.]

2. Definition und einfache Eigenschaften der modularen Untergruppen

DEFINITION. (a) Sei \mathfrak{B} ein Verband. Das Element M aus \mathfrak{B} heißt *modular in* \mathfrak{B} (kurz: $M \text{ m}\mathfrak{B}$), wenn gilt:

(i) $(U \cup M) \cap V = U \cup (M \cap V)$ für alle $U, V \in \mathfrak{B}$ mit $U \subseteq V$ und

(ii) $(U \cup M) \cap V = (U \cap V) \cup M$ für alle $U, V \in \mathfrak{B}$ mit $M \subseteq V$.

(b) Sei G eine Gruppe. Die Untergruppe M von G heißt *modular in* G (kurz: $M \text{ m}G$), wenn M modular in $\mathfrak{U}(G)$ ist.

M ist also modular in G , wenn M —in der Terminologie von Suzuki (s. [8], S. 7)—mit jeder Untergruppe U von G ein modulares Paar von Untergruppen von G bildet.

Wir geben nun einige Eigenschaften der modularen Untergruppen, die nicht nur für Gruppen, sondern sogar für modulare Elemente beliebiger Verbände gelten und deren Beweise man in [9], S. 72–76, finden kann, wo diese modularen Elemente “Dedekind elements” genannt werden.

(2.1) Genau dann ist M modular in der Gruppe G , wenn für jede Untergruppe U von G die Abbildung

$$\varphi_u : [U \cup M/M] \in V \rightarrow V \cap U \in [U/U \cap M]$$

ein Isomorphismus von $[U \cup M/M]$ auf $[U/U \cap M]$ ist (s. [9], S. 72).

(2.2) Ist M modular in G und U eine Untergruppe von G , so ist $M \cap U$ modular in U (s. [9], Eigenschaft III, S. 74).

(2.3) Ist M modular in G und die Untergruppe N von G modular in $[G/M]$, so ist N modular in G (s. [9], Eigenschaft IV, S. 75).

(2.4) Ist M modular in G und N ein in M enthaltener Normalteiler von G , so ist M/N modular in G/N (s. [9], Eigenschaft IV, S. 75).

(2.5) Sind M_1 und M_2 modular in G , so ist auch $M_1 \cup M_2$ modular in G (s. [9], Eigenschaft V, S. 75).

Schließlich noch eine Eigenschaft, die zwar trivial ist, die aber später dauernd benutzt wird:

(2.6) Ist M modular in G und σ ein Verbandsisomorphismus von G auf eine andere Gruppe H , dann ist $M\sigma$ modular in H .

Beweis. Erfüllen $M, U, V \in \mathcal{U}(G)$ eine der Gleichungen (i) oder (ii) der Definition der modularen Untergruppen, so auch $M\sigma, U\sigma, V\sigma$, da σ ein Verbandsisomorphismus ist. Da die Bilder der Elemente von $\mathcal{U}(G)$ unter σ ganz $\mathcal{U}(H)$ ausschöpfen, ist also $M\sigma mH$, falls MmG ist.

(2.7) Ist M modular in G und ist N zu M konjugiert, so sind auch N und $M \cup N$ modular in G .

Beweis. Nach (2.6) ist N und nach (2.5) dann auch $M \cup N$ mit M modular in G .

3. Maximale modulare Untergruppen

Die maximalen modularen Untergruppen einer endlichen Gruppe charakterisiert das folgende

LEMMA 1. Die Untergruppe M der Gruppe G ist dann und nur dann eine maximale modulare Untergruppe von G , wenn entweder M ein maximaler Normalteiler von G oder G/M_G nichtabelsch der Ordnung pq ist, p und q zwei Primzahlen.

Beweis. Wir beweisen zunächst die folgende Aussage, aus der die restlichen Behauptungen des Lemmas sofort folgen:

(*) Sei M eine maximale modulare Untergruppe der Gruppe G . Dann ist entweder $M \triangleleft G$ oder G/M_G nichtabelsch der Ordnung pq , p und q zwei Primzahlen.

Sei also G ein Gegenbeispiel minimaler Ordnung zu $(*)$ und sei M eine maximale modulare Untergruppe von G , für die $(*)$ falsch ist.

Angenommen: $M_G \neq 1$. Nach (2.3) und (2.4) ist M/M_G eine maximale modulare Untergruppe von G/M_G . Wegen der Minimalität von G wäre daher entweder $M/M_G \triangleleft G/M_G$, also $M \triangleleft G$, was nicht der Fall ist, oder es wäre $(G/M_G)/(M/M_G)_{G/M_G}$ nichtabelsch der Ordnung pq , p und q zwei Primzahlen. Da aber $(M/M_G)_{G/M_G} = M_G/M_G = 1$ ist, wäre also G/M_G nichtabelsch der Ordnung pq , was auch nicht geht. — Es ist also

(i) $M_G = 1$.

Sei nun \bar{M} eine M enthaltende maximale Untergruppe von G . Wäre $M \triangleleft \bar{M}$, dann existierte ein $x \in \bar{M}$ mit $M^x \neq M$. Nach (2.7) wäre $M \cup M^x$ modular in G , ferner, wegen $x \in \bar{M}$, $M \cup M^x \subseteq \bar{M}$, also $M \subset M \cup M^x \subset G$. Das widerspricht der Maximalität von M . — Es ist also $M \triangleleft \bar{M}$. Andererseits ist $M \triangleleft G$, d.h. \bar{M} die einzige maximale Untergruppe von G , die M enthält. Nach (2.1) ist $\bar{M} \mathfrak{m}[G/M]$; nach (2.3) ist $\bar{M} \mathfrak{m}G$ und somit schließlich $M = \bar{M}$, wegen der Maximalität von M . — Damit ist gezeigt:

(ii) M ist eine maximale Untergruppe von G .

Sei nun U eine beliebige Untergruppe von G . Sei $x \in G$. Nach (2.6) ist $M^x \mathfrak{m}G$, ferner natürlich eine maximale Untergruppe von G . Nach (2.1) ist also entweder $U \subseteq M^x$ oder $M^x \cap U$ maximal in U ; in jedem Fall ist $\Phi(U) \subseteq M^x \cap U$. Das gilt für jedes $x \in G$; es ist also

$$\Phi(U) \subseteq \bigcap_{x \in G} (M^x \cap U) = U \cap \bigcap_{x \in G} M^x = U \cap M_G = 1,$$

d.h. $\Phi(U) = 1$. Damit haben wir insbesondere:

(iii) Die Sylowgruppen von G sind elementarabelsch.

Seien nun M_1 und M_2 zu M konjugiert, $M_1 \neq M_2$, und sei X ein Normalteiler von M_1 mit π -Faktorgruppe (π eine Primzahlmenge), der in M_2 enthalten ist. Sei R der minimale Normalteiler von M_1 mit π -Faktorgruppe. Dann ist R die von den π' -Elementen von M_1 erzeugte Untergruppe von M_1 . Da $X \triangleleft M_1$ und M_1/X eine π -Gruppe ist, ist $R \subseteq X$, also $R \subseteq M_2$; d.h. alle π' -Elemente von M_1 liegen in M_2 . Da M_1 und M_2 isomorph sind, kann M_2 nicht mehr π' -Elemente haben als M_1 ; R ist also auch die von den π' -Elementen von M_2 erzeugte Untergruppe und somit normal in M_2 . Es folgt $R \triangleleft G$, also $R = 1$, wegen (i). Es ist also M_1 , und daher auch M , eine π -Gruppe. — Damit haben wir gezeigt:

(iv) Sind M_1 und M_2 zwei verschiedene Konjugierte zu M und existiert ein Normalteiler X von M_1 mit $X \subseteq M_2$ und M_1/X π -Gruppe, so ist M eine π -Gruppe.

Sei nun N zu M konjugiert und sei $Q = M \cap N$. Dann haben wir drei Fälle zu betrachten.

