

ESPACES DE HILBERT POUR LESQUELS L'APPROXIMATION SPECTRALE EST IMPOSSIBLE EN GENERAL

PAR
E. J. AKUTOWICZ

1. Introduction

Chaque suite fixée $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=0,1,\dots}$ de nombres non négatifs définit un espace de Hilbert \mathcal{H}_Λ consistant en les suites numériques complexes $a = \{a_n\}_{n=0,\pm 1,\dots}$ avec le produit scalaire,

$$(a, b)_\Lambda = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n a_n \bar{b}_n \quad (\lambda_{-n} = \lambda_n).$$

On considère chaque suite a de \mathcal{H}_Λ comme la suite des coefficients de Fourier d'un objet dual α , voire une distribution, sur le tore \mathbf{T} à une dimension, et l'on transpose la structure d'espace de Hilbert à ces distributions:

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta)_\Lambda &= (a, b)_\Lambda & (a = \mathcal{F}\alpha, b = \mathcal{F}\beta), \\ \|\alpha\|_\Lambda &= \sqrt{(a, a)_\Lambda}. \end{aligned}$$

On désignera ce dernier espace de Hilbert de distributions α par \mathcal{G}_Λ .

La question de l'approximation spectrale (ou de synthèse spectrale) est alors de savoir si, pour tout ensemble fermé E de \mathbf{T} , toute distribution α de l'espace \mathcal{G}_Λ portée par E soit adhérente dans la norme de \mathcal{G}_Λ à l'ensemble des mesures de \mathcal{G}_Λ portées par E .

La réponse est affirmative si la suite $\{\lambda_n\}$ strictement positive est un quotient de la forme $\lambda_n = \alpha_n/\beta_n$ où $\{\alpha_n\}$ et $\{\beta_n\}$ sont deux suites définies négatives paires telles que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \alpha_n > 0 \quad \text{et} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \beta_n > 0.$$

Une démonstration complète de ce résultat se trouve dans [5]. Elle dépend de la théorie du potentiel.

En particulier, si

$$\lambda_n = (1 + n^2)^\alpha, \quad -1 \leq \alpha \leq 1,$$

la synthèse spectrale est valable dans l'espace \mathcal{G}_Λ .

Nous verrons dans les lignes qui suivent que les faits sont entièrement différents si l'on abandonne l'hypothèse selon laquelle λ_n est strictement positive. Nous nous restreindrons au cas où

$$\sum_k \lambda_k < \infty.$$

Nous ferons usage d'une méthode statistique, inventée et exploitée par Kahane et Salem [4], [7]. L'idée est de rendre aléatoire la distribution de Malliavin, qui a été étudiée pour la première fois dans [9], [10].

Received March 1, 1968.

2. Des processus Gaussiens

Une suite $\{B_k\}_{k=0,1,\dots}$ de nombres réels, non négatifs servira à déterminer un processus Gaussien X , réel et stationnaire, sur le cercle \mathbf{T} , tel que

$$EX(t) = 0 \quad t \in \mathbf{T}$$

$$E(X(t_1)X(t_2)) = B(t_1 - t_2), \quad t_1 \text{ et } t_2 \in \mathbf{T}$$

où

$$B(t) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \cos kt.$$

Nous allons imposer deux conditions sur le processus X , c'est-à-dire sur la suite $\{B_k\}$:

$$(1) \quad \text{Prob} \left\{ \sum_n \lambda_n |X_n|^2 < \infty \right\} = 1,$$

où X_n désigne le $n^{\text{ième}}$ coefficient de Fourier de X . Autrement dit, la suite $\{X_n\}$ appartient à l'espace \mathcal{H}_Λ avec probabilité 1.

$$(2) \quad \text{Prob} \left\{ \sum_n \lambda_n |X_n| < \infty \right\} = 1.$$

Si $\Lambda(t) = \sum_n \lambda_n \cos nt$, ceci signifie que la convolution $\Lambda * X$ appartient avec probabilité 1 à la classe A des séries de Fourier absolument convergentes.

