SUR LES NOMBRES DE JAMES DES VARIÉTÉS DE STIEFEL COMPLEXES

PAR

FRANÇOIS SIGRIST

I. Introduction et formulation du problème

Nous désignerons par $U_{n,k}$ la variété des $(n \times k)$ matrices unitaires. $U_{n,n}$ est le groupe $U(n)$, $U_{n,n-1}$ s'identifie à $SU(n)$, et $U_{n,1}$ est la sphère S^{2n-1}.

D'après JAMES [5], on peut associer à toute variété $U_{n,k}$ un nombre entier $U(n, k)$ défini comme suit: considérons la projection naturelle

$$U_{n,k} \xrightarrow{p} U_{n,1} = S^{2n-1};$$

cette application est une fibration de fibre $U_{n-1,k-1}$, dont nous pouvons écrire une partie de la suite exacte d'homotopie:

$$\to \pi_{2n-1}(U_{n,k}) \xrightarrow{p*} \pi_{2n-1}(S^{2n-1}) \xrightarrow{\partial} \pi_{2n-2}(U_{n-1,k-1}) \to \cdots$$

Le groupe $\pi_{2n-1}(S^{2n-1})$ est $\mathbf{Z}$, engendré par $[\iota_n]$. Par définition, $U(n, k)$ est l'ordre de $\partial[\iota_n]$ dans $\pi_{2n-2}(U_{n-1,k-1})$.

JAMES a etabli un grand nombre de propriétés du système de nombres $U(n, k)$ dans [5]. L'utilité de ces nombres est évidente: pour qu'il existe une application $S^{2n-1} \to U_{n,k}$ de degré q, il faut et il suffit que q soit un multiple de $U(n, k)$. L'étude des fibrations $U_{n,k} \to S^{2n-1}$ qui admettent une section consiste à déterminer les valeurs de n et k pour lesquelles $U(n, k) = 1$. JAMES [5] démontre qu'il existe un nombre b_k tel que les deux conditions suivantes sont équivalentes:

(i) $U(n, k) = 1$: la fibration $U_{n,k} \to S^{2n-1}$ a une section.
(ii) n est un multiple de b_k.

ATIYAH et TODD [2] ont donné un diviseur M_k de b_k ; ADAMS et WALKER [1] ont ensuite démontré que $M_k = b_k$. En désignant par $\nu_p(m)$ l'exposant du nombre premier p dans la décomposition de m en facteurs premiers, le résultat général se formule ainsi: les quatre conditions suivantes sont équivalentes:

(i) $U(n, k) = 1$; la fibration $U_{n,k} \to S^{2n-1}$ a une section.
(ii) n est un multiple de b_k défini par

$$\begin{aligned} \nu_p(b_k) &= \sup_r [r + \nu_p(r)], \qquad 1 \le r \le [(k-1)/(p-1)], \quad p \le k \\ &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad p > k. \end{aligned}$$

(iii) Les k premiers coefficients de la série de MacLaurin de $t^{-n}[\log(1+t)]^n$ sont entiers.

Received June 29, 1967.

(iv) Pour tout r tel que $1 \leq r \leq k$, le coefficient de x^{n-1} dans la série de MacLaurin de $(e^x - 1)^{n-r}$ est entier.

Nous nous proposons d'utiliser ce résultat pour obtenir de meilleures informations sur le système de nombres $U(n, k)$. Le problème suivant, abordé dans [5], se formule ainsi: donner les conditions nécessaires et suffisantes pour que $U(n, k)$ soit premier à p, p premier donné. Nous donnons ici le résultat, ainsi que les conditions nécessaires et suffisantes pour que $U(n, k)$ soit une puissance de p. Le résultat confirme la réponse partielle donnée par JAMES dans [5, théorème 7.2].

II. Théorèmes p-primaires

Nous nous proposons de démontrer les deux théorèmes suivants:

THÉORÈME I. *Les deux conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *$U(n, k)$ est premier à p.*
(ii) *n est un multiple de $\alpha_p(b_k) = p^{\nu_p(b_k)}$ supérieur ou égal à k.*

THÉORÈME II. *Les deux conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *$U(n, k)$ est une puissance de p.*
(ii) *n est un multiple de $b_k/\alpha_p(b_k)$ supérieur ou égal à k.*

Remarques. L'ensemble des nombres n tels que $U(n, k)$ est premier à p n'est donc pas nécessairement formé des multiples du plus petit nombre jouissant de cette propriété, comme c'est le cas dans le théorème des sections. Il est en effet possible que $\alpha_p(b_k)$ soit inférieur à k.

Le théorème II est une conséquence immédiate du théorème I, nous démontrerons donc le théorème I.

Démonstration du théorème I. L'implication (i) $\rightarrow$ (ii) découle du théorème d'ATIYAH et TODD [2]. Il est aisé de vérifier que la condition nécessaire pour que $U(n, k)$ soit premier à p est que les k premiers coefficients de la série de MacLaurin de $t^{-n}[\log(1 + t)]^n$ appartiennent à Q'_p, anneau des nombres rationnels dont le dénominateur est premier à p. Or, pour que les k premiers coefficients appartiennent à $\mathbf{Z}$, il faut et il suffit que n soit divisible par b_k ; pour que les k premiers coefficients appartiennent à Q'_p, il faut donc, et il suffit, que n soit divisible par $\alpha_p(b_k)$.