1. Fall. $Q \triangleleft M$ und $Q \triangleleft N$, also $Q \triangleleft G$. Nach (i) folgt $Q = 1$. Da N

maximal und modular [nach (2.6)] in G ist, ist Q maximal in M [nach (2.1)], also $o(M) = p$, p eine Primzahl. Da M maximal und nicht normal in G ist, ist M eine p -Sylogruppe von G und $N_G(M) = M$. Nach einem Satz von Burnside (s. [1], Th. II, S. 327) besitzt M ein normales Komplement L in G . Da $1 = M \cap L$ nach (2.1) maximal in L ist, hat L die Ordnung q , q eine Primzahl, $p \neq q$. Damit hat schließlich $G = G/M_G$ die Ordnung pq , was nicht möglich ist. — Der erste Fall kann also nicht auftreten.

2. Fall. $Q \triangleleft M$, aber $Q \not\triangleleft N$ (oder $Q \triangleleft N$ und $Q \not\triangleleft M$; der Beweis läuft hier analog). Da Q maximal in M ist, hat Q Primzahlexponent p in M . Nach (iv) ist M eine p -Gruppe. Da N zu M isomorph ist, ist auch N eine p -Gruppe und somit $Q \triangleleft N$, als maximale Untergruppe einer p -Gruppe. Das ist ein Widerspruch, da ja $Q \not\triangleleft N$ sein sollte. — Dieser Fall kann also auch nicht auftreten.

Es bleibt der

3. Fall. $Q \triangleleft M$ und $Q \triangleleft N$. Da Q maximal und modular [nach (2.1) und (2.2)], aber nicht normal in M und in N ist, ist M/Q_M wegen der Minimalität von G nichtabelsch der Ordnung pq , p und q Primzahlen, $p \neq q$ —sei $p > q$; dann ist $[M:Q] = p$, da $Q \triangleleft M$ ist—und N/Q_N nichtabelsch der Ordnung pr , r eine von p verschiedene Primzahl [es ist ja $[N:Q] = [M:Q] = p$, also $[N:Q_N] = pr$ und $p > r$, da $Q \triangleleft N$ ist].

Wir unterscheiden erneut zwei Fälle:

Fall 3a. $Q_M \neq Q_N$. Sei dann $D = Q_M \cap Q_N$. Da $Q_M \triangleleft M$ mit $[M:Q_M] = pq$ und $Q_M \subseteq N$ ist, ist M nach (iv) eine (p, q) -Gruppe. Da $M \cong N$ ist, ist auch N eine (p, q) -Gruppe, d.h. $r = q$. Sei nun $U = U_q(Q)$ der minimale Normalteiler von Q mit q -Faktorgruppe. Da $Q_M \triangleleft Q$ mit Q/Q_M q -Gruppe ist, ist $U = U_q(Q_M)$. Damit ist $U \triangleleft M$. Genauso zeigt man (da $r = q$ ist), daß $U = U_q(Q_N) \triangleleft N$, also schließlich $U \triangleleft G$ ist. Es folgt $U = 1$, also:

$$(v) \quad Q \text{ ist eine } q\text{-Gruppe und } o(M) = pq^n, p > q, n \geq 1.$$

Nach (iii) ist Q abelsch, und wegen $Q \triangleleft M$ ist $Q = N_M(Q)$; nach Burnside ist also die p -Sylogruppe von M normal in M und somit M überauflösbar. Damit hat jede maximale Untergruppe von M Primzahlexponent in M (s. [4], Cor. 10.5.1., S. 161), und jede Untergruppe vom Index q in M ist normal in M .

Sei nun M_1 eine beliebige zu M konjugierte Untergruppe von G . Dann ist $M \cap M_1$ maximal, also von Primzahlexponent in M . Wäre $[M:M \cap M_1] = q$, so wäre also $M \cap M_1 \triangleleft M$ und $M \cap M_1 \triangleleft M_1$, d.h. $M \cap M_1 \triangleleft G$. Nach (i) folgte $M \cap M_1 = 1$, also $o(M) = q$, was (v) widerspricht. — Es ist also $[M:M \cap M_1] = p$, d.h. $M \cap M_1$ eine q -Sylogruppe von M . Da Q_M ein q -Normalteiler von M ist, gilt $Q_M \subseteq M \cap M_1 \subseteq M_1$. Da das für alle Konjugierten M_1 von M gilt, liegt Q_M also im Durchschnitt der Konjugierten von M . Nach (i) folgt $Q_M = 1$, was sicher nicht der Fall ist, da $D \subset Q_M$ ist. Das ist ein Widerspruch; Fall 3a kann also nicht auftreten. — Es

bleibt übrig:

Fall 3b. $Q_M = Q_N$. Dann ist $Q_M = Q_N \triangleleft M \cup N = G$, also $Q_M = Q_N = 1$, nach (i), und damit

$$(vi) \quad o(M) = pq.$$

Wir nehmen einmal an, Q wäre keine q -Sylowuntergruppe von G . Sei dann S eine Q enthaltende q -Sylowgruppe von G und T der Normalisator von S in G . Wäre $T = G$, also $S \triangleleft G$, dann wäre $Q = S \cap M \triangleleft M$, was nicht der Fall ist. — Es ist also $T \neq G$. Da somit $M \not\subseteq T$ ist, ist $Q = M \cap T$ nach (2.1) maximale Untergruppe von T , d.h. $T = S$. Da S nach (iii) abelsch ist, liegt also die q -Sylowgruppe S von G im Zentrum ihres Normalisators; nach Burnside existiert ein normales Komplement K von S in G . Da M keinen Normalteiler $\neq 1$ von G enthält, ist $K \not\subseteq M$. Damit ist $M \cap K$ maximal und modular in K ; wegen der Minimalität von G hat also $M \cap K$ Primzahlindex in K . [Es ist ja entweder $M \cap K \triangleleft K$ oder $o(K/(M \cap K)_K)$ das Produkt zweier Primzahlen, also in beiden Fällen $[K:M \cap K]$ eine Primzahl.] Da $K \triangleleft G$ ist, ist $[G:M] = [K:K \cap M]$, also $[G:M]$ eine Primzahl. Da mindestens q^2 die Ordnung von G teilt und $o(M) = pq$ ist, ist somit $[G:M] = q$. Damit folgt aber $o(G) = pq^2$, also $o(K) = p$, womit K doch in M enthalten ist. Das ist ein Widerspruch. — Es folgt also:

(vii) Q ist eine q -Sylowgruppe von G .

Sei nun P die p -Sylowgruppe von M [nach (vi) existiert wegen $p > q$ nur eine]. Ist dann P_1 eine p -Sylowgruppe von G , die P enthält, so folgt $P \triangleleft P_1$, da P_1 nach (iii) abelsch ist, also $P \triangleleft P_1 \cup M$. Da nach (i) $P \triangleleft G$ ist, ist $P_1 \cup M \subset G$, also $P_1 \cup M = M$, d.h. $P_1 \subseteq M$ und damit schließlich $P = P_1$. Es folgt also

(viii) P ist eine p -Sylowgruppe von G .

Wir wollen nun zeigen, daß G q' -abgeschlossen ist, daß also Q ein normales Komplement L in G besitzt. Sei R der Normalisator von Q in G . Da $Q \triangleleft M$ ist, ist $R \neq M$ und $R \neq G$. Ist $R = Q$, so existiert nach Burnside ein normales Komplement zu Q . Ist $R \supset Q$, so ist $M \cap R = Q$ maximal in R , also $[R:Q] = s$, s Primzahl, $q \neq s$, und damit $o(R) = qs$. Angenommen: $s \neq p$. Nach (2.1) ist $M_1 \cap R$ maximal in R für jede zu M konjugierte Untergruppe M_1 von G . Da s nicht die Ordnung von M_1 teilt, hat $M_1 \cap R$ also die Ordnung q , d.h. es ist $M_1 \cap R = Q$, da $Q \triangleleft R$ ist. Damit wäre Q in jeder zu M konjugierten Untergruppe von G enthalten, was wegen (i) unmöglich ist. — Es ist also $s = p$, d.h. R eine Gruppe der Ordnung pq . Da $p > q$ und die q -Sylowgruppe Q von R normal in R ist, ist R zyklisch. Damit liegt auch in diesem Fall Q im Zentrum seines Normalisators, woraus erneut die q' -Abgeschlossenheit von G folgt. Damit ist gezeigt:

(ix) Q besitzt ein normales Komplement L in G .