Si $\lambda_n \sqrt{B_n} = o(1)$, $n \rightarrow \infty$, alors la condition (1) est équivalente à

$$(3) \quad \sum_n \lambda_n B_n < \infty$$

et la condition (2) est équivalente à

$$(4) \quad \sum_n \lambda_n \sqrt{B_n} < \infty.$$

Car si (4) est vérifiée, on a

$$E(\sum_n \lambda_n |X_n|) = \sum_n \lambda_n E|X_n| \leq \sum_n \lambda_n \sqrt{E|X_n|^2} = \sum_n \lambda_n \sqrt{B_n} < \infty;$$

donc (2) est vérifiée, Réciproquement, si la série

$$\sum_n \lambda_n |X_n|$$

converge avec probabilité 1, le théorème des trois séries de Kolmogoroff [8, dernière phrase] s'applique puisque les variables aléatoires $\lambda_1 |X_1|$, $\lambda_2 |X_2|$, \dots sont mutuellement indépendantes. Il existe donc, en particulier, une constante $c > 0$ telle que la série tronquée

$$\sum_n E(\lambda_n |X_n|)^c \quad (X^c = X \text{ si } |X| \leq c, X^c = 0 \text{ si } |X| > c)$$

converge. Mais

$$\begin{aligned} E(\lambda_n |X_n|)^c &= \frac{1}{\sqrt{2\pi B_n}} \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda_n |x|)^c e^{-x^2/2B_n} dx \\ &= \frac{\lambda_n}{\sqrt{2\pi B_n}} \int_{-c/\lambda_n}^{c/\lambda_n} |x|^c e^{-x^2/2B_n} dx \\ &= \frac{2\lambda_n \sqrt{B_n}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{c/\lambda_n \sqrt{B_n}} x e^{-x^2/2} dx, \end{aligned}$$

d'où la convergence (4) puisque $\lambda_n \sqrt{B_n}$ tend vers 0. L'équivalence de (2) et (3) se vérifie de la même manière.

3. L'impossibilité de l'approximation spectrale

Nous nous proposons de démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME. Soient $\{B_k\}_{k=0,1,\dots}$ et $\{\lambda_k\}_{k=0,1,\dots}$ deux suites non négatives telles que les séries (3) et (4) convergent. Si la fonction

$$C(t) = \sum_k \lambda_k^2 B_k \cos kt,$$

admet la minoration,

$$(5) \quad C(0) - C(t) \geq M |t|^\delta,$$

avec deux constantes $M > 0$ et $0 < \delta < \frac{1}{2}$, alors l'approximation spectrale est en général impossible dans \mathcal{G}_Δ .

Démonstration. La condition (3) implique que la fonction aléatoire réelle

$$(6) \quad f(t) \equiv \Lambda * X(t) = \sum_n \lambda_n X_n e^{i n t}$$

appartient, avec probabilité 1, à la classe A des séries de Fourier absolument convergentes.

On va maintenant étudier l'intégrale de Malliavin

$$(7) \quad \int_{-\infty}^{\infty} i u \exp(i u f(t)) du$$

et montrer que cette intégrale définit presque sûrement une distribution de la classe \mathcal{G}_Δ , qu'on notera $\delta'(f(t))$.

Dans ce but, considérons le développement de Fourier

$$\exp(i u f(t)) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} p_n(u) \exp(int),$$

où

$$p_n(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(i(u f(t) - nt)) dt.$$

Puisque la loi de répartition de la variable aléatoire $f(t)$, et donc de $f(t_1) - f(t_2)$, est Gaussienne, on obtient en faisant usage du théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} E \sum_n \lambda_n |p_n(u)|^2 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt_1 dt_2 \sum_n \lambda_n \exp(in(t_1 - t_2)) E \exp(iu(f(t_1) - f(t_2))) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt_1 dt_2 \Lambda(t_1 - t_2) \exp\left(-\frac{1}{2} u^2 E[f(t_1) - f(t_2)]^2\right). \end{aligned}$$

Vu la définition (6) de $f(t)$, on a

$$\begin{aligned} E(f(t_1) - f(t_2))^2 &= E(\sum_n \lambda_n X_n(e^{i n t_1} - e^{i n t_2}))^2 \\ &= \sum_n \lambda_n^2 |e^{i n t_1} - e^{i n t_2}|^2 E X_n^2 \\ &= 4 \sum_n \lambda_n^2 B_n \sin^2 \frac{1}{2} n(t_1 - t_2) = 2(C(0) - C(t_1 - t_2)). \end{aligned}$$