La réciproque (ii) $\rightarrow$ (i) se démontre à l'aide des propriétes suivantes, dues à JAMES [5]:

(I) $U(m, k) \cdot U(n, k)$ est un multiple de $U(m + n, k)$ (loi d'addition).
(II) Si $U(n, k)$ est premier à p, et $m(p - 1) > p(k - 1)$, alors la puissance de p dans $U(m + n, k)$ est égale à la puissance de p dans $U(m, k)$ (loi de soustraction).
(III) $U(p^N, k)$ est premier à p pour N assez grand.

Puisque $U(p^N, k)$ est premier à p, et que $U(b_k, k) = 1$, les lois d'addition et de soustraction montrent que $U(n, k)$ est premier à p si n est un multiple de $\alpha_p(b_k)$ (plus grand commun diviseur de p^N et b_k) tel que $n(p - 1) > p(k - 1)$. Remarquons que le théorème I est démontré pour $k = 2$. En effet $U(n, 2) = 1$ pour n pair, et $U(n, 2) = 2$ pour n impair (théorème d'ECKMANN [4]). Pour les valeurs de k supérieures à 2, la démonstration du théorème I sera achevée si nous démontrons les propriétés suivantes:

(a)	$p = 2$	$\alpha_2(b_k) > 2(k - 1)$
(b)	$2 < p \leq (k + 1)/2$	$\alpha_p(b_k)(p - 1) > p(k - 1)$
(c)	$(k + 1)/2 < p < k$	$\alpha_p(b_k) < k, \quad 2\alpha_p(b_k)(p - 1) > p(k - 1)$
(d)	$p = k$	$U(\alpha_p(b_k), k)$ est premier à p.

Rappelons que $\alpha_p(b_k) = p^{\sup_r [r + \nu_p(r)]}, \quad 1 \leq r \leq [(k - 1)/(p - 1)]$.

Démonstration de (a).

$$k = 3 \qquad \alpha_2(b_3) = 8 \text{ et } 8 > 4$$

$$k > 3 \qquad \alpha_2(b_k) \geq 2^{k-1} > 2(k - 1).$$

Démonstration de (b).

$$2 < p \leq (k + 1)/2 \quad \text{entraîne} \quad [(k - p)/(p - 1)](p - 2) \geq 1.$$

Alors

$$1 + [(k - p)/(p - 1)](p - 1) \geq 2 + [(k - p)/(p - 1)]$$
$$= 1 + [(k - 1)/(p - 1)].$$

Nous savons que

$$\alpha_p(b_k) \geq p^{[(k-1)/(p-1)]} = p \cdot p^{[(k-p)/(p-1)]}$$

L'inégalité de Bernoulli

$$p^{[(k-p)/(p-1)]} \geq 1 + [(k - p)/(p - 1)](p - 1)$$

permet alors d'écrire

$$\alpha_p(b_k) \geq p(1 + [(k - p)/(p - 1)](p - 1))$$
$$\geq p(1 + [(k - 1)/(p - 1)] > p \cdot (k - 1)/(p - 1) \quad \text{Cqfd.}$$

Démonstration de (c). $(k + 1)/2 < p < k$ entraîne $[(k - 1)/(p - 1)] = 1$ donc $\alpha_p(b_k) = p < k$,

$$2\alpha_p(b_k)(p - 1) = 2p(p - 1) > (k + 1)(p - 1)$$
$$= p(k - 1) + 2(p - (k + 1)/2) > p(k - 1) \quad \text{Cqfd.}$$

Démonstration de (d).

$$k = p \qquad \alpha_p(b_k) = p = k.$$

Le calcul de $U(k, k)$ s'effectue à l'aide de la définition: ordre de $\partial[\iota_n]$ dans

$\pi_{2k-2}(U_{k-1,k-1}) = \pi_{2k-2}(U(k-1))$. Ce groupe est cyclique d'ordre $(k-1)!$ d'après BOTT [3]. De même $\pi_{2k-2}(U_{k,k}) = 0$ [3]. La suite exacte

$$\pi_{2k-1}(U(k)) \xrightarrow{p_*} \pi_{2k-1}(S^{2k-1}) \xrightarrow{\partial} \pi_{2k-2}(U(k-1)) \to \pi_{2k-2}(U(k))$$

devient alors

$$\mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}_{(k-1)!} \longrightarrow 0$$

donc $U(k, k) = (k-1)!$

Dans notre cas $(k-1)! = (p-1)!$ est premier à p, Cqfd.

Le démonstration du théorème I est donc achevée. Le théorème II s'en déduit immédiatement.

Références

1. J. F. ADAMS AND G. WALKER, *On complex Stiefel manifolds*, Proc. Cambridge Phil. Soc., vol. 61 (1965), pp. 81–103.
2. M. F. ATIYAH AND J. A. TODD, *On complex Stiefel manifolds*, Proc. Cambridge Phil. Soc., vol. 56 (1960), pp. 342–353.
3. R. BOTT, *A report on the unitary group*, Proc. of Symposia in Pure Mathematics, vol. III (Differential Geometry), Amer. Math. Soc., (1961), pp. 1–6.
4. B. ECKMANN, *Systeme von Richtungsfeldern in Sphären und stetige Lösungen komplexer linearer Gleichungen*, Comment. Math. Helv., vol. 15 (1942–43), pp. 1–26.
5. I. M. JAMES, *Cross-sections of Stiefel manifolds*, Proc. London Math. Soc. (3), vol. 8 (1958), pp. 536–547.

ETH FORSCHUNGSINSTITUT FÜR MATHEMATIK,
ZÜRICH, SWITZERLAND
UNIVERSITY OF BRITISH COLUMBIA
VANCOUVER, CANADA