L ist nicht in M enthalten; damit ist $M \cap L = P$ maximal und modular in L , hat also wegen der Minimalität von G Primzahlindex t in L . Es ist also $o(L) = pt$, t Primzahl, und somit

$$(x) \quad o(G) = pqt.$$

Nach (vii) und (viii) ist M eine Hallsche Untergruppe von G , also $p \neq q \neq t \neq p$. Damit sind alle Sylowgruppen von G zyklisch, also G metazyklisch (s. [9], Th. 11, S. 175), d.h. G' und G/G' zyklisch (G' die Kommutatorgruppe von G). Da G/L abelsch ist, ist $G' \subseteq L$. Da $P \triangleleft G$ ist, ist L nicht zyklisch, also G' die t -Sylowgruppe von L . Da G/G' zyklisch ist, gibt es einen Normalteiler W der Ordnung qt von G . W enthält alle q -Sylowgruppen von G , also ganz M und N , da M und N Vereinigung ihrer q -Sylowgruppen sind. Damit liegt ganz G in W , was natürlich nicht der Fall ist. —

Dieser Widerspruch zeigt, daß auch Fall 3b und damit Fall 3 nicht auftreten kann, womit ein endgültiger Widerspruch erreicht ist. Damit ist (*) bewiesen.

Nun zum Beweis des Lemmas. Sei M eine maximale modulare Untergruppe von G . Nach (*) ist dann entweder G/M_G nichtabelsch der Ordnung pq , p und q zwei Primzahlen, oder $M \triangleleft G$. Da jeder M enthaltende Normalteiler von G modular in G ist, ist im letzteren Fall M ein maximaler Normalteiler von G .

Sei umgekehrt $M \subseteq G$ mit $o(G/M_G) = pq$, p und q zwei Primzahlen. Da $[G/M_G] \cong \mathfrak{V}(G/M_G)$ ein modularer Verband ist, ist $M \text{ m}[G/M_G]$, also $M \text{ m}G$, wegen (2.3). Da außerdem M eine maximale Untergruppe von G ist, ist M dann sicherlich eine maximale modulare Untergruppe von G . Sei schließlich M ein maximaler Normalteiler von G . Dann ist $M \text{ m}G$ und G/M einfach. Ist also M_1 eine M enthaltende maximale modulare Untergruppe von G , so ist $M_1 \triangleleft G$, da sonst wegen (*) die einfache Gruppe G/M ein epimorphes Bild der Ordnung pq , p und q Primzahlen, besitzen müßte. Wegen der Maximalität von M folgt $M = M_1$; M ist also eine maximale modulare Untergruppe von G .

Damit ist Lemma 1 bewiesen.

KOROLLAR. *Ist M eine maximale Untergruppe der Gruppe G , die modular in G ist, dann hat M Primzahlindex in G .*

4. Modulare Untergruppen von Primzahlpotenzindex

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit modularen Untergruppen M von Gruppen G beschäftigen, für die $[G/M]$ oder $[G:M]$ besonders "einfach" sind.

LEMMA 2. *Sei M modular in der Gruppe G und $[G/M]$ eine Kette der Länge n . Dann ist $[G:M] = p^n$, p eine Primzahl.*

Beweis. Wir machen Induktion nach der Länge n der Kette $[G/M]$.

Nach dem Korollar zu Lemma 1 ist Lemma 2 richtig für $n = 1$. Sei also $n \geq 2$ und Lemma 2 richtig für Ketten der Länge $< n$.

Sei $M \text{ m } G$ mit $[G/M]$ Kette der Länge n . Sei

$$M = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_n = G$$

die M mit G verbindende Kette von Untergruppen von G , und sei zur Abkürzung $M_{n-1} = H$. Da $[G/M]$ eine Kette ist, ist $[G/M]$ ein modularer Verband, also sicherlich $H \text{ m } [G/M]$. Nach (2.3) ist $H \text{ m } G$, und nach dem Korollar zu Lemma 1 folgt

$$(i) \quad [G:H] = p, \quad p \text{ eine Primzahl.}$$

Da $M \text{ m } H$ und $[H/M]$ eine Kette der Länge $n - 1$ ist, folgt nach Induktionsannahme

$$(ii) \quad [H:M] = q^{n-1}, \quad q \text{ eine Primzahl.}$$

Angenommen: $q \neq p$.

Sei dann P_1 eine p -Sylowgruppe von M und sei P eine P_1 enthaltende p -Sylowgruppe von G . Da $[G:H] = p$ ist, kann H keine p -Sylowgruppe von G enthalten; es ist also $H \cup P = G$. Wäre $M \cup P \neq G$, so wäre $M \cup P$ in einer maximalen Untergruppe von G enthalten, also in H , da H die einzige M enthaltende maximale Untergruppe von G ist. H enthält aber P nicht. — Wir haben also

$$(iii) \quad H \cup P = G = M \cup P.$$

Ferner ist $M \cap P$ eine P_1 enthaltende p -Untergruppe von M . Da P_1 eine p -Sylowgruppe von M ist, folgt also $M \cap P = P_1$. Da nach (ii) der Index von M in H teilerfremd zu p ist, ist P_1 auch eine p -Sylowgruppe von H . Nach demselben Argument wie für M ist also auch $H \cap P = P_1$, d.h. wir haben

$$(iv) \quad H \cap P = P_1 = M \cap P.$$

Da M und H modular in G sind, erhalten wir nach (2.1) mit Hilfe von (iii) und (iv) die folgenden Gleichungen und Isomorphismen:

$$[G/M] = [M \cup P/M] \cong [P/P \cap M] = [P/P \cap H] \cong [H \cup P/H] = [G/H],$$

also $[G/M] \cong [G/M_{n-1}]$, was wegen $n \geq 2$ offenbar ein Widerspruch ist. —

Es ist also $q = p$. Nach (i) und (ii) folgt $[G:M] = p^n$, was zu zeigen war. Damit ist Lemma 2 bewiesen.

SATZ 1. *Sei M modular in der Gruppe G und $[G:M] = p^n$, p eine Primzahl. Dann ist G/M_G entweder eine p -Gruppe oder eine P -Gruppe der Ordnung $p^n q$, $p > q$, q eine Primzahl.*

Beweis. Sei G ein Gegenbeispiel minimaler Ordnung zu Satz 1 und sei M maximal unter den Untergruppen von G , für die der Satz falsch ist.

Da G/M_G und M/M_G ebenfalls ein Gegenbeispiel zum Satz darstellen, ist

(i) $M_G = 1$,

wegen der Minimalität von G .

Wäre M eine maximale Untergruppe von G , so wäre nach Lemma 1 entweder $M \triangleleft G$, also $G/M_G = G/M$ eine p -Gruppe, oder G/M_G nichtabelsch der Ordnung pq , p und q Primzahlen, also G/M_G eine P -Gruppe der Ordnung pq , $p > q$. Das widerspricht der Wahl von G . — Es ist also M nicht maximal in G , d.h.

(ii) $n \geq 2$.

Sei nun P eine p -Sylowgruppe von G . Da $[G:M] = p^n$ ist, ist $P \cup M = G$, also nach (2.1)

(iii) $[G/M] \cong [P/P \cap M]$.