On a donc, d'après la condition (5),

$$E(f(t_1) - f(t_2))^2 \geq M |t_1 - t_2|^\delta, \quad M > 0, 0 < \delta < \frac{1}{2}.$$

Ceci implique les majorations suivantes:

$$\begin{aligned} E \sum_n \lambda_n |p_n(u)|^2 &\leq \frac{1}{2\pi} \int \int dt_1 dt_2 \Lambda(t_1 - t_2) \exp\left(-\frac{1}{2} M u^2 |t_2 - t_1|^\delta\right) \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \sup_{t_1 t_2} \Lambda(t_1 - t_2) \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(-\frac{1}{2} M u^2 |t|^\delta\right) dt \\ &\leq \begin{cases} C^{t_0} & \text{si } |u| \leq 1, \\ C^{t_0} \cdot |u|^{-2/\delta} & \text{si } |u| \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} E \sqrt{\sum_n \lambda_n \left| \int u p_n(u) du \right|^2} &\leq E \int_{-\infty}^{\infty} |u| \sqrt{\sum_n \lambda_n |p_n(u)|^2} du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |u| E \sqrt{\sum_n \lambda_n |p_n(u)|^2} du \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |u| \sqrt{E \sum_n \lambda_n |p_n(u)|^2} du \\ &\leq C^{t_0} + C^{t_0} \int_1^{\infty} |u|^{1-1/\delta} du \\ &< +\infty. \end{aligned}$$

Ceci montre que $\delta'(f) \in \mathcal{G}_\Lambda$ avec probabilité 1.

4. Conclusion de la démonstration

Comme élément de \mathcal{G}_Λ , $\delta'(f)$ est une distribution de la classe \mathfrak{D}' de Schwartz (Cf. [12, Chap. I, pp. 31-32; Chap. VII, §1]). Une telle distribution est déterminée par ses valeurs sur les fonctions indéfiniment dérivables sur le cercle \mathbf{T} .

En particulier, le support de $\delta'(f)$ est déterminé par les valeurs de $\delta'(f)$ prises sur \mathfrak{D} .

LEMME 2. *Le support de $\delta'(f)$ est situé dans l'ensemble des zéros de $f = \Lambda * X$.*

DÉMONSTRATION (Kahane [4], [7]). Soit $g \in \mathfrak{D}$ et ayant son support disjoint de l'ensemble des zéros de f . Alors la fonction

$$g/(\Lambda * X)^2$$

est localement dans A , donc dans A (voir [11, p. 133–134]). On a donc

$$g = h \cdot (\Lambda * X)^2 \quad \text{avec } h \in A.$$

Il en résulte, moyennant deux intégrations par parties,

$$(8) \quad \begin{aligned} \langle \delta'(f), g \rangle &= \langle \delta'(f), h \cdot f^2 \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} iu \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(t) f(t)^2 \exp(iuf(t)) dt \right\} du = 0. \end{aligned}$$

La fonction g étant arbitraire, la conclusion du Lemme 2 en résulte.

LEMMA 3. On a

$$(X, \delta'(\Lambda * X))_{\Lambda} = \langle \Lambda * X, \delta'(\Lambda * X) \rangle \neq 0$$

avec probabilité positive.

Démonstration. En posant $h \equiv 1$ et $g = \Lambda * X$ dans (8), il vient

$$\langle \Lambda * X, \delta'(\Lambda * X) \rangle = - \int_{-\infty}^{\infty} p_0(u) du.$$

L'espérance mathématique de ceci est

$$\begin{aligned} E \int_{-\infty}^{\infty} p_0(u) du &= \int_{-\infty}^{\infty} E \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(iu\Lambda * X(t)) dt \right) du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(-\frac{1}{2} u^2 E[\Lambda * X(t)]^2\right) dt \\ &> 0, \end{aligned}$$

ce qui entraîne la conclusion du Lemme 3.