Die maximalen Untergruppen von P , die $P \cap M$ enthalten, sind normal, also modular in P und damit auch modular in $[P/P \cap M]$. Ist also S eine maximale Untergruppe von G mit $S \supseteq M$, so ist nach (2.6) $Sm[G/M]$, also SmG , wegen (2.3). Damit ist gezeigt:

(iv) *Ist S maximal in G mit $M \subseteq S$, so ist SmG .*

Sei nun L der Durchschnitt der M enthaltenden maximalen Untergruppen von G . Wir unterscheiden dann zwei Fälle:

1. *Fall.* $L \triangleleft G$. Da $[G:L]$ eine p -Potenz ist, ist G/L eine p -Gruppe mit $\Phi(G/L) = 1$, d.h. eine elementarabelsche p -Gruppe. Insbesondere ist also jede maximale Untergruppe S von G , die M enthält, normal in G . Ferner ist $M \cap S$ mit $[S:M] = p^{n-1}$. Wegen der Minimalität von G ist also S/M_S entweder eine p -Gruppe oder eine P -Gruppe der Ordnung $p^{n-1}q$, $p > q$, q Primzahl. Wäre S/M_S eine p -Gruppe, dann wäre der minimale Normalteiler von S mit p -Faktorgruppe $U_p(S)$ in M_S enthalten. Da aber $S \triangleleft G$ ist, ist $U_p(S) \triangleleft G$; nach (i) folgte also $U_p(S) = 1$, oder S p -Gruppe. Da aber $[G:S] = p$ ist, wäre dann ganz G eine p -Gruppe, was nicht der Fall ist. — Es ist also S/M_S keine p -Gruppe. Damit ist gezeigt:

(v) *Ist S eine M enthaltende maximale Untergruppe von G , so ist $S \triangleleft G$ und S/M_S eine P -Gruppe der Ordnung $p^{n-1}q$, q eine Primzahl, $p > q$.*

Wir nehmen einmal an, es gäbe zwei maximale Untergruppen S und T von G , die M enthalten. Da S/M_S nach (v) eine P -Gruppe ist, ist $[S/M]$ isomorph zum Untergruppenverband einer elementarabelschen p -Gruppe der Ordnung p^{n-1} . $S \cap T$ ist eine maximale Untergruppe von S . Es gibt also Untergruppen U_i von S mit $U_i \not\subseteq T$, M maximal in U_i und $\cup_i U_i = S$. Da M maximal in U_i und $U_i \not\subseteq T$ ist, ist $T \cap U_i = M$. Da nach (v) $T \triangleleft G$ ist, ist also M normal in jedem U_i , d.h. $M \triangleleft \cup_i U_i = S$. Das widerspricht (v).

—Es gibt also keine zwei M enthaltenden maximalen Untergruppen von G , d.h.

(vi) L ist die einzige M enthaltende maximale Untergruppe von G .

Da L/M_L nach (v) eine P -Gruppe ist, ist $[L/M]$ ein modularer Verband. Da L die einzige maximale Untergruppe von G ist, die M enthält, ist auch $[G/M]$ ein modularer Verband. Jede M enthaltende Untergruppe von G ist also modular in $[G/M]$ und damit auch in G .

Angenommen: $[L:M] \cong p^2$. Da $[L/M]$ nach (v) isomorph zum Untergruppenverband einer elementarabelschen p -Gruppe ist, existieren dann Untergruppen U und V von G mit $M \subset U$, $V \subset L$ und $U \cap V = M$. Da U und V modular in G sind, sind G/U_G und G/V_G p -Gruppen oder P -Gruppen, wegen der Maximalität von M . Da aber L die einzige U enthaltende maximale Untergruppe von G ist, kann G/U_G keine P -Gruppe sein; dasselbe gilt für V . Es sind also G/U_G und G/V_G p -Gruppen. Damit ist auch $G/(U_G \cap V_G) = G/(U \cap V)_G = G/M_G$ eine p -Gruppe, was nicht der Fall ist. — Es ist also $[L:M] = p$, d.h.

(vii) $[G/M]$ ist eine Kette der Länge 2.

Sei nun U eine von L verschiedene maximale Untergruppe von G . Sei $x \in G$. Dann ist $M^x \subseteq L$, da $L \triangleleft G$ ist, und L ist die einzige M^x enthaltende maximale Untergruppe von G . Es ist also $U \cup M^x = G$ und damit $[U/M^x \cap U] \cong [G/M^x] \cong [G/M]$ eine Kette der Länge 2. Nach Lemma 2 ist $[U : M^x \cap U] = r^2$, r Primzahl. Da $r = [U : U \cap L] = [G : L] = p$ ist, ist also $[U : M^x \cap U] = p^2$; wegen der Minimalität von G (und da $[U/M^x \cap U]$ nicht isomorph zum Faktorverband einer P -Gruppe ist) ist also $U/(M^x \cap U)_U$ eine p -Gruppe. Das gilt für jedes $x \in G$; es ist also auch $U/\bigcap_{x \in G} (M^x \cap U)_U$ eine p -Gruppe. Da $\bigcap_{x \in G} (M^x \cap U)_U \subseteq \bigcap_{x \in G} M^x = 1$ ist, ist also U eine p -Gruppe. Wir haben damit gezeigt:

(viii) Ist U eine von L verschiedene maximale Untergruppe von G , dann ist U eine p -Gruppe.

Mit L verfahren wir ganz entsprechend. Sei $x \in G$. Dann ist $M^x \cap L$ mit $[L : M^x] = p$; wegen der Minimalität von G ist also $L/(M^x)_L$ eine p - oder eine P -Gruppe, in jedem Fall aber überauflösbar. Damit ist auch $L/\bigcap_{x \in G} (M^x)_L$, also L überauflösbar. Es ist also jede echte Untergruppe von G überauflösbar und damit G entweder überauflösbar oder minimal nicht überauflösbar. In beiden Fällen existiert eine Sylowgruppe von G , die normal in G ist (s. [4], Th. 10.5.3., S. 159 und [2], Hilfssatz C, S. 199). Da $[G : M] = p^n$ und $M_G = 1$ ist, ist das die p -Sylowgruppe von G . Da nach (viii) jede von L verschiedene maximale Untergruppe von G eine p -Gruppe und L nicht die einzige maximale Untergruppe von G ist, da sonst G zyklisch und $M \triangleleft G$ sein würde, ist also die p -Sylowgruppe P von G maximale Untergruppe von G , und G besitzt nur P und L als maximale Untergruppen. Sei nun q ein Primteiler von $o(G)$ mit

$q \neq p$ und Q eine q -Sylowgruppe von G . Wegen $L \triangleleft G$ und $[G:L] = p$ gilt $Q \subseteq L$, und nach dem Frattinischluß ist $G = \mathfrak{X}_\sigma(Q)L$. Damit ist $N_\sigma(Q) \not\subseteq L$. Da $N_\sigma(Q)$ auch nicht in der p -Gruppe P enthalten sein kann und P und L die einzigen maximalen Untergruppen von G sind, ist $N_\sigma(Q) = G$, also $Q \triangleleft G$. Das ist wegen $[G:M] = p^n$ und $M_\sigma = 1$ unmöglich. —

Der Widerspruch zeigt, daß Fall 1 nicht auftreten kann. Es bleibt der

2. Fall. $L \triangleleft G$. Angenommen, es gibt eine M enthaltende Untergruppe R von G mit $R \triangleleft G$. Sei S eine R enthaltende maximale Untergruppe von G . Dann folgt $S \triangleleft G$, da S/R maximale Untergruppe der p -Gruppe G/R ist. Nach (iii) ist $[G/L] \cong [P/D]$, wo D der Durchschnitt der $P \cap M$ enthaltenden maximalen Untergruppen von P ist. Da P eine p -Gruppe ist, ist $D \triangleleft P$ und P/D elementarabelsch. Es ist also $[G/L]$ isomorph zum Untergruppenverband einer elementarabelschen p -Gruppe, d.h. es gibt Untergruppen U_i von G mit $U_i \cap S = L$ und $U_i U_i = G$. Da $S \triangleleft G$ ist, folgt $L \triangleleft U_i$ für alle i , also $L \triangleleft G$. Das widerspricht der Voraussetzung im 2. Fall. — Damit ist gezeigt:

(ix) *Es ist $R \triangleleft G$ für jedes $R \subset G$ mit $M \subseteq R$.*

Sei nun S eine M enthaltende maximale Untergruppe von G . Nach (iv) und (ix) ist $S \triangleleft G$, aber $S \not\triangleleft G$. Nach Lemma 1 ist also G/S_σ eine nichtabelsche Gruppe der Ordnung pq , q Primzahl; da $[G:S] = p$ und $S \triangleleft G$ ist, ist $p > q$. Sei N/S_σ der Normalteiler vom Index q in G/S_σ . Da $M \not\subseteq N$ ist, ist $M \cup N = G$. Es ist also $M \cap N \triangleleft N$ mit $[N:M \cap N] = [G:M] = p^n$. Wegen der Minimalität von G ist $N/(M \cap N)_N$ entweder eine p -Gruppe oder eine P -Gruppe der Ordnung p^r , r Primzahl, $r < p$. Im ersten Fall folgt, daß N eine p -Gruppe ist, da hier $U_p(N)$ in M enthalten und normal in G , also gleich 1 ist. Wir wollen zeigen, daß der zweite Fall nicht auftreten kann, daß also gilt:

(x) *N ist eine p -Gruppe, d.h. $o(G) = p^m q$, $m \geq n$.*

Wir nehmen daher an, $N/(M \cap N)_N$ wäre eine P -Gruppe der Ordnung p^r , $p > r$. Dann wäre $[N/M \cap N]$, wegen (2.1) also auch $[G/M]$, isomorph zum Untergruppenverband einer elementarabelschen p -Gruppe der Ordnung p^n . Damit ist $[G/M]$ ein modularer Verband; jede M enthaltende Untergruppe von G ist wegen (2.3) also modular in G . Sei nun U eine Untergruppe von G , in der M als maximale Untergruppe enthalten ist. Dann ist $U \triangleleft G$ mit $[G:U] = p^{n-1}$; wegen der Maximalität von M ist also G/U_σ entweder eine p -Gruppe oder eine P -Gruppe der Ordnung $p^{n-1}s$, $p > s$, s Primzahl. Wäre G/U_σ eine p -Gruppe, so folgte $U \triangleleft G$, da U/U_σ Durchschnitt maximaler Untergruppen von G/U_σ wäre. Das widerspräche (ix). — Es ist also für jedes $U \subseteq G$, in dem M maximal ist, G/U_σ eine nichtabelsche P -Gruppe. Ferner ist U_σ maximal in U , also $U_\sigma \cap M$ eine maximale Untergruppe von M . Sei V eine weitere Untergruppe von G , in der M maximal ist. Dann ist $U \cap V = M$. Wäre $U_\sigma \cap M = V_\sigma \cap M$, dann wäre $U_\sigma \cap M \subseteq U_\sigma \cap V_\sigma = M_\sigma = 1$, also $U_\sigma \cap M = 1$ und damit $o(G) = p^n s$. Das ist unmöglich, da $[G:(M \cap N)_N]$

$= qp^n r$ ist. — Es ist also $V_G \cap M \neq U_G \cap M$. Es gibt daher mindestens so viele maximale Untergruppen von M , wie es Untergruppen von G gibt, in denen M maximal ist. Da $[G/M]$ isomorph zum Untergruppenverband einer elementarabelschen p -Gruppe ist, existiert eine Untergruppe U von G , in der M maximal ist, mit $U \not\subseteq S$. Dann ist $S \cap U = M$, also $S_G \cap U_G = M_G = 1$. Da $[G:S_G] = pq$ ist, folgt also (mit $o(G/U_G) = p^{n-1}s$): $o(U_G) = [U_G:S_G \cap U_G]$ teilt $[G:S_G] = pq$. Damit ist $o(G)$ ein Teiler von $p^n qs$; da aber $[G:(M \cap N)_N] = p^n qr$ ist, folgt $o(G) = p^n qr$, also $o(M) = qr$. Damit hat M höchstens $t + 1$ maximale Untergruppen, wenn t die größere der beiden Primzahlen q und r ist; es gibt also auch höchstens $t + 1$ Untergruppen von G , in denen M maximal ist. Da aber $[G/M]$ isomorph zum Untergruppenverband einer elementarabelschen p -Gruppe der Ordnung p^n ($n \geq 2$) ist, existieren mindestens $p + 1$ solche Untergruppen. Das ist ein Widerspruch, da q und r kleiner als p sind, also auch $t < p$ gilt. — Damit ist (x) gezeigt.

Sei nun V die Vereinigung aller q -Sylowgruppen von G . Dann ist $V \triangleleft G$ mit G/V p -Gruppe, also jede V enthaltende maximale Untergruppe von G normal in G . Wegen (ix) ist daher $V \cup M = G$, d.h. $G = \bigcup (M \cup Q)$ (Q q -Sylowgruppe von G). Da $o(Q) = q$ ist, ist M nach (2.1) maximal in $M \cup Q$ (oder $M = M \cup Q$) für jede q -Sylowgruppe Q von G , also G die Vereinigung von Untergruppen, in denen M maximal ist. Wegen $[N/M \cap N] \cong [G/M]$ ist also N die Vereinigung von Untergruppen, in denen $M \cap N$ maximal, also normal ist. Es ist daher $M \cap N \triangleleft N$, ferner natürlich $M \cap N \triangleleft M$, also schließlich $M \cap N \triangleleft G$. Nach (i) folgt $M \cap N = 1$ und daher

$$(xi) \quad o(N) = p^n, \text{ also } o(G) = p^n q.$$

Damit ist M eine q -Sylowgruppe von G ; die q -Sylowgruppen von G sind also modular in G . Ferner ist $G = M \cup V = M \cup \bigcup_{x \in G} M^x = \bigcup_{x \in G} (M \cup M^x)$. Da nach (2.7) alle diese $M \cup M^x$ modular in G sind, ist G Vereinigung von Untergruppen M_i mit $M_i \triangleleft G$ und M maximal in M_i . Da $\mathcal{U}(N) \cong [G/M]$ ist, wird N von minimalen Untergruppen N_i erzeugt, die modular in N sind. Da $N_i, N_j \triangleleft N$ sind, erzeugen N_i und N_j ($i \neq j$) eine elementarabelsche Gruppe der Ordnung p^2 ; die N_i zentralisieren sich also gegenseitig. Damit ist N elementarabelsch. Sei nun X eine Untergruppe von N , $o(X) = p^r$. Dann ist $X = (X \cup M) \cap N \triangleleft X \cup M$. Da N abelsch ist, ist auch $X \triangleleft N$, also schließlich $X \triangleleft G$. Es ist daher jede p -Untergruppe von G normal in G , ferner jede q -Untergruppe modular in G und damit jede Untergruppe von G modular in G , d.h. $\mathcal{U}(G)$ ein modularer Verband. Nach einem Satz von Iwasawa (s. [8], Th. 13, S. 13) ist G eine P -Gruppe. Das widerspricht der Wahl von G . —

Damit ist gezeigt, daß auch der 2. Fall nicht auftreten kann, womit ein endgültiger Widerspruch erreicht und Satz 1 bewiesen ist.

Eine einfache Folgerung aus Lemma 2 und Satz 1 ist das folgende

LEMMA 3. *Sei M modular in G und $[G/M]$ eine Kette.*

Dann ist entweder G/M_G eine p -Gruppe oder M maximal in G und G/M_G nichtabelsch der Ordnung pq , p, q Primzahlen.

Beweis. Sei $M \text{ m} G$ und $[G/M]$ eine Kette. Nach Lemma 2 ist dann $[G:M] = p^n$ für eine geeignete Primzahl p . Nach Satz 1 ist somit G/M_G entweder eine p -Gruppe oder eine P -Gruppe der Ordnung $p^n q$, $p > q$, q Primzahl. Im letzteren Fall ist $[G/M]$ isomorph zum Untergruppenverband einer elementarabelschen p -Gruppe der Ordnung p^n . Da aber $[G/M]$ eine Kette ist, folgt $n = 1$, also M maximal in G und $o(G/M_G) = pq$. Damit ist Lemma 3 bewiesen.

5. Die Struktur von M^G/M_G

Wir wollen in diesem Abschnitt die Struktur von M^G/M_G für modulare Untergruppen M von G untersuchen und dabei zeigen, daß M^G/M_G überauflösbar ist.

Für M/M_G gilt eine schärfere Aussage, die eine Verallgemeinerung eines Satzes von Ito und Szép für Quasinormalteiler darstellt (s. [6], Satz 1, S. 168):

SATZ 2. *Ist M modular in der Gruppe G , dann ist M/M_G nilpotent.*

Beweis. Sei G ein minimales Gegenbeispiel zu Satz 2 und sei M maximal unter den Untergruppen von G , für die der Satz falsch ist.

Da G/M_G und M/M_G ebenfalls ein Gegenbeispiel zum Satz darstellen, ist

(i) $M_G = 1$,

wegen der Minimalität von G .

Sei nun $x \in G$ mit $M^x \neq M$ und sei $H = M \cup \{x\}$ eine echte Untergruppe von G . Da G ein minimales Gegenbeispiel ist, ist M/M_H nilpotent. Wegen $x \in H$ ist $M_H \subseteq (M \cap M^x)_M$, also $M/(M \cap M^x)_M$ als epimorphes Bild der nilpotenten Gruppe M/M_H nilpotent.