Maintenant, soit δ_t la mesure de Dirac en $t \in E =$ ensemble des zéros de $\Lambda * X$. Alors, d'après le Lemme 2, l'ensemble E est non vide dès que $\delta'(\Lambda * X)$ est non nulle, ce qui est vérifié pour un ensemble V de trajectoires X de probabilité positive, d'après le Lemme 3. C'est-à-dire, on a d'une part,

$$(9) \quad (X, \delta_t)_{\Lambda} = \langle \Lambda * X, \delta_t \rangle = \Lambda * X(t) = 0, \quad X \in V, t \in E,$$

et d'autre part,

$$(10) \quad (X, \delta'(f))_{\Lambda} \neq 0, \quad X \in V.$$

Les relations (9) impliquent, pour chaque $X \in V$, que

$$(X, \mu)_{\Lambda} = \int_E \Lambda * X(t) d\mu(t) = 0$$

pour chaque mesure $\mu \in \mathcal{G}_\Lambda$ portée par l'ensemble E . La relation (10) montre que le sous-espace des mesures de \mathcal{G}_Λ portées par E n'est pas dense dans l'espace des distributions de \mathcal{G}_Λ portées par E . Autrement dit, l'approximation spectrale est impossible en général dans l'espace hilbertien \mathcal{G}_Λ . La démonstration du théorème est ainsi achevée.

5. Un cas particulier

Considérons un poids $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=0,1,\dots}$ lacunaire, c'est-à-dire $\lambda_k = 0$ sauf pour les indices ayant la forme $k = p^n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), p entier ≥ 2 . Fixons β , $0 < \beta < \frac{1}{2}$, et posons

$$B_k = \lambda_k^{-2} k^{-\beta} \quad \text{si } k = p^n, n = 0, 1, \dots,$$

$$B_k = 0 \quad \text{ailleurs.}$$

Rappelons que la fonction classique de Weierstrass,

$$w(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{-n\beta} \cos p^n t,$$

appartient à la classe $\text{Lip } \beta$, mais $w \notin \text{Lip } \delta$ pour $\delta > \beta$ (Cf. Zygmund [13, pp. 46–47]). Ceci implique pour tout $t \in \mathbb{T}$,

$$w(0) - w(t) \geq M |t|^\delta \quad (\beta < \delta < \frac{1}{2}),$$

pour une constante $M > 0$, car $w(t)$ est "le moins continu" pour $t = 0$. D'autre part, les séries (3) et (4) convergeront si

$$\lambda_{p^n} = (1 + p^{2n})^\alpha, \quad 0 > \alpha > -\frac{1}{4}.$$

Donc l'approximation spectrale est en général impossible dans ces cas. Cf. l'Introduction.

BIBLIOGRAPHIE

1. A. BEURLING, *Sur les spectres des fonctions*, Colloque International sur l'analyse harmonique, Nancy, 1947, Publ. C.N.R.S., Paris 1949, p. 9–29.
2. A. BEURLING AND J. DENY, *Dirichlet spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci., vol. 45 (1959), p. 208–215.
3. I. M. GELFAND AND N. J. WILENKIN, *Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen)*, IV, *Einige Anwendungen der harmonischen Analyse*, Gelfandsche Raumtripel, Hochschulbücher für Mathematik, Band 50, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1964.
4. J.-P. KAHANE, *Sur la synthèse harmonique dans \mathcal{L}^∞* Anais da Académia Brasileira Ciências, vol. 32 (1960), p. 179–189.
5. ———, *Quotients des fonctions définies négatives* (d'après Beurling & Deny), Séminaire N. Bourbaki, Nov. 1966.
6. J.-P. KAHANE AND P. MALLIAVIN, *Appendice au livre de Gelfand, Raikov et Šilov*, Les anneaux normés commutatifs, Gauthier-Villars, Paris, 1964, pp. 235–256.
7. J.-P. KAHANE AND R. SALEM, *Ensembles parfaits et séries trigonométriques*, Chapitre IX, Actualités Sci. Ind., 1301, Paris, 1963.
8. A. KOLMOGOROFF, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Erg. Mat., Springer, Berlin, 1933.

9. P. MALLIAVIN, *Sur l'impossibilité de la synthèse spectrale sur la droite*, C. R. Acad. Sci. Paris, T. 248 (1959), pp. 2155–2157.
10. ———, *Impossibilité de la synthèse spectrale sur les groupes abéliens non compacts*, Publ. Math. I.H.E.S., No 2 (1959), pp. 61–68.
11. W. RUDIN, *Fourier analysis on groups*, Interscience, New York, 1962.
12. L. SCHWARTZ, *Théorie des Distributions*, Hermann, Paris, 1966.
13. A. ZYGMUND, *Trigonometric series*, vol. I, Cambridge University Press, Cambridge, 1959.

UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER
MONTPELLIER, FRANCE