Wäre also $M \cup \{x\} \subset G$ für alle $x \in G$, so wäre $M/(M \cap M^x)_M$ nilpotent für alle $x \in G$, also auch $M/\bigcap_{x \in G} (M \cap M^x)_M = M$. Das widerspräche der Wahl von M . — Damit ist gezeigt:

(ii) *Es gibt ein $x \in G$ mit $M \cup \{x\} = G$.*

Sei zur Abkürzung $\{x\} = X$. Da $M \text{ m} G$ ist, folgt $[G/M] \cong [X/M \cap X] \cong \mathfrak{U}(X/M \cap X)$, d.h. $[G/M]$ ist isomorph zum Untergruppenverband einer zyklischen Gruppe und damit distributiv (s. [8], Th. 2, S. 4), also erst recht modular. Damit ist jede M enthaltende Untergruppe R von G modular in $[G/M]$, also auch in G . Wegen der Maximalität von M gilt:

(iii) *R/R_G ist für jedes $R \subseteq G$ mit $M \subset R$ nilpotent.*

Existierten zwei verschiedene Untergruppen R und S von G , in denen M maximal ist, dann wäre $R \cap S = M$ und wegen (iii) $M/M \cap R_G$ sowie $M/M \cap S_G$ nilpotent. Damit wäre auch $M/(M \cap R_G \cap S_G) = M/R_G \cap S_G = M/M_G$ nilpotent, was nicht der Fall ist. — Es existiert also nur eine Untergruppe von G , in der M maximal ist. Da $\mathfrak{U}(X/M \cap X)$ zu $[G/M]$ isomorph ist, ist daher $X/M \cap X$ eine zyklische Gruppe, die nur eine minimale Untergruppe besitzt, d.h. zyklisch von Primzahlpotenzordnung. Es ist also

$\cup(X/M \cap X)$ und damit auch $[G/M]$ eine Kette. Nach Lemma 3 ist dann aber M/M_G eine Primärgruppe. Das ist ein Widerspruch, womit Satz 2 bewiesen ist.

Wir betrachten nun zunächst den quasinormalen Fall. Hier können wir zeigen:

SATZ 3. *Ist Q quasinormal in der Gruppe G , dann ist Q^G/Q_G nilpotent.*

Beweis. Sei $Q \triangleleft_q G$. Da sich alle Betrachtungen in G/Q_G abspielen, können wir $Q_G = 1$ annehmen. Nach Satz 2 (oder nach [6], Satz 1, S. 168) ist dann Q nilpotent, also $Q = \prod_p Q_p$, Q_p die p -Sylowgruppe von Q . Nach [6, Korollar 1, S. 170] ist $Q_p \triangleleft_q G$, also $(Q_p)^G = \cup_{x \in G} (Q_p)^x$ eine p -Gruppe, da die Vereinigung von p -Quasinormalteilern wieder eine p -Untergruppe ist. Damit ist $Q^G = \cup_p (Q_p)^G = \prod_p (Q_p)^G$, also Q^G nilpotent. Damit ist Satz 3 bewiesen.

Um den allgemeinen Fall einer beliebigen modularen Untergruppe behandeln zu können, beweisen wir zunächst ein Reduktionslemma, das das Problem weitgehend auf den quasinormalen Fall reduziert.

LEMMA 4. *Sei M modular in G , sei $N = N_G(M)$ und $D = D(M) = \cap_{z \in G \setminus N} (M \cup M^z)$ (dabei sei $D(M) = G$, falls $M \triangleleft G$).*

Ist M eine echte Untergruppe von D , dann ist entweder M^G/M_G eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung pq , p, q Primzahlen, oder $M \triangleleft_q G$ und M^G/M_G eine p -Gruppe.

Beweis. Sei G ein Gegenbeispiel minimaler Ordnung zu Lemma 4 und sei $M \triangleleft G$, so daß das Lemma falsch wird. Dann ist $M \triangleleft G$. Da $D(M/M_G) = D(M)/M_G$ ist, ist mit G, M auch $G/M_G, M/M_G$ ein Gegenbeispiel zu Lemma 4. Wegen der Minimalität von G folgt also

(i) $M_G = 1$.

Da $M \triangleleft G$ ist, existiert ein $z \in G$ von Primzahlpotenzordnung mit $M^z \neq M$. Dann ist $M \cup M^z \subseteq M \cup Z$ (mit $Z = \{z\}$), also $[M \cup M^z/M]$ eine Kette, da $[M \cup Z/M] \cong [Z/M \cap Z]$ eine Kette ist. Da $z \in G \setminus N$ ist, ist $D \subseteq M \cup M^z$. Damit haben wir:

(ii) $[D/M]$ ist eine Kette.

Sei F die zwischen D und M liegende Untergruppe von G , in der M maximal ist. Nach dem Korollar zu Lemma 1 ist $[F:M]$ eine Primzahl; sei $[F:M] = p$.

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

1. *Fall.* $M \triangleleft F$. Wir zeigen hier zunächst, daß $M \triangleleft_q G$ ist. Sei dazu $x \in G \setminus N$ mit $o(x) = q^n$, q Primzahl, und sei (zur Abkürzung) $X = \{x\}$. Dann ist $M \cup X \supseteq M \cup M^x \supseteq D \supseteq F$, also $F \subseteq M \cup X$. Da $[M \cup X/M]$ eine Kette ist, ist $[M \cup X:M]$ nach Lemma 2 eine Primzahlpotenz; da $M \subset F \subseteq M \cup X$ und $[F:M] = p$ ist, ist also $[M \cup X:M] = p^s$, wobei s die Länge der $M \cup X$ mit M verbindenden Kette ist. Da $[M \cup X/M] \cong [X/M \cap X]$ ist, ist die

Länge der X mit $M \cap X$ verbindenden Kette auch s , also $[X:M \cap X] = q^s$. Sei nun $Y = X \cap F$. Da $M \triangleleft F$ ist, ist M mit Y vertauschbar, also $q = [Y:M \cap Y] = [Y \cup M:M] = [F:M] = p$ und damit $[M \cup X:M] = p^s = [X:M \cap X]$. Nach [8, S. 7] ist daher schließlich M mit X vertauschbar. Damit ist gezeigt:

(iii) Ist $x \in G \setminus N$ und $o(x) = q^n$, q Primzahl, so ist $q = p$ und M mit $\{x\}$ vertauschbar.

Ist aber $x \in N$, so wird M von x normalisiert; in diesem Fall ist somit M erst recht mit $\{x\}$ vertauschbar. Damit ist M mit allen zyklischen Untergruppen von Primzahlpotenzordnung, und daher mit allen Untergruppen von G vertauschbar, d.h.

(iv) $M \triangleleft_q G$.

Nach Satz 2 ist M nilpotent. Angenommen, M wäre keine p -Gruppe. Sei also $Q \neq 1$ eine q -Sylowgruppe von M , $q \neq p$. Dann ist $Q \triangleleft_q G$ (s. [6], Korollar 1, S. 170), und jedes Element von G mit zu q primer Ordnung normalisiert Q (s. [6], Bemerkung 2, S. 169). Ist aber $y \in G$ mit $o(y) = q^n$, so ist y wegen $q \neq p$ nach (iii) in N enthalten; M wird also von y normalisiert. Da M nilpotent ist, wird Q ebenfalls von y normalisiert. Damit wird Q von allen Elementen von G normalisiert, ist also normal in G . Es folgt $Q \subseteq M_G = 1$, was nicht geht. — Es ist also M eine p -Gruppe. Da die Vereinigung von p -Quasinormalteilern wieder ein p -Quasinormalteiler ist, ist schließlich auch $M^G = \bigcup_{x \in G} M^x$ eine p -Gruppe. Das widerspricht der Wahl von G und M . — Fall 1 kann also nicht auftreten.

Es bleibt der

2. Fall. $M \triangleleft F$. Wir zeigen hier zunächst, daß $F = M^G$ ist. Da $M \triangleleft F$ ist, existiert ein $u \in F$ mit $u \notin N$. Dann ist $M \cup M^u = F$, also $D \subseteq M \cup M^u = F$. Damit haben wir

(v) $D = F$.

Sei nun $x \in N$. Dann ist

$$D^x = (\bigcap_{y \in G \setminus N} (M \cup M^y))^x = \bigcap_{y \in G \setminus N} (M^x \cup M^{yx}) = \bigcap_{z \in G \setminus N} (M \cup M^z) = D,$$

da $M^x = M$ ist und $z = yx$ wegen $x \in N$ mit y sämtliche Elemente von $G \setminus N$ durchläuft. Es wird also F von x normalisiert, d.h. wir haben

(vi) $N \subseteq N_G(F)$.

Sei nun $x \in G \setminus N$ und $o(x) = q^n$, q Primzahl. Dann ist $M \cup M^x \supseteq F$. Angenommen: $M \cup M^x \supset F$. Sei zur Abkürzung $\{x\} = X$ und $M \cup M^x = H$. Dann ist $[H/M] \cong [X/X \cap M]$, also eine Kette. Da $M \subset F \subset H$ ist, ist M nicht maximal in H . Nach Lemma 3 ist daher H/M_H eine Primärgruppe, also eine p -Gruppe, da $[F:M] = p$ ist. Da $F \subseteq H$ ist, ist $M_H \subseteq M_F$, also auch

F/M_F eine p -Gruppe und damit $M/M_F \triangleleft F/M_F$, als maximale Untergruppe einer p -Gruppe. Das widerspricht der Voraussetzung im 2. Fall. — Es ist also $M \cup M^x = F$.

Dies gilt für jedes $x \in G \setminus N$ mit Primzahlpotenzordnung, also auch für x^2 , falls $x^2 \in G \setminus N$. Damit ergibt sich

$$F^x = (M \cup M^x)^x = M^x \cup M^{x^2} = M^x \cup M = F, \text{ falls } x^2 \in N,$$

und

$$F^x = M^x \cup M^{x^2} = F, \text{ falls } x^2 \in G \setminus N,$$

da dann M^x und M^{x^2} in F enthalten sind. Wir haben damit gezeigt, daß alle $x \in G \setminus N$ mit Primzahlpotenzordnung in $N_G(F)$ liegen; wegen (vi) ist also $F \triangleleft G$. Da M maximal in F ist, haben wir

$$(vii) \quad F = M^G.$$

Sei nun $x \in G \setminus N$. Dann sind M und M^x maximal in F , also $F = M \cup M^x$. Sei $K = M \cap M^x$. Dann ist $[M/K] \cong [F/M^x]$, also K maximal in M ; genauso zeigt man, daß K maximal in M^x ist. Nach Satz 2 sind M und M^x nilpotent, also $K \triangleleft M$ und $K \triangleleft M^x$, als maximale Untergruppe nilpotenter Gruppen. Damit ist schließlich $K \triangleleft F$. Ist nun M^y eine weitere zu M konjugierte Untergruppe von G , so ist $M \cap M^y = K$, da sonst $M = (M \cap M^x) \cup (M \cap M^y) \triangleleft F$ wäre, was der Voraussetzung im 2. Fall widerspräche. — Es ist also K in jeder zu M konjugierten Untergruppe von G enthalten, d.h. $K \subseteq M_G = 1$. Da K maximal in M ist, ist $o(M) = q$, q eine Primzahl, und damit M^G wegen (vii) eine nichtabelsche Gruppe der Ordnung pq . Der 2. Fall führt also auch zu einem Widerspruch, womit ein endgültiger Widerspruch erreicht ist. — Damit ist das Reduktionslemma bewiesen.

Wir sind nun in der Lage, das Hauptergebnis dieses Abschnittes zu beweisen.

SATZ 4. *Ist M modular in der Gruppe G , dann ist M^G/M_G überauflösbar.*

Beweis. Sei G ein Gegenbeispiel minimaler Ordnung zu Satz 4 und sei M maximal unter den Untergruppen von G , für die der Satz falsch ist.

Sei $N = N_G(M)$ und $x \in G \setminus N$, d.h. $x \in G$ mit $M^x \neq M$. Nach (2.7) ist $(M \cup M^x)mG$. Da $M^x \neq M$ ist, ist $M \subset M \cup M^x$; wegen der Maximalität von M ist also $(M \cup M^x)^G / (M \cup M^x)_G$ überauflösbar. Da $M \subseteq M \cup M^x \subseteq M^G$ ist, ist $(M \cup M^x)^G = M^G$, also $M^G / (M \cup M^x)_G$ überauflösbar. Das gilt für jedes $x \in G \setminus N$. Es ist also auch $M^G / \bigcap_{x \in G \setminus N} (M \cup M^x)_G = M^G / D_G$ überauflösbar, wenn $D = \bigcap_{x \in G \setminus N} (M \cup M^x)$ ist. Da M^G / M_G nicht überauflösbar ist, ist $M \subset D$.

Damit ist die Voraussetzung von Lemma 4 erfüllt; es ist also entweder $M \triangleleft_G G$ oder $o(M^G/M_G) = pq$, p und q zwei Primzahlen. Im letzteren Fall ist M^G/M_G sicherlich überauflösbar, was der Wahl von M widerspricht; im ersteren Fall ist M^G/M_G nach Satz 3 sogar nilpotent, was erst recht nicht geht. Mit diesem Widerspruch ist Satz 4 bewiesen.

Bemerkung. Daß M^G/M_G im allgemeinen nicht nilpotent zu sein braucht, wenn $M \triangleleft G$ ist, zeigt das Beispiel der nichtabelschen Gruppe der Ordnung 6, in der die 2-Sylowgruppen modular sind.

6. Die Struktur der von G in M^G/M_G induzierten Automorphismengruppe

Zum Schluß der Arbeit beschäftigen wir uns noch mit der von G in M^G/M_G induzierten Automorphismengruppe. Wir können zeigen, daß diese Gruppe auflösbar ist. Es gilt sogar der folgende

SATZ 5. *Sei M modular in der Gruppe G .*

Dann existieren Normalteiler H und K von G mit

$$C_G(M^G/M_G) = C \subseteq H \subseteq K \subseteq G,$$

so daß G/K nilpotent, K/H abelsch und H/C wieder nilpotent ist. $G/C_G(M^G/M_G)$ ist also auflösbar der Nilpotenzlänge ≤ 3 .

Beweis. Sei G ein Gegenbeispiel minimaler Ordnung zu Satz 5 und sei M maximal unter den Untergruppen von G , für die der Satz falsch wird.

Mit G, M ist auch $G/M_G, M/M_G$ ein Gegenbeispiel zu Satz 5. Wegen der Minimalität von G folgt also

(i) $M_G = 1$.

Sei nun $N = N_G(M)$ und $x \notin N$. Dann ist $M \cup M^x \triangleleft G$; wegen der Maximalität von M existieren also Normalteiler H_x, K_x von G mit

$$C_G((M \cup M^x)^G/(M \cup M^x)_G) = C_G(M^G/(M \cup M^x)_G) = C_x \subseteq H_x \subseteq K_x \subseteq G$$

und $G/K_x, H_x/C_x$ nilpotent sowie K_x/H_x abelsch. Sei $H_1 = \bigcap_{x \in G \setminus N} H_x, K_1 = \bigcap_{x \in G \setminus N} K_x$ und $C_1 = \bigcap_{x \in G \setminus N} C_x$. Dann ist

$$C_1 = \bigcap_{x \in G \setminus N} C_G(M^G/(M \cup M^x)_G) = C_G(M^G/\bigcap_{x \in G \setminus N} (M \cup M^x)_G) = C_G(M^G/D_G).$$

Ferner ist G/K_1 nilpotent, da G/K_x für alle $x \in G \setminus N$ nilpotent war, K_1/H_1 abelsch, da $K_1/H_x \cap K_1 \cong H_x \cup K_1 / H_x \subseteq K_x/H_x$, also abelsch für jedes $x \in G \setminus N$ ist, und schließlich H_1/C_1 wieder nilpotent, da genauso $H_1/H_1 \cap C_x$ für jedes $x \in G \setminus N$ nilpotent ist. Es hat also $G/C_G(M^G/D_G)$ die im Satz für $G/C_G(M^G/M_G)$ verlangte Struktur; wegen der Wahl von M ist daher

(ii) $M \subset D$.

Nach Lemma 4 ist also entweder M^G nichtabelsch der Ordnung pq , p und q Primzahlen, oder $M \triangleleft_q G$ und M^G eine p -Gruppe. Im ersteren Fall ist M^G überauflösbar in G eingebettet, woraus folgt, daß $G/C_G(M^G) = G/C$ überauflösbar ist (s. [5], Satz 12, S. 420). Es ist also H/C nilpotent, wenn H/C die Kommutatorgruppe von G/C ist. Mit $K = H$ hätte daher G/C alle im Satz geforderten Eigenschaften, was nicht geht. — Es folgt also

(iii) $M \triangleleft_q G$, und M^G ist eine p -Gruppe, p Primzahl.

Sei nun V die Vereinigung aller p' -Untergruppen von G . Da ein p -Quasinormalteiler von jedem p' -Element normalisiert wird (s. [6], Bemerkung 2, S. 169), normalisiert V alle zu M konjugierten Untergruppen von G . Ist also $U = VC$, so gilt:

$$(iv) \quad U \subseteq N_G(M^x) \text{ f\"ur alle } x \in G.$$

Seien nun $M = M_0, M_1, \dots, M_r$ die Konjugierten von M und sei $D_j = \bigcap_{i=0}^{r-j} M_i$ ($0 \leq j \leq r$), sowie $D_{r+j} = \bigcup_{i=0}^j M_i$ ($0 \leq j \leq r$). Dann ist

$$1 = D_0 \subseteq \dots \subseteq D_r = M \subseteq \dots \subseteq D_{2r} = M^G.$$

Da alle M_i von U normalisiert werden, werden auch alle D_j von U normalisiert.

Sei nun $0 \leq j < r$. Dann ist

$$D_j = \bigcap_{i=0}^{r-(j+1)} M_i \cap M_{r-j} = D_{j+1} \cap M_{r-j}.$$

Sei $M_{r-j} = M^x$. Da M von allen p' -Elementen normalisiert wird, können wir x als p -Element annehmen. Da $j < r$ ist, ist (mit $X = \{x\}$) $D_{j+1} \subseteq M \subseteq X \cup M_{r-j}$. Da $M_{r-j} \triangleleft_q G$ ist, folgt

$$[D_{j+1}/D_j] = [D_{j+1}/D_{j+1} \cap M_{r-j}] \cong [D_{j+1} \cup M_{r-j}/M_{r-j}],$$

und dieser Verband ist wegen $D_{j+1} \subseteq X \cap M_{r-j}$ ein Intervall in

$$[X \cup M_{r-j}/M_{r-j}] \cong [X/X \cup M_{r-j}].$$

Dieser letzte Verband ist ein Intervall in $\mathfrak{U}(X)$, also eine Kette. Damit ist $[D_{j+1}/D_j]$ eine Kette. Da D_j und D_{j+1} unter U invariant bleiben, sind auch alle zwischen D_j und D_{j+1} liegenden Untergruppen von G unter U invariant.

Eine ähnliche Betrachtung machen wir für D_{r+j} . Es ist

$$D_{r+j+1} = \bigcup_{i=0}^j M_i \cup M_{j+1} = D_{r+j} \cup M_{j+1}.$$

Wie für M_{r-j} existiert ein $y \in G$ von p -Potenzordnung mit $M_{j+1} = M^y$; sei $Y = \{y\}$. Da $M = D_r \subseteq D_{r+j}$ ist, ist $D_{r+j} \cup Y \supseteq M \cup Y \supseteq M_{j+1}$, also $D_{r+j} \cup M_{j+1} \subseteq D_{r+j} \cup Y$. Da alle $M_i \triangleleft_q G$ sind, ist auch $D_{r+j} \triangleleft_q G$. Damit ist $[D_{r+j+1}/D_{r+j}] = [D_{r+j} \cup M_{j+1}/D_{r+j}]$ ein Intervall in $[D_{r+j} \cup Y/D_{r+j}] \cong [Y/Y \cap D_{r+j}]$, und dieser Verband ist eine Kette. Damit ist auch $[D_{r+j+1}/D_{r+j}]$ eine Kette; da D_{r+j} und D_{r+j+1} unter U invariant sind, sind es also auch alle Zwischengruppen.

Indem wir nun aus der ursprünglichen Kette der D_j die überflüssigen weglassen [die D_j mit $D_j = D_{j+1}$] und für die übrigen $k \in (0, \dots, 2r-1)$ die zwischen D_k und D_{k+1} liegenden Gruppen einfügen, erhalten wir eine Kette von Untergruppen E_j mit

$$1 = E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_n = M^G$$

und $[E_{j+1}:E_j] = p$, sowie $U \subseteq N_G(E_j)$ ($j = 0, \dots, n-1$).

Sei nun $U_j = C_U(E_{j+1}/E_j)$ für $0 \leq j < n$. Da $E_j \triangleleft E_{j+1}$ ist und alle E_i von U normalisiert werden, ist $U_j \triangleleft U$ und U/U_j die von U in E_{j+1}/E_j induzierte

Automorphismengruppe. Da E_{j+1}/E_j zyklisch der Ordnung p ist, ist die volle Automorphismengruppe von E_{j+1}/E_j zyklisch der Ordnung $p - 1$. Damit ist U/U_j zyklisch, $j = 0, \dots, n - 1$. Sei nun $S = \bigcap_{j=0}^{n-1} U_j$. Dann ist $S \triangleleft U$ und U/S abelsch. Ferner zentralisiert S alle E_{j+1}/E_j ; S/C ist also eine Gruppe von Automorphismen von M^σ , die die Kette der E_j stabilisiert (s. [3], S. 779). Da M^σ eine p -Gruppe ist, ist nach [3, Lemma 8.1, S. 795] auch S/C eine p -Gruppe. Damit ist insbesondere S/C ein Hallischer Normalteiler von U/C , also $S \triangleleft G$. Setzen wir nun $S = H$ und $U = K$, so hat, da G/U wegen $U \supseteq V$ ebenfalls eine p -Gruppe ist, G/C sämtliche im Satz geforderten Eigenschaften. Das ist ein endgültiger Widerspruch, womit Satz 5 bewiesen ist.

Eine Verallgemeinerung eines Satzes von Kegel für Quasinormalteiler (s. [7], Satz 3, S. 211) ist das folgende

KOROLLAR. *Ist M modular in G und entweder M oder G perfekt, so ist $M \triangleleft G$.*

Beweis. Sei $M \text{ m} G$. Dann ist M/M_σ nach Satz 2 nilpotent. Ist also M perfekt, so folgt $M = M_\sigma$, also $M \triangleleft G$. Ferner ist $G/C_\sigma(M^\sigma/M_\sigma)$ auflösbar. Ist also G perfekt, so folgt $G = C_\sigma(M^\sigma/M_\sigma)$, d.h. $M \triangleleft G$. Damit ist das Korollar bewiesen.

LITERATUR

1. W. BURNSIDE, *Theory of groups of finite order*, 2. Auflage, Dover, New York, 1911.
2. K. DOERK, *Minimal nicht überauflösbare, endliche Gruppen*, Math. Zeitschrift, Bd. 91 (1966), S.198–205.
3. W. FEIT UND J. G. THOMPSON, *Solvability of groups of odd order*, Pacific J. Math., Bd. 13 (1963), S. 775–1029.
4. M. HALL, *The theory of groups*, Macmillan, New York, 1962.
5. B. HUPPERT, *Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen*, Math. Zeitschrift, Bd. 60 (1954), S.409–34.
6. N. ITO UND J. SZÉP, *Über die Quasinormalteiler von endlichen Gruppen*, Acta Sci. Math. (Szeged), Bd. 23 (1962), S.168–70.
7. O. H. KEGEL, *Sylowgruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen*, Math. Zeitschrift, Bd. 78 (1962), S.205–21.
8. M. SUZUKI, *Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups*, Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1956.
9. H. ZASSENHAUS, *The theory of groups*, 2. Auflage, Vandenhoeck and Ruprecht, Göttingen, 1958.

UNIVERSITÄT FRANKFURT

FRANKFURT AM MAIN, DEUTSCHLAND